Métricas invariantes bajo acciones propias de grupos localmente compactos

SERGEY ANTONYAN

Universidad Nacional Autónoma de México

VII Encuentro Cuba Mexico en Métodos Numéricos y Optimización

12-16 de marzo, 2018
La Habana, Cuba

Definiciones Básicas

G – es un grupo topológico localmente compacto.
Una acción de G en un espacio X es un homomorfismo

$$\sim : G \to Homeo(X)$$

tal que la función evaluación correspondiente

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \to \tilde{g}(x)$$

es continua.

$$(G, X, \sim) \quad - \quad \text{a G-space.}$$

Escribiremos $gx := \tilde{g}(x)$.

$$f : X \to Y, \qquad f(gx) = gf(x), \quad x \in X, \ g \in G.$$

se llama equivariante o G-función.

$$G\text{-}TOP \qquad - \qquad \text{es una categoría.}$$

En 1961 R. Palais introdujo la noción de acción propia de G en un espacio topológico X.

Definición

Un subconjunto $S \subset X$ de un G-espacio X, se llama **pequeño**, *si cualquier punto $x \in X$ admite una vecindad $V \ni x$ tal que el conjunto*

$$\langle S, V \rangle = \{g \in G \mid gS \cap V \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

Definición

Un G-space X se llama **propio** *(en el sentido de R. Palais), si cada punto $x \in X$ admite una vecindad pequeña $S \ni x$.*

- Si G es discreto y X es localmente compacto, esta noción es justamente la noción clasica de acción *propiamente discontinua*.
- Si G es compacto, entonces todo G-espacio es propio.
- Si $G = \mathbb{R}$ los G-espacios propios son los *sistemas dinámicos dispersivos* con espacio orbital regular.

Definición

Un G-space X se llama **propio** *(en el sentido de R. Palais), si cada punto $x \in X$ admite una vecindad pequeña $S \ni x$.*

- Si G es discreto y X es localmente compacto, esta noción es justamente la noción clasica de acción *propiamente discontinua*.
- Si G es compacto, entonces todo G-espacio es propio.
- Si $G = \mathbb{R}$ los G-espacios propios son los *sistemas dinámicos dispersivos* con espacio orbital regular.

Definición

Un G-space X se llama **propio** *(en el sentido de R. Palais), si cada punto $x \in X$ admite una vecindad pequeña $S \ni x$.*

- Si G es discreto y X es localmente compacto, esta noción es justamente la noción clasica de acción *propiamente discontinua*.
- Si G es compacto, entonces todo G-espacio es propio.
- Si $G = \mathbb{R}$ los G-espacios propios son los *sistemas dinámicos dispersivos* con espacio orbital regular.

Definición

Un G-space X se llama **propio** *(en el sentido de R. Palais), si cada punto $x \in X$ admite una vecindad pequeña $S \ni x$.*

- Si G es discreto y X es localmente compacto, esta noción es justamente la noción clasica de acción *propiamente discontinua*.
- Si G es compacto, entonces todo G-espacio es propio.
- Si $G = \mathbb{R}$ los G-espacios propios son los *sistemas dinámicos dispersivos* con espacio orbital regular.

En un G-espacio propio, todas las órbitas son **cerradas** y todos los estabilizadores G_x son **compactos**. La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es abierta pero no siempre es **cerrada** en general.
Recordemos que si X es un G-espacio y $x \in X$, entonces

$$G(x) = \{gx|\ g \in G\} \quad - \quad \text{es la órbita de} \quad x.$$

$$G_x = \{g \in G|\ gx = x\} \quad - \quad \text{es el estabilizador de} \quad x.$$

$$X/G = \{G(x)|\ x \in X\} \quad - \quad \text{el espacio orbital de} \quad X.$$

$$\pi : X \to X/G \quad - \quad \pi(x) = G(x) \quad \text{la proyección orbital.}$$

Algunos ejemplos

- $X = G/H$, donde G es localmente compacto y $H < G$ es compacto.
- $X = C_0(G) = \{0 \neq f : G \to [0, \infty) |\ f$ se desvanece en el $\infty\}$.

$$(g * f)(x) = f(xg), \quad g, x \in G,\ f \in C_0(G).$$

- Sea (X, d) un espacio métrico conexo localmente compacto, $G = Iso(X)$ con la topología compacto-abierta. Entonces G es un grupo localmente compacto (un grupo de Lie siempre que X es una variedad de Riemannian) y G actúa propiamente en X por la función evaluación:

$$G \times X \to X, \quad g * x = g(x).$$

Algunos ejemplos

- $X = G/H$, donde G es localmente compacto y $H < G$ es compacto.
- $X = C_0(G) = \{0 \neq f : G \to [0, \infty) |\ f$ se desvanece en el $\infty\}$.

$$(g * f)(x) = f(xg), \quad g, x \in G,\ f \in C_0(G).$$

- Sea (X, d) un espacio métrico conexo localmente compacto, $G = Iso(X)$ con la topología compacto-abierta. Entonces G es un grupo localmente compacto (un grupo de Lie siempre que X es una variedad de Riemannian) y G actúa propiamente en X por la función evaluación:

$$G \times X \to X, \quad g * x = g(x).$$

Algunos ejemplos

- $X = G/H$, donde G es localmente compacto y $H < G$ es compacto.
- $X = C_0(G) = \{0 \neq f : G \to [0, \infty) | \; f$ se desvanece en el $\infty\}$.

$$(g * f)(x) = f(xg), \quad g, x \in G, \; f \in C_0(G).$$

- Sea (X, d) un espacio métrico conexo localmente compacto, $G = Iso(X)$ con la topología compacto-abierta. Entonces G es un grupo localmente compacto (un grupo de Lie siempre que X es una variedad de Riemannian) y G actúa propiamente en X por la función evaluación:

$$G \times X \to X, \quad g * x = g(x).$$

- Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$,

$$X = \mathcal{N}(n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \text{ todas las normas } \}.$$

$$(g * \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x).$$

Entonces X es un G-espacio propio y el espacio orbital X/G es el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.

- Si X es un G-espacio propio y Y es cualquier G-espacio entonces $X \times Y$ es un G-espacio.

- Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$,

$$X = \mathcal{N}(n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \text{ todas las normas } \}.$$

$$(g * \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x).$$

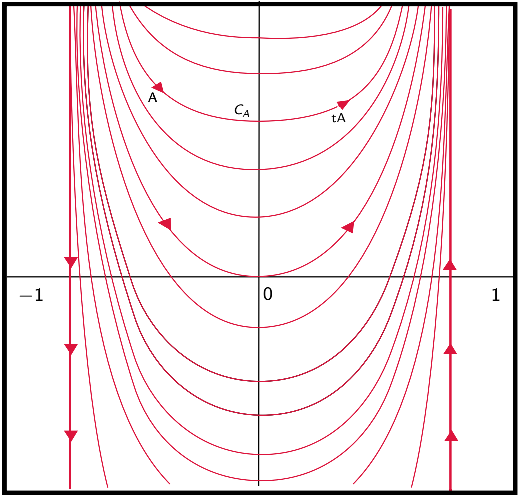
  Entonces X es un G-espacio propio y el espacio orbital X/G es el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$.

- Si X es un G-espacio propio y Y es cualquier G-espacio entonces $X \times Y$ es un G-espacio.

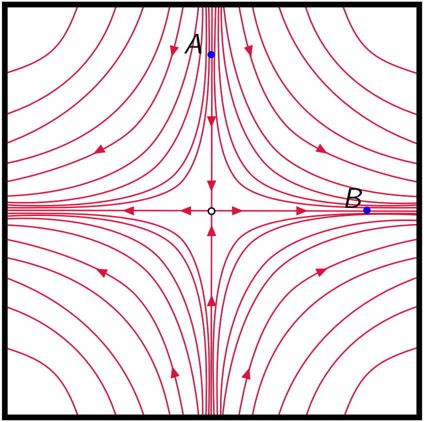
- Sea $G = \mathbb{R}$, $X = \{(x, y) | -1 \le x \le 1\}$.

  Definimos un sistema dinámico X como sigue. Si $A = (x_0, y_0)$ con $|x_0| < 1$ sea C_A la translación vertical de la gráfica de $y = x^2/(1 - x^2)$ que contiene al punto A. Definimos tA al punto $tA \in C_A$ tal que la longitud del arco $\widehat{A, tA}$ es $|t|$ y tA mueve "contra-reloj" a lo largo de C_A.
  Además definimos $t(1, y) = (1, y + t)$ y $t(-1, y) = (-1, y - t)$.
  Entonces X **no es** un G-espacio propio, ya que ninguno de los puntos

  en las líneas fronterizas $x = 1$ y $x = -1$ posee vecindades pequeñas.



$$y = x^2/(1-x^2)$$



$$G=\mathbb{R},\quad X=\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\qquad t*(a,b)=(e^t a, e^{-t} b)$$

$$(x,y)'=(x,-y)$$

El problema de la métrica invariante

Conjetura (R. Palais, 1961)

Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio metrizable. Entonces la topología de X es metrizable por una métrica G-invariante.

Gracias a Palais [24], se sabe que esta conjetura es verdad para G-espacios propios metrizables separables, cuando el grupo G es de Lie.

Theorem (R. Palais, 1960)

Sea G un grupo de Lie y X un G-espacio propio separable y metrizable. Entonces X admite una métrica G-invariante y el espacio de orbitas X/G es separable y metrizable.

Theorem (S. Antonyan y S. de Neymet, 2003)

Sea G o casi conexo o separable. Si X es un G-espacio propio metrizable y localmente separable, entonces X admite una métrica G-invariante y el espacio de orbitas X/G es separable y metrizable.

Teorema (S. Antonyan y S. de Neymet, 2003)

Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio metrizable. son equivalentes:

- *Existe una métrica G-invariante en X.*
- *El espacio orbital X/G es metrizable.*
- *El espacio orbital X/G es paracompacto.*

Theorem (S. Antonyan y S. de Neymet, 2003)

Sea G o casi conexo o separable. Si X es un G-espacio propio metrizable y localmente separable, entonces X admite una métrica G-invariante y el espacio de orbitas X/G es separable y metrizable.

Teorema (S. Antonyan y S. de Neymet, 2003)

Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio metrizable. son equivalentes:

- *Existe una métrica G-invariante en X.*
- *El espacio orbital X/G es metrizable.*
- *El espacio orbital X/G es paracompacto.*

El problema de la paracompacidad del espacio orbital

Muchos de los problemas importantes en la teoría de acciones propias son conjugados (ver [19], [1], [2], [8], [7]) al siguiente problema abierto:

Conjetura (O. Hajek, H. Abels (1971))

Sea G un grupo localmente compacto. Entonces el espacio orbital X/G de cualquier G-espacio paracompacto X es paracompacto.

Esta conjetura permanece abierta aún cuando X es metrizable; en este caso ni siquiera se sabe si el espacio de orbitas X/G es normal.

Pregunta

Que tal si X es un grupo topolgico y G es su subgrupo?

El problema de la paracompacidad del espacio orbital

Muchos de los problemas importantes en la teoría de acciones propias son conjugados (ver [19], [1], [2], [8], [7]) al siguiente problema abierto:

Conjetura (O. Hajek, H. Abels (1971))

Sea G un grupo localmente compacto. Entonces el espacio orbital X/G de cualquier G-espacio paracompacto X es paracompacto.

Esta conjetura permanece abierta aún cuando X es metrizable; en este caso ni siquiera se sabe si el espacio de orbitas X/G es normal.

Pregunta

Que tal si X es un grupo topolgico y G es su subgrupo?

- Sea X un grupo topológico de Hausdorff y $G \subset X$ un subgrupo compacto. Entonces la proyección cociente

$$p : X \to X/G, \quad p(x) = xG := \{xg \mid g \in G\}$$

es continua, abierta y perfecta.

- Sea X un grupo topológico paracompacto (resp., normal) y G un subgrupo compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto (resp., normal).
- **A. V. Arhangel'skii [9]**: todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional.
  Por lo tanto, la compacidad de G es esencial aquí.

- Sea X un grupo topológico de Hausdorff y $G \subset X$ un subgrupo compacto. Entonces la proyección cociente

$$p : X \to X/G, \quad p(x) = xG := \{xg \mid g \in G\}$$

  es continua, abierta y perfecta.
- Sea X un grupo topológico paracompacto (resp., normal) y G un subgrupo compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto (resp., normal).
- **A. V. Arhangel'skii [9]**: todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional.
  Por lo tanto, la compacidad de G es esencial aquí.

- Sea X un grupo topológico de Hausdorff y $G \subset X$ un subgrupo compacto. Entonces la proyección cociente

$$p : X \to X/G, \quad p(x) = xG := \{xg \mid g \in G\}$$

es continua, abierta y perfecta.
- Sea X un grupo topológico paracompacto (resp., normal) y G un subgrupo compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto (resp., normal).
- **A. V. Arhangel'skii [9]**: todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional.

Por lo tanto, la compacidad de G es esencial aquí.

- Sea X un grupo topológico de Hausdorff y $G \subset X$ un subgrupo compacto. Entonces la proyección cociente

$$p : X \to X/G, \quad p(x) = xG := \{xg \mid g \in G\}$$

es continua, abierta y perfecta.

- Sea X un grupo topológico paracompacto (resp., normal) y G un subgrupo compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto (resp., normal).
- **A. V. Arhangel'skii [9]**: todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional.
Por lo tanto, la compacidad de G es esencial aquí.

- Que tal si $G \subset X$ es localmente compacto?
- Se transfieren la paracompacidad y la normalidad de X a X/G cuando G es un subgrupo **localmente compacto** (no compacto) de X?

- Que tal si $G \subset X$ es localmente compacto?

- Se transfieren la paracompacidad y la normalidad de X a X/G cuando G es un subgrupo **localmente compacto** (no compacto) de X?

Aplicaciones principales

En cualquier grupo G se pueden definir dos acciones (equivalentes) naturales de G dadas por las fórmulas

$$g \cdot x = gx, \qquad \text{and} \quad g * x = xg^{-1},$$

respectivamente, donde en las partes derechas de las fórmulas se utiliza la operación del grupo, con $g, x \in G$.
A partir de aqui, consideraremos solamente la segunda.

Teorema

Sea X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto. Entonces la acción de G en X dada por la fórmula $g * x = xg^{-1}$, $g \in G$, $x \in X$, es propia.

En efecto, sea $U \subset X$ una vecidad simétrica de la identidad tal que la intersección $U^3 \cap G$ tiene cerradura compacta en G. Entonces, para todo $x \in X$, la vecindad xU es G-pequena.

Recordemos que el subconjunto S de un G-espacio propio X se llama G-fundamental, o sólamente fundamental, si S es pequeño y la saturación $G(S) = \{gs \mid g \in G, s \in S\}$ coincide con X.
El siguiente es un resultado clave en el trabajo:

Teorema

Sea X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces existe un conjunto cerrado fundamental en X.

Es fácil de demostrar (ver [2, Proposición 1.4]) que en cada G-espacio propio X, la restricción de la proyección orbital $p : X \to X/G$ a cualquier conjunto cerrado pequeño es perfecta (es decir, es cerrada y sus fibras son compactas). En combinación con el teorema obtenemos:

Recordemos que el subconjunto S de un G-espacio propio X se llama G-fundamental, o sólamente fundamental, si S es pequeño y la saturación $G(S) = \{gs \mid g \in G, s \in S\}$ coincide con X.
El siguiente es un resultado clave en el trabajo:

Teorema

Sea X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces existe un conjunto cerrado fundamental en X.

Es fácil de demostrar (ver [2, Proposición 1.4]) que en cada G-espacio propio X, la restricción de la proyección orbital $p : X \to X/G$ a cualquier conjunto cerrado pequeño es perfecta (es decir, es cerrada y sus fibras son compactas). En combinación con el teorema obtenemos:

Recordemos que el subconjunto S de un G-espacio propio X se llama G-fundamental, o sólamente fundamental, si S es pequeño y la saturación $G(S) = \{gs \mid g \in G, s \in S\}$ coincide con X.
El siguiente es un resultado clave en el trabajo:

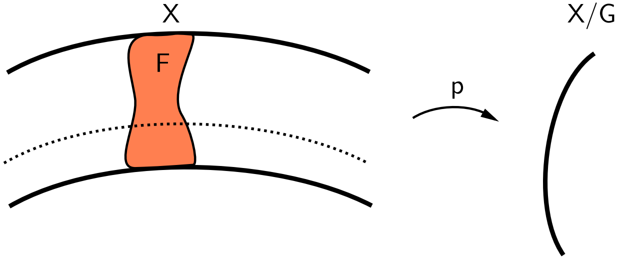
Teorema

Sea X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces existe un conjunto cerrado fundamental en X.

Es fácil de demostrar (ver [2, Proposición 1.4]) que en cada G-espacio propio X, la restricción de la proyección orbital $p : X \to X/G$ a cualquier conjunto cerrado pequeño es perfecta (es decir, es cerrada y sus fibras son compactas). En combinación con el teorema obtenemos:

Teorema

Sea X un grupo topológico, G un subgrupo localmente compacto y X/G el espacio cociente de todas las clases laterales derechas $xG = \{xg \mid g \in G\}$, $x \in X$. Entonces existe un subconjunto cerrado $F \subset X$ tal que la restricción $p|_F : F \to X/G$ es una función suprayectiva perfecta.



Este hecho tiene el siguiente corolario inmediato acerca de la "transferecia" de propiedades de X a X/G:

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo funciones perfectas y hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Supongamos que X es un grupo topológico con la propiedad $\mathcal{P}$ y sea G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces el espacio cociente X/G tambien posee la propiedad $\mathcal{P}$.

Entre estas propiedades $\mathcal{P}$ podemos mencionar: paracompacidad, paracompacidad contable, paracompacidad débil, normalidad, normalidad perfecta, Čech-completitud, ser un k-space (ver [16, §5.1, §5.2, §5.3, §1.5, §3.9, §3.3]).

Este hecho tiene el siguiente corolario inmediato acerca de la "transferecia" de propiedades de X a X/G:

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo funciones perfectas y hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Supongamos que X es un grupo topológico con la propiedad $\mathcal{P}$ y sea G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces el espacio cociente X/G tambien posee la propiedad $\mathcal{P}$.

Entre estas propiedades $\mathcal{P}$ podemos mencionar: paracompacidad, paracompacidad contable, paracompacidad débil, normalidad, normalidad perfecta, Čech-completitud, ser un k-space (ver [16, §5.1, §5.2, §5.3, §1.5, §3.9, §3.3]).

Este hecho tiene el siguiente corolario inmediato acerca de la "transferecia" de propiedades de X a X/G:

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo funciones perfectas y hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Supongamos que X es un grupo topológico con la propiedad $\mathcal{P}$ y sea G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces el espacio cociente X/G tambien posee la propiedad $\mathcal{P}$.

Entre estas propiedades $\mathcal{P}$ podemos mencionar: paracompacidad, paracompacidad contable, paracompacidad débil, normalidad, normalidad perfecta, Čech-completitud, ser un k-space (ver [16, §5.1, §5.2, §5.3, §1.5, §3.9, §3.3]).

Entonces, obtenemos la siguiente solución positiva a la Conjetura 1 en un importante caso particular:

Corolario

Sea X un grupo topológico paracompacto y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto.

En este momento es importante recordar el siguiente resultado importante de A. V. Arhangel'skii [9]: Todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional. Por lo tanto, la compacidad local de G es esencial en este Corolario.

Entonces, obtenemos la siguiente solución positiva a la Conjetura 1 en un importante caso particular:

Corolario

Sea X un grupo topológico paracompacto y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces el cociente X/G es paracompacto.

En este momento es importante recordar el siguiente resultado importante de A. V. Arhangel'skii [9]: Todo grupo topológico es el cociente de un grupo paracompacto zero-dimensional. Por lo tanto, la compacidad local de G es esencial en este Corolario.

En [10] A. V. Arhangel'skii estudió propiedades que se "transfieren" en dirección opuesta, es decir, de X/G a X. El siguiente corolario es un resultado unificado de este tipo que implica muchos de los mencionados en [10] así como algunos nuevos.

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica invariente e inversamente invariante bajo funciones perfectas y estable bajo multiplicación por un grupo localmente compacto. Supongamos que X es un grupo topológico y sea G un subgrupo localmente compacto de X tal que el espacio cociente X/G tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Entonces el grupo X tambien posee la propiedad $\mathcal{P}$.

En [10] A. V. Arhangel'skii estudió propiedades que se "transfieren" en dirección opuesta, es decir, de X/G a X. El siguiente corolario es un resultado unificado de este tipo que implica muchos de los mencionados en [10] así como algunos nuevos.

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica invariente e inversamente invariante bajo funciones perfectas y estable bajo multiplicación por un grupo localmente compacto. Supongamos que X es un grupo topológico y sea G un subgrupo localmente compacto de X tal que el espacio cociente X/G tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Entonces el grupo X tambien posee la propiedad $\mathcal{P}$.

Entre estas propiedades podemos mencionar solo algunas: paracompactidad, ser un k-space, Čech-completitud (ver [16, §5.1, §3.3, §3.9]). Que la paracompacidad es estable bajo la multiplicación por un grupo localmente compacto sigue de un resultado de Morita [22] ya que todo grupo localmente compacto es paracompacto (incluso, fuertemente paracompacto [12, Theorem 3.1.1]).

Problema

Encontrar otra clase de subgrupos $G \subset X$ tal que la proyección $\pi : X \to X/G$ admite un conjunto cerrado fundamental $F \subset X$, i.e., $FG = X$ y la restricción $\pi_F : F \to X/G$ es perfecta.

Entre estas propiedades podemos mencionar solo algunas: paracompactidad, ser un k-space, Čech-completitud (ver [16, §5.1, §3.3, §3.9]). Que la paracompacidad es estable bajo la multiplicación por un grupo localmente compacto sigue de un resultado de Morita [22] ya que todo grupo localmente compacto es paracompacto (incluso, fuertemente paracompacto [12, Theorem 3.1.1]).

Problema

Encontrar otra clase de subgrupos $G \subset X$ tal que la proyección $\pi : X \to X/G$ admite un conjunto cerrado fundamental $F \subset X$, i.e., $FG = X$ y la restricción $\pi_F : F \to X/G$ es perfecta.

Entre estas propiedades podemos mencionar solo algunas: paracompactidad, ser un k-space, Čech-completitud (ver [16, §5.1, §3.3, §3.9]). Que la paracompacidad es estable bajo la multiplicación por un grupo localmente compacto sigue de un resultado de Morita [22] ya que todo grupo localmente compacto es paracompacto (incluso, fuertemente paracompacto [12, Theorem 3.1.1]).

Problema

Encontrar otra clase de subgrupos $G \subset X$ tal que la proyección $\pi : X \to X/G$ admite un conjunto cerrado fundamental $F \subset X$, i.e., $FG = X$ y la restricción $\pi_F : F \to X/G$ es perfecta.

El caso de Grupos Topológicos Normales

Recordemos que un grupo localmente compacto se llama *casi conexo*, si su espacio de componentes conexas es compacto.

Teorema

Sea X un grupo topológico normal, G un subgrupo casi conexo de X, y $p : X \to X/G$ la proyección orbital. Entonces existe un subconjunto cerrado $F \subset X$ tal que la restricción $p|_F : F \to X/G$ es una función abierta perfecta y suprayectiva.

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo funciones abiertas perfectas ademas hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Supongamos que $X \in \mathcal{P}$ y sea G un subgrupo casi conexo de X. Entonces el espacio cociente $X/G \in \mathcal{P}$.

El caso de Grupos Topológicos Normales

Recordemos que un grupo localmente compacto se llama *casi conexo*, si su espacio de componentes conexas es compacto.

Teorema

Sea X un grupo topológico normal, G un subgrupo casi conexo de X, y $p : X \to X/G$ la proyección orbital. Entonces existe un subconjunto cerrado $F \subset X$ tal que la restricción $p|_F : F \to X/G$ es una función abierta perfecta y suprayectiva.

Corolario

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica estable bajo funciones abiertas perfectas ademas hereditaria bajo subconjuntos cerrados. Supongamos que $X \in \mathcal{P}$ y sea G un subgrupo casi conexo de X. Entonces el espacio cociente $X/G \in \mathcal{P}$.

Entre las propiedades estables bajo funciones abiertas perfectas y hereditarias por subconjuntos cerrados podemos resaltar la paracompacidad fuerte y la realcompacidad (ver [16, Ejercicios 5.3.C(c), 5.3H(d), y Teorema 3.11.4 y Ejercicios 3.11.G]). Así, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario

Sea X un grupo normal y realcompacto y sea G un subgrupo casi conexo de X. Entonces el cociente X/G tambien es realcompacto.

Fórmula de Hurewicz

La versión más general de la fórmula de Hurewicz (Pasynkov, 1965) establece que si $f : X \to Y$ es una función continua cerrada suprayectiva de un espacio normal X en un espacio paracompacto Y, entonces

$$\dim X \leq \dim Y + \dim f.$$

V.V. Filippov (1972) mostró que esta desigualdad la paracompacidad de Y no puede ser debilitada a normalidad.

Sin embargo, la siguiente fórmula de Hurewicz se mantiene válida:

Teorema

Sea G un subgrupo localmente compacto de un grupo topológico normal X. Entonces

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim G.$$

Fórmula de Hurewicz

La versión más general de la fórmula de Hurewicz (Pasynkov, 1965) establece que si $f : X \to Y$ es una función continua cerrada suprayectiva de un espacio normal X en un espacio paracompacto Y, entonces

$$\dim X \leq \dim Y + \dim f.$$

V.V. Filippov (1972) mostró que esta desigualdad la paracompacidad de Y no puede ser debilitada a normalidad.

Sin embargo, la siguiente fórmula de Hurewicz se mantiene válida:

Teorema

Sea G un subgrupo localmente compacto de un grupo topológico normal X. Entonces

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim G.$$

Nota

Para un subgrupo compacto G la desigualdad sigue de un resultado de V.V. Filippov (1978).

Nota ([25])

Si en este teorema, X es un grupo localmente compacto entonces, de hecho, la igualdad se mantiene:

$$\dim X = \dim X/G + \dim G.$$

Demostración del Teorema

By $U(G)$ we shall denote the Banach space of all right uniformly continuous bounded functions $f : G \to \mathbb{R}$ endowed with the supremum norm. Recall that f is called right uniformly continuous, if for every $\varepsilon > 0$ there exists a neighborhood O of the unity in G such that $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ whenever $yx^{-1} \in O$.
We shall consider the induced action of G on $U(G)$, i.e.,

$$(gf)(x) = f(xg), \quad \text{for all} \quad g, x \in G.$$

It is easy to check that this action is continuous, linear and isometric (see e.g., [3, Proposition 7]).

Proposición

Let G be a group. Then for every $f \in U(G)$, the map $f_* : G \to U(G)$ defined by $f_*(x)(g) = f(xg^{-1}),\ x, g \in G$, is a right uniformly continuous G-map.

Since X is a proper G-space, and hence, one can choose a G-small neighborhood U of the unity in X. By virtue of Markov's theorem [12, Theorem 3.3.9], there exists a right uniformly continuous function $f : X \to [0, 1]$ such that

$$f(e) = 0 \quad \text{and} \quad f^{-1}\big([0, 1)\big) \subset U. \tag{1}$$

Then, by Proposition 19, f induces an X-equivariant map $f_* : X \to U(X)$ defined by the rule:

$$f_*(x)(g) = f(xg^{-1}), \quad x, g \in X.$$

Denote by Z the image $f_*(X)$. Clearly, Z is the X-orbit of the point $f_*(e)$ in the X-space $U(X)$, and the metric of $U(X)$ induces an X-invariant metric on Z. We claim that

$$f_*^{-1}(\Gamma_{x,V}) \subset x^{-1}U, \quad \text{for every} \quad x \in X, \tag{2}$$

where $V = [0, 1)$ and $\Gamma_{x,V}$ is the open subset $\{\varphi \in U(X) \mid \varphi(x) \in V\}$ of $U(X)$.

Besides, since $f_*(x) \in \Gamma_{x,V}$ for every $x \in X$, we see that the sets $\Gamma_{x,V}$, $x \in X$, constitute a covering of Z.

From now on we restrict ourselves only by the induced actions of the subgroup G, i.e., we will consider X and Z just as G-spaces.

It is easy to see that

$$f_*^{-1}\big(G(\Gamma_{x,V})\big) \subset x^{-1}UG, \quad \text{for every} \quad x \in X. \tag{3}$$

Since $f_* : X \to Z$ is G-equivariant, it induces a continuous map $\widetilde{f_*}$ of the G-orbit spaces, i.e., we have the following commutative diagram:

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f_*} & Z \\
\downarrow p & & \downarrow q \\
X/G & \xrightarrow{\widetilde{f}_*} & Z/G
\end{array}
$$

where p and q are the G-orbit maps.
It then follows that

$$\widetilde{f}_*^{\,-1}\big(q(\Gamma_{x,V})\big) \subset p(x^{-1}U), \quad \text{for every} \quad x \in X. \tag{4}$$

Thus, the open covering $\{p(xU) \mid x \in X\}$ of the G-orbit space X/G is refined by the open covering $\{\widetilde{f}_*^{\,-1}\big(q(\Gamma_{x,V})\big) \mid x \in X\}$.

Since the metric of Z is G-invariant, the orbit space Z/G is pseudometrizable (see Preliminaries). Hence the open covering $\{q(\Gamma_{x,V}) \mid x \in X\}$ of Z/G admits an open locally finite refinement, say $\{W_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ (see [16, Theorem 4.4.1 and Remark 4.4.2]). Then, clearly, $\{p^{-1}(\widetilde{f_*}^{-1}(W_i)) \mid i \in \mathcal{I}\}$ is an open locally finite refinement of $\{xUG \mid x \in X\}$ consisting of G-invariant sets. It then follows that each set $p^{-1}(\widetilde{f_*}^{-1}(W_i))$ is contained in some set xUG, $x \in X$, which yields that

$$p^{-1}(\widetilde{f_*}^{-1}(W_i)) = S_i G,$$

where $S_i = p^{-1}(\widetilde{f_*}^{-1}(W_i)) \cap xU$.
Now, S_i, being a subset of the G-small set xU, is itself G-small.

Then the union $S = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} S_i$ is a G-small set (see e.g., [2, Proposition 1.2(d)]). On the other hand,

$$SG = \Big(\bigcup_{\in \mathcal{I}} S_i\Big) G = \bigcup_{\in \mathcal{I}} S_i G = X,$$

yielding that S is a G-fundamental subset of X. Since the closure of a G-small set is G-small (see e.g., [2, Proposition 1.2(b)]), the closure $\overline{S}$ is the desired closed G-fundamental set.

This completes the proof.

Teorema aproximativo de la rebanada

Recordemos la bien conocida definición de rebanada [24, p. 305]:

Definición

Sea G un grupo, H un subgrupo cerrado y X un G-espacio. Un subconjunto H-invariante $S \subset X$ se llama H-rebanada en X, si $G(S)$ es abierto en X y existe una función G-equivariante

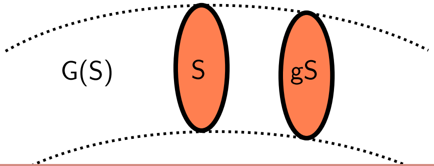
$$f : G(S) \to G/H,$$

llama función rebanadora, tal que $S = f^{-1}(eH)$. La saturación $G(S)$ la llamaremos conjunto tubular y H se llamará subgrupo rebanador. Si $G(S) = X$ entonces S se llama H-rebanada global de X.

Proposición

Sea G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo compacto. Entonces el subconjunto $S \subset X$ de un G-espacio propio X es una H-rebanada global de X si y sólo si

- *S es H invariante,*
- *$G(S) = X$,*
- *S es cerrado en $G(S) = X$,*
- *si $gS \cap S \neq \emptyset$ entonces $g \in H$*



Proposición

Sea G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo compacto. Entonces un subconjunto $S \subset X$ de un G-espacio propio X es una H-rebanada global de X si y sólo si $X \cong_G G \times_H S$.

Productos torcidos

Recordemos que

$$G \times_H S = (G \times S)/H$$

donde H actúa en el producto $G \times S$ de la siguiente forma:

$$h(g, s) = (gh^{-1}, hs).$$

G actúa en $G \times_H S$ por la regla:

$$g'[g, s] = [g'g, s]$$

donde $[g, s]$ denota la H-órbita de $(g, s) \in G \times S$.

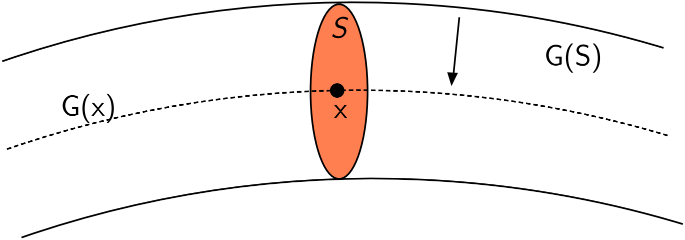
Resulta que cada G-espacio es, un producto torcido, localmente.

Uno de los resultados mas poderosos en la teoría de los grupos topológicos de transformaciones establece (ver [24, Proposición 2.3.1]) que, si X es un G-espacio propio con G grupo de Lie, entonces para cualquier punto $x \in X$, existe una G_x-rebenada S en X con $x \in S$.
En general, cuando G no es de Lie, no es verdad que exista una rebenada en cada punto de X (ver [4]). Generalizando el caso de acciones de grupos de Lie, demostramos en [7] la siguiente versión aproximativa del Teorema de Palais de la rebanada [24, Proposición 2.3.1] para acciones de grupos no Lie, que juega un papel clave en las siguientes demostraciones:

Teorema

Sea G un grupo localmente compacto, X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces para cualquier vecindad O de x en X, existe un subgrupo compacto H de G tal que $G_x \subset H$, G/H es una variedad y existe una H-rebanada S tal que $x \in S \subset O$.

Si G es un grupo de Lie entonces $H = G_x$ (R. Palais (1961)).



Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA

[1] H. Abels, *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Ann. **212** (1974), 1–19.

[2] H. Abels, *A universal proper G-space*, Math. Z. **159** (1978), 143-158.

[3] S. A. Antonian, *Equivariant embeddings into G-AR's*, Glasnik Matematički **22 (42)** (1987), 503–533.

[4] S. A. Antonyan, *Existence of a slice for arbitrary compact transformation groups*, Matematicheskie Zametki **56:5** (1994) 3-9: English transl. in: Math. Notes **56 (5-6)** (1994) 101-1104.

[5] S. A. Antonyan, *The Banach-Mazur compacta are absolute retracts*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **46, no. 2** (1998) 113-119.

[6] S. A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topol. Appl. **98** (1999), 35-46.

[7] S. A. Antonyan, *Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors*, Topology Appl. **146-147** (2005) 289-315.

[8] S. A. Antonyan and S. de Neymet, *Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces*, Acta Math. Hung. **98 (1-2)** (2003), 41-51.

[9] A. V. Arhangel'skii, *Classes of topological groups*, Russian Math. Survays **36, no. 3** (1981), 151-174.

[10] A. V. Arhangel'skii, *Quotients with respect to locally compact subgroups*, Houston J. Math. **31, no. 1** (2005), 215-226.

[11] A. V. Arhangel'skii and V. V Uspenskij, *Topological groups: local versus global*, Applied General Topology **7, no. 1** (2006), 67-72.

[12] A. Arhangel'skii and M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.

[13] N. P. Bhatia, G. P. Szegiö, *Stability theory of Dynamical Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[14] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. **17, no. 1** (1966), 1-16.

[15] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.

[16] R. Engelking, *General Topology*, PWN-Pol. Sci. Publ., Warsaw, 1977.

[17] R. Engelking, *Dimension Theory*, PWN-Pol. Sci. Publ., Warsaw, 1978.

[18] V. V. Filippov, *Dimensionality of spaces with the action of a bicompact group*, Math. Notes, **25, no. 3** (1979), 171-174.

[19] O. Hájek, *Parallelizability revisited*, Proc. Amer. Math. Soc., **27, no. 1** (1971), 77-84.

[20] G. Hochshild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.

[21] J. L. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.

[22] K. Morita, *On the Dimension of Product Spaces*, American Journal of Mathematics, Vol. 75, No. 2 (1953), pp. 205-223.

[23] R. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of the AMS, **36** (1960).

[24] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73**, (1961), 295-323.

[25] E. G. Skljarenko, *On the topological structure of locally bicompact groups and their quotient spaces*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **39** (1964), 57-82.