

CENTRO DE INVESTIGACION  
EN MATEMATICAS A. C.

**Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas  
sobre Regiones Planas Irregulares**

TESIS

que como requisito parcial para obtener el grado de

**DOCTOR EN MATEMATICAS**

presenta

**José Gerardo Tinoco Ruiz**

Director de Tesis: Dr. Pablo Barrera Sánchez

Guajuato, Gto. Marzo de 1997

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>iv</b>
<b>1 Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1 El Concepto de Malla . . . . .	1
1.2 Planteamiento del problema . . . . .	4
1.3 Breve Reseña Histórica de la Generación de Mallas . . . . .	5
1.3.1 Generación Algebraica . . . . .	6
1.3.2 Generación por medio de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	6
1.3.3 Generación Variacional Continua . . . . .	9
1.3.4 Generación Variacional Discreta . . . . .	10
1.4 El Método de Interpolación Transfinita . . . . .	11
<b>2 Generación Variacional Continua</b>	<b>15</b>
2.1 Introducción . . . . .	15
2.2 Funcional de Longitud . . . . .	16
2.3 Funcional de Area . . . . .	20
2.4 Funcional de Ortogonalidad . . . . .	22
2.5 Combinación de Funcionales . . . . .	22
2.5.1 Funcionales de Area-Longitud . . . . .	23
2.5.2 Funcional de Area-Ortogonalidad . . . . .	25
2.6 Funcional de Suavidad . . . . .	28
<b>3 Generación Variacional Discreta</b>	<b>32</b>
3.1 Introducción . . . . .	32
3.2 Discretización de Castillo . . . . .	33
3.3 Discretización de Barrera-Pérez . . . . .	37
3.3.1 El Mapeo Bilineal . . . . .	37
3.3.2 La discretización . . . . .	40
3.4 Normalización de los Funcionales . . . . .	43
3.5 Funcional de Longitud . . . . .	43
3.6 Funcional Discreto de Area . . . . .	49

3.7	Funcional de Ortogonalidad . . . . .	56
3.8	Combinación de Funcionales . . . . .	57
3.8.1	Funcionales de Area-Longitud . . . . .	57
3.8.2	Funcional de Area-Ortogonalidad . . . . .	61
3.9	Funcional de Suavidad . . . . .	65
3.10	Funcional de Suavidad Regularizado de Barrera . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Nuevos Funcionales de Suavidad</b>	<b>73</b>
4.1	Introducción . . . . .	73
4.2	El Funcional de Suavidad Adaptiva . . . . .	77
4.2.1	Diseño y Propiedades sobre triángulos . . . . .	77
4.2.2	Propiedades Básicas sobre una Malla . . . . .	83
4.2.3	Algoritmo Adaptivo . . . . .	89
4.2.4	Normalización . . . . .	91
4.2.5	Resultados . . . . .	91
4.3	El Funcional de Suavidad Bilateral . . . . .	96
4.3.1	Propiedades sobre Triángulos . . . . .	96
4.3.2	Determinación de $k_2$ , Normalización y Resultados . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Nuevos Funcionales de Area</b>	<b>101</b>
5.1	Forma General de los Funcionales de Area . . . . .	101
5.1.1	Un Problema de Minimización . . . . .	101
5.1.2	Funcionales Continuos . . . . .	104
5.1.3	Funcionales Discretos . . . . .	106
5.2	El funcional A4P . . . . .	109
5.2.1	Definición . . . . .	109
5.2.2	Normalización y Resultados . . . . .	109
5.3	El Funcional de Area Adaptivo . . . . .	113
5.3.1	Versión Continua . . . . .	113
5.3.2	Versión Discreta . . . . .	113
5.3.3	Modificación del Funcional . . . . .	114
5.3.4	Propiedades del Funcional Modificado . . . . .	114
5.3.5	Determinación de $k$ y Normalización . . . . .	117
5.3.6	Resultados . . . . .	118
5.3.7	Regularización . . . . .	122
5.4	El Funcional de Area Bilateral . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Combinación de Funcionales y Conclusiones</b>	<b>128</b>
6.1	Combinaciones de Area con Longitud . . . . .	128
6.1.1	Los Funcionales A4P-l . . . . .	129
6.1.2	Los Funcionales de Area Recíproca - Longitud . . . . .	132

6.1.3	Los Funcionales de Area Bilateral - Longitud . . . . .	135
6.2	Funcionales de Area-Ortogonalidad . . . . .	138
6.3	Combinaciones de Suavidad con Area . . . . .	144
6.4	Conclusiones . . . . .	151
6.4.1	Convexidad . . . . .	151
6.4.2	Suavidad . . . . .	152
6.4.3	Control de áreas . . . . .	153
6.4.4	Tiempo de Convergencia . . . . .	155
6.4.5	Desarrollos Futuros . . . . .	156
<b>A</b>	<b>El Método de Newton Truncado</b>	<b>157</b>

# Prefacio

## Objetivo

El objetivo de este trabajo es el desarrollo de métodos efectivos para la generación de mallas rectangulares sobre regiones planas irregulares, las cuales tengan las propiedades de ser convexas, suaves y (de ser posible) ortogonales. A reserva de precisar estos conceptos en el cuerpo del trabajo, se piensa en una malla como una subdivisión de la región irregular en celdas cuadriláteras. Si cada una de tales celdas es convexa, se dirá que la malla es convexa.

Las mallas son obtenidas con la finalidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales definidas sobre la región y que sean de interés como parte de la modelación de algún fenómeno; el esquema usado será simplemente el de diferencias finitas, la implementación del cual es muy sencilla. Es imprescindible que la malla sea convexa; de otro modo es inútil para esta aplicación.

De entre los métodos que se han desarrollado en esta área, se está interesado en los que se obtienen por medio de una formulación variacional de las propiedades de la malla. A esta rama se le conoce como Generación Variacional de Mallas. Los primeros trabajos en esta dirección se deben a Brackbill-Saltzman en 1982 ([6]) y a Steinberg-Roache en 1986([40]). Dentro esta formulación variacional se puede aún hacer una gran subdivisión entre los métodos continuos y los discretos. Aunque históricamente éstos últimos han surgido de los continuos, en los últimos años se han desarrollado de manera independiente con muy buenos resultados.

A reserva de precisar posteriormente, se puede pensar en la generación variacional continua como un método en el cual la característica a optimizar para una malla sobre una región, se formula usando algún funcional integral definido sobre la malla. Usando el cálculo de variaciones, el problema deviene en resolver cierto sistema de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera. La solución es entonces una función del cuadrado unitario a la región de interés, un cambio de coordenadas. El dividir el cuadrado unitario en subregiones conduce, vía el cambio de coordenadas, a una subdivisión de la región irregular. Sin embargo, lo que se obtiene en la práctica no es la función en sí; el sistema de ecuaciones no se resuelve de manera analítica (esto no es posible en la mayoría de los casos). Una solución aproximada es obtenida

mediante un esquema de diferencias finitas sobre el cuadrado unitario.

Los trabajos más importantes en este enfoque se deben, además de los mencionados en el párrafo anterior, a Steinberg y Knupp ([28]). En estos trabajos se introducen los llamados funcionales de área, longitud, suavidad y área-ortogonalidad. Los métodos desarrollados por estos autores producen mallas de excelente calidad sobre regiones simples, esto es cierto en especial para el funcional de área-ortogonalidad de Knupp; sin embargo para regiones complicadas el objetivo fundamental no se logra: las mallas no son convexas.

Por otro lado, en los métodos variacionales discretos clásicos, se prefiere primeramente realizar una discretización de los funcionales integrales, mediante algún esquema de cuadratura numérica. Este proceso hace que el problema a resolver sea minimizar una función multivariada, la cual es llamada funcional discreto. Esta minimización se lleva a cabo usando métodos iterativos, razón por la cual se necesita contar con una malla inicial; el proceso convergerá más rápidamente si la malla inicial elegida es construida de manera conveniente.

El pionero en este enfoque es Castillo ([9], [8]), quien desarrolla las versiones discretas correspondientes a los funcionales de área y de longitud. Sin embargo, la manera en que realiza la discretización no le permite obtener resultados que mejoren los obtenidos por medio de las versiones continuas.

Usando una manera novedosa de discretizar los funcionales continuos Barrera, Pérez y Castellanos en 1992 ([5]) reformulan los funcionales discretos de área, longitud, área-ortogonalidad y suavidad, obteniendo mejores resultados que Castillo. También introducen un nuevo funcional de longitud (el funcional de Barrera-Pérez) el cual les permite obtener mallas adecuadas en una buena variedad de regiones; sin embargo, para regiones irregulares no consiguen que las mallas óptimas sean convexas.

En lo que respecta a la versión discreta del funcional de suavidad, los trabajos principales en esta área se deben a Barrera ([2], [3], [4]) e Ivanenko ([25], [26]). La forma que tiene el funcional de suavidad impide que se puedan lograr mallas convexas si no se tiene una malla inicial que ya lo sea. Tratando de remediar en cierta medida esta situación, Barrera construye un nuevo funcional discreto de suavidad (el funcional de suavidad regularizado), el cual le permite lograr convexidad en regiones no muy irregulares, partiendo de mallas iniciales que sean cuasi-convexas. El trabajo de Ivanenko también va en esta dirección, realizando una modificación al funcional de suavidad de tal manera que logra convexidad para una clase amplia de regiones. Su método, sin embargo, requiere que el usuario sea un experto en la generación de mallas, ya que se necesita ajustar varios parámetros para que el proceso de optimización converja.

El trabajo del autor de esta tesis inicia precisamente en este punto. Se planteaba la necesidad de diseñar métodos que fueran más eficientes que los existentes en ese

momento en el sentido de generar mallas convexas sobre regiones irregulares.

Otra seria deficiencia de los métodos clásicos era que aún en los casos simples en que se lograba obtener mallas convexas, cuando éstas eran mejoradas usando el funcional de suavidad, se perdía el control del tamaño de las áreas de las celdas; esto es, en esos casos se obtenían mallas muy suaves pero que no eran útiles para los propósitos de solución de ecuaciones diferenciales parciales. Un segundo objetivo planteado en el transcurso de este proyecto fué el de conseguir funcionales que ejercieran efectivamente este control del tamaño de las áreas de las celdas.

Por otro lado, hasta hace poco la generación de mallas era más bien un arte que un proceso automático al cual pudiera acceder una persona interesada en la solución de ecuaciones diferenciales parciales pero que no fuera especialista en generación de mallas: el ajuste empírico de ciertos parámetros era una de las tareas más absorbentes cuando se trataba de construir mallas sobre regiones irregulares. Se requería que los nuevos métodos estuvieran, en lo posible, libres de esta desventaja: el proceso de generación de mallas debe ser lo más automatizado posible.

En lo que respecta al diseño de métodos que garantizaran la obtención de mallas convexas y suaves, el objetivo se ha logrado con creces. Se han diseñado métodos que producen mallas convexas y suaves sobre regiones generales, se tienen los resultados teóricos que garantizan este hecho y la experimentación correspondiente que confirma en la práctica este hecho para regiones complicadas. Hasta donde la bibliografía existente reporta, los resultados son de los primeros de este tipo.

Por otro lado, una vez obtenidos los resultados anteriores y experimentado con éxito en regiones tradicionalmente consideradas "difíciles", se atacó el problema del control del tamaño de las celdas. Se han obtenido caracterizaciones para todos los llamados funcionales de área que permitieron observar las características clave que permitían el control del área de las celdas. De hecho aunque el enfoque original era sobre métodos discretos, se obtuvieron también caracterizaciones para los funcionales de área continuos. Fruto de esta caracterización fué el diseño de nuevos funcionales discretos de área para los cuales también se da la justificación matemática, además de la empírica, de que conducen a mallas convexas.

En lo que respecta a la meta de automatizar el proceso de generación discreta de mallas cabe decir que el objetivo prácticamente se ha logrado: los métodos generados sólo requieren que el usuario ajuste el valor de a lo más un parámetro. Incluso, fruto de la experimentación, se puede sugerir un valor por omisión de dicho parámetro para cada uno de los funcionales.

Finalmente, aunque no se documenta aquí, se diseñó también un algoritmo de optimización *ad hoc* para el problema de generación de mallas que permite el generar mallas de mayor dimensión y en menos tiempo usando una computadora personal. Se espera próximamente terminar un paquete dirigido a usuario, así como documentar estos algoritmos.

## Resumen de contenidos

Primeramente en el Capítulo 1 se realiza una breve introducción a los conceptos básicos y se establecen las definiciones pertinentes. Se hace también un breve bosquejo de las principales técnicas de generación numérica de mallas existentes a la fecha. Al final del capítulo se bosqueja uno de los métodos algebraicos más usados para generar mallas sobre regiones convexas a saber, el método de interpolación transfinita (TFI). Para regiones no convexas las mallas generadas usando este método no son ya adecuadas, sin embargo servirán como mallas iniciales en el proceso iterativo de optimización de los funcionales que se presentarán más adelante.

En el Capítulo 2 se revisan someramente las ideas correspondientes a la formulación variacional continua, describiendo los funcionales clásicos correspondientes y sus resultados.

Los métodos variacionales discretos clásicos se revisan en el Capítulo 3, donde se trata de explicar las ideas centrales de dicha formulación. Se presenta también aquí el Funcional de Suavidad Regularizado de Barrera, que fué el punto de partida para el desarrollo de los nuevos funcionales.

El capítulo 4 comienza con una breve explicación de los objetivos perseguidos al iniciar este trabajo. Posteriormente se introduce un nuevo funcional de suavidad: el Funcional de Suavidad que se ha denominado llamado Adaptivo. Se enuncian resultados teóricos que justifican el que este método produce mallas convexas, bajo la hipótesis de que exista alguna; éstos son de los pocos que existen en este sentido. También es presentado el llamado Funcional de Suavidad Bilateral cuya minimización produce mallas convexas y suaves con menor variación de las áreas de las celdas.

La forma general de los funcionales de área es introducida en el capítulo 5. Se hace una revisión de las propiedades de los funcionales continuos, en particular se muestra que las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional general son esencialmente las del funcional continuo clásico de área. Por otro lado, al tomar los análogos discretos, se logra demostrar algunas propiedades que se habían demostrado antes sólo para el funcional discreto clásico. Se introducen varios nuevos funcionales discretos de área que mejoran los resultados correspondientes al funcional clásico; en particular el Funcional que se ha denominado Recíproco de Area (que será en realidad una familia de funcionales dependientes de cierto parámetro), tiene mucha similitud con el Funcional Adaptivo de Suavidad, tanto en la forma como en el esquema que se implementa para obtener convexidad. Se prueban resultados análogos a los del capítulo 4 para este funcional. Finalmente se define el Funcional de Area Bilateral, el cual produce mallas convexas con un fuerte control de la variación de las áreas de las celdas.

En el capítulo 6 se toman combinaciones convexas de los diferentes funcionales que se introdujeron en los capítulos 4 y 5, con los funcionales clásicos. Se hace ver

que las mallas producidas por algunas de estas combinaciones son excelentes, ya que gozan de las propiedades de control del tamaño de las celdas y de suavidad, que no tiene por separado cada funcional. Al llegar a este punto ya no se creyó necesario ser muy explícitos en lo referente a la formulación de los funcionales, se dan sólo las expresiones de las combinaciones y los correspondientes resultados.

Los resultados presentados a lo largo de todo el trabajo corresponden a ocho mallas de prueba. De estas mallas, las primeras cuatro (llamadas M12, M13, M19 y M26) son sobre regiones que han sido extensivamente usadas por varios autores para ejemplificar las características de las diferentes técnicas de generación de mallas. Las cuatro últimas (HAB, SUD, UCH y ENG) son regiones "difíciles", en el sentido de que no se logra convexidad de las mallas correspondientes cuando se usan los métodos clásicos.

Aunque los resultados numéricos son fundamentales para comparar la eficiencia de los diferentes funcionales, otra manera de realizar esta comparación es visualmente. Es por esta razón que gran parte del volumen de este ensayo lo constituyen las gráficas de las mallas.

Finalmente, es conveniente mencionar que los resultados numéricos que se presentan a lo largo del trabajo, fueron obtenidos usando una computadora personal, con procesador Pentium de 66 MHz.

# CAPITULO 1

## Generalidades

### 1.1 El Concepto de Malla

Muchos problemas de interés científico se pueden modelar matemáticamente; cuando los fenómenos a estudiar involucran cantidades que varían con el tiempo o con la posición usualmente dicha modelación conduce al planteamiento de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Entre éstos podemos mencionar fenómenos de difusión, procesos oscilatorios, entre otros.

Por esta razón es necesario contar con buenas técnicas para resolución de ecuaciones diferenciales parciales. Desgraciadamente las soluciones simbólicas sólo se han calculado para un número muy limitado de casos. En la mayoría de las ocasiones se obtienen soluciones aproximadas mediante el uso de métodos numéricos.

Entre los métodos numéricos más usados en la actualidad podemos mencionar los de diferencias finitas y los de elemento finito. Los primeros son métodos de implementación sencilla y que conducen a excelentes resultados cuando la región donde está definido el problema -al cual se hará referencia en adelante como región física o espacio físico- es sencilla. Los métodos de elemento finito son más adecuados para el caso de regiones irregulares, pero su implementación dista mucho de ser sencilla.

Recientemente se ha buscado resolver ecuaciones diferenciales parciales sobre una región física complicada, transformando primeramente esta región de tal manera que el resultado de dicha transformación sea un cuadrado. Una vez logrado este primer objetivo, se puede resolver la ecuación diferencial usando algún esquema de diferencias finitas. A este proceso de transformación de la región física en un cuadrado se le conoce como Generación de Mallas o Redes.

La generación numérica de mallas se ha convertido en una herramienta de uso común en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales sobre regiones de forma arbitraria. Esto es especialmente cierto en Mecánica de Fluidos, en la cual tuvo su origen, pero es igualmente aplicable a todos los problemas físicos que involucran

soluciones para campos. Las mallas generadas numéricamente han proporcionado la manera de solucionar el problema de la forma de la frontera en los métodos de diferencias finitas, y estas mallas también sirven para construir redes de elemento finito. Con dichas mallas todos los cálculos numéricos, ya sean de diferencias finitas o de elemento finito, son implementados sobre una malla computacional cuadrada sin importar la forma y configuración de la región física.

Siguiendo a Thompson ([41]), un sistema generador de mallas

*”... puede ser pensado como un procedimiento para la distribución ordenada de observadores, o estaciones de muestreo, sobre un campo físico de tal manera que sea posible una comunicación eficiente entre los observadores y que todos los fenómenos físicos sobre ese campo puedan ser representados con suficiente exactitud por medio de esta colección finita de observaciones. La estructura de una red de familias de líneas coordenadas permite a los observadores ser fácilmente identificados en relación a los otros, y esto conlleva una codificación más simple que la que resultaría de una estructura triangular o de una distribución aleatoria de los puntos. El sistema de generación de mallas proporciona cierta influencia de un observador sobre los otros, así que si uno de ellos se mueve hacia una mejor posición para observar la solución, sus vecinos lo seguirán en cierta medida para mantener una cobertura suave del campo.*

*La solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales requiere cierta discretización del campo en una colección de puntos o volúmenes elementales (celdas). Las ecuaciones diferenciales son aproximadas por un conjunto de ecuaciones algebraicas sobre esta colección, y este sistema de ecuaciones algebraicas es entonces resuelto para producir un conjunto discreto de valores los cuales aproximan la solución del sistema diferencial parcial sobre el campo. La discretización de la solución requiere de cierta organización para ser eficiente; esto es, debe ser posible identificar rápidamente los puntos o celdas. Más aún, la discretización debe conformar la frontera de la región de tal manera que las condiciones de frontera puedan ser representadas de manera precisa. Esta organización es proporcionada por un sistema de coordenadas, y la necesidad de conformar la frontera es reflejada en la elección que se hace de coordenadas cartesianas para regiones rectangulares, coordenadas cilíndricas para regiones circulares, etc., todo dentro de los límites de los recursos que se puedan hallar en los manuales.*

*De esta necesidad de organización de la discretización del campo para regiones generales surge el interés actual en sistemas de coordenadas que conformen la frontera, generados numéricamente. Es decir, generar com-*

*putacionalmente para regiones arbitrarias lo que está disponible en los manuales para regiones simples. Los sistemas de coordenadas cubren el campo y tienen líneas (o superficies) coordenadas que coinciden con todas las fronteras. La distribución de las líneas debe ser suave, concentrándose en regiones donde la solución varía fuertemente, y el sistema debe ser capaz de "sentir" estas variaciones y autoajustarse dinámicamente para conseguir este objetivo."*

Una malla generada numéricamente es pensada como el conjunto organizado de puntos formado por las intersecciones de las líneas de un sistema de coordenadas. La característica esencial de un sistema tal es que alguna línea coordenada (o en tres dimensiones, alguna superficie coordenada) sea coincidente con cada segmento de la frontera de la región física. El uso de intersecciones de líneas coordenadas para definir los puntos de la malla proporciona una estructura organizacional que permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija cuando las ecuaciones diferenciales que se estén resolviendo han sido transformadas de tal manera que las coordenadas curvilíneas remplacen a las coordenadas cartesianas como variables independientes.

La malla libera a la simulación computacional de restringirse a ciertas formas de frontera y permite la generación de códigos de usos general en los cuales la forma de la frontera es especificada simplemente en la entrada de datos. Las fronteras también pueden estar en movimiento, ya sea por especificaciones externas o en respuesta al desarrollo de la solución física. Similarmente, el sistema de coordenadas puede ajustarse para seguir la variación en la solución física. En cualquier caso, la malla generada numéricamente permite que todos los cálculos sean realizados en una malla cuadrada fija en el campo computacional (también llamado espacio lógico), el cual es siempre rectangular por construcción.

## 1.2 Planteamiento del problema

### Definición

Una malla  $\mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))^t$  sobre una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es una función continua

$$\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \Omega$$

donde  $U_2$  es el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$  (Figura 1.1).

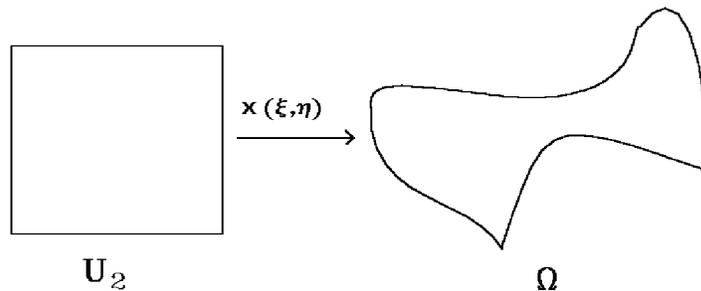


Figura 1.1.- Malla sobre la Región  $\Omega$

Nótese que si se toma una línea coordenada  $\xi = cte$  o  $\eta = cte$  en  $U_2$ , su imagen será una curva. Estas curvas en  $\Omega$  son llamadas, de manera natural, curvas coordenadas. Si se elige una retícula en  $U_2$ ; esto es, una colección de líneas coordenadas en  $U_2$ , la función  $\mathbf{x}$  proporciona una retícula en  $\Omega$ , de ahí el término malla o red.

Se restringirá la atención a funciones tales que

$$\mathbf{x}(\partial U_2) = \partial \Omega$$

de éstas se dirá que se ajustan a la frontera, o que conforman a ésta.<sup>1</sup> Se puede establecer el problema de generación de mallas como sigue:

*Dada una función biyectiva y continua de la frontera de  $U_2$  en la frontera de  $\Omega$ , extenderla a una función continua de  $U_2$  a  $\Omega$ .*

---

<sup>1</sup>No confundir con la noción de conformalidad comúnmente usada en Matemáticas para indicar preservación de ángulos. De hecho, se menciona más adelante que una de las técnicas clásicas para generar mallas es por medio de mapeo conforme, y en esta última expresión sí se usa "conforme" en el sentido clásico.

De entre las posibles mallas existentes en  $\Omega$  serán de interés aquellas con ciertas propiedades; a saber:

1. Primeramente se quiere que diferentes puntos en  $U_2$  tengan como imagen puntos diferentes en  $\Omega$ ; es fácil ver que esto implica que diferentes líneas coordenadas que no se cruzan en  $U_2$ , tendrán imágenes que no se cruzan en  $\Omega$ . Se requiere pues que  $\mathbf{x}$  sea 1-1.
2. También se requerirá que  $\mathbf{x}$  llene a  $\Omega$ ; es decir, que  $\mathbf{x}$  sea un mapeo sobre.
3. Por otro lado, es deseable que la imagen de una curva suave en  $U_2$  sea una curva suave en  $\Omega$ ; esto es, se requiere que las funciones  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  tengan derivadas continuas al ser consideradas como funciones de  $\xi$  y  $\eta$  separadamente.

Las mallas que tienen las dos primeras propiedades se llaman mallas convexas; en contraparte, las que no gozan de esta propiedad son denominadas no convexas o *dobladas*. En la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, una malla no convexa no es útil.

Una función que tenga las tres características es llamada un difeomorfismo entre  $U_2$  y  $\Omega$ . El problema de generación de mallas es replanteado entonces de manera más especializada como:

*Dado un difeomorfismo*

$$\mathbf{x} : \partial(U_2) \rightarrow \partial\Omega$$

*extenderlo a un difeomorfismo*

$$\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \Omega$$

### 1.3 Breve Reseña Histórica de la Generación de Mallas

Hasta hace poco más de diez años, los procedimientos para generar sistemas de coordenadas curvilíneas eran básicamente de dos tipos generales: (1) construcción por interpolación algebraica y (2) Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Los procedimientos algebraicos van desde la simple normalización de las curvas frontera, hasta la interpolación transfinita de las curvas frontera, pasando por ciertas técnicas intermedias de interpolación de líneas y otras técnicas relacionadas. Por otro lado, las ecuaciones pueden ser elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

Los méritos relativos de los dos tipos clásicos de esquemas de generación de mallas se pueden resumir de la siguiente manera: La generación algebraica es más rápida, pero las mallas generadas por ecuaciones diferenciales son más suaves.

### 1.3.1 Generación Algebraica

La generación de un sistema coordenado curvilíneo se puede realizar interpolando los valores en las fronteras. Esto se hace construyendo una función definida sobre toda la región lógica de tal manera que en la frontera esta función coincida con los valores prescritos y posiblemente con derivadas también prescritas. La evaluación de esta función para los valores en el interior de la región lógica proporcionará el sistema de coordenadas curvilíneo.

Entre los tipos de interpolación usados se pueden mencionar la interpolación de Lagrange, de Hermite, por splines, por funciones trigonométricas, entre otros.

Los métodos de este tipo han sido extensivamente desarrollados para aprovechar sus dos principales ventajas: cálculo rápido de las mallas, en comparación a los métodos de ecuaciones diferenciales parciales y el control directo sobre la localización de los puntos de la malla. Estas ventajas, sin embargo, se ven opacadas por el hecho de que los métodos algebraicos no garantizan la suavidad de la malla; en particular las discontinuidades de las pendientes en la frontera se pueden propagar al interior.

El método algebraico básico es interpolación transfinita ([21] y [22]). Un caso especial de este método se presenta al final de este capítulo. Otros métodos algebraicos pueden ser consultados en [16], [38], y [36].

### 1.3.2 Generación por medio de Ecuaciones Diferenciales

Como ya se mencionó, la generación de un sistema coordenado que conforme la frontera, se obtiene determinando los valores de las coordenadas curvilíneas en el interior de la región física a partir de valores de dichas coordenadas (o de las pendientes de ellas al intersectar la frontera) especificados en la frontera de la región.

Una manera de llevar a cabo esto es, como se dijo en el apartado anterior, por medio de algún esquema de interpolación. Sin embargo, éste es un problema de valores a la frontera y este tipo de problemas se ha resuelto clásicamente por medio de ecuaciones diferenciales parciales. Es por lo tanto lógico tomar las coordenadas como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Si se especifican valores fijos sobre toda la frontera de la región física, estas ecuaciones deben ser elípticas, mientras que si esta especificación se realiza sólo sobre una porción de la frontera, las ecuaciones serán parabólicas o hiperbólicas.

#### Generación elíptica

Una discusión general de los sistemas generadores elípticos se puede ver en [47]; también se pueden consultar varias aplicaciones en [43], [44] y [45]. Aquí sólo se hace un breve bosquejo de este tópico.

La característica principal de los generadores elípticos es debido a los llamados principios extremales; esto es, los extremos de las soluciones no se pueden alcanzar en el interior de la región lógica ([31]). Esto garantiza que el mapeo entre las regiones lógica y física sea uno-uno.

Otra característica importante en relación a la generación de sistemas de coordenadas es la suavidad de las soluciones, inherente en los sistemas elípticos. Más aún, las discontinuidades en las primeras derivadas que se puedan presentar en la frontera de la región, no se propagan al interior.

El generador elíptico por excelencia es el obtenido resolviendo el sistema de Laplace

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0\end{aligned}$$

llamado de AH ([1]) o de longitud. Como se verá más adelante (Capítulo 2), la solución de este sistema conduce a la distribución de líneas coordenadas más suave posible sobre el campo, para los datos asignados en la frontera. También se puede demostrar que las líneas estarán más acumuladas cerca de las partes convexas de la frontera y menos en las partes cóncavas.

Variantes del sistema anterior se obtienen agregando en el lado derecho las así llamadas funciones de control; esto es, el sistema a resolver tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= P \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= Q\end{aligned}$$

El papel que juegan  $P$  y  $Q$  es el de controlar el espaciamiento y orientación de las líneas coordenadas. La introducción de las funciones de control puede hacer que los principios extremales se pierdan; sin embargo, aún se pueden obtener mapeos uno-uno con ciertas elecciones de ellas.

Se pueden también obtener sistemas más generales si el operador de Laplace que aparece en el lado derecho se sustituye por un operador elíptico arbitrario.

El generador de Winslow, o Thompson-Thames-Mastin homogéneo ([42], o Suavidad, es el generador elíptico más ampliamente usado. En términos sencillos es el generador de longitud, sólo que ahora de la región física a la región lógica. Una modificación de él, llamada generador TTM no homogéneo, es usada para atraer o repeler puntos de la malla hacia puntos especificados en el dominio lógico y para mover líneas coordenadas en la misma manera. Las mallas producidas sobre regiones no convexas también son comúnmente dobladas.

### Generación hiperbólica y parabólica.

Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales es parabólico o hiperbólico, debe ser resuelto numéricamente, marchando en la dirección de una coordenada curvilínea entre dos curvas de frontera. En ninguno de estos casos se puede especificar la frontera completa.

El sistema parabólico puede ser aplicado para generar mallas entre las dos fronteras de una región doblemente conexa, con cada una de esas fronteras especificada de antemano. Por otro lado, el caso hiperbólico permite especificar sólo una frontera, y por tanto es de interés sólomente en los casos donde la región física no es acotada. Tanto los sistemas parabólicos como los hiperbólicos tienen la ventaja de ser generalmente resueltos mucho más rápido que los elípticos.

### Generación por Mapeo Conforme y Cuasi-conforme

El método clásicamente más usado es el de mapeo conforme, el cual ha servido durante mucho tiempo para construir mapeos entre dominios planos. Una buena referencia en lo referente a la parte teórica y computacional de mapeos conformes es [24], mientras que su aplicación a la generación de mallas se puede consultar en [33] y en [46].

En términos simples un mapeo conforme en el plano complejo preserva ángulos entre curvas y la orientación de estos ángulos. Un mapeo  $f$  del plano complejo en él mismo es conforme si  $f$  es analítica; esto es, si las partes real y compleja de  $f$  satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann; entonces una manera de construir un mapeo tal es resolver este sistema de ecuaciones diferenciales. Un mapeo conforme es ortogonal y tiene jacobiano estrictamente positivo.

Esta técnica tiene la ventaja de que al transformar la ecuación diferencial parcial a resolver se introducen una cantidad pequeña de términos. Sin embargo los sistemas así generados son muy rígidos en el sentido de que se puede ejercer muy poco control sobre la distribución de los puntos de la malla; además, no siempre es posible construir un mapeo conforme del cuadrado unitario en una región plana general, que tenga cuatro lados, a menos que la razón de la "longitud" al "ancho" de esa región esté restringida a cierto valor constante particular llamado módulo de conformalidad. Cuando se tiene alguna manera de calcular esta constante ([37]), la cual varía de región en región, se puede generar lo que se llama un mapeo cuasi-conforme ([29]).

Las técnicas de mapeo conforme y cuasi-conforme están incluidas en el tipo elíptico.

## Mallas Ortogonales

Las mallas que tienen la propiedad de que sus líneas coordenadas son ortogonales -o casi ortogonales- son preferidas en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, debido a que con tales mallas el error de truncamiento se ve reducido ([30]). También tienen la ventaja de que al transformar la ecuación a resolver, aparecen menos términos que para una malla no ortogonal y que las condiciones de frontera se pueden representar más fácilmente. Una desventaja es que requieren de una parametrización muy particular de la frontera ([17]). En la práctica, el encontrar una malla ortogonal para una región dada puede ser extremadamente difícil.

Los sistemas ortogonales no necesitan ser conformes, y pueden ser generados tanto por sistemas hiperbólicos como elípticos.

### 1.3.3 Generación Variacional Continua

Los métodos variacionales (llamados aquí continuos, para distinguirlos del enfoque directo o discreto, del cual se hablará posteriormente) se pueden considerar enmarcados dentro de los métodos de ecuaciones diferenciales. La diferencia principal es que los parámetros pertinentes al control de las propiedades de la malla aparecen en integrales de superficie (o de volumen en tres dimensiones), y no en forma de términos asociados a fuentes. La malla se determina tomando el óptimo de dichas integrales, lo cual produce el sistema diferencial generador en la forma de Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Los pioneros en esta formulación fueron Brackbill y Saltzman ([6]); Steinberg y Roache ([40]) proponen un método íntimamente relacionado. Debido a la claridad en su formulación, el enfoque presentado aquí es éste último. Otras referencias son Roache y Steinberg ([35]), Castillo, Steinberg y Roache ([10], [11], [12]).

Es en estos trabajos que son introducidos los funcionales continuos clásicos de área, longitud, suavidad y ortogonalidad. Entre los principales resultados reportados destacan los siguientes:

1. Se hace notar que el funcional de área combinado con el funcional de longitud produce mallas razonables.
2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con el funcional de longitud son lineales, desacopladas y elípticas.
3. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional de área son acopladas, no lineales y no siempre elípticas.
4. Se identifica que uno de los problemas centrales es que muchas veces las mallas generadas son "dobladas". Se dan algunos procedimientos para prevenir esta situación en casos simples.

5. Se caracteriza totalmente el funcional de longitud; en cambio para el funcional de área sólo se dan algunos resultados.
6. Se obtienen buenos resultados formando combinaciones convexas de los funcionales de área, longitud y ortogonalidad. En particular el funcional de área-ortogonalidad de Knupp ([28]) produce mallas de buena calidad en varias regiones de prueba.

Un breve estudio de este enfoque se presenta en el capítulo 2 de este trabajo.

### 1.3.4 Generación Variacional Discreta

El tema de interés de esta tesis es el desarrollo de ciertos métodos que caen en la categoría de los métodos variacionales discretos o directos.

Castillo introduce en 1986 ([9]), un método variacional directo que controla propiedades tales como la longitud entre los puntos de la malla y las áreas de las celdas. La malla se genera minimizando un funcional definido sobre los puntos interiores de la misma. Este es un problema de minimización de gran escala que Castillo resuelve usando un método de gradientes conjugados no lineal. En su trabajo introduce los funcionales discretos de área y longitud, los cuales se pueden ver básicamente como una discretización de los correspondientes funcionales continuos de Steinberg y Roache. En el capítulo 3 del presente trabajo mostramos en forma precisa las ideas detrás del trabajo de Castillo.

A partir del trabajo de Castillo, se ha desarrollado una buena cantidad de trabajo en lo referente a los métodos directos. En 1990, Barrera et al ([5]) proponen una forma de generar funcionales discretos basada en una manera novedosa de atacar la discretización de los funcionales continuos. También introducen nuevos funcionales discretos que permiten un mayor control de las propiedades de la malla; entre éstos destaca el funcional de Barrera-Pérez que permite controlar las longitudes de las líneas coordenadas en una y otra dirección de manera independiente. Con el ajuste de algunos parámetros se logra evitar el problema de "doble" de las mallas, sobre una buena cantidad de regiones. Como ya se mencionó, una malla "doblada" (no convexa) no es útil para los cálculos numéricos pertinentes a la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

Por otro lado, Ivanenko ([25] y [26]), realiza modificaciones al funcional de suavidad de tal manera que logra solucionar en gran medida el problema de no convexidad de las mallas óptimas. De manera muy ingeniosa ajusta ciertos parámetros relativos tanto al funcional como al método de optimización y logra obtener mallas convexas en regiones hasta ese momento consideradas complicadas.

Trabajando en una dirección similar, Barrera ([2]) modifica también el funcional de suavidad, produciendo su funcional regularizado de suavidad, con el cual logra

mallas óptimas convexas sobre una variedad de regiones. La modificación realizada por Barrera es, en cierto sentido, más natural que la de Ivanenko y fué de hecho el punto de partida para el trabajo que se reporta en la presente tesis.

Sobre estos antecedentes se abunda en el capítulo 3.

## 1.4 El Método de Interpolación Transfinita

Como ya se ha mencionado anteriormente en este capítulo, los métodos más simples usados en la generación de mallas son los basados en interpolación. Tienen la ventaja de ser de fácil implementación y muy rápidos en comparación con los métodos variacionales continuos y discretos que veremos más adelante. Tienen sin embargo la desventaja de que transmiten la falta de suavidad de la frontera hacia el interior y aun más, para regiones que no sean convexas, a menudo dan lugar a mallas dobladas; esto es, a mapeos que no son 1-1. Sin embargo debido a que estos métodos son usados extensivamente en Diseño Asistido por Computadora (CAD) y a que las mallas que producen son usadas como punto de partida por los métodos que se estudian más adelante, es conveniente revisar al menos la versión más usada de ellos: el llamado método de interpolación transfinita (TFI). El lector interesado en obtener una mayor familiaridad con estos métodos algebraicos puede consultar [21], [22], [23], [27], [16], [38], o [36].

Para generar una malla sobre una región  $\Omega$  es necesario conocer las imágenes de los lados del cuadrado unitario; esto es, se requiere del conocimiento de las cuatro partes en las cuales la frontera de  $\Omega$  es dividida y que son imágenes de los correspondientes cuatros segmentos de frontera de  $U_2$ . Supóngase que la descripción de la frontera de  $\Omega$  está dada por cuatro ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}_b(\xi) \quad , \quad \mathbf{x}_t(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\mathbf{x}_l(\eta) \quad , \quad \mathbf{x}_r(\eta) \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

Aquí los subíndices b,r,t,l son abreviaturas en inglés de bottom, right, top y left. Por supuesto que se debe conservar la orientación y, para que  $\mathbf{x}$  sea continua, se debe cumplir que en las esquinas los correspondientes mapeos coincidan; es decir,

$$\mathbf{x}_b(0) = \mathbf{x}_l(0) \quad \mathbf{x}_b(1) = \mathbf{x}_r(0) \quad \mathbf{x}_r(1) = \mathbf{x}_t(1) \quad \mathbf{x}_t(0) = \mathbf{x}_l(1)$$

La fórmula básica de la interpolación transfinita usa estos cuatro mapeos para generar una malla sobre  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) = & (1 - \eta)\mathbf{x}_b(\xi) + \eta\mathbf{x}_t(\xi) + (1 - \xi)\mathbf{x}_l(\eta) + \xi\mathbf{x}_r(\eta) - [\xi\eta\mathbf{x}_t(1) \\ & + \xi(1 - \eta)\mathbf{x}_b(1) + \eta(1 - \xi)\mathbf{x}_l(0) + (1 - \xi)(1 - \eta)\mathbf{x}_b(0)] \end{aligned}$$

Se muestran las mallas generadas por interpolación transfinita sobre ocho regiones no convexas (Figuras 1.2 y 1.3). De estas regiones, las primeras cuatro (llamadas M12, M13, M19 y M26) han sido extensivamente usadas por varios autores para ejemplificar las características de las diferentes técnicas de generación de mallas. Las cuatro últimas (HAB, SUD, UCH y ENG) son regiones "difíciles", en el sentido de que no se logra convexidad de las mallas correspondientes cuando se usan los métodos clásicos. Estas mallas se obtuvieron tomando la retícula uniforme de 40 por 40 puntos del cuadrado unitario y serán usadas extensivamente en el desarrollo del presente trabajo para ilustrar resultados obtenidos por diferentes métodos de generación de mallas.

Ninguna de estas mallas es convexa; en la Tabla 1.1 se muestra el número de celdas no convexas correspondiente a cada una de ellas.

Tabla 1.1.- Mallas Iniciales Generadas por TFI

Malla	Celdas no convexas
M12	70
M13	88
M19	253
M26	164
HAB	394
SUD	318
UCH	473
ENG	575

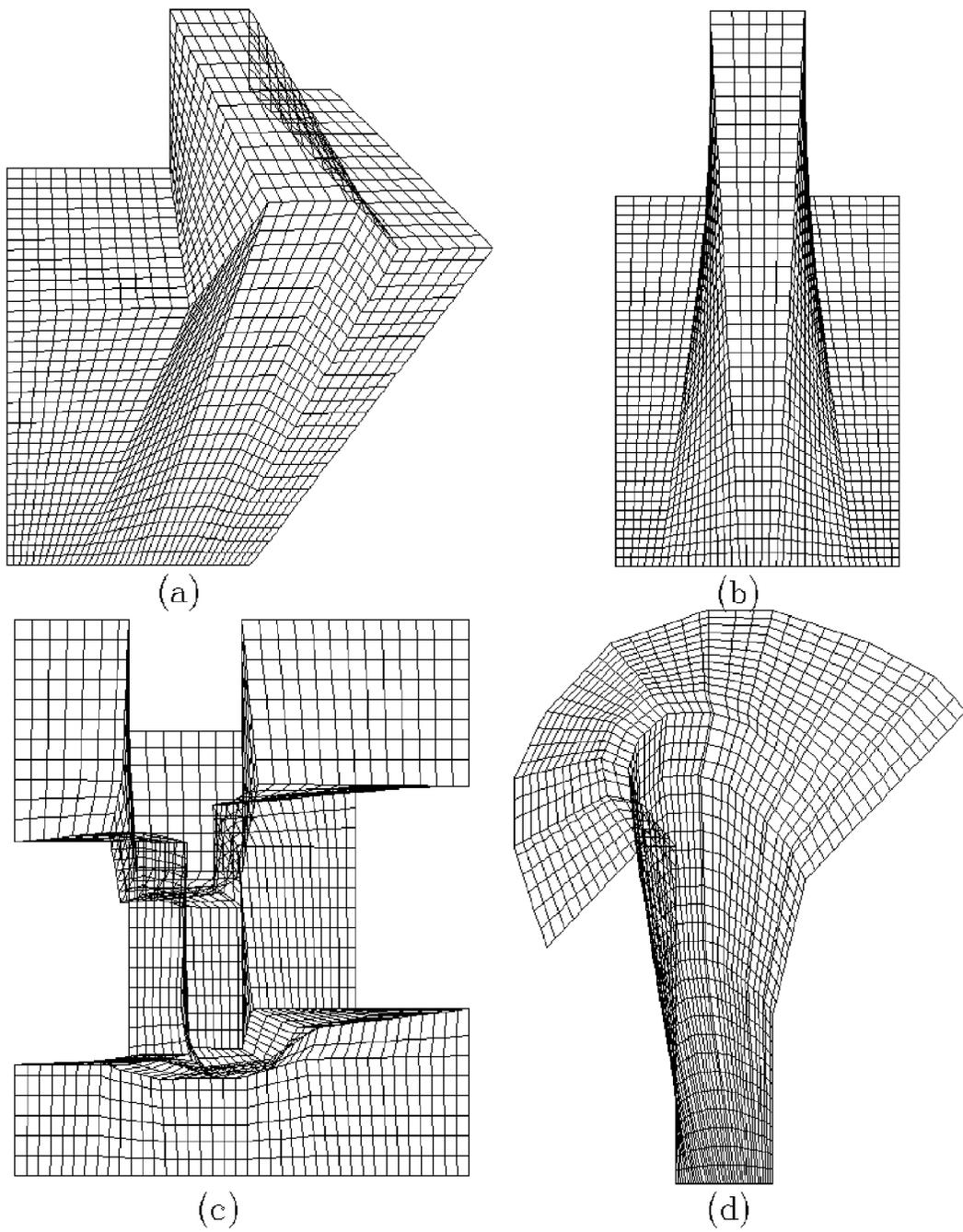


Figura 1.2.- Mallas Iniciales Generadas por TFI sobre las Regiones: (a) M12, (b) M13, (c) M19, (d) M26

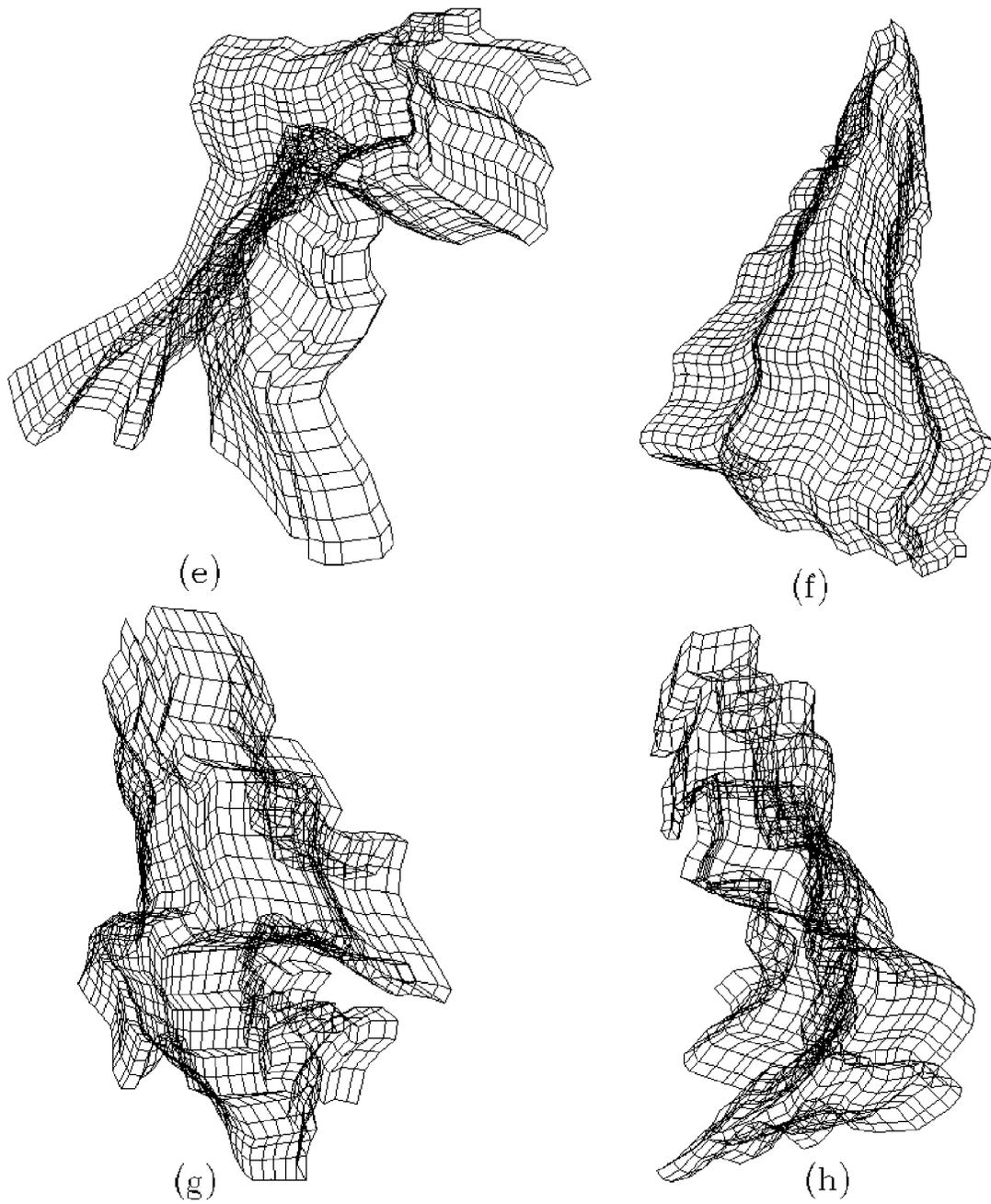


Figura 1.3.- Mallas Iniciales Generadas por TFI sobre las Regiones: (e) HAB, (f) SUD, (g) UCH, (h) ENG

# CAPITULO 2

## Generación Variacional Continua

En este capítulo se delinean en forma somera las principales ideas concernientes al método variacional continuo de generación de mallas. El enfoque es básicamente el que aparece en [27], trabajo al cual se refiere a quien desee una amplia discusión de este tema.

### 2.1 Introducción

Aunque la noción de funcional es mucho más amplia, para los fines que nos ocupan se entenderá por un funcional continuo <sup>1</sup> a una función de la forma

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta, x, y, x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi$$

que a cada malla

$$\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \Omega$$

le asocia un número real. De hecho la mayoría de los funcionales que serán considerados tienen una forma más simple, a saber

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi$$

donde L es una función que contendrá información acerca de ciertas cantidades geométricas que se desea controlar con el objeto de generar mallas adecuadas y que conformen a la frontera de  $\Omega$  (c.f. Cap. 1).

El problema de generación variacional continua de mallas es encontrar  $\mathbf{x}^*$  que conforme la frontera y que haga mínimo el valor de  $I(\mathbf{x})$ ; además  $\mathbf{x}$  debe tener un valor predeterminado sobre la frontera de  $U_2$ . Esto es, se requiere calcular  $\mathbf{x}^*$  tal que

$$I(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} I(\mathbf{x})$$

---

<sup>1</sup>La palabra "continuo" usada aquí es sólo para diferenciar estos funcionales de los usados en el método directo del siguiente capítulo, los cuales se denominarán discretos

Del cálculo de variaciones ([20], [18]) se sigue que  $\mathbf{x}^*$  debe ser solución del problema de valores a la frontera

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\eta} \right) &= 0 \\ \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\eta} \right) &= 0 \\ \mathbf{x}(\partial U_2) &\text{ dado}\end{aligned}$$

el cual consta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, comúnmente acoplado y no lineal y de condiciones a la frontera dadas por el valor de la malla en la frontera (c.f. Cap. 1). Estas condiciones son llamadas en conjunto *Ecuaciones de Euler-Lagrange* y se hará referencia a ellas como *Ecuaciones E-L*. Comúnmente este problema de valores a la frontera se resuelve numéricamente usando algún esquema de diferencias finitas, tomando la malla generada por TFI como una aproximación inicial.

## 2.2 Funcional de Longitud

El funcional clásico de Longitud  $\Phi_l$  en su forma más simple se obtiene haciendo

$$\doteq \lambda L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) = x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2$$

Al obtener el mínimo del funcional

$$\Phi_l(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \lambda d\eta d\xi$$

se está tratando de obtener una malla que tenga la característica de que las longitudes de las líneas coordenadas sean lo más cercanas posibles a un mismo valor. De hecho este funcional se puede escribir como

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}_l) &= \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 J d\eta d\xi\end{aligned}$$

donde

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

es el jacobiano de la transformación  $\mathbf{x}$ . Como  $\int_0^1 \int_0^1 J d\eta d\xi = \text{Area}(\Omega)$ , el minimizar  $\Phi_l(\mathbf{x})$  es equivalente a minimizar

$$\int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi$$

esto es, el mínimo de  $\Phi(\mathbf{x})$  se consigue en una transformación que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$x_\xi = y_\eta \quad x_\eta = -y_\xi$$

en el sentido de los cuadrados mínimos. De hecho las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\Phi_l$  son

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= 0 \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

que no son otra cosa más que las ecuaciones de Laplace para las componentes de la transformación. En este caso las ecuaciones E-L son elípticas, lineales y no acopladas, el caso más simple que se presentará. El hecho de que un sistema sea elíptico garantiza que sus soluciones tienen derivadas continuas de más alto orden que las condiciones de frontera; por tanto si se eligen condiciones de frontera suaves, las soluciones del correspondiente problema elíptico serán suaves.

A pesar de la simplicidad de este funcional, las mallas producidas por él no son satisfactorias ya que para la mayoría de las regiones no convexas estas mallas son dobladas; esto es, no son 1-1. Sin embargo son muy suaves. A continuación (Figuras 2.1 y 2.2) se presentan las mallas producidas sobre las ocho regiones de prueba minimizando el funcional de longitud, usando el algoritmo de solución que aparece en [27].<sup>2</sup> El número de celdas no convexas se muestra en la tabla 2.1.

Tabla 2.1.- Número de celdas no convexas. Funcional continuo de longitud

Malla	Celdas no convexas
M12	28
M13	42
M19	78
M26	69
HAB	94
SUD	83
UCH	168
ENG	245

---

<sup>2</sup>Este algoritmo es muy veloz y converge bajo ciertas condiciones, ver nota en la sección correspondiente al funcional de área en este mismo capítulo

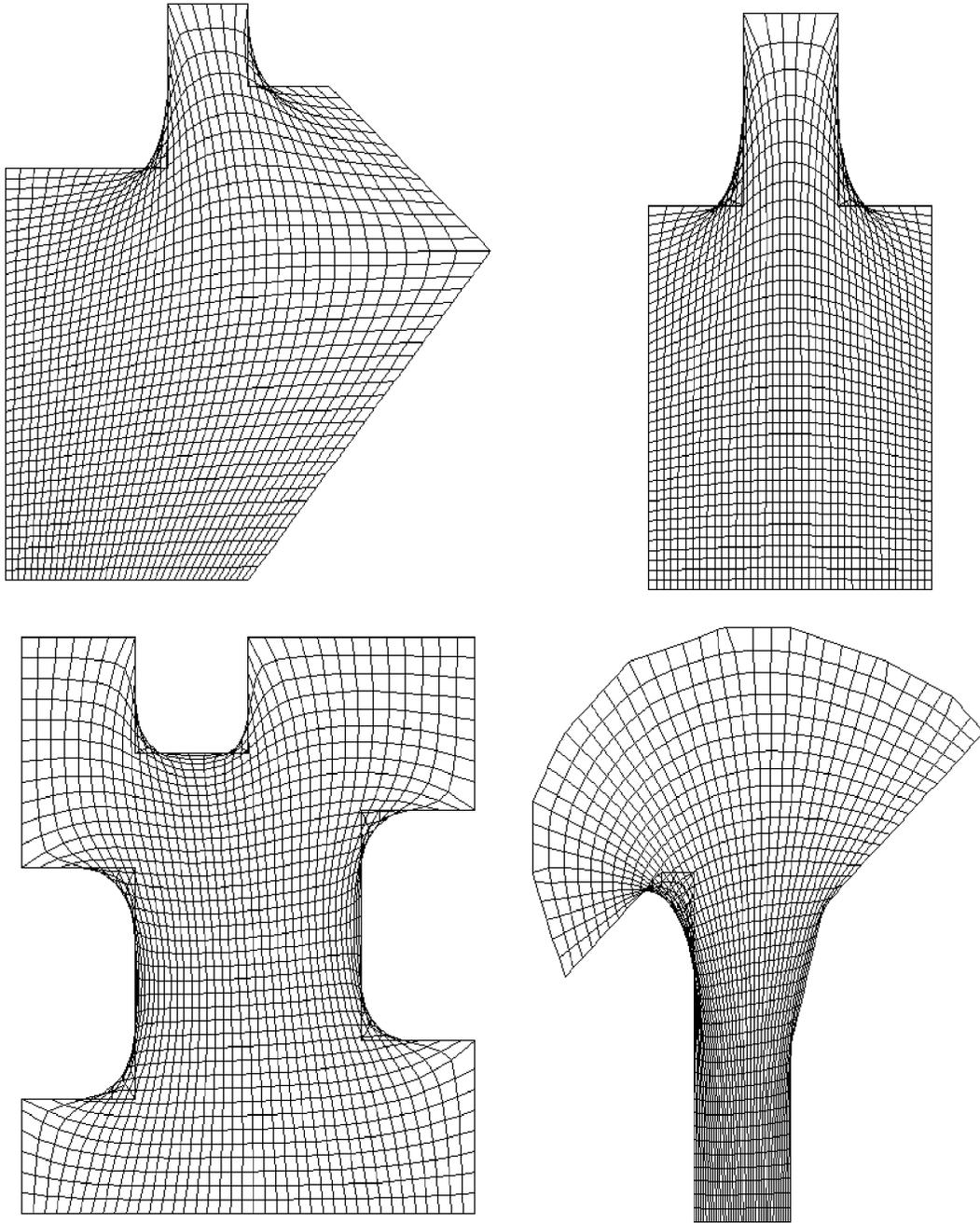


Figura 2.1.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional Continuo de Longitud. Regiones M12, M13, M19 y M26.

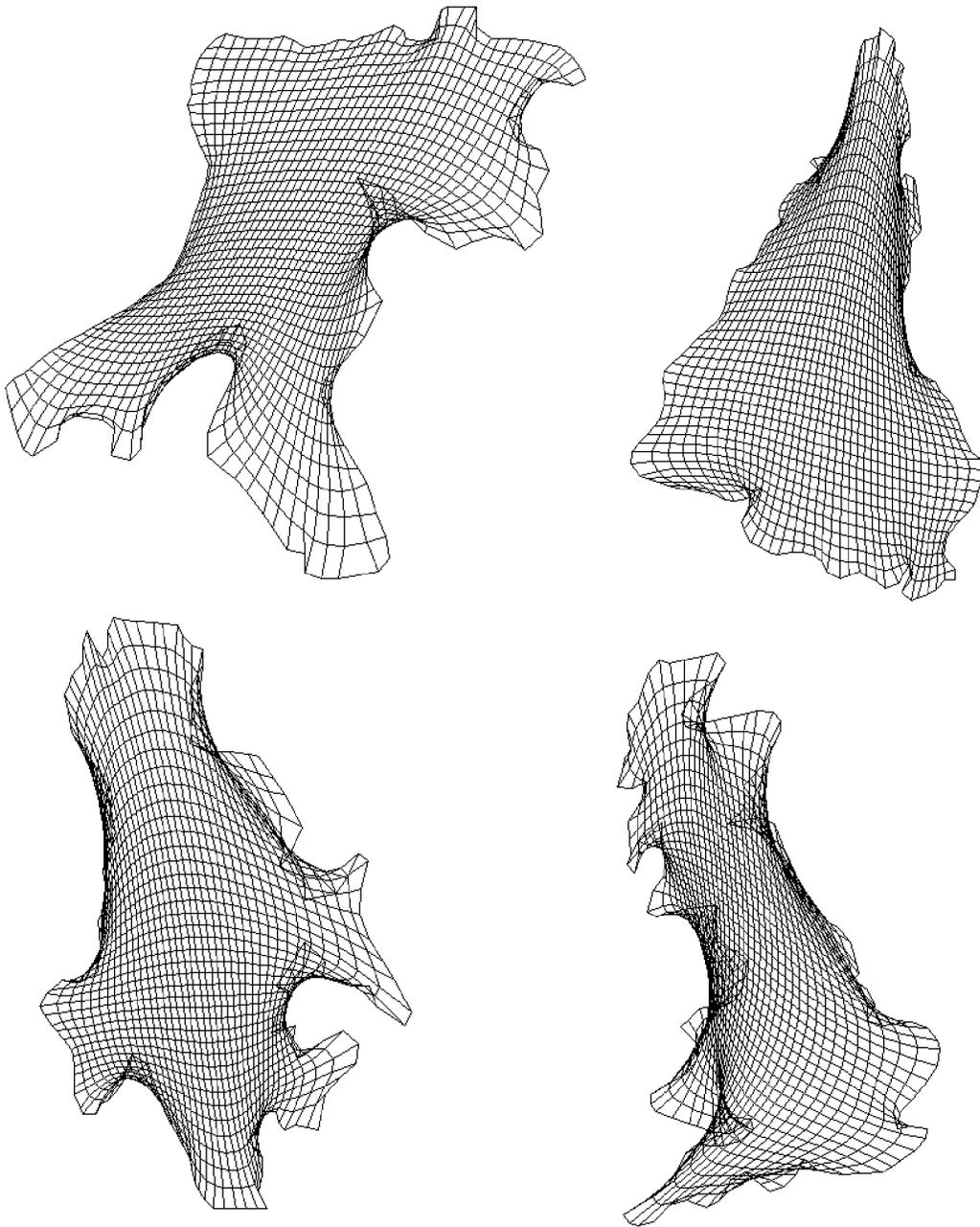


Figura 2.2.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional Continuo de Longitud. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

## 2.3 Funcional de Area

En su versión más simple, el funcional continuo de área  $\Phi_A$  está diseñado para producir mallas tales que la variación del jacobiano sea lo menor posible en el sentido de los cuadrados mínimos. Tiene la forma

$$\begin{aligned}\Phi_A(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\eta d\xi\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler-lagrange para este funcional son más complicadas que las correspondientes al funcional de longitud:

$$\begin{aligned}y_\eta^2 x_{\xi\xi} - x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} - x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} &= 0 \\ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + x_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0\end{aligned}$$

de hecho, son un sistema cuasilineal, acoplado y no elíptico. No hay hasta la fecha resultados de existencia o unicidad de las soluciones de este sistema. Las mallas producidas con este funcional no son suaves y, salvo en caso simples, son dobladas.

El algoritmo de solución de [27] no convergió para ninguna de las mallas de prueba.<sup>3</sup> Por esta razón y para fines de ilustración sólo se muestran algunas mallas producidas por el funcional de área en regiones simples (Figura 2.3), en ambos casos presentados las mallas iniciales ya son convexas y así lo son también las mallas óptimas. Se puede notar su falta de suavidad.

---

<sup>3</sup>No significa esto, sin embargo, que no se pueda encontrar la solución numérica. Cabe recordar que la solución numérica de ecuaciones diferenciales conlleva el resolver un sistema de ecuaciones, el algoritmo de Knupp y Steinberg converge para sistemas que sean diagonalmente dominantes; en otro caso, como lo aclaran los autores, se debe usar un algoritmo de solución de sistemas de propósito general.

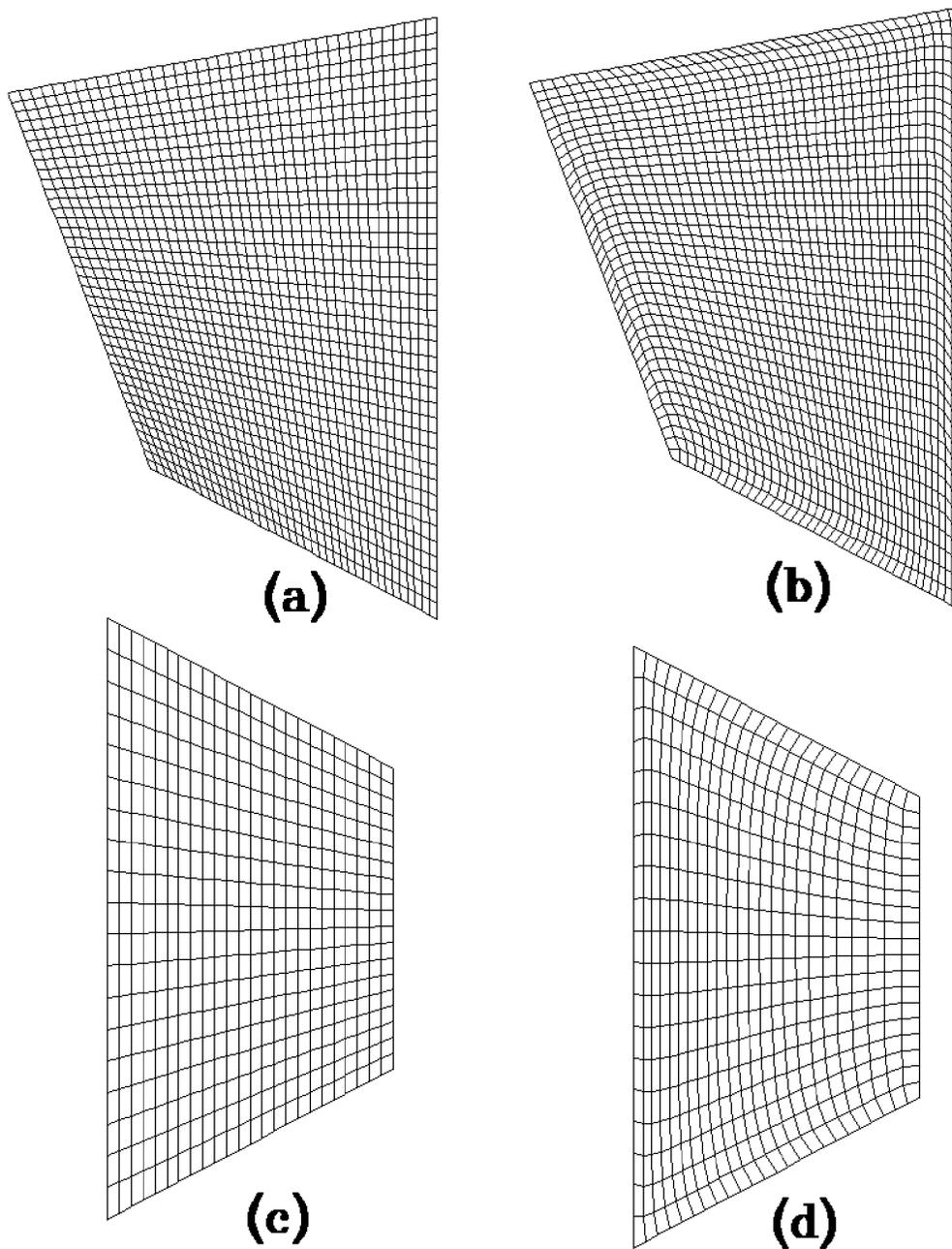


Figura 2.3.- Ejemplos de Mallas Generadas usando el Funcional Continuo de Area: (a) y (c) Mallas Iniciales, (b) y (d) Mallas Optimas.

## 2.4 Funcional de Ortogonalidad

El objetivo perseguido al usar este funcional es obtener mallas con líneas coordenadas que sean lo más ortogonal posible. Esto es equivalente a pedir que las tangentes a dichas líneas coordenadas sean ortogonales en cada punto, lo que se puede describir por la relación

$$O = \mathbf{x}_\xi^t \mathbf{x}_\eta = 0$$

Para la mayoría de las regiones no existe una malla que tenga esta característica; se trata entonces de calcular una lo más cercana posible a la ortogonalidad. Una manera de lograr ésto es calcular una malla que satisfaga estas condiciones de ortogonalidad en el sentido de los cuadrados mínimos; esto es, se calcula el mínimo de

$$\begin{aligned} \Phi_O(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{x}_\xi^t \mathbf{x}_\eta)^2 d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\eta d\xi \end{aligned}$$

Las ecuaciones E-L para este funcional son

$$\begin{aligned} x_\eta^2 x_{\xi\xi} + x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} + (4x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta) x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta} + x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} &= 0 \\ x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + y_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} + (4y_\xi y_\eta + 2x_\xi x_\eta) y_{\xi\eta} + x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

las cuales son nuevamente cuasilineales, acopladas y no elípticas. Muy frecuentemente su proceso de solución no converge; cuando lo hace, las mallas generadas son a menudo severamente dobladas y es por esta razón que el usar este funcional de manera aislada no es recomendable.

## 2.5 Combinación de Funcionales

Knupp y Steinberg ([27]) introducen el uso de combinaciones convexas de los funcionales anteriores con el objetivo de lograr mallas que gocen en cierta medida de las ventajas que ofrece cada funcional por separado. La forma general de esta combinación es

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sigma_l \Phi_l(\mathbf{x}) + \sigma_A \Phi_A(\mathbf{x}) + \sigma_O \Phi_O(\mathbf{x})$$

donde  $\sigma_l, \sigma_A, \sigma_O \geq 0$  y  $\sigma_l + \sigma_A + \sigma_O = 1$ .

La elección de los parámetros  $\sigma_l, \sigma_A$  y  $\sigma_O$  depende fuertemente en la experiencia personal y ésta es una grave limitante para el uso de esta combinación.

### 2.5.1 Funcionales de Area-Longitud

Las combinaciones con  $\sigma_O = 0$  y  $\sigma_l$  pequeño, que generan los llamados funcionales de área-longitud, son muy usados ya que para regiones no convexas, geoméricamente no muy complicadas, producen mallas convexas (no dobladas) y aceptablemente suaves; sin embargo para la mayoría de las regiones no simples, la convexidad no es alcanzada. Para varias de las regiones de prueba el proceso de solución de las ecuaciones diferenciales usando la técnica dada en [27] no convergió. Mostramos algunas mallas obtenidas con algún funcional de área-longitud (Figura 2.4). En la tabla 2.2 se reporta el número de celdas no convexas para estos ejemplos, así como los valores de  $\sigma_A$  correspondientes.

Tabla 2.2.- Número de celdas no convexas. Funcional continuo de área-longitud.

Malla	Celdas no convexas	$\sigma_A$
M12	7	.50
M13	14	.80
M19	44	.50
M26	40	.50

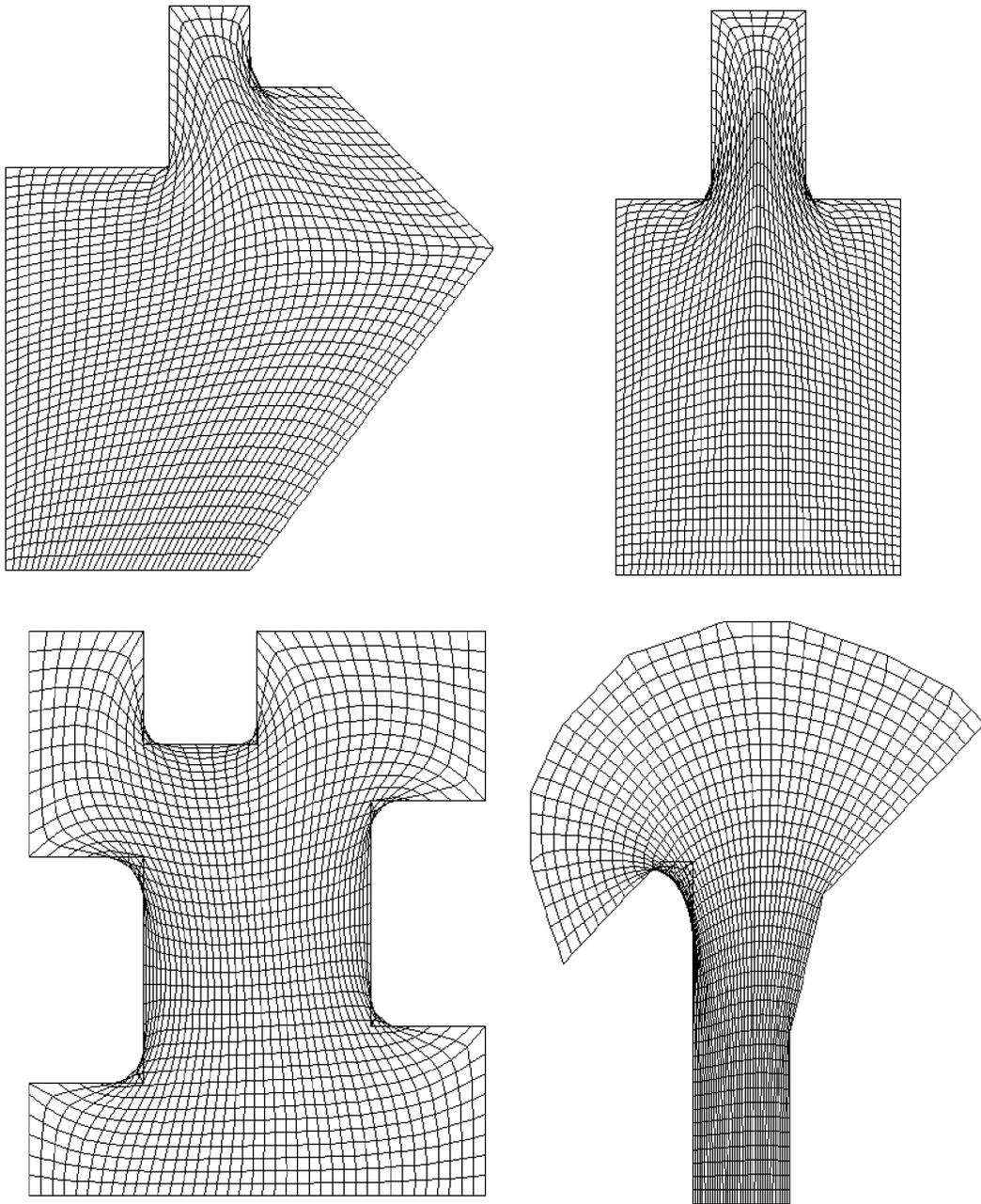


Figura 2.4.- Algunas Mallas Generadas Optimizando el Funcional Continuo de Area-Longitud

## 2.5.2 Funcional de Area-Ortogonalidad

Un generador que sí es automático (en el sentido de que no depende de parámetros) se obtiene haciendo

$$\sigma_I = 0 \quad \sigma_A = 1/2 \quad \sigma_O = 1/2$$

que dá lugar al llamado funcional de área-ortogonalidad de Knupp. Este tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{AO} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [J^2 + O^2] d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 + (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2] d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 y_\eta^2 + x_\eta^2 y_\xi^2 + x_\xi^2 x_\eta^2 + y_\xi^2 y_\eta^2) d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)] d\eta d\xi \end{aligned}$$

esto es,  $L$  se puede interpretar como producto de los cuadrados de los segmentos "verticales" y "horizontales". Las ecuaciones E-L correspondientes son

$$\begin{aligned} (x_\eta^2 + y_\eta^2)x_{\xi\xi} + 4x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + 2(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)x_{\eta\eta} &= 0 \\ (x_\eta^2 + y_\eta^2)y_{\xi\xi} + 2(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)x_{\xi\eta} + 4y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

El diseño de este funcional fué un verdadero éxito en la generación de mallas ya que a pesar de que las ecuaciones E-L no siempre son elípticas ([27]), las mallas producidas por el funcional de área-ortogonalidad son suaves. También se logra convexidad si la región es relativamente simple, se tiene una variación relativamente baja del jacobiano y las mallas óptimas son casi ortogonales. Se muestran algunas mallas óptimas en las figuras 2.5 y 2.6. En la tabla 2.3 se lista el número de celdas no convexas para cada una de ellas.

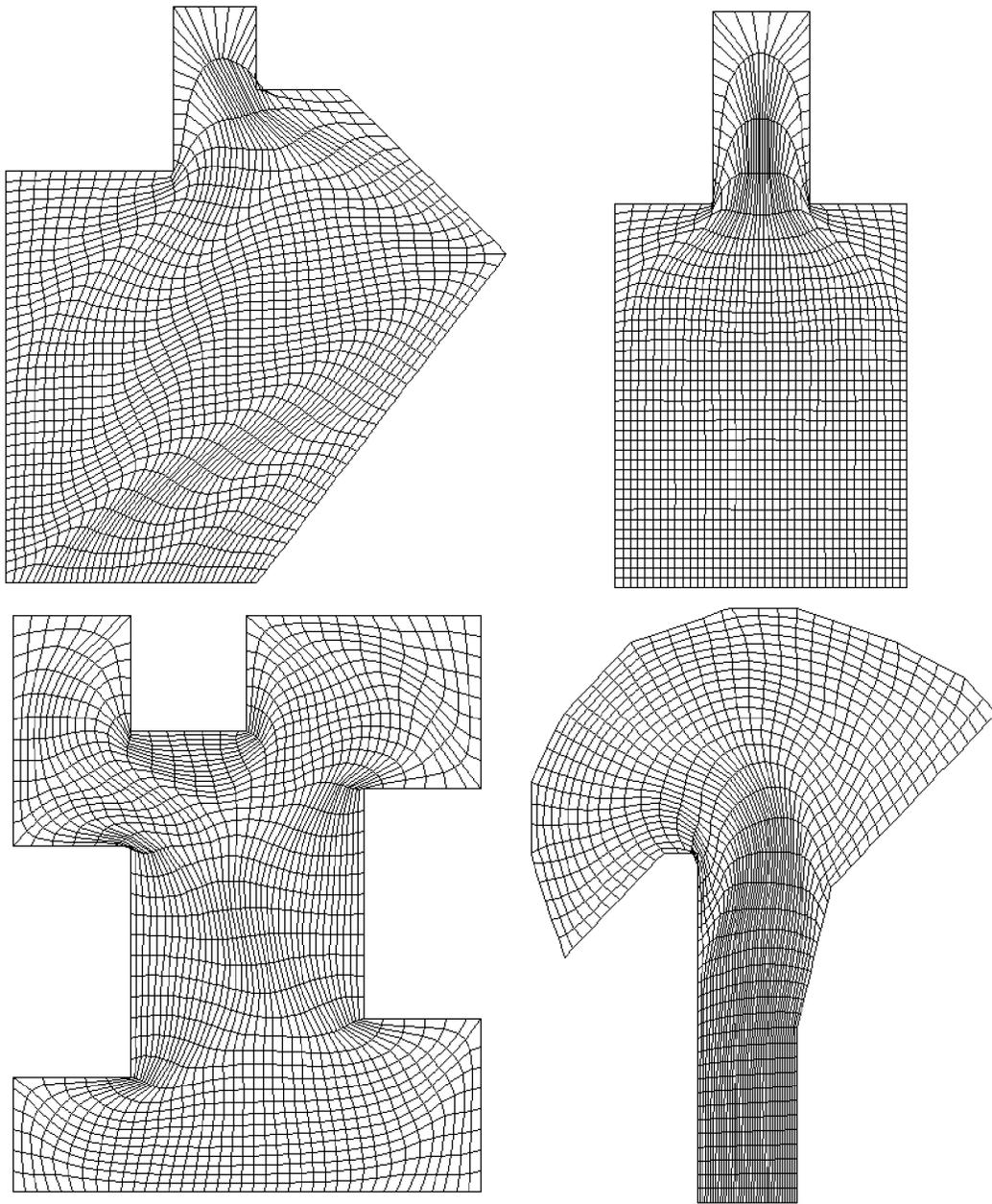


Figura 2.5.- Mallas Optimas para el Funcional Continuo de Area-Ortogonalidad. Regiones M12, M13, M19 y M26

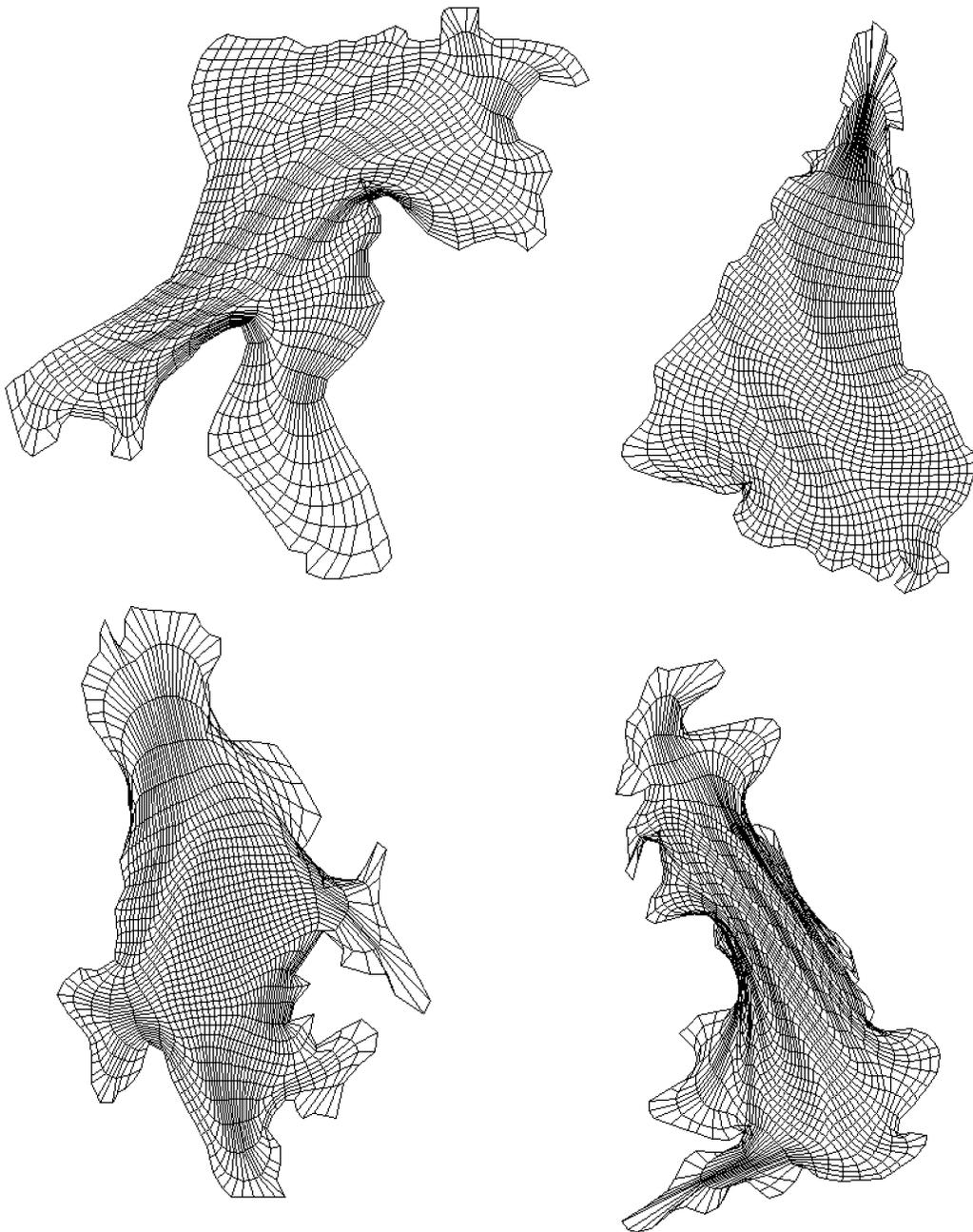


Figura 2.6.- Mallas Optimas para el Funcional Continuo de Area-Ortogonalidad.  
Regiones HAB, SUD, UCH y ENG

Tabla 2.3.- Número de celdas no convexas. Funcional continuo de área-ortogonalidad

Malla	Celdas no convexas
M12	3
M13	2
M19	2
M26	2
HAB	12
SUD	12
UCH	32
ENG	80

## 2.6 Funcional de Suavidad

El funcional de longitud definido para la transformación inversa

$$\xi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\xi : \Omega \rightarrow U_2$$

está dado por

$$\int \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dy dx$$

el cual, al hacer el cambio de coordenadas hacia el espacio lógico (esto es, integrando sobre el cuadrado unitario), se escribe como

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_{\xi}^2 + x_{\eta}^2 + y_{\xi}^2 + y_{\eta}^2}{J} d\eta d\xi$$

Este es el funcional de suavidad de Winslow, también referido como el funcional Thompson-Thames-Mastin homogéneo (TTM). Las ecuaciones de Euler Lagrange para este funcional son las ecuaciones de Laplace para la transformación inversa

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

que, sin embargo, no son fácilmente resueltas de esta manera. En lugar de éstas se resuelven las correspondientes al mapeo directo, las cuales son cuasilineales y acopladas:

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= 0 \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \\ g_{12} &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ g_{22} &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \end{aligned}$$

Este funcional, al igual que los anteriores, tiene la desventaja de que a menudo no converge a una malla convexa. Sin embargo debe hacerse la aclaración que el uso de este funcional usualmente se restringe a mejorar, en lo que a suavidad se refiere, una malla que se ha optimizado por otros métodos. En este sentido solo se realizan unas cuantas iteraciones del proceso de optimización del funcional de suavidad. Se muestran algunas mallas generadas con este funcional (Figuras 2.7 y 2.8). El número de celdas no convexas para cada una de ellas se muestra en la tabla 2.4.

Tabla 2.4.- Número de celdas no convexas. Funcional continuo de suavidad

Malla	Celdas no convexas
M12	6
M13	6
M19	11
M26	1
HAB	21
SUD	18
UCH	30
ENG	64

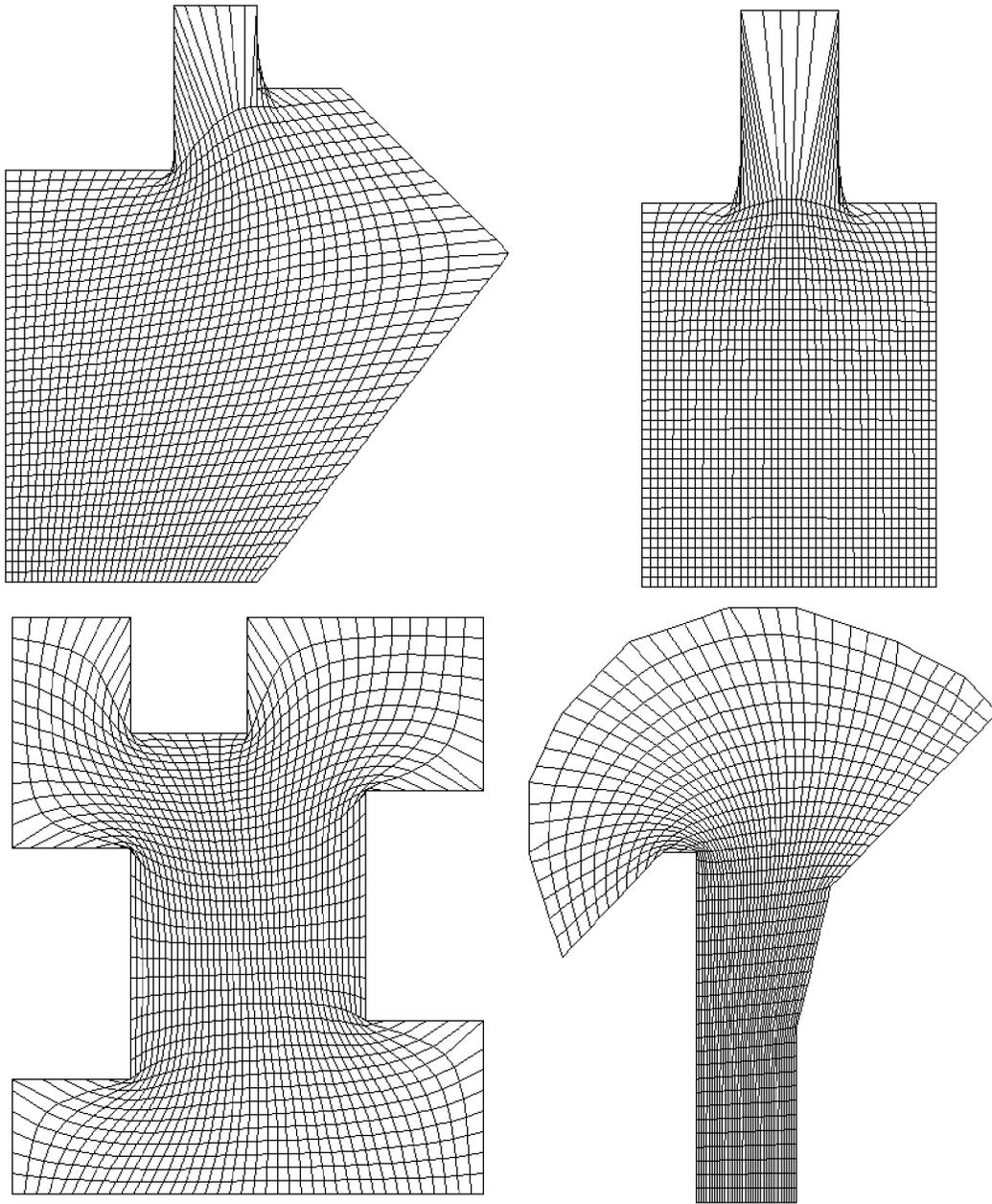


Figura 2.7.- Mallas Optimas Generadas Usando el Funcional Continuo de Suavidad. Regiones M12, M13, M19 y M26

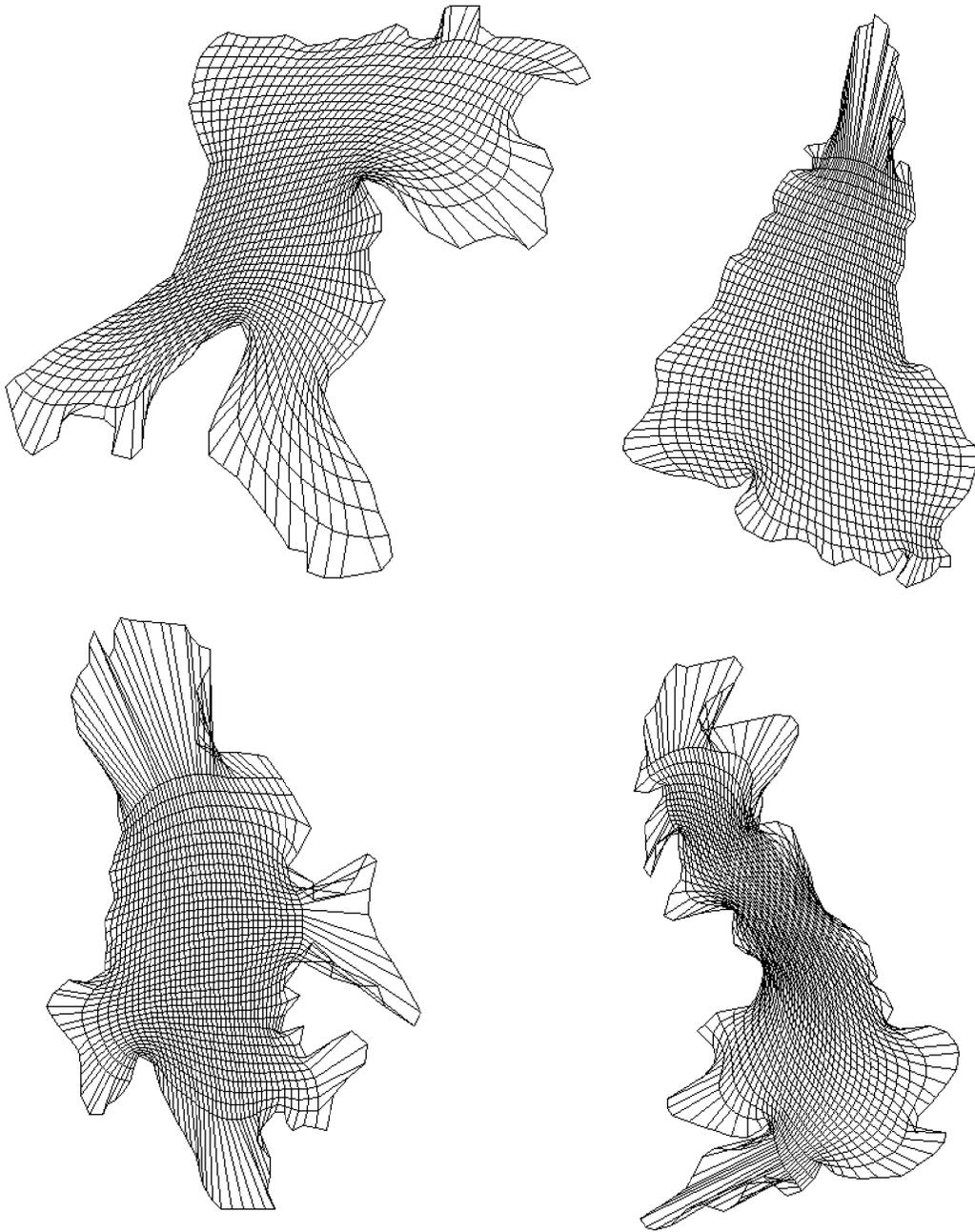


Figura 2.8.- Mallas Optimas Generadas Usando el Funcional Continuo de Suavidad.  
Regiones HAB, SUD, UCH y ENG

# CAPITULO 3

## Generación Variacional Discreta

### 3.1 Introducción

En los métodos variacionales continuos la generación de mallas se realiza resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al funcional a minimizar. Esta solución se realiza de manera numérica eligiendo una malla sobre el cuadrado unitario; es decir, puntos

$$(\xi_i, \eta_j) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y aplicando un esquema de diferencias finitas para obtener aproximaciones  $P_{i,j}$  a los valores de  $\mathbf{x}(\xi_i, \eta_j)$ .

Como vía alternativa, varios autores (entre ellos Castillo ([8],[9], [10], [11], [12]), Ivanenko ([25], [26]) y Barrera ([2], [5]) han propuesto realizar primeramente la discretización del funcional a minimizar y después resolver el correspondiente problema de optimización multivariada. Para ser más preciso, el funcional continuo

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi$$

se reemplaza por una función de mn variables

$$\{P_{i,j}\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$F(P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{i,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,1}, P_{m,2}, \dots, P_{m,n}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j}$$

donde  $f_{i,j}$  es una aproximación al valor de L en la celda del cuadrado unitario definida por los puntos

$$(\xi_{i-1}, \eta_{j-1}), (\xi_{i-1}, \eta_j), (\xi_i, \eta_j), (\xi_i, \eta_{j-1})$$

los puntos

$$\{P_{1,j}\}, \{P_{m,j}\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \{P_{i,1}\}, \{P_{i,n}\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

son los valores correspondientes al mapeo  $\mathbf{x}$  en los puntos frontera del cuadrado unitario

$$\begin{aligned} \{\xi_1, \eta_j\}, \quad \{\xi_m, \eta_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \{\xi_i, \eta_1\}, \quad \{\xi_i, \eta_n\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

que están fijos y los puntos interiores

$$\{P_{i,j}\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1$$

que son las imágenes bajo el mapeo buscado  $\mathbf{x}$  de los puntos del cuadrado unitario

$$\{(\xi_i, \eta_j)\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1$$

se calculan de tal forma que hagan mínimo a  $F$ .

Esta minimización de  $F$  se realiza partiendo de una malla inicial, generalmente generada por la versión discreta de TFI. Se usa un método de optimización multivariada de gran escala, por ejemplo L-BFGS ó Newton truncado. Los resultados reportados en este trabajo se obtuvieron utilizando el Método de Newton truncado con búsqueda en la línea de Moré-Thuente, el cual ha probado ser muy efectivo para esta aplicación (Ver Apéndice A y [7]).

Cabe mencionar que aunque los métodos discretos clásicos se obtienen a partir de la discretización del correspondiente funcional continuo, también se puede pensar en generar funcionales discretos directamente; es decir, proponer una cantidad geométrica que se quiera minimizar sobre cada celda de la malla.

## 3.2 Discretización de Castillo

En 1987, Castillo ([8]), propone la primera discretización para los funcionales continuos de área y longitud. Los funcionales discretos correspondientes se construyen sustituyendo las cantidades

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \\ \lambda &= x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 \end{aligned}$$

en cada celda  $\square PQRS$  de la malla por

$$\alpha^{(C)}(PQRS) = Area(\square PQRS)$$

$$l^{(C)} PQRS = \| P - Q \|^2 + \| R - S \|^2 + \| Q - R \|^2 + \| P - S \|^2$$

respectivamente, lo que da lugar a las funciones multivariadas (funcionales discretos)

$$F_{A_C} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \alpha_{i,j}^{(C)} \right)^2$$

$$F_{l_C} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} l_{i,j}^{(C)}$$

donde

$$\alpha_{i,j}^{(C)} = \alpha^{(C)} (P_{i+1,j+1} P_{i,j+1} P_{i,j} P_{i+1,j})$$

$$l_{i,j}^{(C)} = l^{(C)} (P_{i+1,j+1} P_{i,j+1} P_{i,j} P_{i+1,j})$$

y, como ya se mencionó, se obtiene la malla óptima resolviendo el problema de minimización multivariada correspondiente.

En su trabajo, Castillo demuestra entre otros resultados, los siguientes:

1. La Hessiana del funcional de longitud es positiva definida en todo punto. Esto conduce a concluir que el mínimo de este funcional es único.
2. Si existe una malla tal que las áreas de todas sus celdas sean iguales, entonces esta malla es un punto crítico para el gradiente del funcional de área. Aún más la hessiana de este funcional evaluada en dicha malla es semipositiva definida. En el capítulo 5. se demuestran resultados que generalizan los anteriores.

Como veremos más adelante, el funcional de longitud de Castillo es el mismo que se obtiene al usar la discretización propuesta por Barrera y Pérez. Por esta razón no se presentan en esta sección resultados para este funcional.

Por otro lado, el funcional de área de Castillo no es equivalente al funcional de área de Barrera y Pérez. A reserva de presentar más adelante los resultados correspondientes para nuestras mallas de prueba, se puede mencionar aquí que no siempre la malla óptima para el funcional de área de Castillo es convexa, aún cuando las áreas de todas las celdas de la malla sean positivas e iguales. Esto lo ilustra el siguiente ejemplo, en el cual la malla óptima tiene todas sus celdas de igual área, sin embargo no es convexa.

## Ejemplo 1 ([2])

Considérese la región cuya frontera está dada por el segmento de  $(0,0)$  a  $(2,0)$ , el segmento de  $(2,0)$  a  $(2,2)$ , el segmento de  $(2,2)$  a  $(1, \delta)$ , el segmento de  $(1, \delta)$  a  $(0,2)$  y el segmento de  $(0,2)$  a  $(0,0)$ , donde  $\delta$  es una constante positiva. Para generar mallas de tres por tres en esta región, háganse corresponder los puntos  $(0,0)$ ,  $(.5,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,.5)$ ,  $(1,1)$ ,  $(.5,1)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,.5)$  del cuadrado unitario, respectivamente a  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,\beta)$ ,  $(2,2)$ ,  $(1,\delta)$ ,  $(0,2)$  y  $(0, \beta)$  donde  $\beta$  es una constante entre 0 y 2.

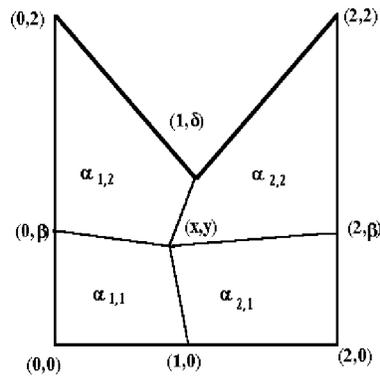


Figura 3.1.- Región de ejemplo para el Funcional de Área de Castillo

El problema de generación de mallas se reduce a calcular el punto  $(x, y)$  tal que  $F_{AC}$  sea un mínimo. Con referencia a la figura, se ve fácilmente que

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1} &= \frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{2}y \\ \alpha_{2,1} &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\beta(2-x) \\ \alpha_{1,2} &= 1 + \frac{1}{2}(\delta - \beta)x - \frac{1}{2}y \\ \alpha_{2,2} &= 1 + \frac{1}{2}(\delta - \beta)(2-x) - \frac{1}{2}y\end{aligned}$$

Ahora bien

$$F_{AC} = \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{1,2}^2 + \alpha_{2,1}^2 + \alpha_{2,2}^2$$

y las condiciones para un punto crítico

$$\frac{\partial F_{AC}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F_{AC}}{\partial y} = 0$$

conducen a  $x = 1$ ,  $y = 1 - \beta + \frac{\delta}{2}$ . Si se toman  $\delta, \beta$  tales que

$$1 - \beta + \frac{\delta}{2} > \delta$$

se tendrá el óptimo del funcional de área de Castillo en una malla no convexa. Por ejemplo, la siguiente figura corresponde a la malla óptima cuando  $\beta = .25$   $\delta = 1$ .

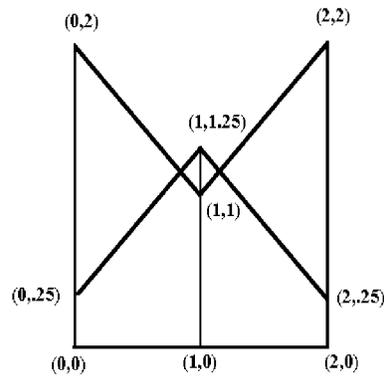


Figura 3.2.- Malla óptima para  $\beta = .25$  y  $\delta = 1$

Aquí no todas las celdas de la mallas son convexas; sin embargo, sus áreas son todas iguales a  $3/4$ .

---

### 3.3 Discretización de Barrera-Pérez

En esta sección se usa una forma de discretizar un funcional continuo que conducirá a obtener la forma general para un funcional discreto que se usará durante todo este trabajo ([25], [26], [2], [5]). Para esta discretización se utiliza el mapeo bilineal, el cual es descrito en la primera parte de esta sección; esto permitirá establecer un control más fuerte sobre las propiedades de cada celda de la malla, que el que se ejerce con discretizaciones más sencillas. De hecho, se ejercerá control sobre cada triángulo de la celda.

#### 3.3.1 El Mapeo Bilineal

Considérese el mapeo más simple que transforma el cuadrado unitario en un cuadrilátero  $PQRS$  cualquiera.

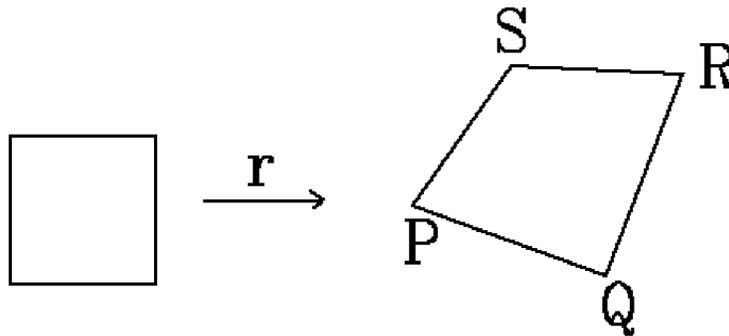


Figura 3.3.- El Mapeo Bilineal

éste el llamado mapeo bilineal, dado por

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = A + B\xi + C\eta + D\xi\eta$$

donde  $A, B, C, D$  son puntos tales que

$$\mathbf{r}(0, 0) = P \quad \mathbf{r}(1, 0) = Q \quad \mathbf{r}(0, 1) = S \quad \mathbf{r}(1, 1) = R$$

condiciones que conducen a

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = P + (Q - P)\xi + (S - P)\eta + (R - Q + P - S)\xi\eta$$

De esta expresión se obtiene

$$\mathbf{r}_\xi(\xi, \eta) = (Q - P) + (R - Q + P - S)\eta$$

$$\mathbf{r}_\eta(\xi, \eta) = (S - P) + (R - Q + P - S)\xi$$

de lo cual se llega a

$$\mathbf{r}_\xi(0,0) = Q - P \quad \mathbf{r}_\xi(1,0) = Q - P \quad \mathbf{r}_\xi(0,1) = R - S \quad \mathbf{r}_\xi(1,1) = R - S$$

$$\mathbf{r}_\eta(0,0) = S - P \quad \mathbf{r}_\eta(1,0) = R - Q \quad \mathbf{r}_\eta(0,1) = S - P \quad \mathbf{r}_\eta(1,1) = R - Q$$

esto es, las derivadas parciales respecto a  $\xi$  en los cuatro vértices del cuadrado se expresan en función de los segmentos "horizontales"  $Q - P$  y  $R - S$  sóloamente. Similarmente, las derivadas parciales respecto a  $\eta$  dependen sólo de los segmentos "verticales"  $S - P$  y  $R - Q$ .

También se puede observar que  $\mathbf{r}_\xi(0,0)$  y  $\mathbf{r}_\eta(0,0)$  se expresan sólo en términos de los puntos S,P,Q; esto es, son función del triángulo  $\Delta SPQ$ . Similarmente  $\mathbf{r}_\xi(1,0)$  y  $\mathbf{r}_\eta(1,0)$  son función del  $\Delta PQR$ ;  $\mathbf{r}_\xi(0,1)$  y  $\mathbf{r}_\eta(0,1)$  son función del  $\Delta RSP$  y  $\mathbf{r}_\xi(1,1)$  y  $\mathbf{r}_\eta(1,1)$  dependen del  $\Delta QRS$ .

El jacobiano para el mapeo bilineal es

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \\ &= \mathbf{r}_\xi^t J_2 \mathbf{r}_\eta \end{aligned}$$

donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$J(0,0) = (Q - P)^t J_2 (S - P) = 2 \text{ Area}(\Delta SPQ)$$

$$J(1,0) = (Q - P)^t J_2 (R - Q) = 2 \text{ Area}(\Delta PQR)$$

$$J(0,1) = (R - S)^t J_2 (S - P) = 2 \text{ Area}(\Delta RSP)$$

$$J(1,1) = (R - S)^t J_2 (R - Q) = 2 \text{ Area}(\Delta QRS)$$

y si se define

$$\boxed{\alpha(\Delta A_1 A_2 A_3) = (A_3 - A_2)^t J_2 (A_1 - A_2)}$$

es posible escribir

$$J(0,0) = \alpha(\Delta SPQ)$$

$$J(1,0) = \alpha(\Delta PQR)$$

$$J(0,1) = \alpha(\Delta RSP)$$

$$J(1,1) = \alpha(\Delta QRS)$$

Nótese que  $\alpha(\Delta SPQ)$  es el doble del área del triángulo orientado  $\Delta SPQ$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lambda &= x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ &= \|\mathbf{r}_\xi\|^2 + \|\mathbf{r}_\eta\|^2 \end{aligned}$$

por lo cual

$$\lambda(0,0) = \|Q - P\|^2 + \|S - P\|^2$$

$$\lambda(1,0) = \|Q - P\|^2 + \|R - Q\|^2$$

$$\lambda(0,1) = \|R - S\|^2 + \|S - P\|^2$$

$$\lambda(1,1) = \|R - S\|^2 + \|R - Q\|^2$$

y si se define

$$l(\Delta A_1 A_2 A_3) = \|A_1 - A_2\|^2 + \|A_3 - A_2\|^2$$

la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados  $A_1 A_2$  y  $A_2 A_3$  del  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , se tendrá

$$\lambda(0,0) = l(\Delta SPQ)$$

$$\lambda(1,0) = l(\Delta PQR)$$

$$\lambda(0,1) = l(\Delta RSP)$$

$$\lambda(1,1) = l(\Delta QRS)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} O &= \mathbf{r}_\xi^t \mathbf{r}_\eta \\ &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \end{aligned}$$

por lo cual

$$O(0,0) = (Q - P)^t (S - P)$$

$$O(1,0) = (Q - P)^t (R - Q)$$

$$O(0,1) = (R - S)^t (S - P)$$

$$O(1,1) = (R - S)^t (R - Q)$$

y definiendo

$$o(\Delta A_1 A_2 A_3) = (A_1 - A_2)^t (A_3 - A_2)$$

el producto interno de los vectores  $(A_1 - A_2)$  y  $(A_3 - A_2)$ , es posible escribir

$$O(0,0) = o(\Delta SPQ)$$

$$O(1,0) = o(\Delta PQR)$$

$$O(0,1) = o(\Delta RSP)$$

$$O(1,1) = o(\Delta QRS)$$

### 3.3.2 La discretización

Como ya fue mencionado, cada funcional continuo

$$\int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^1 L(\mathbf{x}_\xi, \mathbf{x}_\eta) d\eta d\xi$$

será sustituido por una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j}$$

Si se denotan los vértices de la celda  $i,j$ -ésima de la malla por

$$P_{i,j}, Q_{i,j}, R_{i,j}, S_{i,j}$$

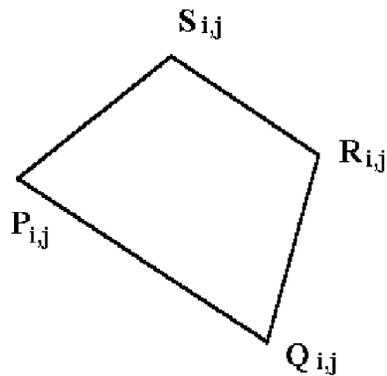


Figura 3.4.- Celda  $i,j$

se usará

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}[L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(0,0), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(0,0)) + L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(1,0), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(1,0)) \\ + L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(0,1), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(0,1)) + L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(1,1), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(1,1))]$$

donde

$$\mathbf{r}^{i,j} : U_2 \rightarrow \square(P_{i,j}, Q_{i,j}, R_{i,j}, S_{i,j})$$

es el mapeo bilineal asociado al cuadrilátero  $\square(P_{i,j}, Q_{i,j}, R_{i,j}, S_{i,j})$ .

Convéngase en denotar

$$\Delta S_{i,j}P_{i,j}Q_{i,j} = \Delta_{i,j}^{(1)}$$

$$\Delta Q_{i,j}R_{i,j}S_{i,j} = \Delta_{i,j}^{(2)}$$

$$\Delta P_{i,j}Q_{i,j}R_{i,j} = \Delta_{i,j}^{(3)}$$

$$\Delta R_{i,j}S_{i,j}P_{i,j} = \Delta_{i,j}^{(4)}$$

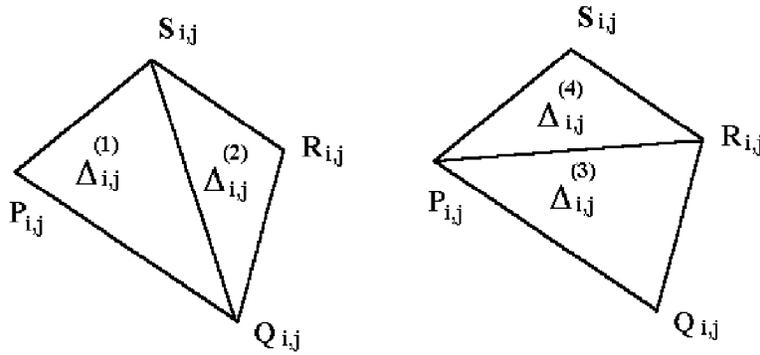


Figura 3.5.- Los cuatro triángulos de la celda  $i, j$

De acuerdo a lo observado en la sección anterior, es válido denotar

$$f(\Delta_{i,j}^{(1)}) = f(\Delta S_{i,j}P_{i,j}Q_{i,j}) = L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(0,0), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(0,0))$$

$$f(\Delta_{i,j}^{(3)}) = f(\Delta P_{i,j}Q_{i,j}R_{i,j}) = L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(1,0), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(1,0))$$

$$f(\Delta_{i,j}^{(4)}) = f(\Delta R_{i,j}S_{i,j}P_{i,j}) = L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(0,1), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(0,1))$$

$$f(\Delta_{i,j}^{(2)}) = f(\Delta Q_{i,j}R_{i,j}S_{i,j}) = L(\mathbf{r}_\xi^{i,j}(1,1), \mathbf{r}_\eta^{i,j}(0,1))$$

Entonces la forma general de un funcional discreto es

$$F = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=1}^4 f(\Delta_{i,j}^{(p)})$$

Aún más, si se introduce el vector simbólico

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( \delta_{1,1}^t, \delta_{1,2}^t, \dots, \delta_{1,n-1}^t, \delta_{2,1}^t, \delta_{2,2}^t, \dots, \delta_{2,n-1}^t, \dots, \delta_{m-1,1}^t, \delta_{m-1,2}^t, \dots, \delta_{m-1,n-1}^t \right)^t \\ &= (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q, \dots, \Delta_N)^t \end{aligned}$$

donde

$$\delta_{i,j} = \left( \Delta_{i,j}^{(1)}, \Delta_{i,j}^{(2)}, \Delta_{i,j}^{(3)}, \Delta_{i,j}^{(4)} \right)^t$$

entonces

$$F = \sum_{q=1}^N f(\Delta_q) \quad N = 4(m-1)(n-1)$$

Cabe aquí remarcar que las variables en que depende el funcional  $F$  son los puntos interiores de la malla

$$P_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})^t \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1$$

Es pues una función de  $2(m-2)(n-2)$  variables reales. Sea

$$\mathbf{z} = (P_{2,2}^t, P_{2,3}^t, \dots, P_{2,n-1}^t, P_{3,2}^t, P_{3,3}^t, \dots, P_{3,n-1}^t, \dots, P_{m-1,2}^t, P_{m-1,3}^t, \dots, P_{m-1,n-1}^t)^t$$

entonces finalmente se escribe el funcional discreto general como

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{q=1}^N f(\Delta_q)$$

Es también conveniente para una malla discreta  $G$ , introducir las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta_q) &= \alpha_q \\ \alpha_{-t} &= \min\{\alpha_q; q = 1, 2, \dots, N\} \\ \alpha_{+t} &= \max\{\alpha_q; q = 1, 2, \dots, N\} \\ \alpha_{-C} &= \min_{i,j} \{Area(C_{i,j}); C_{i,j} \text{ celda } i,j \text{ de } G\} \\ \alpha_{+C} &= \max_{i,j} \{Area(C_{i,j}); C_{i,j} \text{ celda } i,j \text{ de } G\} \\ \bar{\alpha} &= \frac{Area(\Omega)}{(m-1)(n-1)} \end{aligned}$$

Estas cantidades serán muy usadas en la formulación de propiedades de los funcionales, así como en la interpretación de resultados. En particular  $\bar{\alpha}$  es el promedio de las áreas de las celdas de  $G$  y también el promedio de los valores de  $\alpha_q$ . Si no hay lugar a confusión se denotará simplemente  $\alpha_-$  y  $\alpha_+$  en lugar de  $\alpha_{-t}$  y  $\alpha_{+t}$ , respectivamente.

### 3.4 Normalización de los Funcionales

Una cuestión de fundamental importancia en un proceso de optimización es decidir cuándo se ha logrado convergencia. Es común detener el proceso cuando el gradiente de la función o la diferencia entre valores sucesivos de la función sean pequeños. Estos criterios son útiles cuando se conoce el rango de variación de la función o del gradiente. Ahora bien, los funcionales que nos ocupan tienen un orden de magnitud diferente dependiendo del tamaño de la malla y del funcional en sí. Con el fin de establecer criterios estándar de convergencia para todos los funcionales, se tendrá que hacer que su orden de magnitud sea comparable. Una forma de lograr esto es considerar una malla ideal para cada funcional y expresar el valor de éste en términos relativos al valor ideal. Si  $G^*$  es una malla ideal para el funcional  $F$ ; esto es,  $G^*$  es una malla para la cual  $F$  toma su mínimo global, se calcula

$$K = F(G^*)$$

y se considera el funcional

$$\hat{F} = \frac{F}{K}$$

A este nuevo funcional  $\hat{F}$  se le puede aplicar el proceso de optimización con algún criterio de convergencia común para todos los funcionales. En lo que sigue, se dará siempre el valor de  $K$  y, aunque a veces no se mencione explícitamente, los resultados se darán respecto al funcional normalizado correspondiente  $\hat{F}$ . Este proceso de normalización es útil también cuando se forman combinaciones de diferentes funcionales.

### 3.5 Funcional de Longitud

La forma más simple del funcional discreto de longitud es

$$\sum_{q=1}^N l(\Delta_q) = \sum_{q=1}^N l_q$$

la cual será usada para mantener la discusión lo más elemental posible y debido a que al ser usada en combinación con otros funcionales que serán desarrollados, proporciona muy buenos resultados. Una versión más general es propuesta en [5] y [2]. Nótese que  $l_q$  es la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo que forman parte de líneas coordenadas de la malla, no toma en cuenta el tercer lado, el cual es la diagonal de la celda.

Para normalizar este funcional, escríbase  $\sum_{q=1}^N l_q$  como

$$\sum_{q=1}^N [l_q - 2\alpha_q] + 2 \sum_{q=1}^N \alpha_q$$

y como  $\sum_{q=1}^N \alpha_q = 4Area(\Omega)$  entonces minimizar  $\sum_{q=1}^N l_q$  es equivalente a minimizar

$$\sum_{q=1}^N [l_q - 2\alpha_q]$$

Ahora bien, si se considera un triángulo con vértices  $cab$ , donde  $\bar{ca}$  y  $\bar{ab}$  son segmentos de la malla, entonces

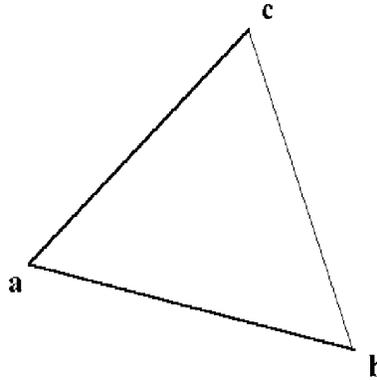


Figura 3.6.- Un triángulo en la Malla.  $\bar{ca}$  y  $\bar{ab}$  son parte de líneas coordenadas y  $\bar{cb}$  es una diagonal de la celda

$$\begin{aligned} l(\Delta) - 2\alpha(\Delta) &= \|c - a\|^2 + \|b - a\|^2 - 2(b - a)^t J_2(c - a) \\ &= \|J_2(c - a)\|^2 + \|b - a\|^2 - 2(b - a)^t J_2(c - a) \\ &= \|(b - a) - J_2(c - a)\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, una malla ideal para el funcional de longitud es aquella para la cual

$$[l_q - 2\alpha_q] = 0$$

Por esta razón la constante de normalización es

$$\begin{aligned} K &= 8Area(\Omega) \\ &= 8(m - 1)(n - 1)\bar{\alpha} \\ &= 2N\bar{\alpha} \end{aligned}$$

El funcional de longitud en su forma normalizada será entonces

$$F_l = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l_q$$

$F_l$  es un funcional cuadrático, lo que conlleva a que su optimización sea muy eficiente. También tiene la propiedad de que su hessiana es positiva definida en todas partes ([5]), lo cual garantiza la existencia de un único mínimo.

A continuación (Tabla 3.1) se muestran resultados obtenidos a partir de las ocho mallas de prueba de dimensión 40 por 40 generadas por TFI. Los datos reportados son los siguientes:

It	Número de iteraciones necesarias para llegar al óptimo
nc	Número de celdas no convexas de la malla óptima
$\sigma^2$	Variancia de las áreas de los triángulos de la malla óptima normalizadas usando el valor de $\bar{\alpha}$
longi	Valor del funcional discreto de longitud

También se reportan las cantidades  $\alpha_-, \alpha_+, \alpha_{-C}, \alpha_{+C}$  las cuales están normalizadas usando el valor  $\bar{\alpha}$ .

Como puede notarse:

1. Las mallas óptimas son muy suaves.
2. El número de iteraciones necesarias es bajo en relación al funcional de área, como se verá posteriormente.
3. Las mallas óptimas son frecuentemente no convexas.
4. Los resultados son muy parecidos a los obtenidos usando el Algoritmo de Knupp-Steinberg para resolver numéricamente las ecuaciones E-L del funcional continuo de longitud (Ver figuras 2.1 y 2.2).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Cabe hacer la aclaración que, en este caso, la optimización del funcional discreto es más lenta que la solución de las correspondientes ecuaciones en el caso continuo. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones que resulta al discretizar las ecuaciones E-L es diagonalmente dominante, lo cual es común cuando las ecuaciones diferenciales son elípticas. Sin embargo, el Algoritmo de Knupp-Steinberg deja de ser tan efectivo cuando no se tiene la característica de elipticidad

Tabla 3.1.- Resultados para el Funcional de Longitud

Malla	nc	it	$\alpha_{-t}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	27	8	-2.967	3.750	-1.801	3.324	0.193	1.241
M13	42	8	-3.922	8.796	-2.560	6.793	0.260	1.359
M19	78	7	-2.608	5.598	-1.699	4.390	0.409	1.259
M26	69	8	-2.648	7.947	-1.978	6.639	1.182	1.475
HAB	94	8	-5.148	14.812	-3.641	11.545	0.790	1.489
SUD	83	8	-2.829	6.462	-1.523	4.696	0.287	1.595
UCH	168	8	-11.166	11.352	-7.367	7.595	0.961	1.860
ENG	247	8	-6.931	7.745	-4.366	6.160	1.384	2.226

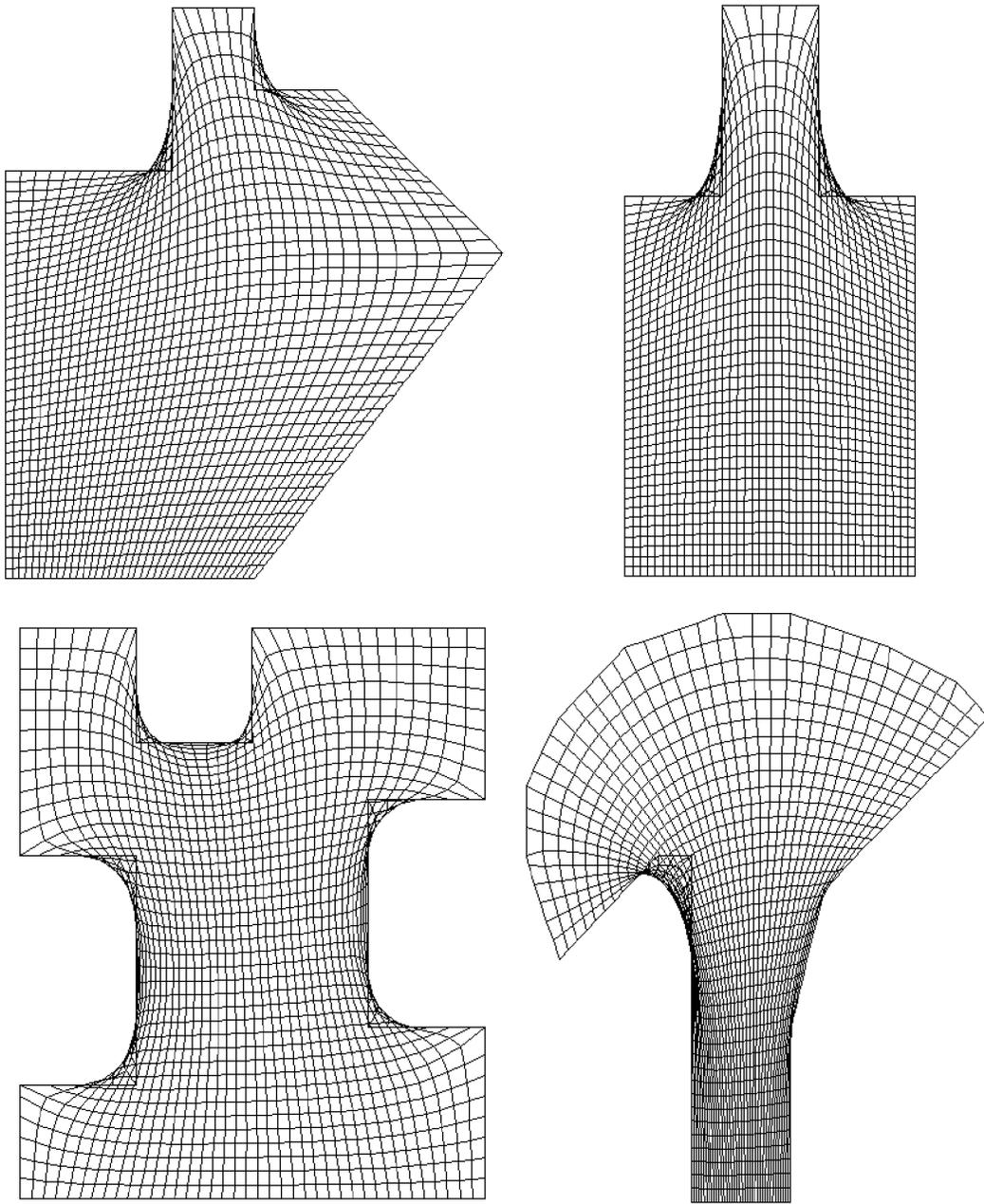


Figura 3.7.- Mallas Optimas Producidas con el Funcional Discreto de Longitud. Regiones M12, M13, M19 y M26.

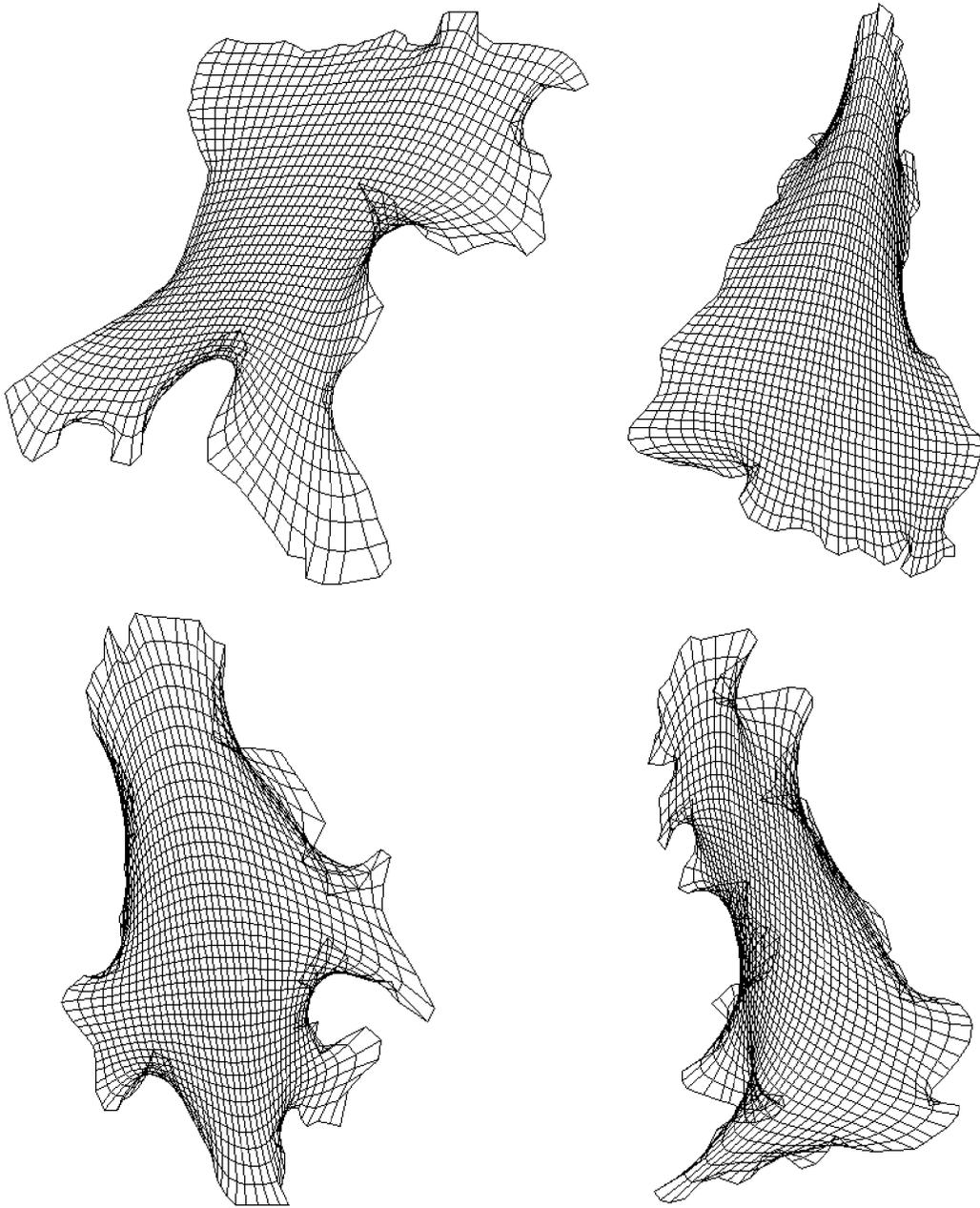


Figura 3.8.- Mallas Optimas Producidas con el Funcional Discreto de Longitud. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 3.6 Funcional Discreto de Area

De acuerdo a la formulación anterior, el funcional clásico de área en su versión discreta es

$$\sum_{q=1}^N \alpha_q^2$$

Sean  $\Omega, m, n$  fijos, este funcional tiene las siguientes dos propiedades:

1. Si existe una malla  $G$  tal que los triángulos de todas las celdas tienen la misma área, entonces  $G$  es un punto crítico para el funcional de área.
2. La Hessiana del funcional de área valuada en  $G$  es semipositiva definida.

La demostración de estas propiedades se puede consultar en [5]. Una forma más general de estos resultados se expondrá más adelante en este trabajo (c.f. Cap. 5). Las propiedades anteriores garantizan que, en caso de existir una malla ideal para el funcional de área, su minimización conduce a ella; en caso de no existir dicha malla ideal, el mínimo estará en una malla que sea lo más cercana posible a tener triángulos de igual área. La existencia de una malla ideal para este funcional de área depende fuertemente de la frontera de la región y de la distribución de los puntos sobre dicha frontera.

Una malla ideal  $G^*$  para el funcional de área es aquella en la cual las áreas de todos los triángulos son iguales. Como

$$\sum_{q=1}^N \alpha_q = 4Area(\Omega)$$

entonces

$$N\alpha_q = 4Area(\Omega)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \frac{Area(\Omega)}{(m-1)(n-1)} \\ &= \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto la constante de normalización es

$$\begin{aligned} K &= \sum_{q=1}^N \bar{\alpha}^2 \\ &= N\bar{\alpha}^2 \end{aligned}$$

y el funcional de área normalizado es

$$F_{A^2} = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N \alpha_q^2$$

A diferencia de los resultados que se mostraron en la sección 2.3, el proceso de minimización del funcional  $F_{A^2}$  siempre converge.<sup>2</sup> Los resultados obtenidos sobre las mallas de prueba minimizando este funcional se muestran en la tabla 3.2.

Tabla 3.2.- Resultados para el Funcional Clásico de Area

Malla	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	0	81	0.018	1.432	0.506	1.131	0.004	1.713
M13	0	115	0.019	1.363	0.468	1.248	0.007	2.768
M19	1	147	-0.029	1.415	0.480	1.402	0.010	2.438
M26	6	148	-0.537	1.703	0.364	1.412	0.015	6.377
HAB	10	203	-2.043	3.449	-0.071	1.992	0.048	6.289
SUD	3	104	-0.133	2.010	0.452	1.437	0.014	2.730
UCH	16	94	-0.709	3.811	0.016	3.247	0.057	4.412
ENG	38	236	-2.310	3.566	-0.765	2.460	0.090	8.130

Como se infiere de estos resultados, el número de iteraciones necesarias para lograr optimización es grande (en comparación con otros funcionales), no se llega a mallas convexas en casi ningún caso. De las gráficas de las mallas óptimas (y de hecho también del valor longi) se concluye que éstas están lejos de ser suaves.

---

<sup>2</sup>Como ya se mencionó, este problema es inherente al algoritmo de solución usado y no a las ecuaciones E-L.

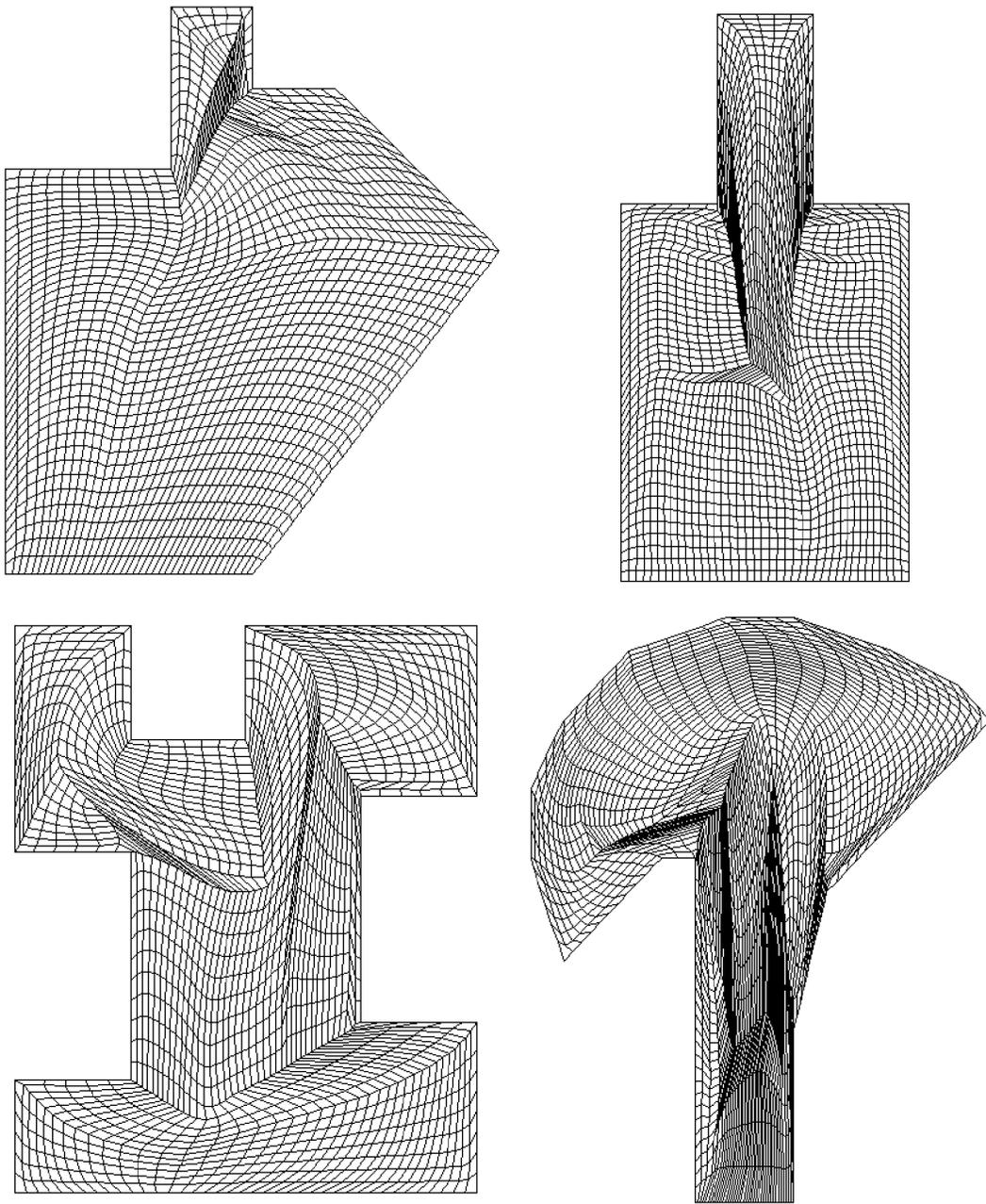


Figura 3.9.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional Discreto de Area. Regiones M12, M13, M19 y M26

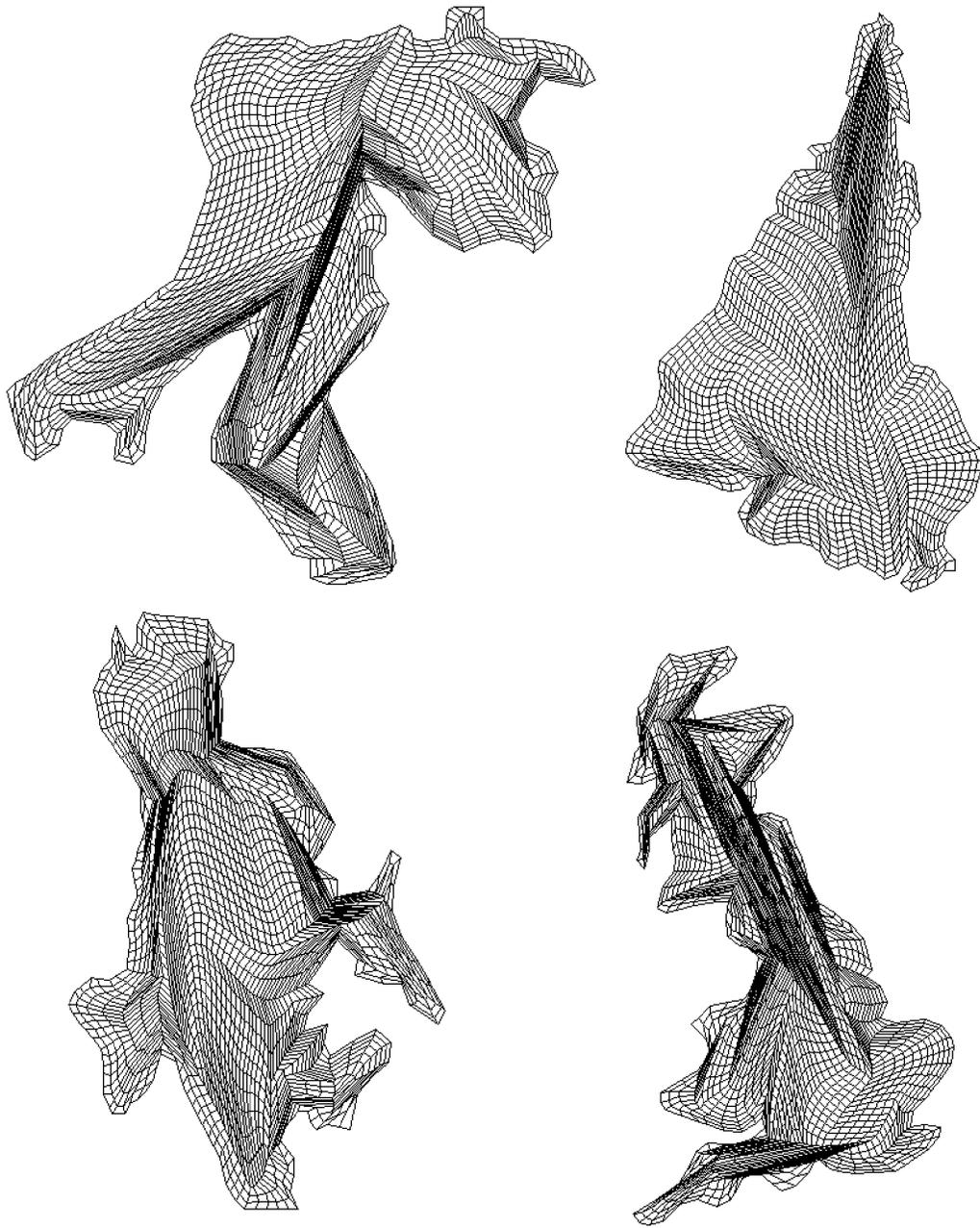


Figura 3.10.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional Discreto de Area. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG

### Ejemplo 2 ([2])

Con el fin de comparar el comportamiento de los funcionales de área de Castillo y de Barrera-Pérez, se presenta el siguiente ejemplo que aparece en [2]. Obténgase la malla óptima para este último funcional sobre la región del ejemplo en la sección 3.2. En este caso cada celda determina cuatro triángulos, denótense éstos de acuerdo a la figuras siguientes:

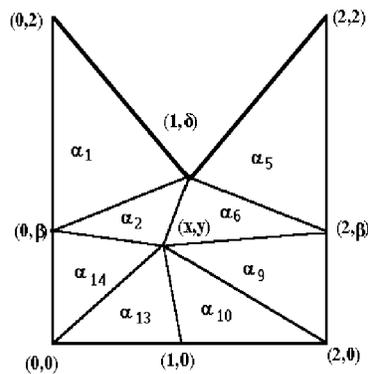


Figura 3.15.- Numeración de los triángulos del ejemplo

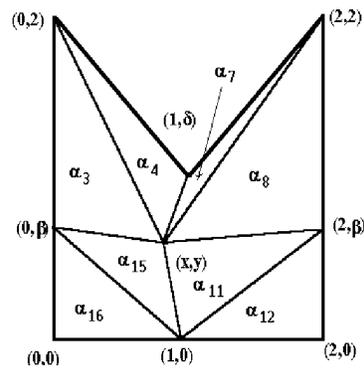


Figura 3.16.- Numeración de los triángulos del ejemplo

Se calcula fácilmente que (recuérdese que  $\alpha(\Delta ABC)$  es el doble del área del  $\Delta ABC$ ):

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 2 - \beta \\
 \alpha_2 &= (\delta - \beta)x + (\beta - y) \\
 \alpha_3 &= (2 - \beta)x \\
 \alpha_4 &= 2 - y + (\delta - 2)x \\
 \alpha_5 &= 2 - \beta \\
 \alpha_6 &= (\beta - \delta)x - y + 2\delta - \beta \\
 \alpha_7 &= -2 + (2 - \delta)x - y + 2\delta \\
 \alpha_8 &= (\beta - 2)(x - 2) \\
 \alpha_9 &= (2 - x)\beta \\
 \alpha_{10} &= y \\
 \alpha_{11} &= \beta(1 - x) + y \\
 \alpha_{12} &= \beta \\
 \alpha_{13} &= y \\
 \alpha_{14} &= \beta x \\
 \alpha_{15} &= \beta x + y - \beta \\
 \alpha_{16} &= \beta
 \end{aligned}$$

Se tiene que el único punto crítico para el gradiente de

$$F_{A^2} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^2$$

es  $x = 1, y = \frac{\delta}{2}$ , lo que dá lugar a la malla óptima que se muestra en la siguiente figura. Esta malla es convexa para todo valor de  $\delta > 0$  y  $0 < \beta < 2$  ya que las cantidades  $\alpha_i$  son

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_8 = 2 - \beta \\
 \alpha_9 &= \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{16} = \beta \\
 \alpha_2 &= \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha_{13} = \alpha_{15} = \frac{\delta}{2}
 \end{aligned}$$

son todas positivas. Así pues, aunque en este caso las 4 celdas de la malla óptima no tienen la misma área, cada una de ellas es convexa, a diferencia de lo que ocurre con el funcional de área de Castillo. El hecho de que funcional de Barrera "actúe" sobre cada triángulo de la malla, produce un mayor control del que se logra con el funcional de Castillo: una celda puede tener área positiva y, sin embargo, no ser convexa; mientras que si se logra que cada triángulo tenga área positiva, automáticamente se tendrán celdas convexas.

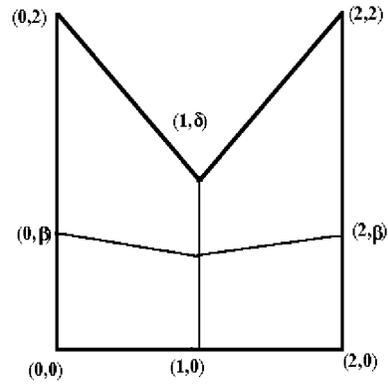


Figura 3.17.- Malla óptima para el Funcional de Área de Barrera-Pérez

---

### 3.7 Funcional de Ortogonalidad

Aunque el uso de la versión discreta del funcional de ortogonalidad de manera aislada no conduce a buenas mallas para casi ninguna región, su combinación con otros funcionales sí lo hace. La forma que tiene es

$$\sum_{q=1}^N o(\Delta_q)^2 = \sum_{q=1}^N o_q^2$$

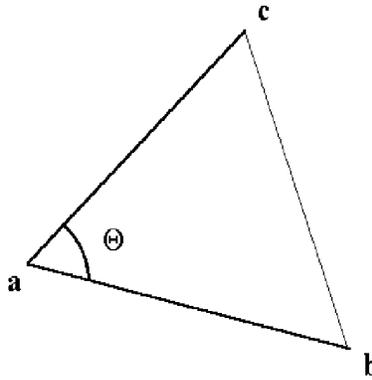


Figura 3.18.-

Una malla ideal para el funcional de ortogonalidad es aquella en que las celdas son rectángulos. La suma correspondiente para esta malla es 0 y no es posible en este caso encontrar una constante de normalización adecuada usando el mismo procedimiento que para los funcionales anteriores. Sin embargo la observación de que para un triángulo  $\Delta cab$

$$\begin{aligned} o^2 &= \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 - \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

dice que el funcional de área y el de ortogonalidad tienen el mismo orden de magnitud, lo que sugiere usar como constante de normalización para el funcional de ortogonalidad

$$K = N\bar{\alpha}^2$$

la misma que para el funcional de área. El funcional de ortogonalidad normalizado es entonces

$$F_o = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N o_q^2$$

## 3.8 Combinación de Funcionales

También en el enfoque discreto es conveniente usar combinaciones convexas de diferentes funcionales para producir mallas más adecuadas. La forma general de esta combinación es

$$F = \tau_1 F_{A^2} + \tau_2 F_l + (1 - \tau_1 - \tau_2) F_o$$

donde  $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$  y  $\tau_1 + \tau_2 \leq 1$ . Los funcionales se usan en su forma normalizada.

### 3.8.1 Funcionales de Area-Longitud

Cuando se hace  $\tau_1 = \tau$ ,  $\tau_2 = 1 - \tau$  obtenemos la familia de funcionales

$$F = \tau F_{A^2} + (1 - \tau) F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

que con elecciones adecuadas de  $\tau$  (usualmente con  $\tau$  cercano a 1) dan lugar a mallas que son aceptables para la mayoría de las regiones sencillas. Es cuestión de experiencia el elegir el valor de  $\tau$  y lograr buenas mallas en los casos en los que la región es complicada; esto hace que el usar los funcionales de área-longitud sea complicado aún para los expertos en generación de mallas. La tabla 3.3 muestra los resultados obtenidos sobre las mallas de prueba para varios valores de  $\tau$ . Se muestran también las gráficas de las mallas correspondientes a  $\tau = .95$ . Se observa que éstas son más suaves que las correspondientes al funcional de área, pero tienen más celdas no convexas. El número de iteraciones necesarias para lograr convergencia es considerablemente menor que para el funcional de área, aunque mayor que para el de longitud.

Tabla 3.3.- Resultados para el Funcional de Area-Longitud

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_{-t}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.75	7	15	-1.028	2.034	-0.160	1.588	0.022	1.333
	.95	5	31	-0.166	1.534	0.272	1.334	0.007	1.429
	.99	0	45	0.042	1.651	0.482	1.314	0.005	1.520
M13	.75	14	17	-0.801	2.528	-0.060	1.947	0.029	1.453
	.95	6	28	-0.366	1.489	0.208	1.327	0.012	1.577
	.99	0	47	0.012	1.367	0.323	1.270	0.009	1.755
M19	.75	8	23	-0.562	2.284	-0.106	1.957	0.052	1.470
	.95	2	46	-0.346	1.581	0.246	1.576	0.015	1.709
	.99	0	82	0.031	1.458	0.493	1.454	0.011	1.888
M26	.75	9	24	-1.327	2.719	-0.378	2.124	0.173	2.027
	.95	11	64	-0.596	1.954	0.152	1.650	0.035	2.976
	.99	4	87	-0.410	1.755	0.317	1.472	0.015	3.719
HAB	.75	42	30	-1.616	4.902	-1.123	3.141	0.161	1.852
	.95	13	62	-0.513	5.027	0.166	3.144	0.096	2.969
	.99	11	126	-2.035	3.451	0.085	1.984	0.046	3.539
SUD	.75	18	26	-1.077	2.609	-0.282	1.720	0.056	1.735
	.95	10	60	-0.443	1.726	0.082	1.353	0.021	1.972
	.99	5	103	-0.176	2.159	0.303	1.493	0.015	2.275
UCH	.75	67	33	-2.442	3.837	-0.830	3.450	0.143	2.201
	.95	37	72	-1.100	3.878	-0.317	3.327	0.082	2.711
	.99	18	197	-0.617	3.831	-0.020	3.265	0.063	3.712
ENG	.75	128	36	-2.555	3.441	-1.235	2.375	0.203	2.703
	.95	58	111	-2.393	3.389	-0.959	2.387	0.106	3.437
	.99	29	114	-2.307	3.519	-0.888	2.406	0.088	4.701

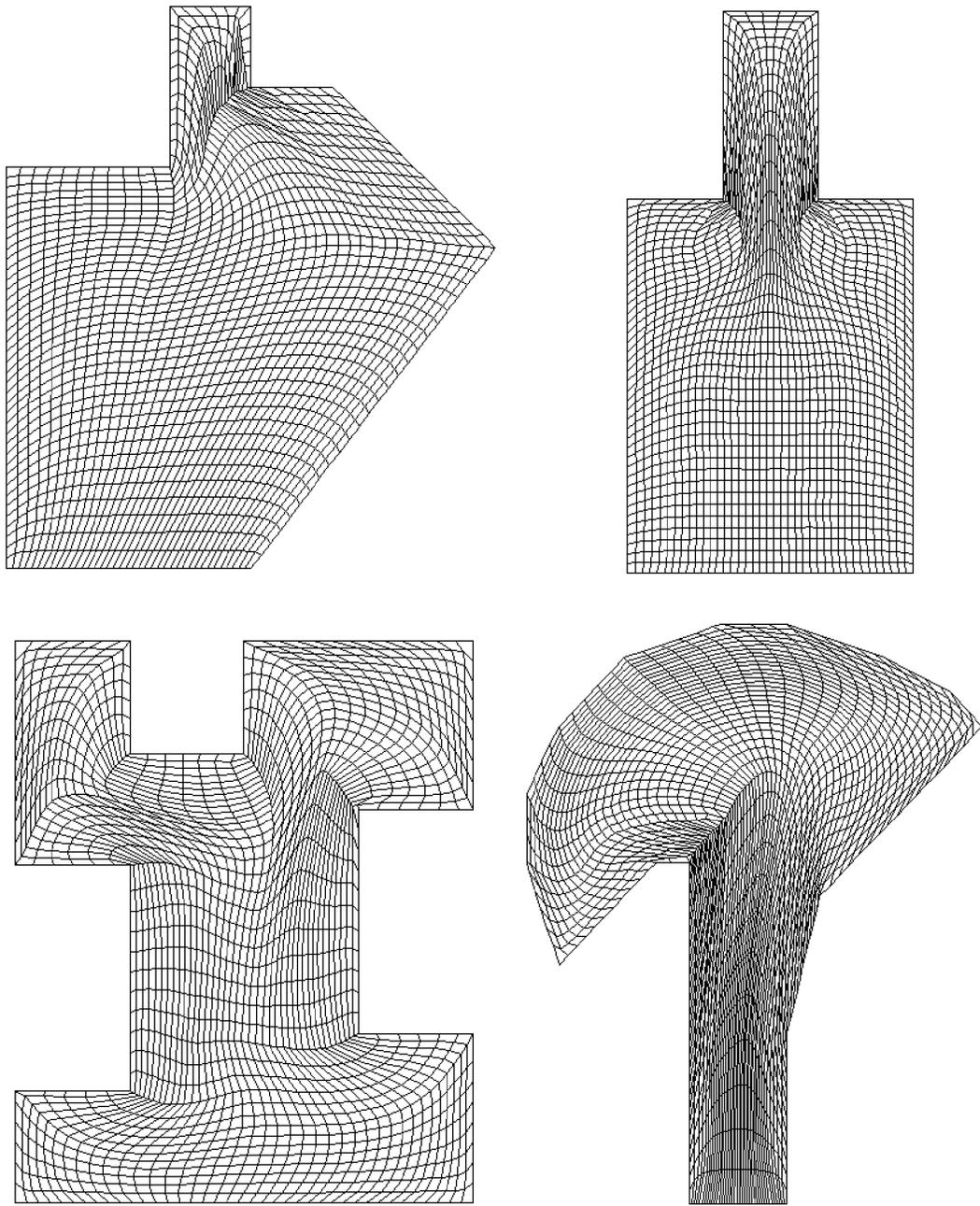


Figura 3.19.- Mallas Optimas Producidas con el Funcional Discreto de Area-Longitud,  $\tau = .95$ . Regiones M12, M13, M19 y M26.

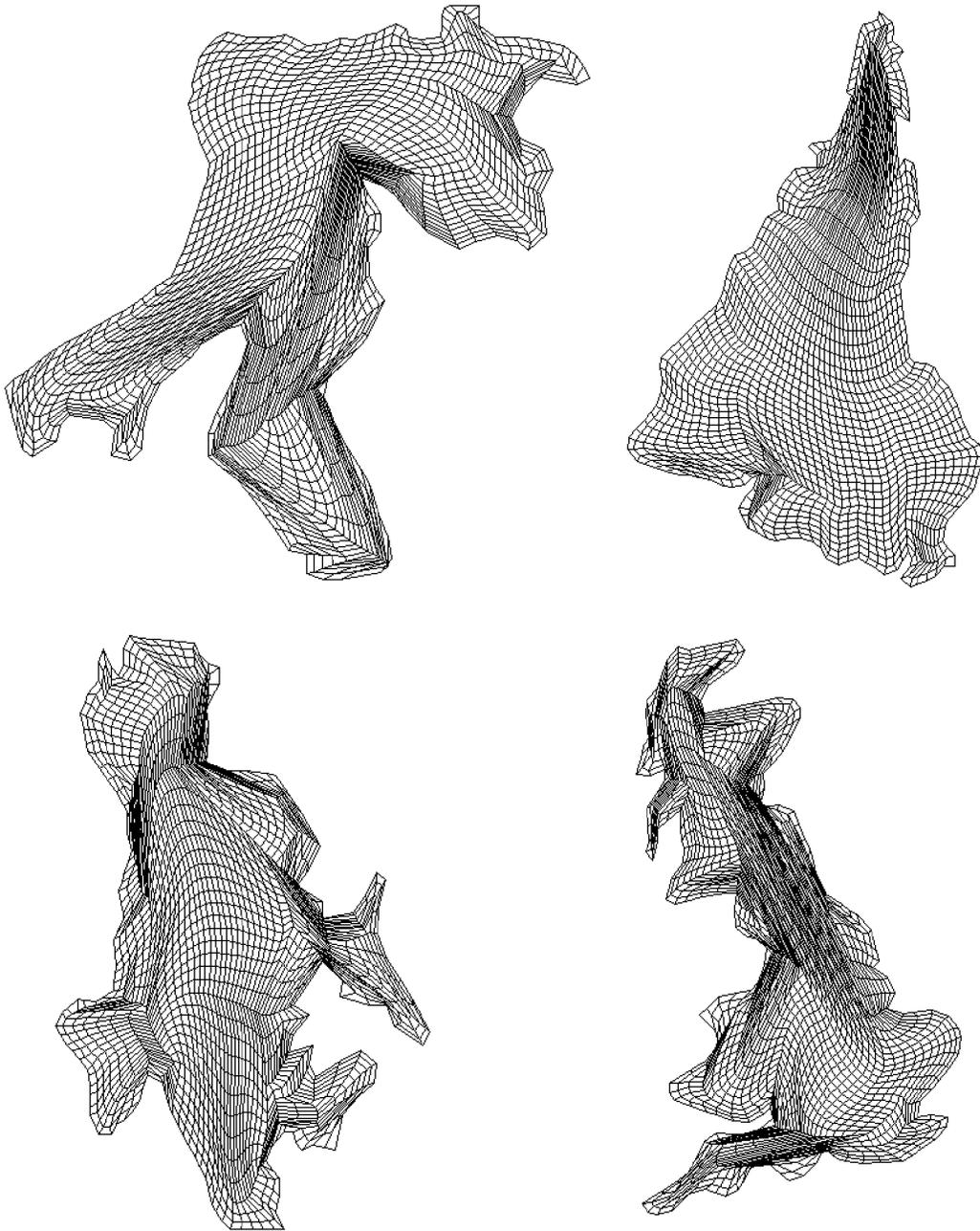


Figura 3.20.- Mallas Optimas Producidas con el Funcional Discreto de Area-Longitud,  $\tau = .95$ . Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 3.8.2 Funcional de Area-Ortogonalidad

Al hacer  $\tau_2 = 0$ , se obtiene la familia conocida como Funcionales de Area - Ortogonalidad. La forma de estos funcionales es

$$F_{ao}^{(\tau)} = \tau_1 F_{A^2} + (1 - \tau_1) F_o$$

Cuando se habla del *Funcional de Area - Ortogonalidad*, sin especificar el valor del parámetro  $\tau$ , se hace referencia al miembro de esta familia correspondiente al valor  $\tau = .5$ . La forma que tiene éste para un triángulo  $\Delta cab$  es

$$\begin{aligned} F_{ao} &= \frac{1}{2}(\alpha_q^2 + o_q^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta + \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2) \end{aligned}$$

Sorprendentemente a pesar de ser combinación de dos funcionales que no producen mallas suaves, los funcionales de Area-Ortogonalidad dan lugar a mallas relativamente suaves, las áreas de sus triángulos tienen poca variación y el número de iteraciones es menor que para el funcional de área; sin embargo, en la mayoría de las regiones de prueba no se logra obtener convexidad.

A continuación (Tabla 3.4) se muestran los resultados obtenidos sobre las mallas de prueba para algunos valores de  $\tau$ . En particular, obsérvese que casi siempre el menor número de iteraciones necesarias para llegar a convergencia corresponde al funcional de Area - Ortogonalidad. Además observando los valores de  $longi$ , se sigue que las mallas correspondientes a éste, también son las más suaves. Las gráficas de la mallas que se muestran corresponden a este funcional.

Tabla 3.4.- Resultados para el Funcional de Area-Ortogonalidad

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_{-t}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.50	5	35	-0.846	3.029	-0.279	2.030	0.040	1.710
	.75	2	36	-0.471	2.286	0.188	1.544	0.016	1.713
	.95	1	52	-0.035	1.591	0.575	1.206	0.007	1.667
M13	.50	2	33	-0.401	2.862	0.151	2.057	0.056	1.719
	.75	2	24	-0.228	1.991	0.369	1.642	0.025	1.793
	.95	0	54	0.007	1.500	0.628	1.423	0.010	1.929
M19	.50	2	21	-0.300	3.010	0.054	2.413	0.093	1.670
	.75	1	30	-0.470	2.374	0.098	2.163	0.043	1.789
	.95	2	48	-0.400	1.763	0.257	1.733	0.017	1.898
M26	.50	2	45	-0.676	3.809	-0.180	3.262	0.347	1.953
	.75	3	66	-1.026	3.145	-0.282	2.585	0.186	2.536
	.95	5	109	-0.859	2.257	-0.038	1.874	0.041	4.105
HAB	.50	32	46	-0.300	9.894	-0.127	7.026	0.313	2.171
	.75	11	38	-0.398	7.941	-0.010	5.182	0.203	2.350
	.95	13	62	-0.513	5.027	0.166	3.144	0.096	2.969
SUD	.50	18	40	-0.588	4.585	-0.278	2.793	0.081	2.126
	.75	10	44	-0.498	3.328	-0.011	2.016	0.043	2.192
	.95	5	62	-0.250	1.862	0.332	1.350	0.021	2.337
UCH	.50	56	32	-5.521	6.953	-3.551	4.308	0.367	2.983
	.75	42	48	-4.903	5.160	-2.278	3.654	0.171	3.147
	.95	27	89	-2.238	4.087	-0.599	3.469	0.091	3.315
ENG	.50	115	60	-6.574	5.660	-3.679	3.853	0.500	3.683
	.75	66	79	-3.899	5.089	-1.839	3.340	0.236	4.309
	.95	58	194	-2.776	3.618	-1.078	2.421	0.133	4.532

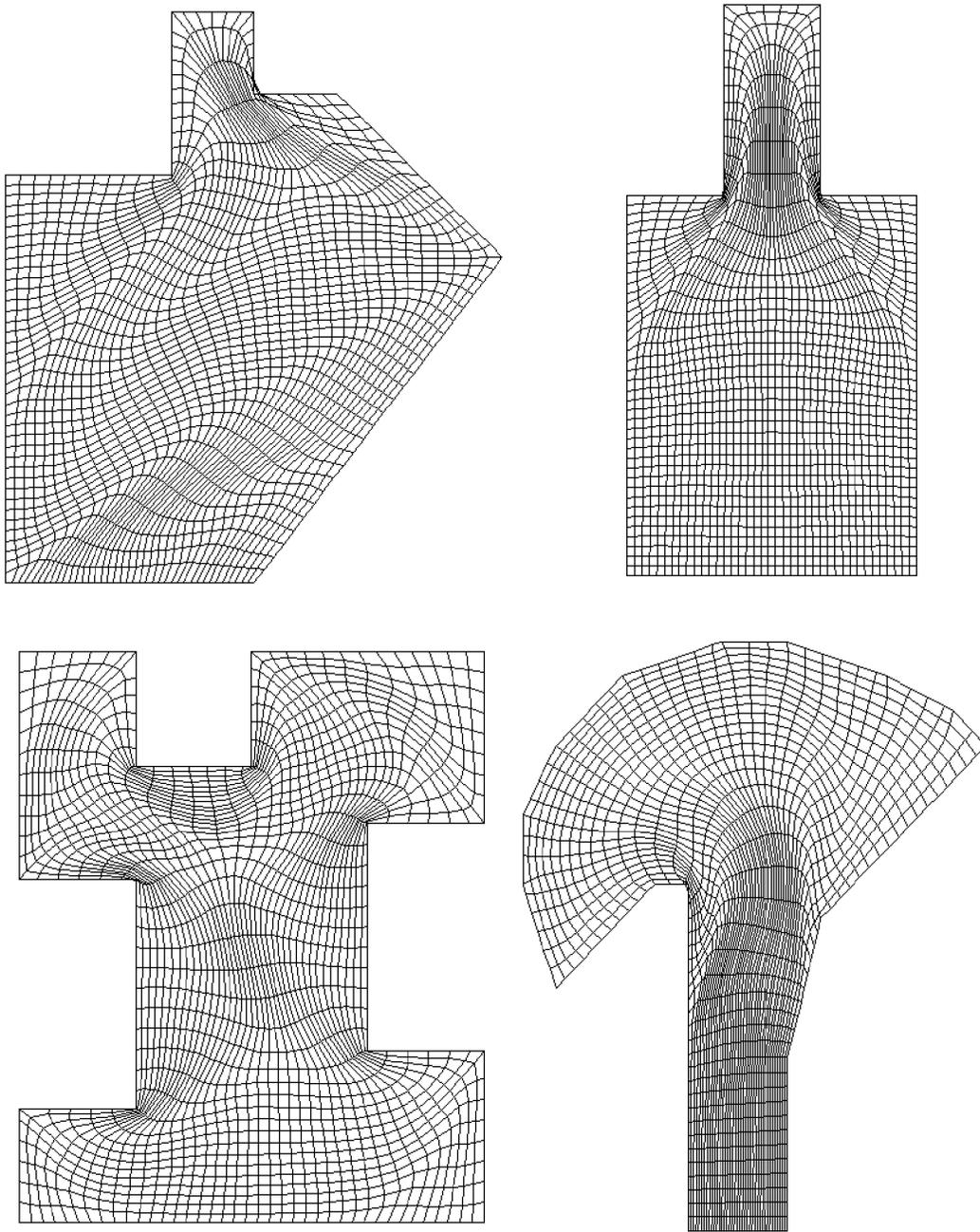


Figura 3.21.- Mallas Optimas para el Funcional Discreto de Area-Ortogonalidad. Regiones M12, M13, M19 y M26.

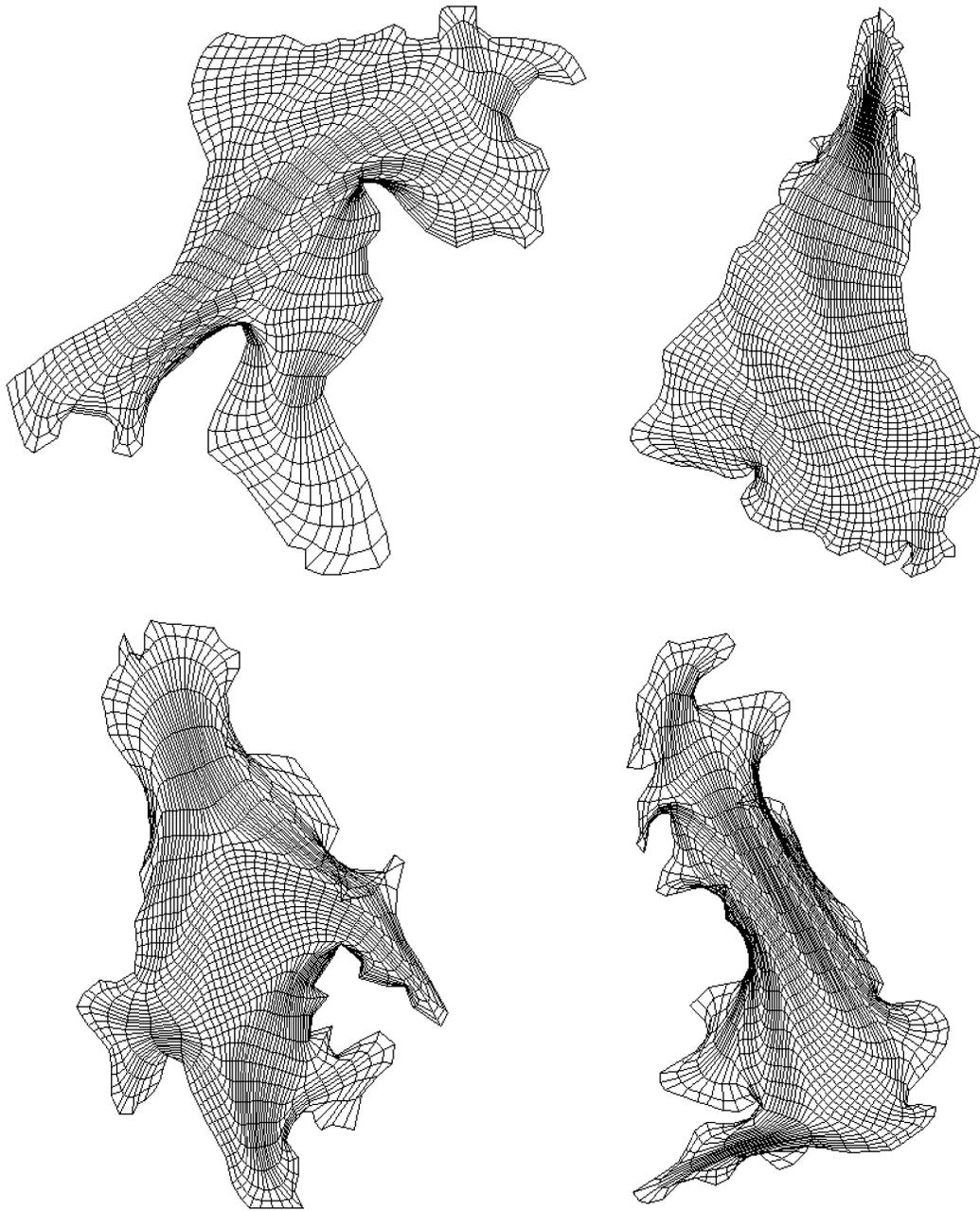


Figura 3.22.- Mallas Optimas para el Funcional Discreto de Area-Ortogonalidad. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 3.9 Funcional de Suavidad

Usando la discretización de Barrera, se obtiene la versión discreta del funcional de Winslow, es

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q}$$

El mínimo absoluto de este funcional se obtiene cuando todas las celdas son cuadrados, al igual que para el funcional de longitud. Para hacer ver esta propiedad tómesese un triángulo  $\Delta$  cualquiera en la malla, y denótense sus vértices por  $c, a, b$ , en tal forma que  $\overline{ac}$  y  $\overline{ab}$  formen parte de líneas coordenadas (Fig. 3.19)

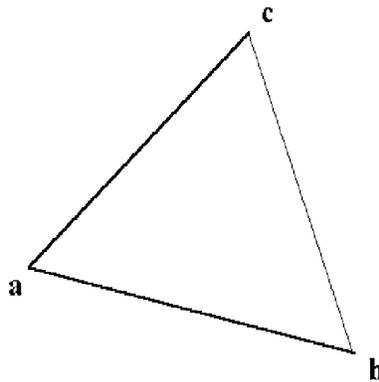


Figura 3.27.- Un triángulo en la malla

$$l(\Delta) - 2\alpha(\Delta) = \| b - a - J_2(c - a) \|^2 \geq 0$$

$$l(\Delta) + 2\alpha(\Delta) = \| b - a + J_2(c - a) \|^2 \geq 0$$

o sea que

$$\left| \frac{l(\Delta)}{\alpha(\Delta)} \right| \geq 2$$

Para triángulos con área positiva, que es la situación deseada, la igualdad se da cuando  $b - a$  es ortogonal a  $c - a$ ,  $\| b - a \| = \| c - a \|$  al igual que para el funcional de longitud. Un análisis del gradiente conduce a las mismas conclusiones (c.f. [5]).

Por otro lado, para triángulos orientados negativamente el mínimo no existe, la igualdad se da en triángulos isósceles, rectángulos, pero es un máximo de la expresión. De aquí se ve también que si la malla inicial es no convexa, el proceso de minimización del funcional de suavidad nunca llegará a una malla convexa, pues por la forma de

los sumandos correspondientes a los triángulos de área negativa, éstos permanecerán en cada paso orientados negativamente. Este es el mayor inconveniente para aplicar el funcional de suavidad a la generación de mallas; se necesita iniciar con una malla convexa para llegar a una malla óptima convexa.

De las propiedades del funcional de suavidad se sigue que en una malla ideal todos los triángulos tienen área positiva y son rectángulos isósceles; en este caso

$$\frac{l}{\alpha} = 2$$

y por tanto la constante de normalización es

$$K = 2N$$

El funcional de suavidad normalizado es entonces

$$F_s = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q}$$

A continuación (Tabla 3.5) se muestran los resultados obtenidos al aplicar el funcional de suavidad a las regiones de prueba que se lograron hacer convexas usando otros funcionales. Se puede notar la gran suavidad de las mallas óptimas; así como la existencia de celdas con área extremadamente grande. No se reportan las iteraciones necesarias para convergencia.

Tabla 3.5.- Resultados para el funcional de suavidad

Malla	nc	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	0	0.079	7.821	0.218	5.671	0.284	1.378
M13	0	0.081	18.766	0.268	12.267	0.679	1.846
M19	0	0.053	8.743	0.130	6.479	0.474	1.387

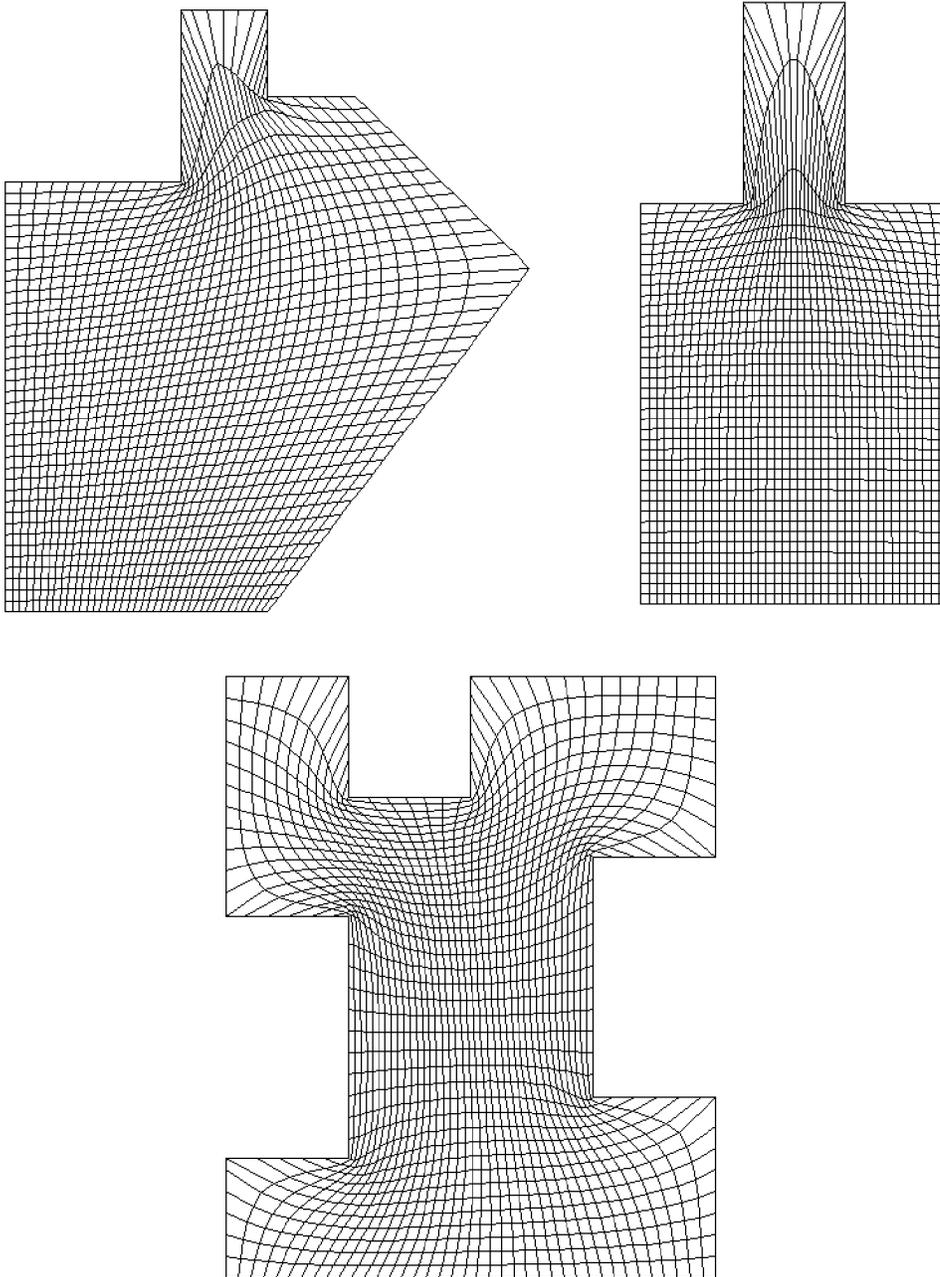


Figura 3.28.- Mallas Optimas para el Funcional Discreto de Suavidad.

### 3.10 Funcional de Suavidad Regularizado de Barrera

A causa de las limitaciones inherentes al funcional de suavidad en lo referente a las características que debe cumplir la malla inicial, diferentes autores han buscado la manera de construir un funcional cuyo dominio de aplicación fuera más grande que el conjunto de las mallas convexas y que tuviera la característica de producir mallas suaves. En 1988, Ivanenko ([25] y [26]) propone una modificación del funcional de suavidad que le permite aplicarlo a cualquier malla inicial. Sin embargo su funcional depende de demasiados parámetros como para que sea usado en un sistema de generación automática de mallas. Cabe mencionar además que la manera en que realiza el proceso de optimización es muy ingeniosa, aprovechando su gran experiencia en el área de generación de mallas.

Por su parte, Barrera ([2]) en 1990 propone una modificación al funcional discreto de suavidad que es aplicable a mallas iniciales que, aunque no convexas, sí tengan la propiedad de que las áreas de los triángulos correspondientes a celdas no convexas no sean "muy negativas", en un sentido precisado por dicho autor.

La idea de Barrera es sustituir el denominador de la función  $\frac{1}{\alpha}$ , que define al funcional de suavidad, por una expresión que sea "mejor comportada" para triángulos con área muy pequeña (sea esta positiva o negativa). Para ser precisos, la función

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

es sustituida por otra de la forma

$$\tilde{f}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \alpha \geq \varepsilon_c \\ \frac{A}{(\alpha+\varepsilon)^2} & -\varepsilon_c \leq \alpha \leq \varepsilon_c \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_c$  es un valor que se determina experimentalmente para cada malla.  $\varepsilon$  y  $A$  se deben determinar de tal forma que  $\tilde{f}(\alpha)$  sea continuamente diferenciable; esto es, que

$$\tilde{f}(\varepsilon_c) = f(\varepsilon_c)$$

y

$$\tilde{f}'(\varepsilon_c) = f'(\varepsilon_c)$$

condiciones que conducen a los valores

$$\varepsilon = \varepsilon_c$$

$$A = 4\varepsilon_c$$

Por lo tanto (Fig. 3.21)

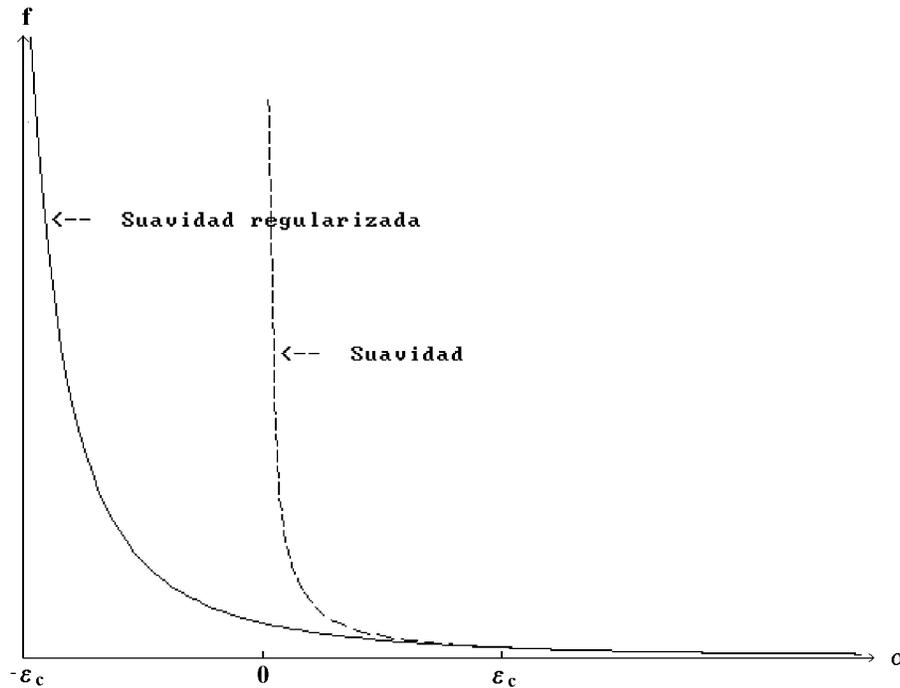


Figura 3.30.- Regularización del Funcional de Suavidad

$$\tilde{f}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \alpha \geq \varepsilon_c \\ \frac{4\varepsilon_c}{(\alpha+\varepsilon_c)^2} & -\varepsilon_c \leq \alpha \leq \varepsilon_c \end{cases}$$

El funcional de suavidad regularizado de esta manera es

$$F_{sr} = \frac{1}{K} \sum_{q=1}^N l_q \tilde{f}(\alpha_q)$$

Donde  $K$  es la misma constante de normalización usada para  $F_s$ . Este funcional tiene la propiedad de que se puede aplicar a una malla inicial  $G_0$  con área mínima  $\alpha_- > -\varepsilon_c$  y su optimización nos lleva a otra malla con la misma propiedad. Por esta razón es que es necesario en muchos casos optimizar primero la malla generada por TFI usando otros funcionales y cuando se consiga una malla que caiga en el dominio de  $F_{sr}$ , minimizar éste para obtener una mejor malla.

La elección de  $\varepsilon_c$  conlleva un compromiso entre dos cuestiones: el conseguir que el funcional sea aplicable a un conjunto grande de mallas iniciales y por otro lado conseguir que la malla óptima sea convexa. Además  $\varepsilon_c$  debería ser una cantidad que

fuera independiente de la dimensión de la malla. Fruto de una larga experimentación y observación cuidadosa, Barrera propone usar un valor para  $\varepsilon_c$  dado por

$$\varepsilon_c = \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

valor con el cual logra aplicar el funcional a una buena cantidad de mallas, a partir de las cuales logra obtener mallas convexas en muchas ocasiones.

Se muestran en la Tabla 3.6 los resultados pertinentes a algunas mallas obtenidas minimizando  $F_{sr}$ . A las mallas iniciales que no caían en el dominio de éste, se les optimizó primero usando otros funcionales y es por esta razón que no se reporta el número de iteraciones. Se puede observar en las figuras 3.31 y 3.32 que, a pesar de que no siempre se obtiene convexidad, las mallas óptimas son muy suaves.

Tabla 3.6.- Resultados para el funcional de suavidad regularizado

Malla	nc	$\alpha_t$	$\alpha_+t$	$\alpha_c$	$\alpha_+c$	$\sigma^2$	longi
M12	0	0.023	7.272	0.148	5.681	0.276	1.365
M13	0	0.003	18.520	0.222	12.123	0.659	1.818
M19	3	-0.041	8.711	0.064	6.446	0.476	1.380
M26	3	-0.074	8.989	0.043	7.370	1.282	1.900
SUD	5	-0.199	7.764	0.023	5.785	0.311	2.102

Aún cuando el Funcional de Suavidad Regularizado de Barrera no siempre conduce a mallas óptimas convexas, su desarrollo lleva consigo las ideas fundamentales que servirán para generar funcionales más eficientes en el sentido de alcanzar la convexidad.

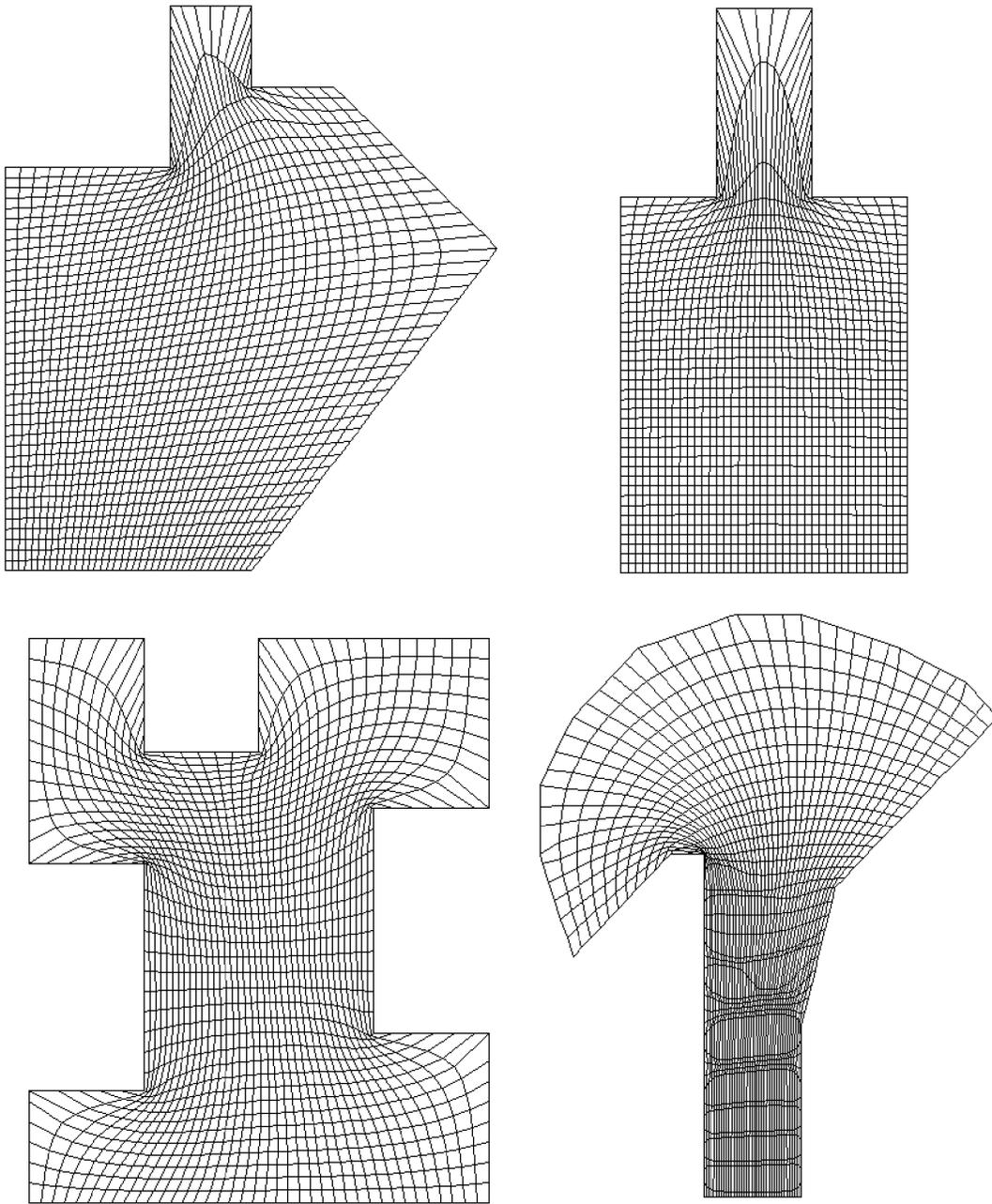


Figura 3.31.- Mallas Optimas Producidas con el Funcional Regularizado de Suavidad de Barrera. Regiones M12, M13, M19 y M26.

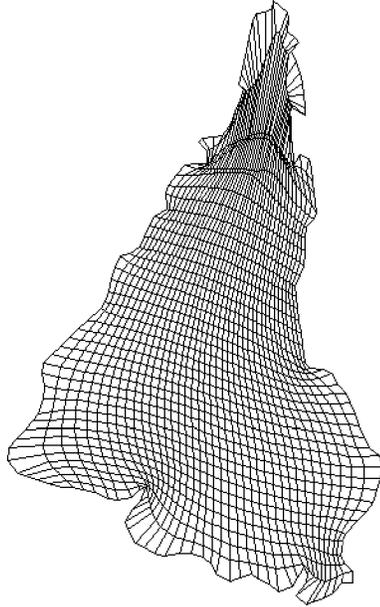


Figura 3.32.- Malla Optima Producida con el Funcional Regularizado de Suavidad de Barrera en la Región SUD.

# CAPITULO 4

## Nuevos Funcionales de Suavidad

### 4.1 Introducción

El objetivo primordial a conseguir en la generación de mallas sobre regiones planas irregulares es el que la malla sea convexa; una malla que no cumpla este requisito es completamente inútil para los propósitos que se persiguen. Los métodos revisados hasta ahora no garantizan que el objetivo se logre; en muchos casos la malla óptima es no convexa. Sería deseable contar con un funcional tal que el proceso de su minimización condujera siempre a una malla convexa y que se tuvieran resultados que garantizaran que eso siempre se logra, al menos si se dispusiera de aritmética infinita.

La optimización de un funcional es un proceso que partiendo de una malla produce como resultados intermedios otras mallas, que están más cerca de tener las características deseadas. Se pudiera pensar en estas mallas intermedias como puntos pertenecientes a una trayectoria definida sobre el conjunto de mallas y se querría que el punto final de ésta estuviera contenido dentro del subconjunto de mallas convexas.

Para precisar esta idea, considérese  $\Omega$  una región plana fija;  $m, n \in \mathbf{N}$  y los correspondientes puntos frontera

$$\{P_{1,j}\}_{j=1,\dots,m} \quad \{P_{m,j}\}_{j=1,\dots,n} \quad \{P_{i,1}\}_{i=1,\dots,m} \quad \{P_{i,n}\}_{i=1,\dots,m}$$

también fijos.

Para una malla  $G$  sobre  $\Omega$  fue definida anteriormente la cantidad

$$\alpha_-(G) = \min_{\Delta \in G} \{\alpha(\Delta)\}$$

la cual es el doble del mínimo de las áreas de los triángulos en la malla. Defínase ahora, para  $k$  real, el conjunto

$$D_k = \{G : G \in M \text{ y } \alpha_-(G) > -k\}$$

donde  $M$  es el conjunto de mallas definidas sobre  $\Omega$ .

Obviamente si  $k < k'$ , se da la contencion  $D_k \subset D_{k'}$  y además si

$$k \leq -\bar{\alpha} = -\frac{Area(\Omega)}{(m-1)(n-1)}$$

entonces  $D_k = \emptyset$ . Así pues el conjunto de las  $k$  tales que

$$D_k \neq \emptyset$$

es un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente. Sea

$$k_- = \inf\{k : D_k \neq \emptyset\}$$

Si  $k_- < 0$  entonces el conjunto de las mallas convexas sobre  $\Omega$ ,  $D_0$  es no vacío.

### Ejemplo 1 (Ivanenko [26])

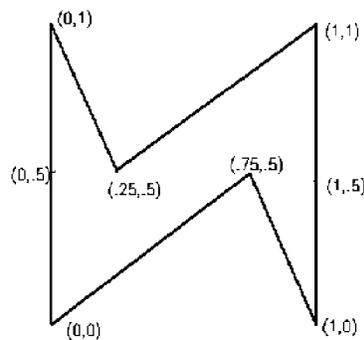


Figura 4.1.- Región para el Ejemplo de Ivanenko

En este ejemplo, se muestra una región para la cual no se puede encontrar una malla convexa de cierta dimensión (en el ejemplo, esta dimensión es tres por tres). Esta región tiene por fronteras: la poligonal que une  $(0,0)$ ,  $(3/4, 1/2)$ ,  $(1,0)$ ; el segmento de  $(1,0)$  a  $(1,1)$ ; la poligonal que une  $(1,1)$ ,  $(1/4, 1/2)$ ,  $(0,1)$ ; y el segmento de  $(0,1)$  a  $(0,0)$ . Los puntos sobre la frontera se muestran en la figura 4.1.

La forma que tienen los conjuntos  $D_k$  para varios valores de  $k$  en unidades de  $\bar{\alpha}$  se muestran en la figura 4.2. Aquí el valor del ínfimo es de 1; esto es, no existe una malla tal que todos sus triángulos tengan áreas mayores que  $-\bar{\alpha}/2$ .

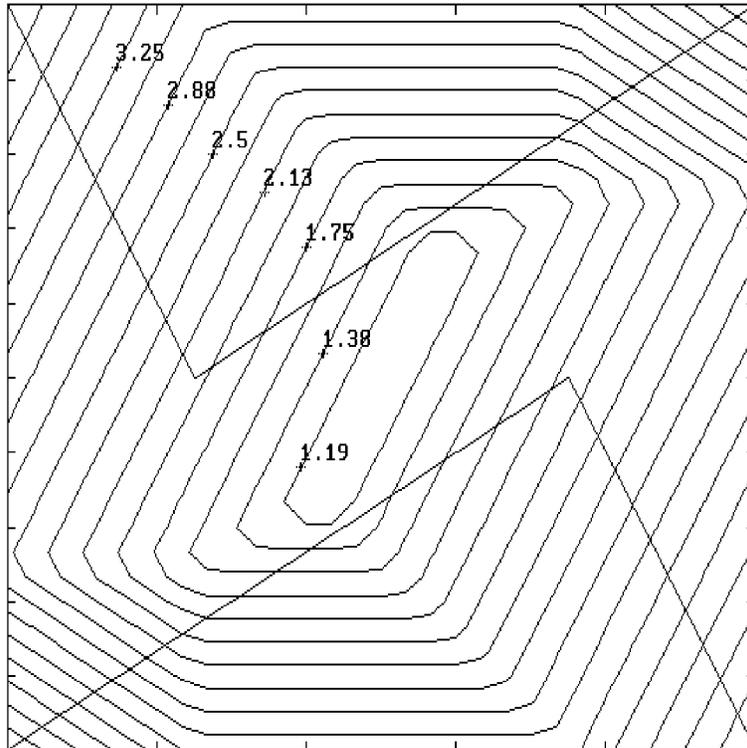


Figura 4.2.- Los conjuntos  $D_k$  en el ejemplo de Ivanenko

Volviendo a la discusión general, recuérdese que el proceso de optimización de un funcional comienza con una malla  $G_0$  tal que  $\alpha_-(G_0) > k_0$ ; esto es  $G_0 \in D_{k_0}$ . Si las mallas producidas en cada paso de esta optimización son consideradas como puntos de una trayectoria en el conjunto de mallas sobre  $\Omega$ , se puede parafrasear nuestro objetivo de generación de mallas convexas como el de calcular una trayectoria

$$\Gamma : [-k_0, 0] \rightarrow M$$

tal que

$$\Gamma(-k_0) = G_0$$

y

$$\Gamma(0) = G \in D_0$$

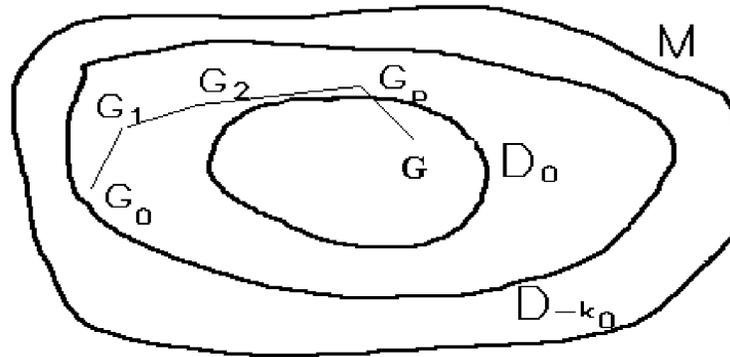


Figura 4.3.- Trayectoria hacia una malla convexa

si es que  $D_0 \neq \emptyset$  (Figura 4.3).

En caso de que no exista una malla convexa sobre  $\Omega$  sería deseable de cualquier manera que el punto final de dicha trayectoria fuera lo más cercano posible a la convexidad; esto es, se desea ser capaz de obtener una malla en  $D_k$  con  $k$  lo más pequeño posible.

## 4.2 El Funcional de Suavidad Adaptiva

### 4.2.1 Diseño y Propiedades sobre triángulos

Se definió anteriormente el funcional continuo de suavidad como

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\|x_\xi\|^2 + \|x_\eta\|^2}{J} d\xi d\eta$$

donde:

$$\mathbf{x} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$$

es una malla sobre la región  $\Omega$  y  $J$  es el jacobiano de  $\mathbf{x}$ .

También se ha dicho que el análogo discreto de este funcional tiene la forma:

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q}$$

cuya optimización requiere de una malla inicial convexa. Una de las metas deseables en nuestro trabajo es la de obtener funcionales en cuyo proceso de optimización no se requiera de condiciones de arranque muy estrictas y que puedan producir mallas suaves. Con este fin, se han estudiado algunos variantes del funcional de suavidad que gozan de esta propiedad. A continuación se exponen las ideas desarrolladas y experimentadas en esta dirección.

Supóngase que se tiene una malla no convexa tal que el área de cada triángulo que contribuye al funcional es mayor que  $-\frac{k}{2}$ . Entonces la función

$$f_k = \frac{l}{k + \alpha}$$

toma valores positivos para cada triángulo en la malla. Esta función da lugar al funcional

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{k + \alpha_q}$$

Para analizar más de cerca este funcional se considerará de manera aislada para el triángulo cuyos lados son los vectores  $a$  y  $b$  (Figura 4.4). Aquí  $l = \|a\|^2 + \|b\|^2$ ,  $\alpha = a^T J_2 b$  y se escribe  $f$  como

$$f_k = f(a, b; k) = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2}{k + a^T J_2 b}.$$

De aquí se obtiene que

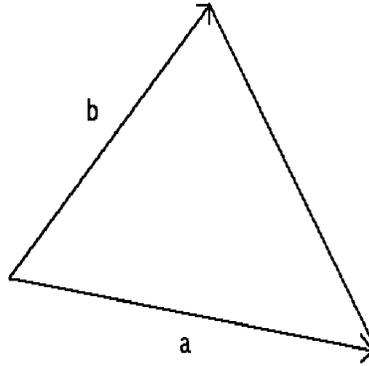


Figura 4.4.- Un triángulo aislado

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = \frac{2(k + \alpha)a - lJ_2b}{(k + \alpha)^2} = \frac{2a - f_k J_2b}{k + \alpha}$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = \frac{2(k + \alpha)b + lJ_2a}{(k + \alpha)^2} = \frac{2b + f_k J_2a}{k + \alpha}$$

En los puntos críticos de  $f_k$  se debe cumplir que

$$2(k + \alpha)a - lJ_2b = 0$$

y

$$2(k + \alpha)b + lJ_2a = 0$$

De aquí, al multiplicar la primera de las relaciones anteriores por  $b^T$ , se obtiene

$$2(k + \alpha)b^T a = 0.$$

Por las consideraciones que se hicieron sobre el valor de  $k$ , el factor  $k + \alpha$  nunca se anula, lo que conduce a que  $a$  es ortogonal a  $b$ . Además, las mismas relaciones para punto crítico, al ser multiplicadas por  $a^T$  y por  $b^T$ , respectivamente, llevan a que

$$2(k + \alpha)(a^T a - b^T b) = 0$$

o sea que,  $\|a\| = \|b\|$ .

Se tienen por tanto dos opciones para la relación entre  $a$  y  $b$ :

- a)  $a = J_2b$
- b)  $a = -J_2b$

Al sustituir la opción a) en las expresiones para  $\frac{\partial f_k}{\partial a}$  y  $\frac{\partial f_k}{\partial b}$  se obtienen los valores

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = \frac{2kJ_2b}{(k + \|b\|^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = \frac{2kb}{(k + \|b\|^2)^2}$$

los cuales sólo se anulan cuando  $k=0$ , lo que indicaría que el triángulo inicial debe tener área positiva; ó cuando  $b=0$ , esto indicaa que el mínimo sólo se obtiene para triángulos que degeneran en un punto. El considerar esta opción para triángulos cuyos dos lados son libres no conduce a obtener triángulos rectángulos isósceles como es el caso con el funcional de suavidad.

Similarmente, al sustituir la opción b) en las expresiones para  $\frac{\partial f_k}{\partial a}$  y  $\frac{\partial f_k}{\partial b}$  se obtienen los valores

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = \frac{-2kJ_2b}{(k - \|b\|^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = \frac{2kb}{(k - \|b\|^2)^2}$$

y otra vez éstos se anulan sólo cuando  $k=0$ , lo que indicaría que el triángulo inicial debe tener área positiva; ó cuando  $b=0$ , lo que diría que el mínimo sólo se obtiene para triángulos que degeneran en un punto.

Nuevamente el considerar triángulos cuyos dos lados son libres no conduce a obtener triángulos rectángulos isósceles como es el caso con el funcional de suavidad.

## Ejemplo 2

Considérese el mismo problema de optimizar un triángulo, pero ahora tomemos un lado fijo; para fijar ideas y sin mayor pérdida de generalidad tómesese el triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(x,y)$  (Figura 4.5).

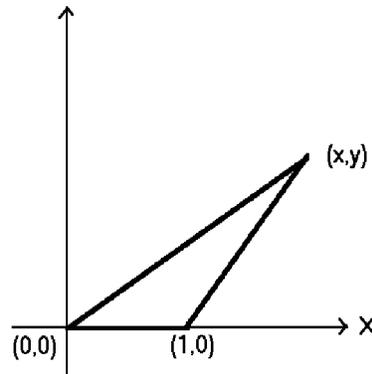


Figura 4.5.-

La función en este caso está dada por

$$f_k(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y + k}$$

y se tiene que

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y+k}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^2 + 2ky - x^2 - 1}{(y+k)^2}.$$

entonces  $\nabla f_k$  se anula en

$$(0, -k + \sqrt{k^2 + 1}) \quad y \quad (0, -k - \sqrt{k^2 + 1}).$$

La matriz hessiana de  $f_k$ ,

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y+k} & \frac{-2x}{(y+k)^2} \\ \frac{-2x}{(y+k)^2} & \frac{2ky+2k^2+x^2+1}{(y+k)^3} \end{pmatrix}$$

valuada en el primero de estos puntos críticos es

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{k^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{2k\sqrt{k^2+1}+1}{(\sqrt{k^2+1})^3} \end{pmatrix}$$

la cual es positiva definida. Por lo tanto en este punto crítico se tiene un mínimo local cuyo valor es

$$f_k(0, -k + \sqrt{k^2 + 1}) = 2.$$

Este mínimo se logra en triángulos rectángulos isósceles sólo cuando  $k = 0$ , nuevamente sólo cuando se pueda garantizar que el área del triángulo inicial es positiva.

Por otro lado, la hessiana valuada en el otro punto crítico no es positiva definida (se omite el cálculo).

En vista de lo anterior, se busca modificar de otra forma el funcional de suavidad para lograr que al menos el comportamiento aislado para un triángulo sea similar al que tiene el funcional en su forma original.

La observación de que la función  $f = \frac{l}{\alpha}$  que da lugar al funcional de suavidad se puede escribir como

$$f = \frac{l - 2\alpha}{\alpha} + 2$$

conduce a proponer una segunda modificación en la forma

$$f_k = \frac{l - 2\alpha}{k + \alpha}$$

donde  $k$  tiene la misma interpretación que anteriormente; esto es, tal que haga que el denominador sea positivo para todos los triángulos de las celdas de la malla.

Las propiedades tiene esta función para nuestro triángulo aislado de lados  $a$  y  $b$  se analizan enseguida.

Se tiene que

$$f_k(a, b; k) = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a^T J_2 b}{k + \alpha}.$$

Las expresiones para las parciales de esta función respecto a sus dos variables son

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = \frac{2k(a - J_2 b) + 2\alpha a - l J_2 b}{(k + \alpha)^2}$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = \frac{2k(b + J_2 a) + 2\alpha b + lJ_2 a}{(k + \alpha)^2}$$

En un punto crítico, estas dos expresiones se deben anular, lo que lleva a las condiciones

$$2k(a - J_2 b) + 2\alpha a - lJ_2 b = 0$$

y

$$2k(b + J_2 a) + 2\alpha b + lJ_2 a = 0.$$

La multiplicación de la primera de estas por  $b^T$  conduce a la conclusión de que  $a$  y  $b$  deben ser ortogonales. Asimismo la multiplicación de esta misma por  $a^T$  y de la segunda por  $b^T$  lleva a

$$2(k + \alpha)a^T a = (l + 2k)a^T J_2 b$$

y

$$2(k + \alpha)b^T b = (-l - 2k)b^T J_2 a = (l + 2k)a^T J_2 b$$

y recordando que  $k + \alpha$  nunca se anula, se obtiene que  $\|a\| = \|b\|$ .

Los puntos críticos son aquellos para los cuales el triángulo es isósceles rectángulo, sin más restricción sobre  $k$  que la de hacer el denominador no nulo. Nuevamente las opciones para la relación entre  $a$  y  $b$  son

- 1)  $a = J_2 b$  (triángulo orientado positivamente), ó
- 2)  $a = -J_2 b$  ( triángulo orientado negativamente )

Para la primera opción  $\alpha = \|b\|^2$ ,  $l = 2\|b\|^2$ , lo que sustituido en las derivadas parciales conduce a valores de cero.

Por otro lado, si se cumple la segunda opción,  $l = 2\|b\|^2$ , entonces las derivadas parciales valen

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = \frac{-4kJ_2 b}{(k - \|b\|^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = \frac{4kb}{(k - \|b\|^2)^2}$$

y éstas sólo se anulan cuando  $k=0$  ó cuando  $b$  es el vector nulo.

Por lo tanto para un triángulo con dos lados libres el óptimo se alcanza cuando se consiga un triángulo rectángulo isósceles orientado positivamente, al igual que en el caso de la función de suavidad. El valor de ese óptimo es de cero, el cual es obviamente un mínimo local ya que para triángulos con área mayor que  $\frac{-k}{2}$ ,  $(l - 2\alpha)$  es no negativo.

## Ejemplo 3

La situación para el triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(x,y)$  es como sigue. En este caso

$$f_k(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2y}{k + y}$$

El cálculo de las derivadas parciales conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial x} &= \frac{2x}{k + y} \\ \frac{\partial f_k}{\partial y} &= \frac{y^2 + 2ky - x^2 - 2k - 1}{(k + y)^2} \end{aligned}$$

que se anulan en  $(0,1)$  y  $(0, -2k - 1)$ . Los valores de la función en estos puntos críticos son  $f_k(0,1) = 0$  y  $f_k(0, -2k - 1) = -4(k + 1)$ .

El valor de la hessiana en  $(0,1)$  es de

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{k+1} & 0 \\ 0 & \frac{2k^2+4k+1}{(k+1)^2} \end{pmatrix}$$

que es positiva definida para los valores de  $k$  mayores que  $-1$ , rango dentro del cual están los valores que presentan interés para nosotros. Esto indica que  $(0,1)$  es un mínimo local.

Por otro lado, la hessiana en  $(0, -2k - 1)$  es

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{k+1} & 0 \\ 0 & \frac{-2k^2+1}{(k+1)^2} \end{pmatrix}$$

la cual es negativa definida en el rango de valores de  $k$  que interesa. Por tanto se tiene un máximo local en  $(0, -2k - 1)$ .

### 4.2.2 Propiedades Básicas sobre una Malla

A continuación se enlistan algunas propiedades del funcional anterior, así como las demostraciones correspondientes. Se denotará con  $f_k$  a la función definida en cada triángulo de la malla como

$$f_k(\Delta) = \frac{l - 2\alpha(\Delta)}{k + \alpha(\Delta)}$$

donde como anteriormente,  $l$  es la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo  $\Delta$  que pertenecen a la malla y  $\alpha$  es el doble del área de dicho triángulo. Asimismo se denotará con  $F_k$ , a la función que se obtiene sumando los valores de  $f_k(\Delta)$  para todo triángulo determinado por la malla.

**Proposición 4.1 (Ivanenko [25])**

Sea  $\{G_q\}$  una sucesión de mallas en  $D_k$ ,  $k$  positivo, tal que  $\{G_q\} \rightarrow \partial(D_k)$ ; es decir,  $\{\alpha_-(G_q)\} \rightarrow -k$ . Entonces

$$F_k(G_q) \rightarrow \infty$$

Demostración:

Sean  $\Delta_q$  el triángulo de  $G_q$  con área mínima y  $a_q$ ,  $b_q$  los lados de  $\Delta_q$  que están en la malla. Por hipótesis  $k + \alpha(\Delta_q) \rightarrow 0$ . Si  $\{F_k(G_q)\}$  estuviera acotado se tendría que

$$l(\Delta_q) - 2\alpha(\Delta_q) \rightarrow 0$$

lo cual diría que que  $\{\Delta_q\}$  tiende a un triángulo rectángulo isósceles con área positiva o que los lados tienden a 0. Ninguna de estas opciones es posible debido a la suposición sobre el área de  $\Delta_q$ .  $\diamond$

Inmediatamente de la proposición se sigue

**Corolario (Ivanenko [25]):**

Sea  $k$  positivo. Si  $D_k$  no es vacío, entonces  $F_k$  tiene al menos un mínimo en  $D_k$ .

**Proposición 4.2** Sea  $G_1$  en  $D_k$ ,  $k > 0$ . Sea  $G_k \in D_k$  tal que

$$F_k(G_k) = \min\{F_k(G) : G \in D_k\}.$$

Entonces  $\alpha_-(G_k) \geq -k'$ , con  $k' = k - \frac{2k}{\lambda_k+2}$  y  $\lambda_k = F_k(G_1)$ .

Demostración:

Sea  $G \in D_k$  tal que  $\alpha_-(G) < -k'$ . Sea  $\Delta$  un triángulo de área mínima de  $G_k$ , entonces

$$\begin{aligned} F_k(G) &\geq \frac{l(\Delta) - 2\alpha(\Delta)}{k + \alpha(\Delta)} \\ &= \frac{l(\Delta) - 2\alpha_-(G)}{k + \alpha_-(G)} \\ &= \frac{l(\Delta) + 2k}{k + \alpha_-(G)} - 2 \\ &\geq \frac{2k}{k + \alpha_-(G)} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{2k}{\frac{2k}{\lambda_k+2}} - 2 \\
&= \lambda_k
\end{aligned}$$

y por tanto el mínimo no se alcanza en  $G$ .  $\diamond$

La siguiente proposición indica cómo calcular una  $k$  de tal manera que al optimizar  $F_k$  se obtenga una malla "más cercana" a ser convexa.<sup>1</sup>

**Proposición 4.3** *Supóngase que existen  $\bar{G} \in D_0$  y  $G_0$  tal que  $\beta = \alpha_-(G_0) < 0$ . Sea  $k = -\beta + \epsilon$ , con  $0 < \epsilon < \frac{-\beta}{\lambda}$ ,  $\lambda = F_0(\bar{G})$ . Sea  $G_k$  una malla en  $D_k$  en donde se alcanza el mínimo de  $F_k$ .<sup>2</sup> Entonces  $\alpha_-(G_k) > \beta$ .*

Demostración:

Aplíquese el resultado de la proposición 4.2 con  $G$  sustituido por  $\bar{G}$ . Se sigue que para las mallas  $G$  en  $D_k$  tales que  $\alpha_-(G) < -k + \frac{2k}{\lambda_k+2}$ , con  $\lambda_k = F_k(\bar{G})$ , se tiene que  $F_k(G) > \lambda_k$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha_-(G_k) &\geq -k + \frac{2k}{\lambda_k+2} \\
&= \beta - \epsilon + \frac{2(-\beta + \epsilon)}{\lambda_k+2} \\
&= \frac{\lambda_k}{\lambda_k+2}(\beta - \epsilon) \\
&> \frac{\lambda_k}{\lambda_k+2} \left( \beta + \frac{\beta}{\lambda} \right) \\
&= \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \frac{\lambda+2}{\lambda_k+2} \right) \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \beta
\end{aligned}$$

Ahora bien,  $\lambda_k \leq \lambda$  y por tanto

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2} \frac{\lambda+2}{\lambda} \leq 1$$

así que, al ser  $\beta < 0$ ,

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2} \frac{\lambda+2}{\lambda} \beta \geq \beta$$

por lo tanto,

$$\alpha_-(G_k) > \left( \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \right) \beta > \beta \diamond$$

---

<sup>1</sup>En realidad, en términos prácticos sólo dice que existe una  $k$  tal. Se abunda sobre este punto más adelante

<sup>2</sup>Nótese que se está hablando de un mínimo global

Esta proposición dice que el conjunto de valores de  $k$  que son adecuados para que la optimización produzca una malla "menos no-convexa" que la inicial depende del conocimiento del valor de la función en una malla convexa. En la práctica no se conoce siquiera si una malla tal exista. Sin embargo, también se sigue de esa proposición que un valor de  $k$  suficientemente cercano a  $-\alpha_-(G_0)$  y menor que éste, servirá. Como resultado de la experimentación, se ha encontrado que una manera adecuada de calcular el valor de  $k$  es el siguiente:

$$k = \begin{cases} -1.05\alpha_-(G) & \text{si } \alpha_-(G) \leq -0.1\bar{\alpha} \\ -\alpha_-(G) + 0.01\bar{\alpha} & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

A continuación (Tabla 4.1) se muestran los resultados obtenidos al minimizar los funcionales correspondientes partiendo de las mallas iniciales de prueba. Se reportan el número de celdas no convexas de  $G_0$  (nc1),  $\alpha_-(G_0)$ , el número de celdas no convexas de la malla óptima (nc2), el número de iteraciones necesarias para lograr convergencia (it) y  $\alpha_-$  (el valor mínimo de  $\alpha$  para la malla óptima. Se puede observar de estos resultados que, en efecto, las mallas óptimas están más cerca de ser convexas que las iniciales, tal como lo dice la proposición 4.3. Las gráficas de las mallas óptimas se muestran también (Figuras 4.6 y 4.7). Puede observarse la suavidad de éstas.

Tabla 4.1.- Resultados para el funcional k-Suavidad

Malla	nc1	$\alpha_-(G_0)$	nc2	it	$\alpha_-$
M12	70	-1.878	14	15	-0.769
M13	88	-0.384	2	34	-0.134
M19	253	-1.926	33	18	-0.855
M26	164	-1.075	25	26	-0.510
HAB	394	-3.484	61	18	-1.555
SUD	318	-2.814	42	13	-1.407
UCH	473	-7.614	136	12	-3.294
ENG	575	-7.756	211	18	-3.357

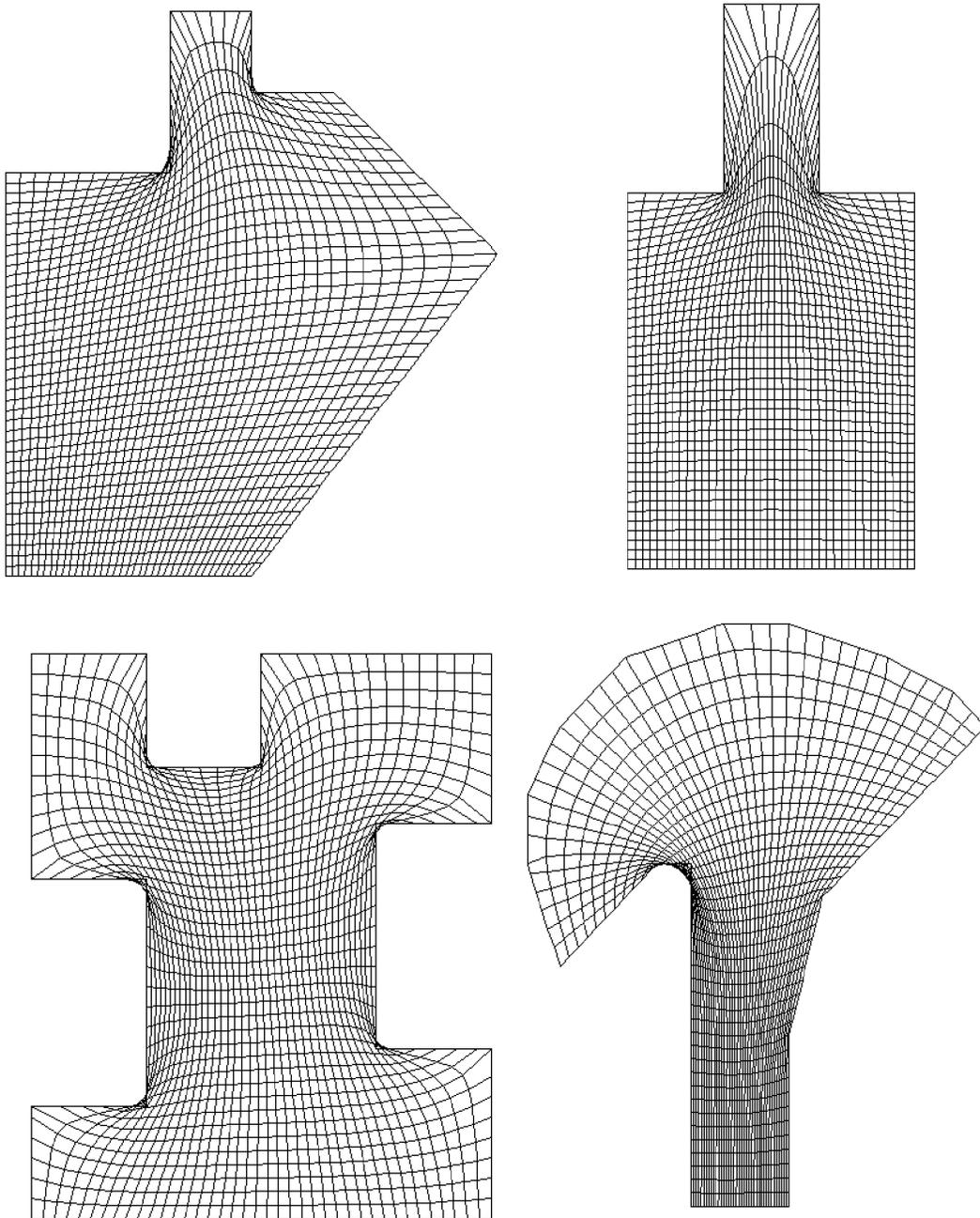


Figura 4.6.- Mallas Optimas para el Funcional k-Suavidad. Regiones M12, M13, M19 y M26.

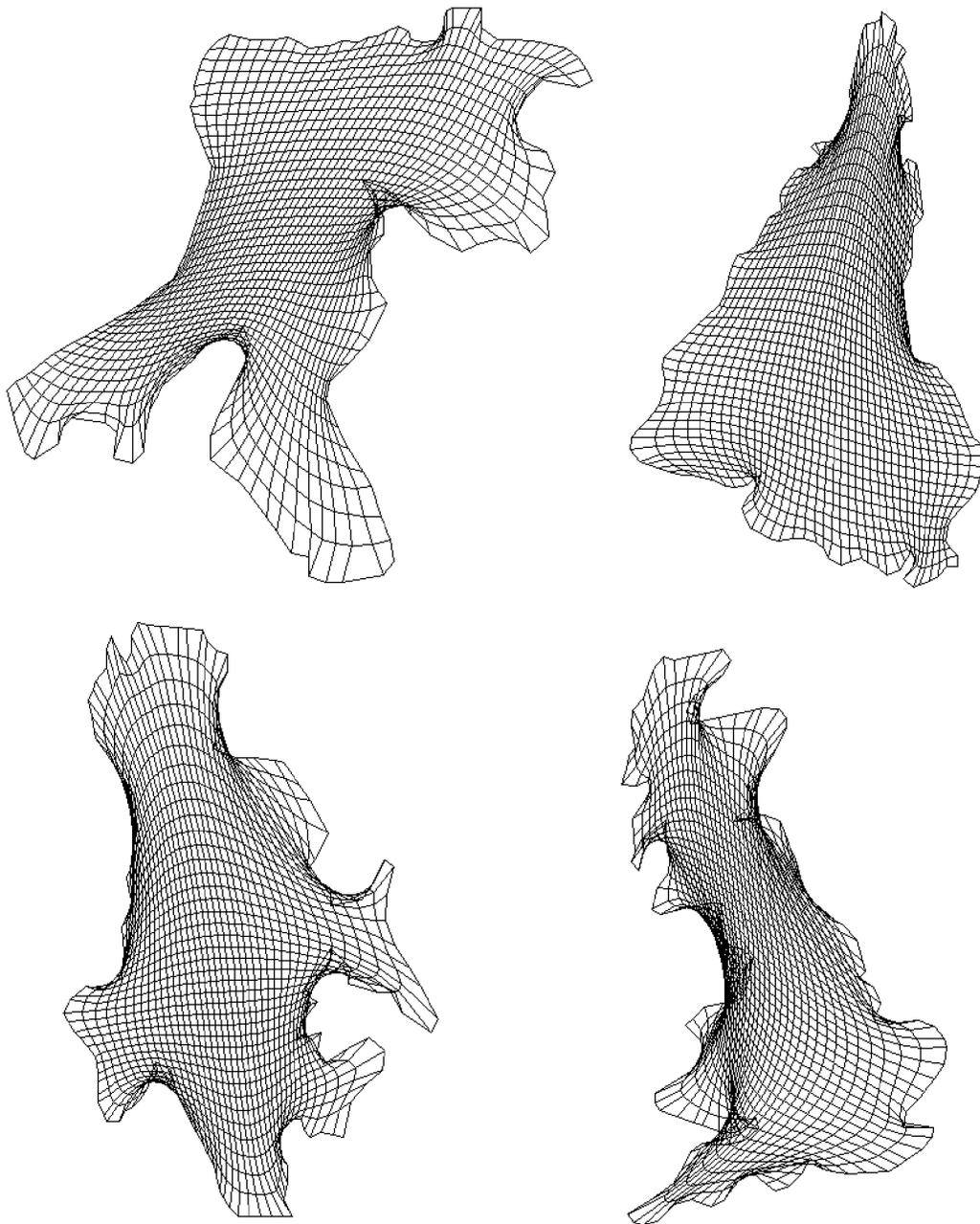


Figura 4.7.- Mallas Optimas para el Funcional k-Suavidad. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 4.2.3 Algoritmo Adaptivo

La proposición 4.3 dice que si empezamos con una malla no convexa y elegimos de manera adecuada  $k$ , el optimizar  $F_k$  produce una malla que está más cerca de ser convexa que la inicial; esto es, se construye una parte de la trayectoria hacia  $D_0$  de que se hablaba en la sección 4.1. Esto sugiere el siguiente procedimiento para construir una malla convexa en una región, a condición de que se sepa que existe alguna:

1. Genérese una malla inicial  $G_0$
2. Hágase

$$k = -\alpha_-(G_0) + \epsilon$$

con  $\epsilon$  que satisfaga las condiciones de la proposición 4.3.

3. Calcúlese  $G_k$  tal que

$$F_k(G_k) = \min\{F_k(G) : G \in D_k\}$$

4. Con  $G_k$  como nueva malla inicial, repítanse los pasos 2. y 3. hasta obtener una malla convexa.

La siguiente proposición establece que este proceso realmente lleva a obtener una malla convexa, bajo la hipótesis de que exista alguna.<sup>3</sup>Aunque en este esquema intervienen diferentes funcionales, uno para cada valor de  $k$ , convendrá por facilidad usar un sólo término para todos ellos: *Funcional Adaptivo de Suavidad, o Suavidad Adaptiva*.

**Proposición 4.4** *Si el conjunto de mallas convexas es no vacío, el proceso anterior conduce a la obtención de una malla convexa en un número finito de actualizaciones del parámetro  $k$ .*

Demostración:

Supóngase que el resultado no se cumpliera y sean  $\{k_q\}, \{G_q\}$  las sucesiones que se generan con el proceso anterior. Nótese que de acuerdo a la proposición 4.3

$$0 > \alpha_-(G_q) > \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}\right)^q \alpha_-(G_0)$$

---

<sup>3</sup>Hay que recalcar que éste resultado es de carácter básicamente teórico; en la práctica no es posible calcular exactamente el valor de  $k$ , como se mencionó en la sección anterior. También el Algoritmo supone que se es capaz de obtener un mínimo global, lo cual no siempre es posible numéricamente

y por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{q \rightarrow \infty} \alpha_-(G_q) &= 0 \\ \lim_{q \rightarrow \infty} k_q &= 0\end{aligned}$$

Esto último por ser  $k_q > -\alpha_-(G_q)(1 + 1/\lambda)$ . Considérese

$$D^* = \lim_{q \rightarrow \infty} D_{k_q} = \cap D_{k_q}.$$

Todas las mallas en este conjunto deben ser tales que ninguna de sus celdas es estrictamente no convexa; es decir, las áreas de todos los triángulos de las mallas en  $D^*$  son no negativas.

El proceso produce mallas  $G_{k_q}$  tales que

$$F_{k_q}(G_{k_q}) \leq F_{k_q}(G) \leq F_0(G)$$

donde  $G$  es una malla convexa.

Sea  $H$  una malla en  $D^*$  con  $\alpha_-(H) = 0$  y  $\Delta$  un triángulo de  $H$  de área mínima; esto es,  $\alpha(\Delta) = 0$ . Entonces

$$F_{k_q}(H) \geq \frac{l(\Delta) - 2\alpha(\Delta)}{k_q + \alpha(\Delta)} = \frac{l(\Delta)}{k_q}$$

Si  $H$  se obtiene como límite de tal proceso

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_{k_q}(H) \leq F_0(G)$$

esto es,

$$\lim_{k_q \rightarrow 0} \frac{l(\Delta)}{k_q}$$

es finito. Pero entonces  $l(\Delta)$  debe ser cero. Por lo tanto los lados de  $\Delta$  deben ser de longitud nula. Esto a su vez lleva a que los triángulos de  $H$  que tengan un lado en común con  $\Delta$  deben ser de área nula.

La repetición del razonamiento conducirá eventualmente a que todos los lados de las celdas de  $H$  son nulos, inclusive los de la frontera. Esto es imposible, por tanto el proceso nos conduce a una malla convexa en un número finito de pasos.  $\diamond$

En caso de no existir una malla convexa, se obtendrá una malla lo más cercana a la convexidad posible. También se ve que el proceso de actualización de  $k$  puede continuarse hasta valores negativos; sin embargo, no hay resultado que garantice que dicho valor continuará decreciendo, pues un triángulo de la malla pudiera ser isósceles y rectángulo y tener  $\alpha$  muy cercano a  $k$ ; su contribución al valor del funcional

a pesar de esto sería nulo y por tanto el método de optimización pudiera decidir no modificarlo.

Cabe aclarar que en cada iteración del proceso anterior se debe determinar la malla que produzca el mínimo para la  $k$  actual. En la implementación realizada por el autor sólo se realizan algunos pasos de un algoritmo iterativo, lo que lleva a una aproximación al mínimo, después de lo cual se actualiza el valor de  $k$ .

#### 4.2.4 Normalización

Una normalización para este funcional se obtiene considerando el hecho de que la función

$$f = \frac{l - 2\alpha}{k + \alpha}$$

se puede escribir como

$$f = \frac{l + 2k}{\alpha + k} - 2$$

y que, al ser  $l \geq 2\alpha$ , el primer término tiene un valor óptimo de 2, que se alcanza para triángulos rectángulos e isósceles. Por tanto la constante de normalización es  $2N$ , al igual que para el funcional de suavidad.

#### 4.2.5 Resultados

Los resultados de la aplicación del esquema anterior son muy satisfactorios: se obtienen mallas convexas y muy suaves sin necesidad de ningún tratamiento previo de las mallas iniciales y el número de iteraciones que se requiere para lograr el óptimo no es demasiado grande. La tabla 4.2 muestra datos relativos a las mallas de dimensión 40 por 40 que se han estado usando para ejemplificar. Cabe mencionar que estos datos corresponden a dos políticas distintas de paro:

1. El valor de  $k$  deja fijo cuando llega al valor  $-0.01\bar{\alpha}$ ; a esto corresponde la denominación TOPE en la tabla. Se ha seguido este criterio para lograr mallas sin celdas de área extremadamente pequeña.
2. El proceso sigue actualizando  $k$  hasta que el método de optimización no pueda continuar, los resultados tienen el rubro LIBRE. En este caso se logra un mejor control de las áreas; sin embargo, las mallas obtenidas muestran distorsiones en sus líneas coordenadas.

Las ocho primeras gráficas que se presentan después de la tabla 4.2 (Figuras 4.8 y 4.9) corresponden a la estrategia de tope. Las dos últimas (Figura 4.10) corresponden a la estrategia LIBRE, se puede notar la distorsión respecto a las primeras.

Tabla 4.2.- Resultados para el Funcional de Suavidad Adaptiva

Malla	Estrategia	nc	it	$\alpha_{-t}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	TOPE	0	49	0.081	7.886	0.220	5.691	0.287	1.383
	LIBRE	0	134	0.303	9.387	0.501	6.474	0.402	1.618
M13	TOPE	0	50	0.082	18.871	0.269	12.332	0.689	1.863
	LIBRE	0	93	0.196	21.710	0.494	13.993	0.926	2.287
M19	TOPE	0	55	0.059	8.778	0.132	6.505	0.477	1.390
	LIBRE	0	164	0.331	9.157	0.332	6.876	0.531	1.595
M26	TOPE	0	50	0.099	8.698	0.178	7.156	1.151	1.554
	LIBRE	0	392	0.442	5.183	0.459	4.539	0.317	2.610
HAB	TOPE	0	85	0.039	15.950	0.080	11.260	1.214	1.753
	LIBRE	0	305	0.285	15.682	0.286	11.082	1.165	2.050
SUD	TOPE	0	122	0.024	7.826	0.129	5.826	0.331	2.296
	LIBRE	0	184	0.068	7.925	0.218	5.895	0.367	2.605
UCH	TOPE	0	95	0.034	15.993	0.176	10.944	1.309	2.824
	LIBRE	0	127	0.086	16.252	0.252	11.107	1.385	3.029
ENG	TOPE	0	210	0.014	16.159	0.051	10.525	1.401	3.342
	LIBRE	0	222	0.016	16.164	0.051	10.527	1.401	3.349

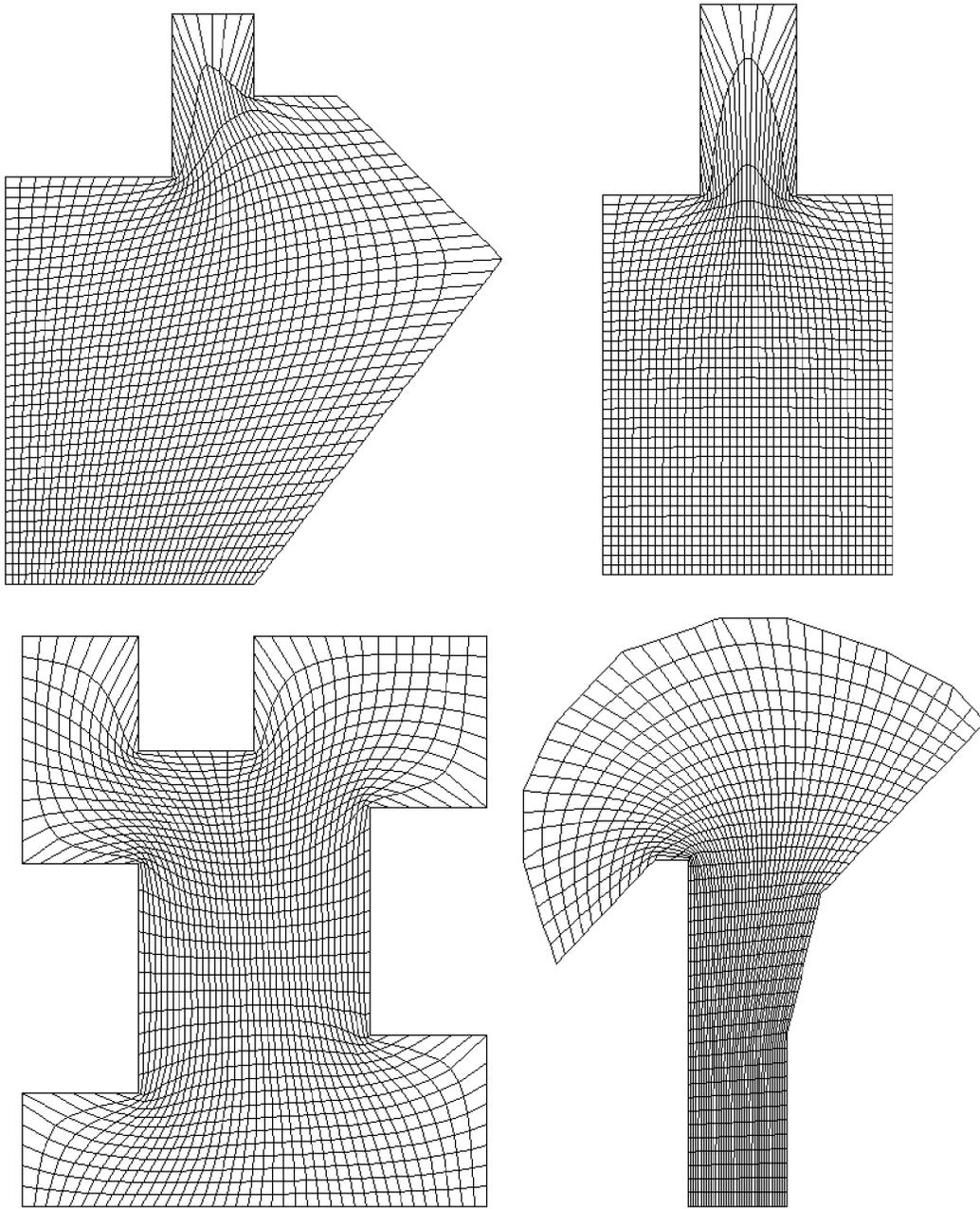


Figura 4.8.- Mallas Optimas para el Funcional de Suavidad Adaptiva. Regiones M12, M13, M19 y M26.

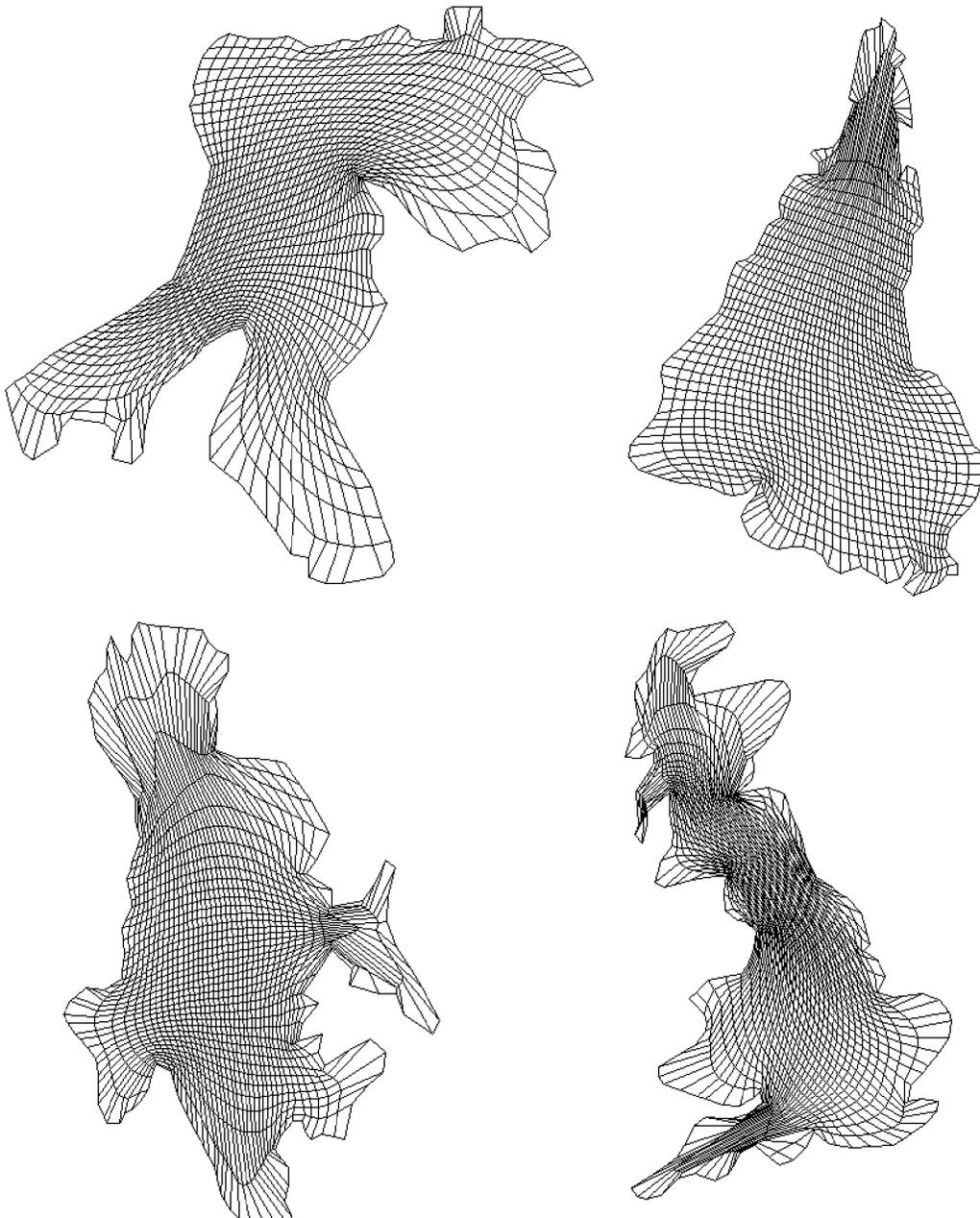


Figura 4.9.- Mallas Optimas para el Funcional de Suavidad Adaptiva. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

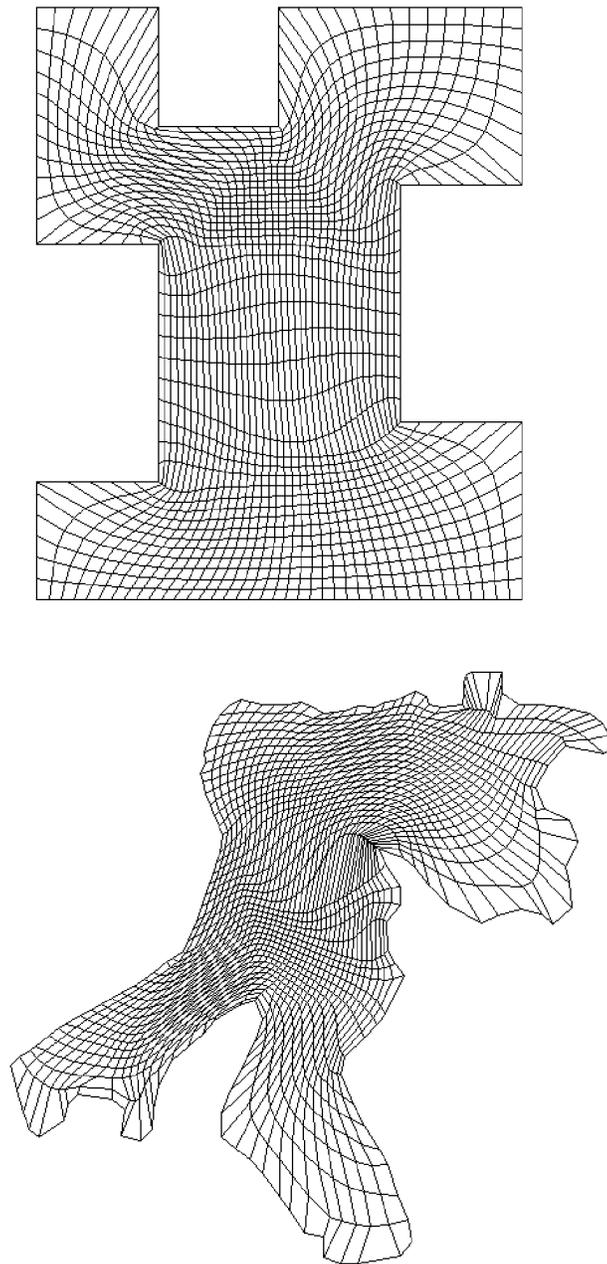


Figura 4.10.- Mallas Optimas para el Funcional de Suavidad Adaptiva. Estrategia LIBRE. Regiones M19 y HAB.

### 4.3 El Funcional de Suavidad Bilateral

La minimización del funcional de suavidad conduce a obtener mallas que poseen dos características deseables como son la convexidad y la suavidad. Sin embargo para regiones que tienen esquinas convexas que no son extremos de alguna de las cuatro fronteras, este proceso lleva a la obtención de celdas con área muy grande cerca de las mencionadas esquinas. Véanse, por ejemplo las mallas construidas con este método para algunas regiones, que se muestran al final del apartado anterior.

Este efecto no es deseable. Para disminuirlo podría ser necesario sacrificar alguna de las otras dos características. Ahora bien, las mallas no convexas indican que la transformación asociada a dicha malla tiene jacobiano negativo en algunas partes; si se asume que esta cantidad varía continuamente, se llegaría a la conclusión de que en algún punto el jacobiano es nulo, lo que diría que la transformación pudiera no ser 1-1. Por tanto no se puede sacrificar la convexidad.

Queda entonces la opción de perder un poco de suavidad. Siguiendo estas ideas, se propone ahora modificar el funcional de suavidad en la siguiente forma.

#### 4.3.1 Propiedades sobre Triángulos

Sea la función

$$g = \frac{l - 2\alpha}{k - \alpha}$$

Para el triángulo cuyos lados son los vectores  $a$  y  $b$ ,  $g$  se escribe como

$$g(a, b; k) = \frac{a^T a + b^T b - 2a^T J_2 b}{k - a^T J_2 b}$$

Si se considera un valor de  $k$  tal que  $g$  sea positivo para todos los triángulos asociados a la malla; esto es,

$$k > \alpha_+$$

entonces  $g$  está acotada inferiormente por cero y este valor mínimo se alcanzará cuando  $l = 2\alpha$ ; es decir cuando

$$a^T a + b^T b = 2a^T J_2 b$$

que es equivalente a

$$\| a - J_2 b \|^2 = 0$$

lo que dice  $a = J_2 b$ . Si se toma en cuenta que  $J_2$  es una matriz de rotación de  $\frac{\pi}{2}$  en el sentido de las manecillas del reloj, se llega a que  $a$  y  $b$  son perpendiculares, tienen la misma longitud y el triángulo que determinan tiene área positiva.

El mínimo de esta función está en el mismo lugar que el del funcional de suavidad, a condición de que  $k$  haga todos los denominadores positivos. De hecho un análisis del gradiente de  $g$  lleva a la misma conclusión.

Por tanto el minimizar el funcional discreto asociado a  $g$ , usando un proceso iterativo y una malla inicial que cumpla con que las áreas de todos sus triángulos sean menores que  $k$  generará una red óptima con triángulos de área no mayor que  $k$ .

Si se combina la variante del funcional de Ivanenko introducido en el apartado anterior con este funcional, se obtiene el funcional discreto cuyo valor en cada triángulo está dado por

$$f_{bil} = \frac{l - 2\alpha}{k_1 + \alpha} + \frac{l - 2\alpha}{k_2 - \alpha}$$

donde los valores de  $k_1$  y  $k_2$  se eligen para hacer que todos los términos sean no negativos al valuar el funcional en la malla inicial; esto es,

$$k_1 > -\alpha_-$$

y

$$k_2 > \alpha_+$$

La minimización de este funcional conducirá a mallas que tienden a ser suaves y tales que las áreas de sus triángulos estarán entre  $-k_1$  y  $k_2$ .

Ahora bien,  $k_1$  y  $k_2$  pueden ser tales que la malla óptima obtenida en la práctica no sea convexa y/ó tenga áreas muy grandes. Para remediar esto, es necesario actualizar los valores de las  $k$ 's; esto es, aplicar también un proceso del tipo descrito en el apartado anterior; sin embargo no hay resultados que garanticen la disminución del tamaño de las celdas grandes, ya que se pudiera dar la situación de que un triángulo de la malla fuera rectángulo e isósceles y que su área fuera cercana a  $k_2$ ; la contribución de este triángulo al valor del funcional sería nulo y por tanto el algoritmo de optimización pudiera decidir no cambiarlo.

### 4.3.2 Determinación de $k_2$ , Normalización y Resultados

Una manera de determinar el valor  $k_2$  que ha funcionado bien en la práctica es el siguiente:

$$k_2 = 1.05\alpha_+$$

Por otro lado se debe mencionar que si se sigue la estrategia de actualizar simultáneamente los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , no se logra obtener mallas convexas en algunos casos. Por esta razón es que se propone seguir una estrategia alternativa de actualización de estos parámetros: mientras no se consiga convexidad, sólo se actualiza  $k_1$ , dejando fijo el valor de  $k_2$ . Cuando ya se tenga una malla convexa se actualizan simultáneamente ambos valores. Esta estrategia ha dado excelentes resultados.

Tabla 4.3.- Resultados para el Funcional de Suavidad Bilateral

Malla	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	0	47	0.052	3.193	0.161	2.697	0.133	1.279
M13	0	47	0.068	3.856	0.179	3.731	0.100	1.436
M19	0	60	0.056	3.451	0.139	2.902	0.278	1.340
M26	0	62	0.086	3.884	0.162	3.760	0.836	1.542
HAB	0	126	0.045	6.745	0.094	5.565	0.692	1.676
SUD	0	124	0.023	3.837	0.096	2.892	0.160	1.708
UCH	0	144	0.026	6.567	0.119	4.805	0.585	2.280
ENG	0	293	0.013	5.580	0.056	4.806	0.654	2.815

Nuevamente el criterio para normalizar este funcional fue el de considerar que en el óptimo todos los triángulos de la malla son rectángulos e isósceles. El factor de normalización usado es por tanto el mismo que para el funcional de suavidad:  $2N$ .

Se reportan en la tabla 4.3 los resultados de aplicar el funcional de suavidad bilateral a mallas de dimensión 40 por 40. Al igual que se hizo para el funcional de suavidad adaptiva, se pueden seguir diferentes criterios de parada. Aquí se muestran sólo los correspondientes a la estrategia TOPE en donde los parámetros dejaron de actualizarse cuando alcanzaron los valores  $k_1 = -0.01\bar{\alpha}$  y  $k_2 = 4\bar{\alpha}$  siempre que esto fuera posible. También se muestran las gráficas de las mallas óptimas (Figuras 4.11 y 4.12).

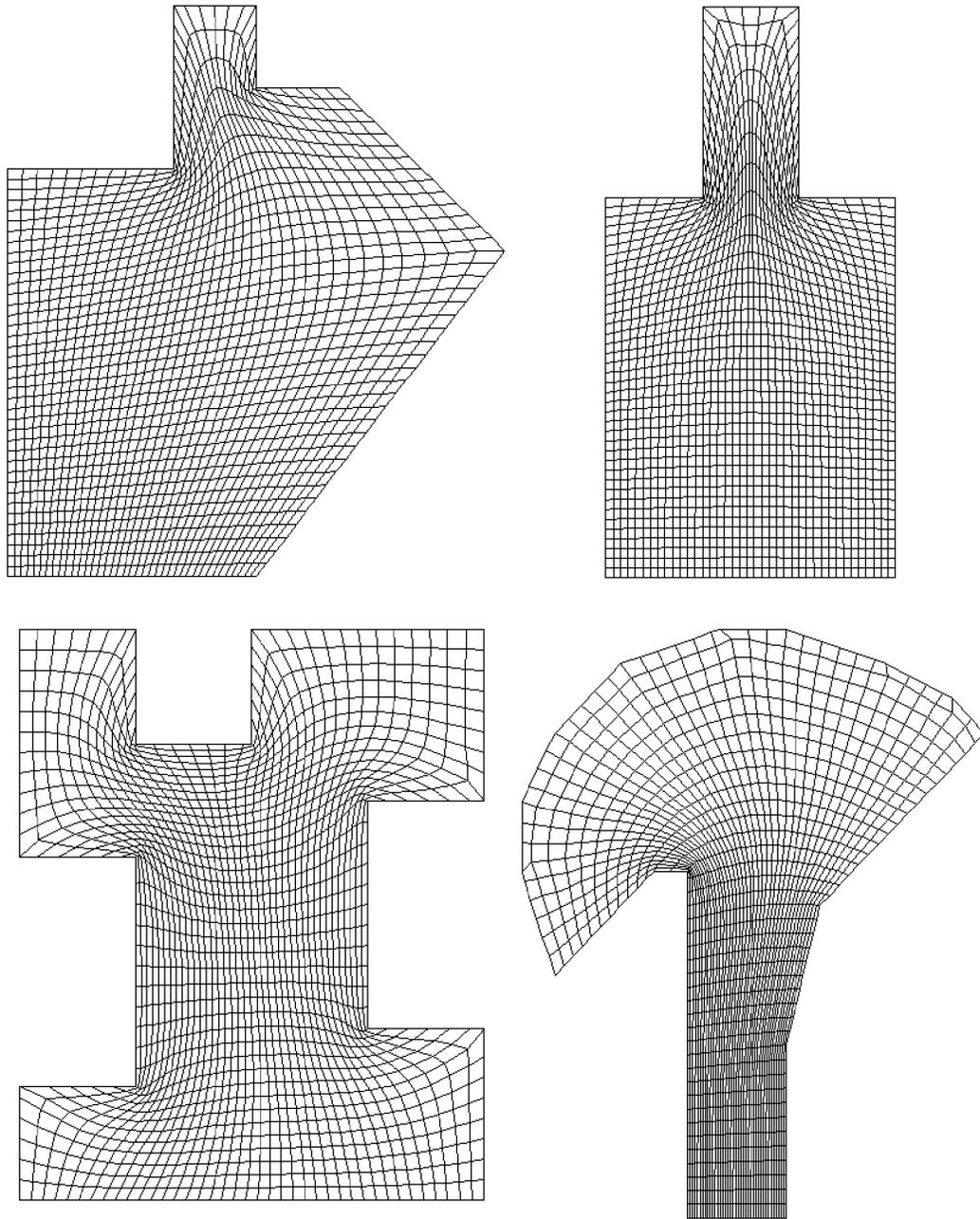


Figura 4.11.- Mallas Optimas para el Funcional de Suavidad Bilateral. Regiones M12, M13, M19 y M26.

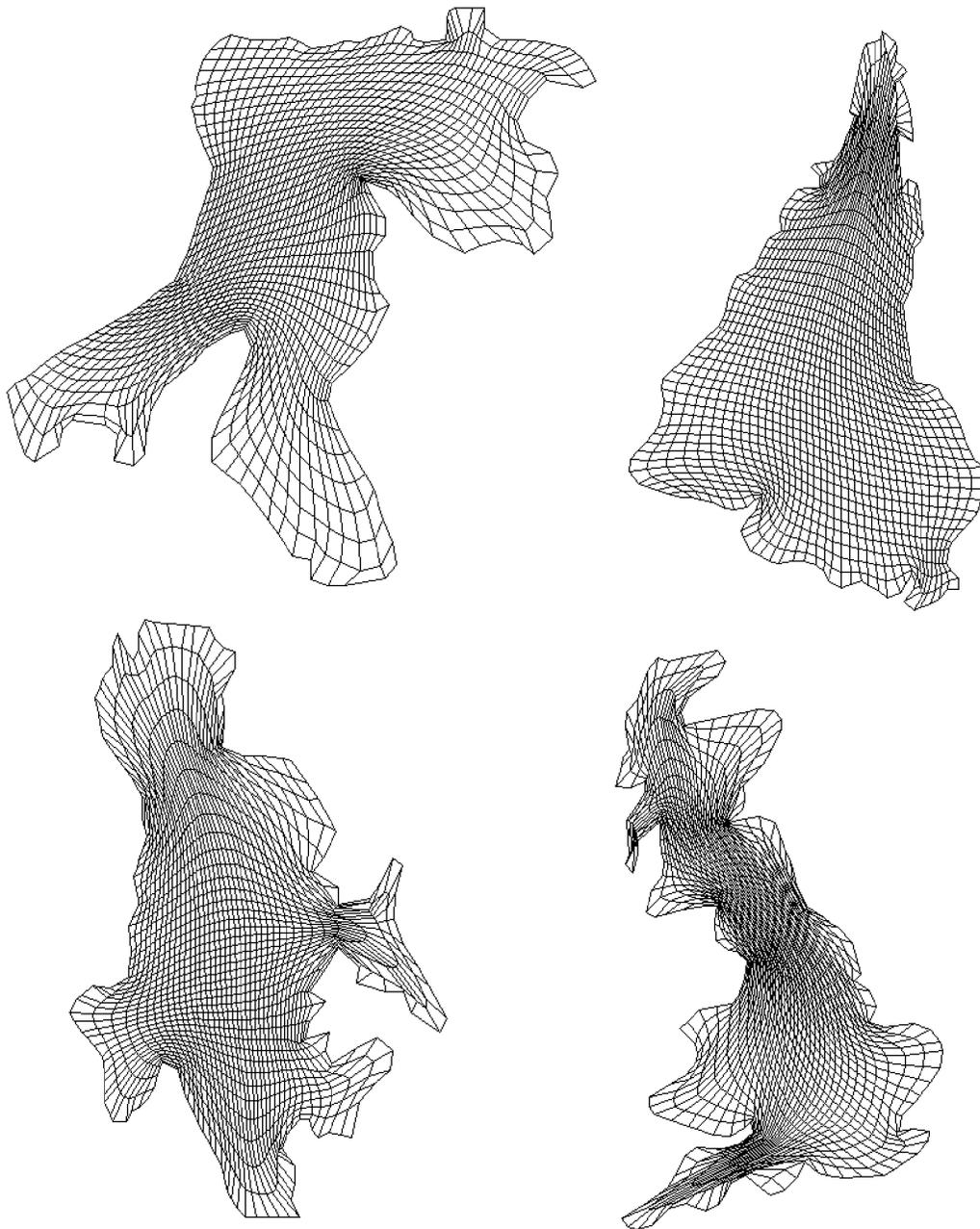


Figura 4.12.- Mallas Optimas para el Funcional de Suavidad Bilateral. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

# CAPITULO 5

## Nuevos Funcionales de Area

### 5.1 Forma General de los Funcionales de Area

En este apartado se define de manera general lo que se entenderá por un funcional de área y se establecen resultados válidos para todos los funcionales de dicha forma. A partir de estas propiedades se espera comprender mejor el proceso de optimización de tales funcionales.

Se define un funcional de área continuo como una expresión de la forma

$$\int_0^1 \int_0^1 L(J) d\eta d\xi$$

donde  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  es el jacobiano de la transformación. Un funcional discreto de área será una expresión de la forma

$$\sum_{q=1}^N f(\alpha_q)$$

donde como anteriormente  $N$  es el número de triángulos de la malla y  $\alpha_q$  es el doble del área del triángulo  $\Delta_q$ .

#### 5.1.1 Un Problema de Minimización

Considérese el siguiente problema de minimización con restricciones:

*Minimizar la función de  $N$  variables reales*

$$\sum_{q=1}^N f(w_q)$$

sujeto a la restricción

$$\sum_{q=1}^N w_q = B$$

donde  $B$  es una constante y  $f$  es una función tal que  $f'$  es 1-1,  $f'' \geq 0$ .

Este problema con restricciones es equivalente al siguiente: Minimizar

$$F(w_1, w_2, \dots, w_{N-1}) = \sum_{q=1}^{N-1} f(w_q) + f\left(B - \sum_{q=1}^{N-1} w_q\right)$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} = f'(w_i) - f'\left(B - \sum_{q=1}^{N-1} w_q\right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

Los puntos críticos  $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{N-1})$  son tales que

$$f'(\hat{w}_i) = f'\left(B - \sum_{q=1}^{N-1} \hat{w}_q\right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

y entonces como  $f'$  es 1-1, se cumple que

$$\hat{w}_i = B - \sum_{q=1}^{N-1} \hat{w}_q \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

de donde

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_2 = \dots = \hat{w}_{N-1} = \frac{B}{N}$$

Ahora, como

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w_j \partial w_i} = \delta_{i,j} f''(w_i) + f''\left(B - \sum_{q=1}^{N-1} w_q\right)$$

en el punto crítico esta cantidad es igual a

$$f''\left(\frac{B}{N}\right) [\delta_{i,j} + 1]$$

y por tanto la hessiana en tal punto es

$$H(F) = f''\left(\frac{B}{N}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Como por hipótesis  $f''\left(\frac{B}{N}\right) \geq 0$ ,  $H(F)$  será semipositiva definida si la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

lo es. Ahora bien, como

$$C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1, se sigue que  $\lambda = 1$  es un valor propio de  $C$  de multiplicidad  $N-2$ . Por otro lado se puede comprobar que

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N-1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N-1}$$

y esto implica que  $\lambda = N$  es también valor propio de  $C$ . Por lo anterior  $C$  es positiva definida y entonces se cumple que en el punto crítico, la función  $F$  tiene un mínimo.

Si se interpreta  $w_q$  como  $\alpha_q$  y  $B$  como  $4Area(\Omega)$ , lo anterior heurísticamente diría que casi cualquier funcional de área sirve para el propósito de obtener mallas con triángulos de igual área aproximadamente. Los resultados que siguen ponen en un contexto más riguroso esta idea.

Nótese que también se puede pensar en los  $w_q$  como áreas de las celdas y  $B$  como el área total de la región. Con esta interpretación se pueden obtener funcionales del tipo del funcional de área de Castillo. Sin embargo, como se explicó en el capítulo 3, no siempre la uniformidad de las áreas de las celdas conlleva la convexidad de éstas. Por lo tanto no se abordarán este tipo de funcionales.

### 5.1.2 Funcionales Continuos

Si para el funcional continuo de área

$$\int_0^1 \int_0^1 L(J) d\eta d\xi$$

con

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

se conviene en denotar

$$\frac{dL}{dJ} = L' \quad ; \quad \frac{d^2L}{dJ^2} = L''$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\xi} \right) &= \frac{d}{d\xi} \left( L' \frac{\partial J}{\partial x_\xi} \right) \\ &= \frac{d}{d\xi} (y_\eta L') \\ &= y_{\xi\eta} L' + y_\eta L'' \frac{dJ}{d\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\eta} \right) &= \frac{d}{d\eta} \left( L' \frac{\partial J}{\partial x_\eta} \right) \\ &= -\frac{d}{d\eta} (y_\xi L') \\ &= -y_{\xi\eta} L' - y_\xi L'' \frac{dJ}{d\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\xi} \right) &= \frac{d}{d\xi} \left( L' \frac{\partial J}{\partial y_\xi} \right) \\ &= -\frac{d}{d\xi} (x_\eta L') \\ &= -x_{\xi\eta} L' - x_\eta L'' \frac{dJ}{d\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\eta} \right) &= \frac{d}{d\eta} \left( L' \frac{\partial J}{\partial y_\eta} \right) \\ &= \frac{d}{d\eta} (x_\xi L') \\ &= x_{\xi\eta} L' + x_\xi L'' \frac{dJ}{d\eta} \end{aligned}$$

con lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan como

$$\begin{aligned} L'' \left[ x_\eta \frac{dJ}{d\xi} - x_\xi \frac{dJ}{d\eta} \right] &= 0 \\ L'' \left[ y_\eta \frac{dJ}{d\xi} - y_\xi \frac{dJ}{d\eta} \right] &= 0 \end{aligned}$$

De esto, se concluye que las ecuaciones de Euler-Lagrange para cualquier funcional de área son las mismas, salvo el factor  $L''$ .

Para el funcional clásico de área en su versión continua  $L'' = 2$ . Por tanto una malla que sea solución de las ecuaciones para el funcional clásico también será solución de las correspondientes ecuaciones para cualquier otro funcional de área. Recíprocamente una malla que satisfaga las ecuaciones para un funcional de área y que sea tal que no anule el factor  $L''$  también satisficará las ecuaciones del funcional clásico.

Si se manipula un poco el sistema de ecuaciones anterior, éste puede ser re-escrito en la forma

$$L'' \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dJ}{d\xi} \\ \frac{dJ}{d\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y si se consideran sólo mallas no singulares; esto es, aquellas para las cuales

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

es no singular, se concluye que para tales mallas, las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a

$$L'' \begin{pmatrix} \frac{dJ}{d\xi} \\ \frac{dJ}{d\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y estas últimas dicen que, nuevamente si  $L'' \neq 0$ ,  $J$  debe ser constante. Esta constante debe ser el valor del área de la región  $\Omega$ . Si existe solución, ésta tiene exactamente la propiedad que se buscabas. Nuevamente cabe decir que la elección de  $L$  puede ser crucial para obtener una buena aproximación numérica a una solución.

Algunos funcionales con las características anteriores y que se usarán más adelante son los obtenidos con

- $L = (J - k_1)^4$
- $L = J^{-1}$
- $L = (J + k_2)^{-1}$
- $L = (k_3 - J)^{-1}$

donde las  $k_i$  son constantes que se precisarán posteriormente.

### 5.1.3 Funcionales Discretos

La forma general de los funcionales discretos de área que se consideran aquí es

$$F = \sum_{q=1}^N f(\alpha_q)$$

donde  $f$  es de clase  $C^2$ . También es pertinente hacer la aclaración de que, como ya fue mencionado, en lugar de  $\alpha_q$ , que es esencialmente el área del triángulo  $q$ -ésimo, se pueden además considerar las áreas de las celdas; esto produciría funcionales del tipo del funcional de área de Castillo. Ya se esgrimieron argumentos que justifican el por qué no se consideran en este trabajo.

En esta sección se demostrará que los funcionales de área con ciertas características tienen las dos propiedades que se mencionaron en 3.4. en lo relativo a las áreas de los triángulos de la malla. Las mismas propiedades (y esencialmente las mismas demostraciones de ellas) son válidas para funcionales de área del tipo Castillo; esto es, con celdas en lugar de triángulos. Es en este sentido que esta sección generaliza los resultados correspondientes de Castillo.

La  $r$ -ésima componente del gradiente de  $F$  es

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = \sum_{q=1}^N f'(\alpha_q) \frac{\partial}{\partial z_r} \alpha_q$$

y la componente  $r,s$ -ésima de la hessiana de  $F$  es

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_s \partial z_r} = \sum_{q=1}^N \left[ f''(\alpha_q) \left( \frac{\partial}{\partial z_s}(\alpha_q) \right) \left( \frac{\partial}{\partial z_r}(\alpha_q) \right) + f'(\alpha_q) \frac{\partial^2}{\partial z_s \partial z_r}(\alpha_q) \right]$$

Defínase

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{diag}(f''(\alpha_1), f''(\alpha_2), \dots, f''(\alpha_N)) \\ A_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial z_i}(\alpha_j) \\ B_q &= \text{hessiana de } \alpha_q \end{aligned}$$

Entonces la hessiana de  $F$  se puede escribir como

$$H = A^t \Gamma A + \sum_{q=1}^N f'(\alpha_q) B_q$$

El siguiente resultado indica que, teóricamente, casi cualquier funcional de área es útil. Como ya se ha observado, esto no es necesariamente cierto en la práctica.

**Proposición 5.1** *Si  $G$  es una malla tal que*

$$\alpha_q = \bar{\alpha} \quad q = 1, 2, \dots, N$$

*y  $F$  es un funcional de área, entonces*

1.  *$G$  es un punto crítico de  $F$ .*
2. *Si además  $f$  es tal que  $f'' \geq 0$ ,  $G$  es un mínimo para  $F$ .*

*Demostración.-*

Como

$$\sum_{q=1}^N \alpha_q = 4 \text{ Area}(\Omega)$$

para cualquier malla sobre  $\Omega$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z_r} \left( \sum_{q=1}^N \alpha_q \right) = 0$$

en particular

$$\frac{\partial}{\partial z_r} \left( \sum_{q=1}^N \alpha_q \right) (G) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, (m-2)(n-2)$$

Por la misma razón

$$\frac{\partial^2}{\partial z_s \partial z_r} \left( \sum_{q=1}^N \alpha_q \right) (G) = 0 \quad r, s = 1, 2, \dots, (m-2)(n-2)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial F}{\partial z_r} \right] (G) &= \left[ \sum_{q=1}^N f'(\alpha_q) \frac{\partial}{\partial z_r} (\alpha_q) \right] (G) \\ &= \left[ \sum_{q=1}^N f'(\bar{\alpha}) \frac{\partial \alpha_q}{\partial z_r} \right] (G) \\ &= f'(\bar{\alpha}) \left[ \sum_{q=1}^N \frac{\partial \alpha_q}{\partial z_r} \right] (G) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto se cumple la primera afirmación.

Por otro lado, la componente  $s,r$ -ésima del segundo término de la expresión para  $H$  valuado en  $G$  es

$$f'(\bar{\alpha}) \left[ \sum_{q=1}^N \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial z_s \partial z_r} \right] = 0$$

así que la hessiana de  $F$  en  $G$ , al ser  $\Gamma$  diagonal con elementos no negativos, es

$$\begin{aligned} H(G) &= \left[ A^t \Gamma^{1/2} \Gamma^{1/2} A \right] (G) \\ &= \left[ (\Gamma^{1/2} A)^t (\Gamma^{1/2} A) \right] (G) \\ &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

O sea que  $H$  valuada en  $G$  es semi-positiva definida. Así pues  $G$  es un mínimo para  $F$ .

Los resultados anteriores indican en cierta forma cómo diseñar nuevos funcionales de área. Los funcionales que se han desarrollado y que se muestran en las siguientes secciones son precisamente de este tipo.

## 5.2 El funcional A4P

### 5.2.1 Definición

Como un primer intento de obtener funcionales de área que produzcan mejores resultados que el clásico, se ha experimentado con funcionales discretos de la forma

$$F_{As} = \sum_{q=1}^N (\alpha_q - \bar{\alpha})^{2s} \quad s = 1, 2, \dots,$$

Estos funcionales, aparentemente, tienen la propiedad de magnificar las desviaciones de las áreas de los triángulos de la malla en relación a  $\bar{\alpha}$ .

También se puede mencionar que tienen las propiedades útiles que mencionamos en el apartado anterior, así que:

1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange del análogo continuo son prácticamente las mismas que las del funcional clásico de área.
2. De existir una malla con todos sus triángulos de igual área, ésta es un mínimo para este funcional.

De entre varios valores de  $s$  experimentados, ha dado muy buenos resultados  $s=2$ , lo que dá lugar al que se ha denominado *Funcional de Area Cuarta Promedio*

$$F_{A4P} = \sum_{q=1}^N (\alpha_q - \bar{\alpha})^4$$

### 5.2.2 Normalización y Resultados

Tomando en cuenta que  $(\alpha_q - \bar{\alpha})^4$  es un polinomio de grado 4 en  $\alpha$ , cada término se normaliza dividiendo entre  $\bar{\alpha}^4$ , lo que conduce a una constante de normalización para el funcional de

$$N\bar{\alpha}^4$$

Esta normalización es la usada y con la que se obtienen los resultados que se reportan.

Se optimizó este funcional sobre las mallas de prueba de dimensión 40 por 40 que se han estado usando. Los resultados pertinentes están contenidos en la Tabla 5.1. De ellos se puede observar que, en relación al funcional clásico de área:

1. En general las áreas mínimas son mayores.
2. Se obtiene convexidad en más casos.

3. El número de iteraciones necesarias para llegar a un óptimo es, en algunos casos, considerablemente mayor pero en la mayoría de las ocasiones es menor.

Las gráficas de las mallas óptimas correspondientes se muestran en las figuras 5.1 y 5.2.

Tabla 5.1.- Resultados para el Funcional de Area Cuarta Promedio

Malla	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	0	87	0.012	1.653	0.561	1.333	0.009	1.724
M13	0	261	0.082	1.417	0.740	1.304	0.010	2.844
M19	0	249	0.297	1.551	0.878	1.549	0.014	2.538
M26	1	218	-0.072	1.907	0.462	1.555	0.020	5.931
HAB	4	497	-1.509	3.754	0.380	2.052	0.057	4.822
SUD	0	234	0.007	1.780	0.405	1.316	0.021	2.912
UCH	7	500	-1.241	3.095	-0.046	2.816	0.071	4.230
ENG	17	500	-0.860	2.692	0.006	1.860	0.119	7.320

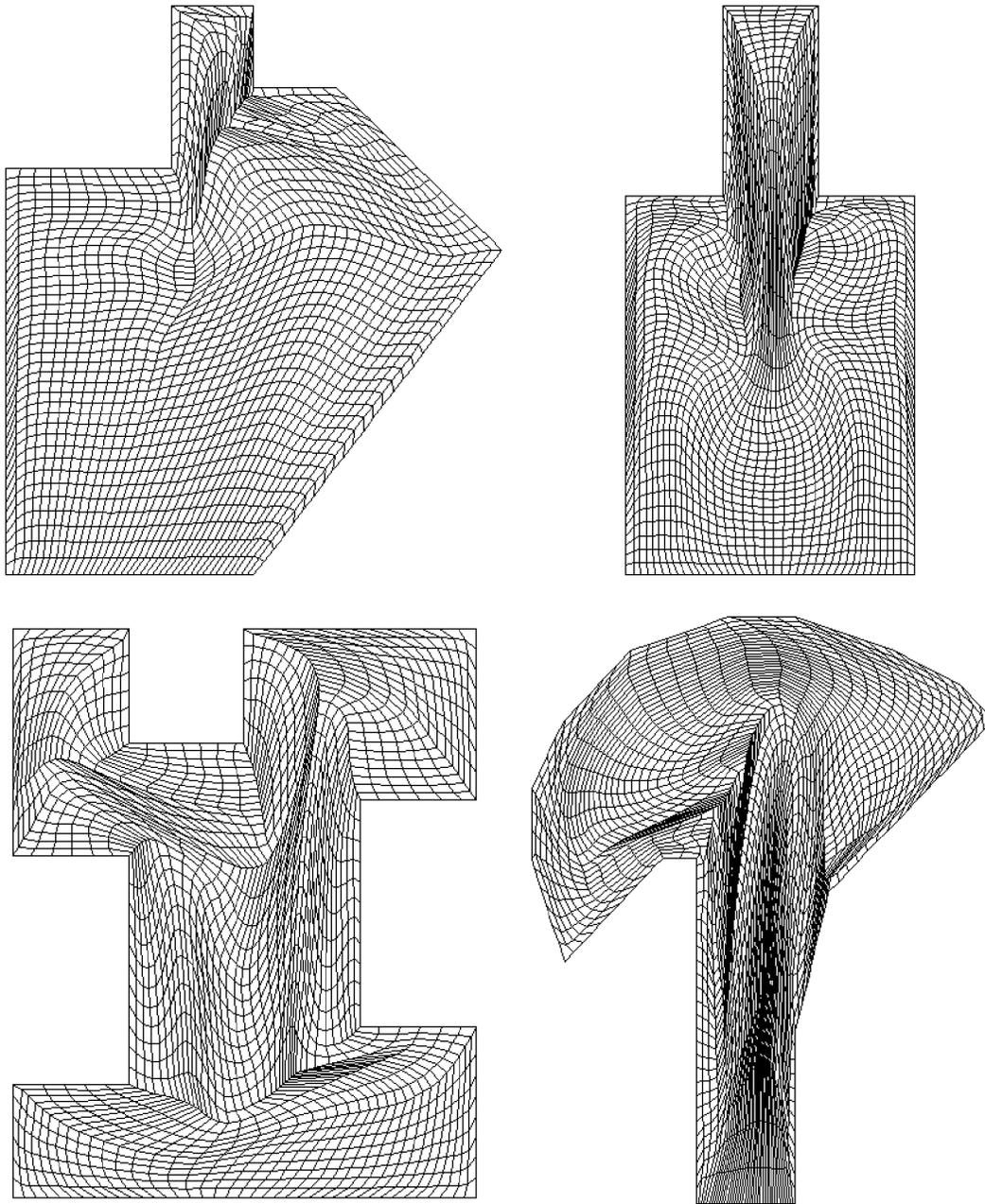


Figura 5.1.- Mallas Optimas para el Funcional A4P. Regiones M12, M13, M19 y M26.

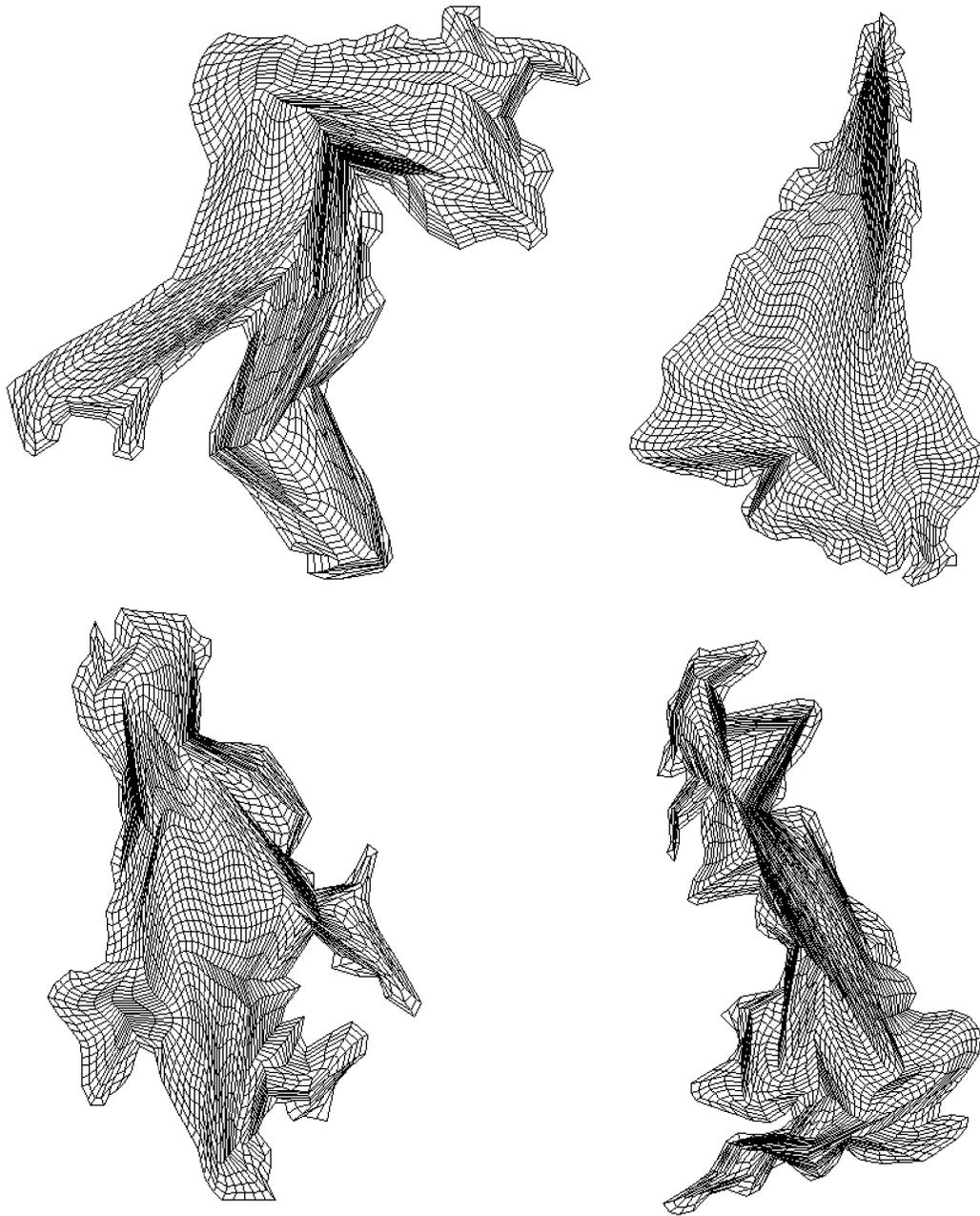


Figura 5.2.- Mallas Optimas para el Funcional A4P. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

## 5.3 El Funcional de Area Adaptivo

### 5.3.1 Versión Continua

El funcional de área clásico en su versión continua es

$$F_A = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\eta d\xi$$

donde  $J$  es el jacobiano de la transformación.

Si se plantea este funcional para la transformación inversa, obtenemos el funcional

$$F_{A^{-1}} = \int \int_{\Omega} (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2 dy dx$$

el cual al cambiar coordenadas y usando que

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J} \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J} \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J} \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J}$$

toma la forma

$$\begin{aligned} F_{A^{-1}} &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{x_\xi y_\eta}{J^2} - \frac{x_\eta y_\xi}{J^2} \right)^2 J d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\eta d\xi}{J} \end{aligned}$$

### 5.3.2 Versión Discreta

Al discretizar el funcional continuo anterior con el esquema que se ha estado usando, se obtiene el funcional discreto recíproco de área para una malla discreta  $G$ ,

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{\Delta \in G} f_{A^{-1}}(\Delta) = \sum_{\Delta \in G} \frac{1}{\alpha(\Delta)}$$

que, usando la numeración de los triángulos de la malla introducida anteriormente, se puede escribir como

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q}$$

Obsérvese que, al igual que el funcional de suavidad, si el proceso de optimización de  $F_{A^{-1}}$  ha de generar una malla convexa, se necesita que la malla inicial ya lo sea.<sup>1</sup> Esta es una seria limitación para el uso de este funcional la cual, sin embargo, se superará de la misma forma que se hizo para el caso de suavidad.

<sup>1</sup>Esto es debido a las características del método de optimización utilizado

### 5.3.3 Modificación del Funcional

Motivados por el buen resultado obtenido al modificar el funcional de suavidad para ampliar su dominio de definición, se considerará el funcional discreto dado por

$$F_{A^{-1},k} = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q + k}$$

el cual se puede optimizar si se parte de una malla  $G$  tal que  $\alpha_-(G) > -k$  y producirá una malla óptima con la misma propiedad sobre  $\alpha_-$ ; de hecho, como se verá más adelante, si  $\hat{G}$  es la malla óptima y  $k$  se elige adecuadamente,  $\alpha_-(\hat{G}) > \alpha_-(G)$ .

Como ya se estableció, la versión continua de este funcional tiene básicamente las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange que  $F_{A^{-1}}$ , sólo que en lugar del factor  $\frac{2}{J^3}$  aparece  $\frac{2}{(J+k)^3}$ . Es por esto que una malla que satisfaga las ecuaciones E-L para el funcional clásico de área también satisfecerá las correspondientes a este nuevo funcional siempre y cuando el jacobiano  $J$  nunca sea igual a  $-k$ , y recíprocamente.

Por otro lado, el funcional discreto  $F_{A^{-1},k}$  tiene las dos propiedades que se mencionaron en la proposición 5.1, ya que en este caso  $f(\alpha) = 1/(k + \alpha)$  satisface las hipótesis correspondientes.

### 5.3.4 Propiedades del Funcional Modificado

De la misma manera que para el funcional de suavidad modificado, se puede usar el funcional recíproco de área (modificado según el apartado anterior) para generar una malla convexa de acuerdo al siguiente esquema:

#### Algoritmo 5.1

1. Generar una malla inicial  $G_0$ . Elegir  $k$  tal que  $\alpha_-(G_0) > -k$ . (Sobre esto se abunda más adelante).
2. Calcular  $G_1$  una malla que optimice a  $F_{A^{-1},k}$ .
3. Repetir el paso 2. con un valor de  $k$  correspondiente a  $G_1$ , hasta obtener una malla convexa, o en su defecto una malla lo más cercana a la convexidad posible.

Los siguientes resultados van en la dirección de obtener seguridad de que el Algoritmo 5.1 siempre funciona. Con el objeto de simplificar las expresiones siguientes, se usará  $F_k$  en lugar  $F_{A^{-1},k}$  en lo que resta de este capítulo.

**Proposición 5.2** *Si  $D_k \neq \emptyset$ , entonces  $F_k$  tiene al menos un mínimo en  $D_k$ .*

Demostración.-

Es inmediata, sólo hay que observar que si se tiene una sucesión  $\{G_q\}$  que tienda a la frontera de  $D_k$  entonces  $\{F_k(G_q)\} \rightarrow \infty$ .  $\diamond$

**Proposición 5.3** *Supóngase que existe  $G_0 \in D_k$ . Sea  $G_1 \in D_k$  tal que*

$$F_k(G_1) = \min_{G \in D_k} F_k(G)$$

*entonces  $\alpha_-(G_1) \geq -k'$  con  $k' = k - \frac{1}{\lambda_k}$  y  $\lambda_k = F_k(G_0)$ .*

Demostración.-

Supóngase que  $\alpha_-(G_1) < -k'$ . Sea  $\Delta$  un triángulo de  $G_1$  de área mínima, entonces

$$\begin{aligned} F_k(G_1) &> \frac{1}{k + \alpha(\Delta)} \\ &= \frac{1}{k + \alpha_-(G_1)} \\ &> \frac{1}{k - k'} \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

y no se cumpliría que  $F_k(G_1)$  es el mínimo.  $\diamond$

**Proposición 5.4** *Sean  $\bar{G} \in D_{k_0}$  y  $G_0$  tal que  $\beta = \alpha_-(G_0) < k_0$ . Sea  $k = -\beta + \varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\lambda}$ ;  $\lambda = F_{k_0}(\bar{G})$ . Sea  $G_1 \in D_k$  tal que*

$$F_k(G_1) = \min_{G \in D_k} F_k(G)$$

*entonces  $\alpha_-(G_1) > \beta$ .*

Demostración.-

De la proposición 5.3, se observa que para las malla  $G \in D_k$  con  $\alpha_-(G) < -k + \frac{1}{\lambda_k}$ ;  $\lambda_k = F_k(\bar{G})$ , se cumple que  $F_k(G) > \lambda_k$ . Por lo tanto

$$\alpha_-(G_1) \geq -k + \frac{1}{\lambda_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta - \varepsilon + \frac{1}{\lambda_k} \\
&> \beta - \varepsilon + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

ya que  $\lambda = F_{k_0}(\bar{G}) > F_k(\bar{G}) = \lambda_k$ . Así que

$$\begin{aligned}
\alpha_-(G_1) &> \beta - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \\
&= \beta + \frac{1}{2\lambda} \\
&> \beta \diamond
\end{aligned}$$

De acuerdo a los resultados anteriores se pueden precisar los pasos del algoritmo 5.1 en el siguiente

#### Algoritmo 5.1'

1. Genérese una malla inicial  $G_0$  y sea

$$k_0 = -\alpha_-(G_0) + \varepsilon$$

con  $\varepsilon$  que satisfaga las condiciones de la proposición 5.3.

2. Calcúlese  $G_1$ , una malla que optimice a  $F_{A^{-1},k}$ .
3. Repetir el paso 2. con un valor de  $k$  correspondiente a  $G_1$  dado por la proposición 5.4, hasta obtener una malla convexa, o en su defecto una malla lo más cercana a la convexidad posible.<sup>2</sup>

Finalmente, la siguiente proposición establece que el anterior proceso converge en efecto a una malla óptima, suponiendo que ésta exista (el caso  $k_0 < 0$ ); en caso contrario, dice que el algoritmo genera a una malla lo más cercano a la convexidad posible (cuando  $k_0 \geq 0$ ).

---

<sup>2</sup>Aquí cabe hacer las mismas observaciones que para el Algoritmo de la sección 4.2.3

**Proposición 5.5** Si  $D_{k_0} \neq \emptyset$  el algoritmo 5.1' conduce a la obtención de una malla  $G \in D_{k_0}$  en un número finito de actualizaciones del parámetro  $k$ .

Demostración.-

Sea  $\{G_q\}$  la sucesión de mallas óptimas generadas con el proceso anterior,  $G_0$  es la malla inicial. Nótese que

$$\begin{aligned}\alpha_-(G_1) &> \alpha_-(G_0) + \frac{1}{2\lambda} \\ \alpha_-(G_2) &> \alpha_-(G_1) + \frac{1}{2\lambda} > \alpha_-(G_0) + 2\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \\ \alpha_-(G_3) &> \alpha_-(G_2) + \frac{1}{2\lambda} > \alpha_-(G_0) + 3\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \\ &\vdots \\ \alpha_-(G_q) &> \alpha_-(G_{q-1}) + \frac{1}{2\lambda} > \alpha_-(G_0) + q\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\end{aligned}$$

y entonces, para cierto valor finito de  $q$ ,  $\alpha_-(G_q)$  debe ser mayor que  $k_0$ .  $\diamond$

### 5.3.5 Determinación de $k$ y Normalización

La manera de normalizar el funcional recíproco de área modificado, el cual en adelante será llamado simplemente *Funcional Recíproco de Área*  $F_{A^{-1},k}$ , con el objeto de combinarlo con otros funcionales es considerar que el objetivo que se persigue con su uso es obtener mallas cuyos triángulos tengan áreas lo más parecidas posibles; esto es, una malla ideal en este caso es una tal que

$$\alpha_q = \bar{\alpha} \quad q = 1, 2, \dots, N = 4(m-1)(n-1)$$

por lo tanto la cantidad que servirá para normalizar es

$$\frac{N}{k + \bar{\alpha}}$$

los resultados que se presentarán más adelante se referirán entonces al funcional

$$\frac{k + \bar{\alpha}}{N} F_{A^{-1},k}$$

Igual que en el Capítulo 4, se debe mencionar que la determinación del valor de  $k$  adecuado a que se refiere el paso 1. del algoritmo 5.1 no se puede realizar en la

práctica ya que se está presuponiendo la existencia de una malla con un cierto valor óptimo de su área mínima ( $k_0$ ). Se observa, sin embargo, que el funcionamiento del algoritmo está basado sólo en el hecho de que  $k$  sea lo suficientemente cercano a  $-\alpha_-(G_q)$ . Se han experimentado diferentes maneras de determinar  $k$  y se ha observado que hay una diferencia importante en el papel que juega este parámetro para el funcional recíproco de área en relación al correspondiente papel jugado en el funcional de suavidad:

1. Para la mayoría de las regiones con que se ha experimentado, el valor de  $k$  no necesita ser tan cercano a  $\alpha_-$  como lo requiere el funcional de suavidad.
2. Al dejar el valor de  $k$  fijo se obtienen mallas que están más cerca de la convexidad que las correspondientes al mismo proceso con el funcional de suavidad introducido en el capítulo anterior.

Sin embargo y para obtener comparaciones con resultados anteriores, el valor de  $k$  que se tiene implementado es el mismo que para el funcional de suavidad; esto es,

$$k = \begin{cases} -1.05\alpha_-(G) & \text{si } \alpha_-(G) \leq -0.1\bar{\alpha} \\ -\alpha_-(G) + 0.01\bar{\alpha} & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Otra vez cabe hacer la observación que el proceso de optimización de que habla el inciso 2. del algoritmo 5.1, no se realiza completamente, sólo se realiza un número pequeño de iteraciones y se actualiza el valor de  $k$ . Este número de pasos en la implementación del autor es 10, aunque se puede hacer una cantidad de iteraciones menor si es que el gradiente es suficientemente pequeño en norma.

El proceso no tiene por qué detenerse cuando se logra que  $k=0$ , se puede seguir actualizando su valor hasta obtener una malla que tenga área mínima suficientemente grande. Esto es útil si no se desea tener celdas muy pequeñas en la malla.

### 5.3.6 Resultados

A continuación (Tabla 5.2) se muestran los resultados que arroja la optimización del funcional recíproco de área a partir de algunas mallas iniciales. Se muestran para cada región tres conjuntos de datos: los obtenidos sin actualizar el valor de  $k$  (FIJO), los que se logran dejando fijo el valor de  $k$  en  $-0.01\bar{\alpha}$  cuando se logra llegar a él (TOPE) y los resultados que provienen de dejar que  $k$  se siga actualizando hasta que el proceso de optimización sea incapaz de continuar (LIBRE). Debe hacerse la aclaración que los resultados para las regiones M19, M26, HAB, SUD, UCH y

ENG se alcanzaron tomando como dato inicial la malla óptima para el funcional de longitud; esto fue necesario debido a que el proceso de optimización del funcional recíproco de área no convergió tomando como condición inicial la malla generada por TFI. Esto constituye una desventaja para este funcional la cual, sin embargo, se superará usando combinaciones adecuadas con otros funcionales, como se explica más adelante. Las gráficas de las mallas óptimas correspondientes a la estrategia TOPE se muestran en las figuras 5.3 y 5.4.

Tabla 5.2.- Resultados para el funcional recíproco de área

Malla	Estrategia	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	TOPE	0	110	0.529	1.467	0.854	1.139	0.003	1.743
	FIJO	0	54	0.031	1.838	0.538	1.311	0.005	1.664
	LIBRE	0	225	0.913	3.020	0.940	1.976	0.012	1.872
M13	TOPE	0	245	0.333	1.873	0.838	1.349	0.008	4.416
	FIJO	0	129	0.017	1.609	0.729	1.321	0.007	3.357
	LIBRE	0	340	0.491	2.793	0.758	1.920	0.015	3.277
M19	TOPE	0	107	0.420	1.715	0.814	1.706	0.010	2.267
	FIJO	0	102	0.005	1.575	0.506	1.570	0.012	2.775
	LIBRE	0	218	0.853	2.936	0.919	1.901	0.023	2.530
M26	TOPE	0	190	0.315	2.333	0.581	1.855	0.017	6.112
	FIJO	4	135	-0.110	1.956	0.429	1.569	0.014	6.268
	LIBRE	0	248	0.403	2.715	0.684	2.166	0.022	6.476
HAB	TOPE	0	281	0.154	5.233	0.511	3.052	0.076	5.163
	FIJO	5	69	-0.760	4.624	0.267	2.738	0.045	4.613
	LIBRE	0	329	0.732	7.210	0.772	3.978	0.250	6.095
SUD	TOPE	0	138	0.235	2.199	0.709	1.661	0.019	2.798
	FIJO	2	87	-0.072	2.571	0.470	1.699	0.017	2.961
	LIBRE	0	331	0.840	6.464	0.876	3.655	0.111	3.646
UCH	TOPE	0	302	0.133	6.038	0.467	4.263	0.126	5.643
	FIJO	16	100	-1.047	4.200	0.085	3.501	0.064	5.315
	LIBRE	0	419	0.292	7.293	0.613	4.321	0.175	5.859
ENG	TOPE	0	500	0.087	7.960	0.470	4.642	0.200	8.556
	FIJO	26	84	-1.393	4.027	-0.477	3.191	0.091	6.145
	LIBRE	0	218	0.241	7.159	0.434	4.807	0.298	7.769

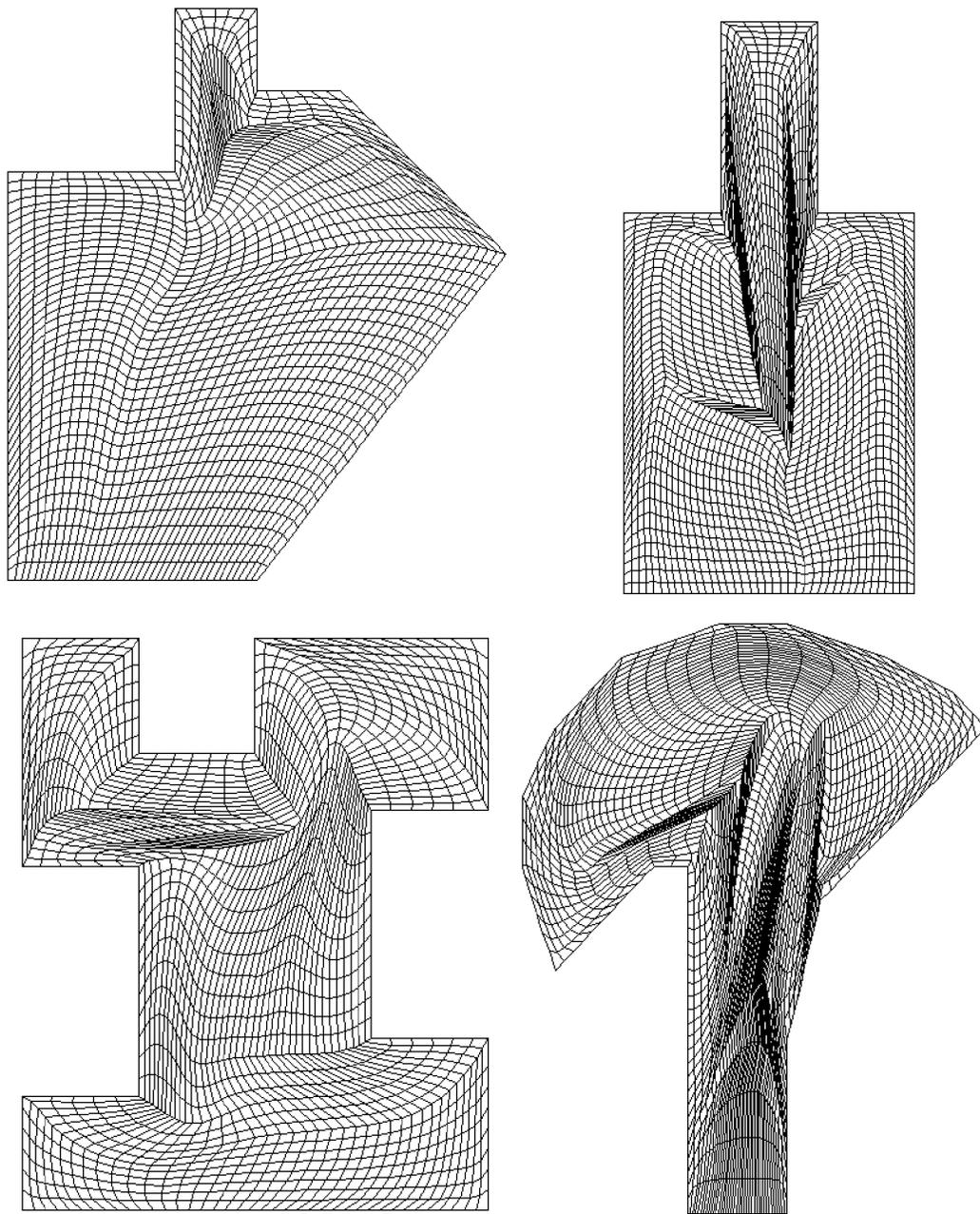


Figura 5.3.- Mallas Optimas para el Funcional Recíproco de Area. Regiones M12, M13, M19 y M26.

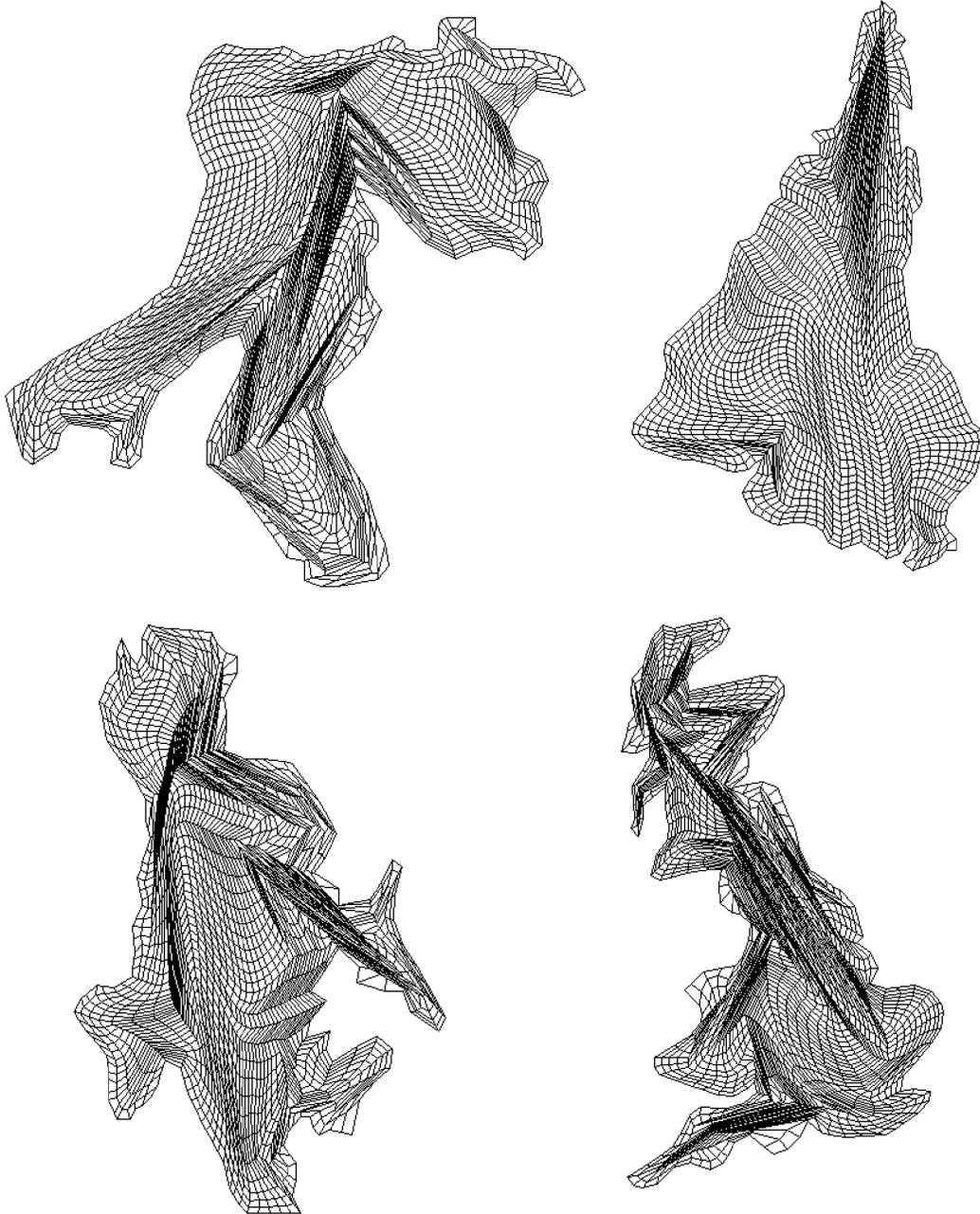


Figura 5.4.- Mallas Optimas para el Funcional Recíproco de Area. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 5.3.7 Regularización

Con la finalidad de hacer numéricamente robusta la optimización del funcional de área

$$F_k = \sum_{q=1}^N \frac{1}{k + \alpha_q}$$

se propone utilizar una variante que consiste en reemplazar la función

$$f(\alpha) = \frac{1}{k + \alpha}$$

que tiene un polo en  $\alpha = -k$ , por otra función que no lo tenga; a saber,

$$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c & \alpha \leq \alpha_0 \\ \frac{1}{k+\alpha} & \alpha \geq \alpha_0 \end{cases}$$

escogiendo los valores de  $a, b, c$  de tal manera que  $\hat{f}(\alpha)$  sea de clase  $C^2$ . Este requisito da como resultado las siguientes condiciones

$$\frac{1}{k + \alpha_0} = a\alpha_0^2 + b\alpha_0 + c \quad - \frac{1}{(k + \alpha_0)^2} = 2a\alpha_0 + b \quad \frac{2}{(k + \alpha_0)^3} = 2a$$

de donde se obtienen los siguientes valores para  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(k + \alpha_0)^3} \\ b &= \frac{-3\alpha_0 - k}{(k + \alpha_0)^3} \\ c &= \frac{k^2 + 3k\alpha_0 + 3\alpha_0^2}{(k + \alpha_0)^3}. \end{aligned}$$

En la figura 5.5 se presenta un bosquejo de la gráfica de ambas funciones.

Se ha experimentado con diferentes valores de  $\alpha_0$ . Una elección que ha dado buenos resultados, en el sentido de que hace estable el proceso de optimización es

$$\alpha_0 = -k + 0.1\bar{\alpha}.$$

A continuación (Tabla 5.3) se muestra el número de iteraciones necesarias para llegar a convergencia tanto para el funcional recíproco de área como para esta regularización propuesta, para nuestras mallas de prueba, así como los tiempos necesarios para lograr dicha convergencia. Las mallas obtenidas por los dos métodos son muy similares. La normalización usada para el funcional regularizado es la misma que para el funcional sin regularizar.

Tabla 5.3.- Comparación de los funcionales recíproco de área y de su regularización.  
 AR: Funcional sin regularizar. AR-R: Funcional regularizado.

Malla	AR		AR-R	
	it	t(seg)	it	t(seg)
M12	110	626	89	484
M13	245	1411	133	748
M19	107	567	114	578
M26	190	1069	168	954
HAB	281	1499	168	930
SUD	138	724	130	701
UCH	302	1707	388	2147
ENG	500	2760	465	2673

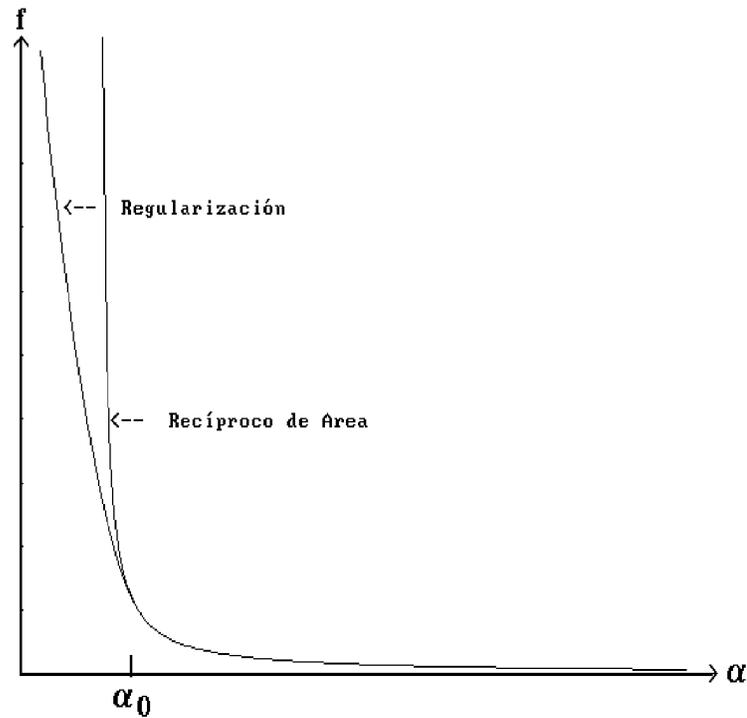


Figura 5.5.- Gráfica de las funciones  $f(\alpha)$  y  $\hat{f}(\alpha)$ .

## 5.4 El Funcional de Area Bilateral

De manera similar a como se usa el funcional de suavidad bilateral para controlar el tamaño de las celdas de área grande, es posible diseñar un funcional de área que cumpla esta misma función. Para empezar, se puede decir que el funcional cuyo valor en cada triángulo de la malla está dado por

$$f_d = \frac{1}{k - \alpha}$$

tiene propiedades similares a las del funcional recíproco de área; a saber:

1. Su versión continua tiene las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange que el funcional de área clásico, salvo por un factor  $\frac{2}{(k-\alpha)^3}$ . Entonces una malla que sea solución de las ecuaciones E-L para el funcional clásico también será solución de las ecuaciones correspondientes a este nuevo funcional, a condición de que el denominador no se anule; la propiedad recíproca también se cumple.
2. Si el proceso de optimización de este funcional comienza con una malla  $G$  tal que todos los denominadores sean positivos, se obtendrán en cada paso mallas con esta misma propiedad.
3. Se puede aplicar un proceso de actualización del parámetro  $k$  para obtener mallas con área máxima cada vez menor, con el tope general que representa el área promedio. De hecho se cumplen proposiciones similares a las que permitieron garantizar que el proceso de actualización del parámetro del funcional recíproco llevaba a una malla lo más cercano a la convexidad posible.

Desgraciadamente si sólo se optimiza este nuevo funcional para una malla inicial, el proceso puede conducir a mallas no convexas. Sin embargo, usándolo de manera combinada con el funcional recíproco de área se obtienen mallas excelentes en lo que respecta al control del tamaño de las celdas. El funcional que resulta se denomina *Funcional de Area Bilateral* y está dado por

$$F_{A2L}(G) = \sum_{q=1}^N \left[ \frac{1}{k_1 + \alpha_q} + \frac{1}{k_2 - \alpha_q} \right]$$

El valor de  $k_2$  se ha calculado en la implementación como

$$k_2 = 1.05\alpha_+$$

La normalización de este funcional se hace nuevamente considerando que para una malla óptima se deberá cumplir que todas las áreas sean iguales a  $\bar{\alpha}$ . La constante

Tabla 5.4.- Resultados para el Funcional de Area Bilateral. Mallas de dimensión 40 por 40

Malla	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	0	109	0.511	1.484	0.822	1.146	0.004	1.817
M13	0	189	0.334	1.868	0.852	1.345	0.008	3.386
M19	0	97	0.458	1.706	0.831	1.699	0.010	2.317
M26	0	138	0.312	2.241	0.569	1.841	0.017	6.101
HAB	0	184	0.058	4.341	0.709	2.666	0.069	4.253
SUD	0	143	0.235	2.112	0.705	1.621	0.018	2.859
UCH	0	113	0.047	3.990	0.330	3.616	0.097	5.559
ENG	0	500	0.040	6.016	0.430	4.796	0.178	8.879

de normalización está dada por

$$N \frac{k_2 - k_1}{(k_1 + \bar{\alpha})(k_2 - \bar{\alpha})}$$

Al aplicar el funcional de área bilateral, el esquema de actualización de los parámetros se hace de la misma manera que para el funcional recíproco: considerando el número de iteraciones realizadas y el valor de la norma del gradiente. Aquí, al igual que con el funcional de suavidad, nos ha dado muy buenos resultados la estrategia de actualizar sólo el valor de  $k_1$  mientras no se consiga una malla convexa, dejando fijo el valor de  $k_2$  mientras tanto; después de conseguir convexidad, se actualizan simultáneamente los dos parámetros.

Los resultados que se muestran en la tabla 5.4 como ejemplos de aplicación del funcional de área bilateral indican que:

1. En la mayor parte de los casos converge a una malla convexa y controla fuertemente el tamaño de las celdas; sin embargo, para ciertas regiones se debe hacer un pretratamiento de las mallas iniciales con un funcional como el de longitud para conseguir convergencia. En los ejemplos, excepto M12 y M13, todas las regiones requirieron este proceso previo.
2. El número de iteraciones necesarias para llegar a convergencia es grande.
3. Se debe decidir qué tanto se debe ajustar el parámetro  $k_2$ . En este, lo hacemos hasta que se llegue a  $4\bar{\alpha}$ , aunque no siempre se logra este objetivo.

En las figuras 5.6 y 5.7 se muestran las mallas óptimas correspondientes.

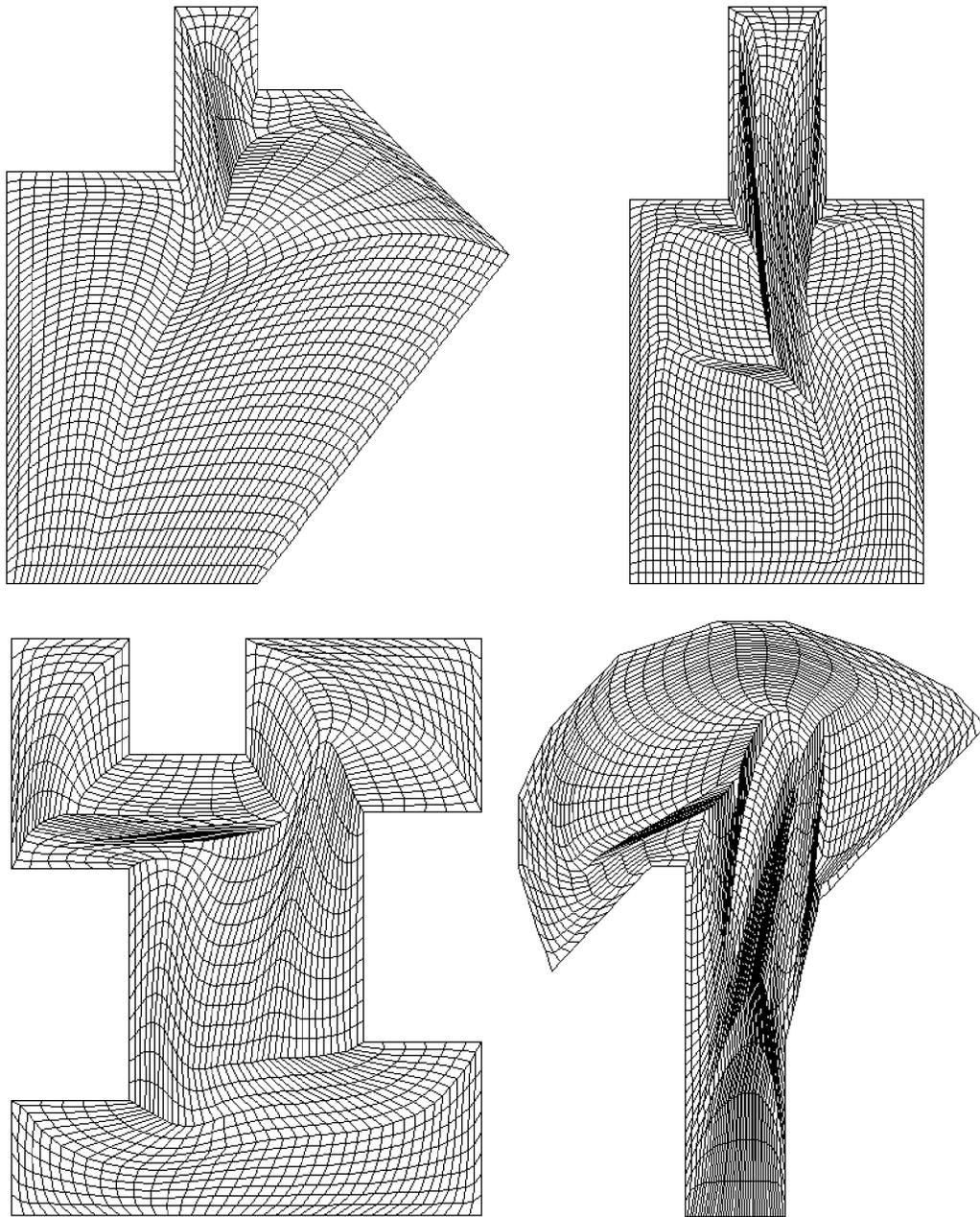


Figura 5.6.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional de Area Bilateral. Regiones M12, M13, M19 y M26.

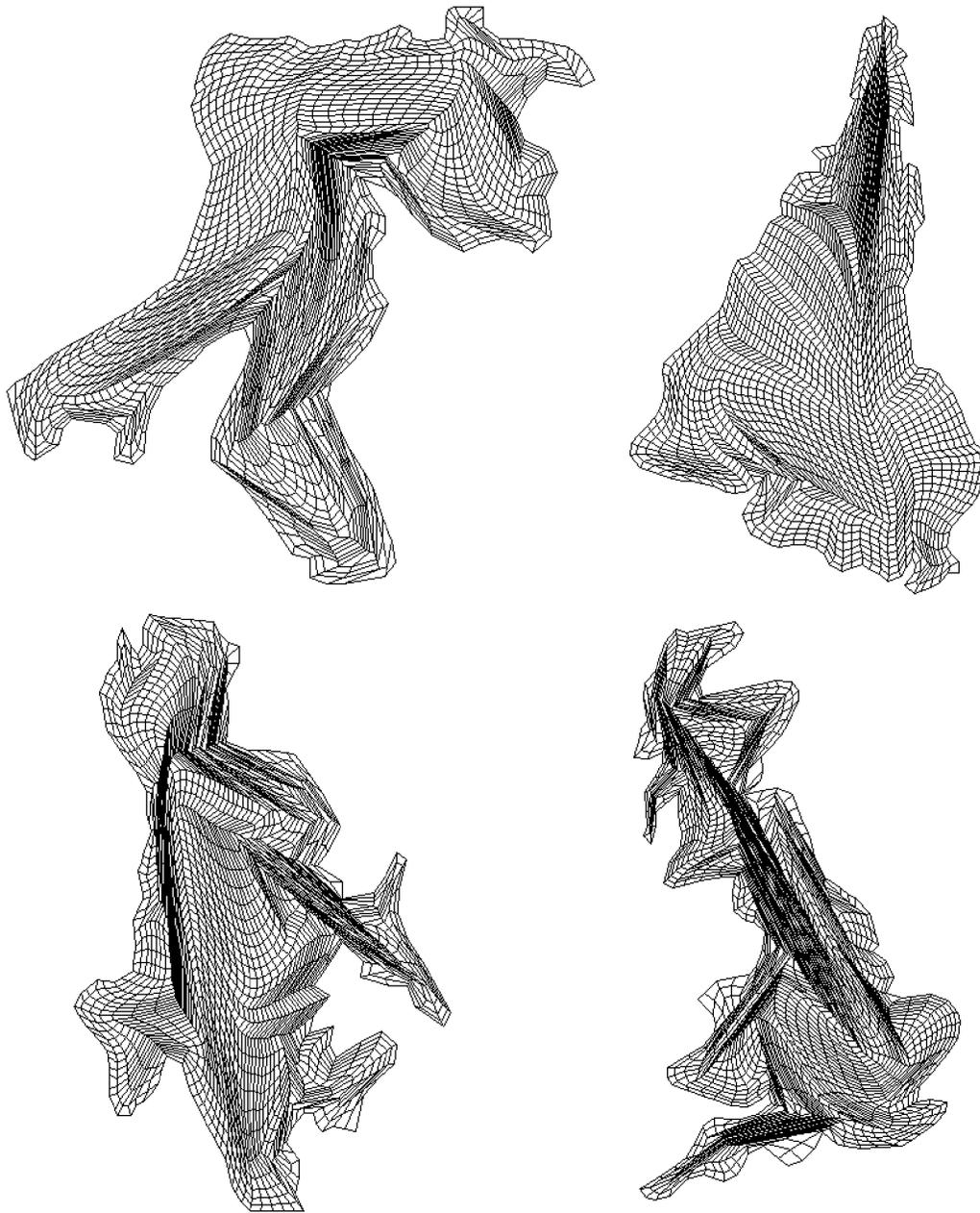


Figura 5.7.- Mallas Optimas Generadas usando el Funcional de Area Bilateral. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

# CAPITULO 6

## Combinación de Funcionales y Conclusiones

Los nuevos funcionales desarrollados en los capítulos 4 y 5 nos conducen a mallas óptimas con características muy diferentes. Por un lado, el funcional de suavidad nos proporciona una manera de obtener mallas muy suaves, pero el control de las áreas no es muy eficiente; este defecto se puede remediar en parte usando el funcional de suavidad bilateral, pero el costo de usar éste se puede considerar alto. Por otro lado los funcionales de área introducidos en el capítulo 5 producen un mejor control del tamaño de las celdas, pero distan mucho de proporcionar mallas óptimas suaves y el número de iteraciones necesarias para llegar al mínimo es muy grande; incluso el funcional A4P no garantiza la obtención de mallas convexas, de ahí que su uso es recomendable sólo para regiones no muy complicadas, en cuyo caso produce muy buenos resultados.

Al igual que con los funcionales clásicos introducidos en el capítulo 3, se ha visto la conveniencia de combinar diferentes funcionales para tratar de conservar las ventajas de cada funcional por separado y disminuir sus inconvenientes. En este sentido, se presentan en este capítulo las combinaciones que han dado mejores resultados. En cada caso se usarán las formas normalizadas de los diferentes funcionales.

### 6.1 Combinaciones de Area con Longitud

Una manera de suavizar las mallas producidas con los funcionales de área es seguir la idea de usarlos en combinación con el funcional de longitud. Esto conduce también a disminuir los tiempos necesarios para obtener convergencia.

### 6.1.1 Los Funcionales A4P-1

Estos funcionales tienen la forma

$$F_{A4P-l}^{(\tau)} = \tau F_{A4-P} + (1 - \tau) F_l$$

donde, como de costumbre  $0 \leq \tau \leq 1$  es un parámetro que al ser variado permite controlar la cantidad de control de área y de suavidad. Se reportan en la tabla 6.1 los resultados que se obtuvieron para algunos valores del parámetro  $\tau$ , para las mallas de prueba. Las gráficas de las mallas que se muestran en las figuras 6.1 y 6.2 corresponden al valor  $\tau = .95$ . La mejoría de estas mallas en comparación con las obtenidas con el funcional clásico de área-longitud se puede constatar comparando los resultados correspondientes; en particular, nótese que se llega a convexidad en un número mayor de casos.

Tabla 6.1.- Resultados para el Funcional A4P-Longitud

$$F_{A4P-L} = \tau F_{A4P} + (1 - \tau) F_L$$

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_I$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.75	5	48	-0.206	1.908	0.119	1.610	0.055	1.293
	.95	0	50	0.067	1.580	0.327	1.421	0.028	1.348
	.99	0	62	0.033	1.626	0.477	1.295	0.015	1.446
M13	.75	6	30	-0.192	2.026	0.161	1.717	0.036	1.456
	.95	0	62	0.036	1.600	0.307	1.420	0.023	1.523
	.99	0	86	0.032	1.407	0.439	1.331	0.015	1.641
M19	.75	3	50	-0.148	1.954	0.171	1.813	0.097	1.400
	.95	0	77	0.157	1.609	0.502	1.604	0.045	1.530
	.99	0	94	0.302	1.564	0.711	1.563	0.023	1.661
M26	.75	6	67	-0.363	2.130	-0.025	1.898	0.240	1.892
	.95	1	118	-0.102	1.956	0.115	1.614	0.117	2.285
	.99	1	175	-0.056	1.917	0.225	1.563	0.053	2.827
HAB	.75	31	64	-1.362	3.785	-0.210	2.521	0.172	1.978
	.95	5	108	-1.566	3.618	0.076	2.087	0.101	2.404
	.99	3	197	-1.579	3.609	0.319	1.943	0.069	2.955
SUD	.75	13	55	-0.312	1.989	-0.011	1.593	0.100	1.686
	.95	2	91	-0.115	1.719	0.224	1.383	0.054	1.808
	.99	0	147	0.060	1.554	0.422	1.303	0.030	2.011
UCH	.75	53	79	-1.174	3.154	-0.128	2.853	0.150	2.313
	.95	14	173	-1.230	3.101	0.003	2.823	0.104	2.779
	.99	8	278	-1.239	3.096	0.066	2.817	0.083	3.278
ENG	.75	111	107	-0.744	2.806	-0.331	1.991	0.219	2.830
	.95	23	257	-0.802	2.689	-0.210	1.897	0.151	3.409
	.99	15	425	-0.819	2.666	0.013	1.862	0.118	4.503

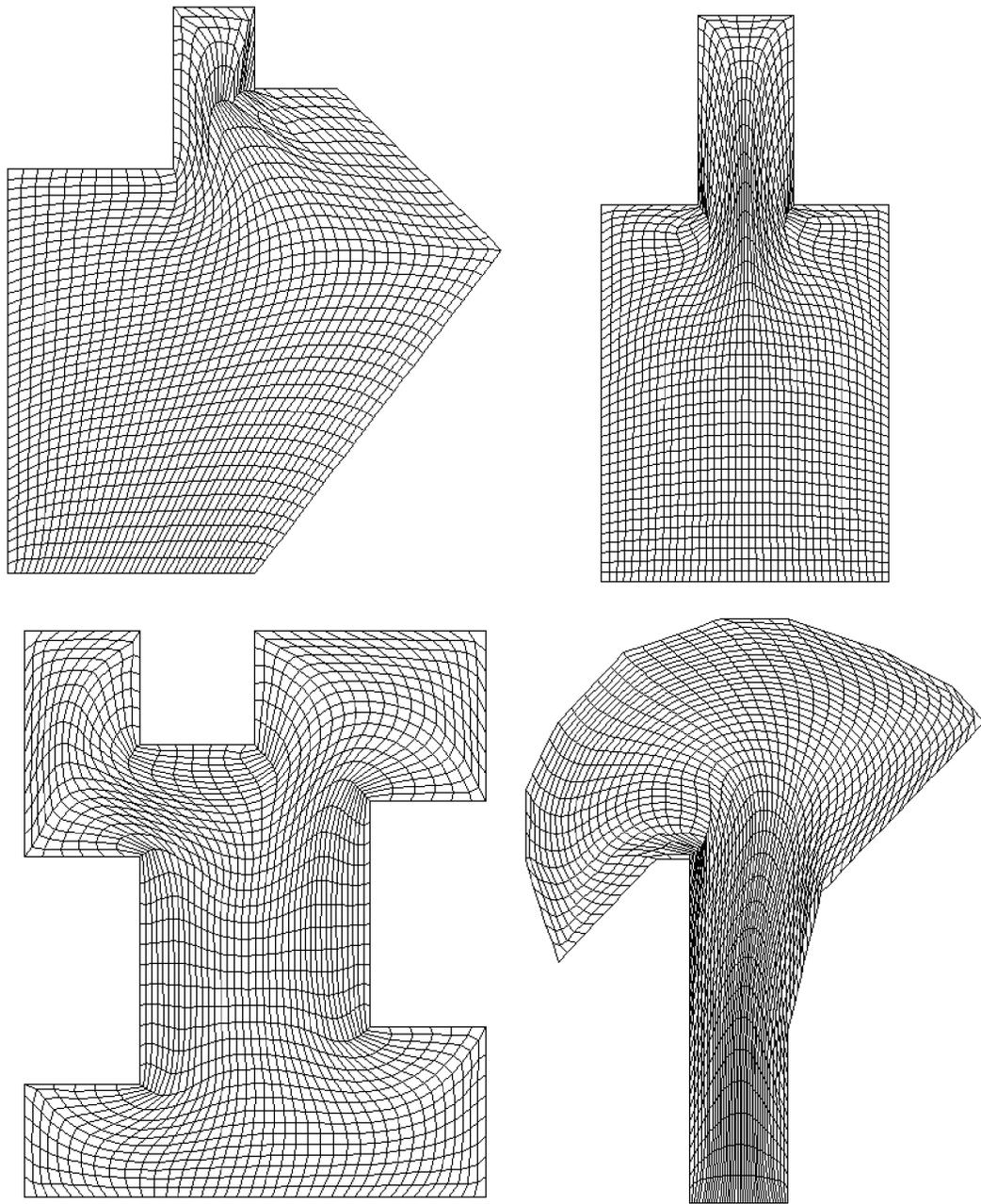


Figura 6.1.- Mallas Optimas para el Funcional A4P-Longitud,  $\tau = .95$ . Regiones M12, M13, M19 y M26.

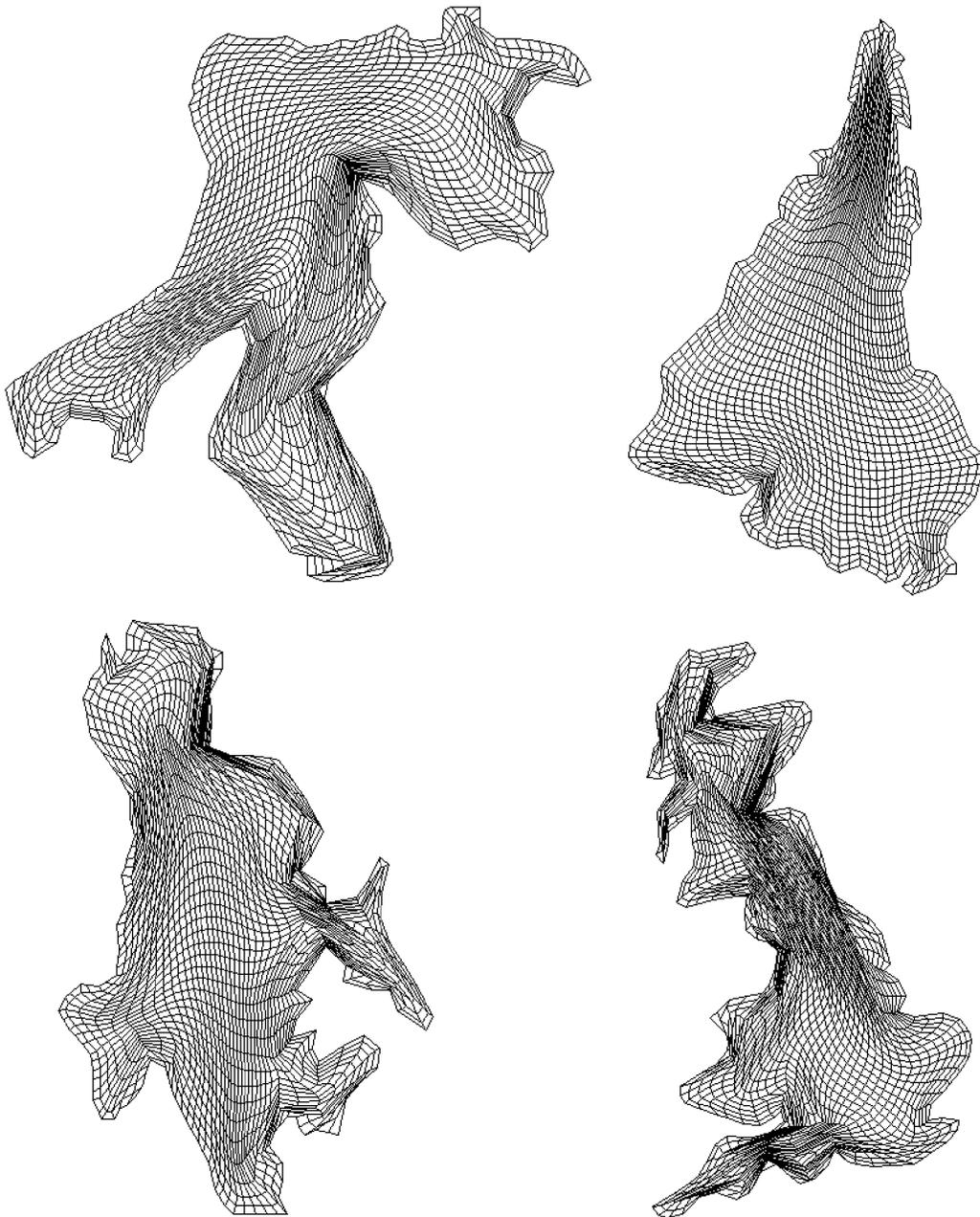


Figura 6.2.- Mallas Optimas para el Funcional A4P-Longitud,  $\tau = .95$ . Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 6.1.2 Los Funcionales de Area Recíproca - Longitud

El uso del funcional de área recíproca, además de los inconvenientes comunes a todos los funcionales de área ya mencionados, tiene la desventaja de que requiere en muchos casos que las mallas iniciales reciban un pretratamiento con otros funcionales a fin de obtener convergencia. Sin embargo al combinarlo con el funcional de longitud, este inconveniente se ve superado en los casos estudiados. Esta combinación tiene la forma

$$F_{A^{-1}-l}^{(\tau)} = \tau F_{A^{-1}} + (1 - \tau) F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

En la tabla 6.2 se listan los resultados de optimizar algunos de estos funcionales partiendo de las mallas iniciales de prueba. En particular se ha observado que el valor  $\tau = .75$  conduce a excelentes resultados. Las gráficas de las mallas que se muestran en las figuras 6.3 y 6.4 corresponden a este valor. Se siguió la estrategia TOPE introducida anteriormente.

Tabla 6.2.- Resultados para el funcional Recíproco de Area-Longitud

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_t$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_c$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.50	0	47	0.134	3.374	0.437	2.767	0.066	1.294
	.75	0	38	0.200	3.171	0.548	2.420	0.031	1.345
	.95	0	49	0.292	1.880	0.749	1.381	0.006	1.486
M13	.50	0	37	0.164	7.919	0.446	5.890	0.125	1.404
	.75	0	32	0.135	6.138	0.458	4.505	0.076	1.426
	.95	0	70	0.246	1.914	0.703	1.452	0.013	1.649
M19	.50	0	69	0.154	4.586	0.427	3.574	0.145	1.371
	.75	0	49	0.214	3.138	0.530	2.383	0.062	1.477
	.95	0	60	0.315	1.830	0.691	1.806	0.016	1.728
M26	.50	0	49	0.115	5.330	0.318	4.396	0.505	1.666
	.75	0	75	0.122	4.169	0.270	3.474	0.206	2.041
	.95	0	95	0.151	2.448	0.295	1.975	0.037	3.104
HAB	.50	0	94	0.119	14.331	0.308	11.201	0.527	1.674
	.75	0	93	0.164	13.604	0.390	10.287	0.347	1.827
	.95	0	93	0.191	7.693	0.549	4.900	0.121	2.400
SUD	.50	0	68	0.103	5.783	0.297	3.587	0.120	1.701
	.75	0	60	0.140	4.867	0.356	2.955	0.068	1.799
	.95	0	89	0.203	2.698	0.507	1.824	0.025	2.078
UCH	.50	0	113	0.079	11.450	0.277	7.802	0.506	2.116
	.75	0	118	0.103	10.628	0.323	7.130	0.377	2.216
	.95	0	146	0.118	7.078	0.366	4.643	0.179	2.720
ENG	.50	0	164	0.050	7.679	0.176	5.348	0.592	2.719
	.75	0	184	0.072	6.353	0.223	4.495	0.403	2.973
	.95	0	266	0.123	7.061	0.366	4.710	0.205	4.108

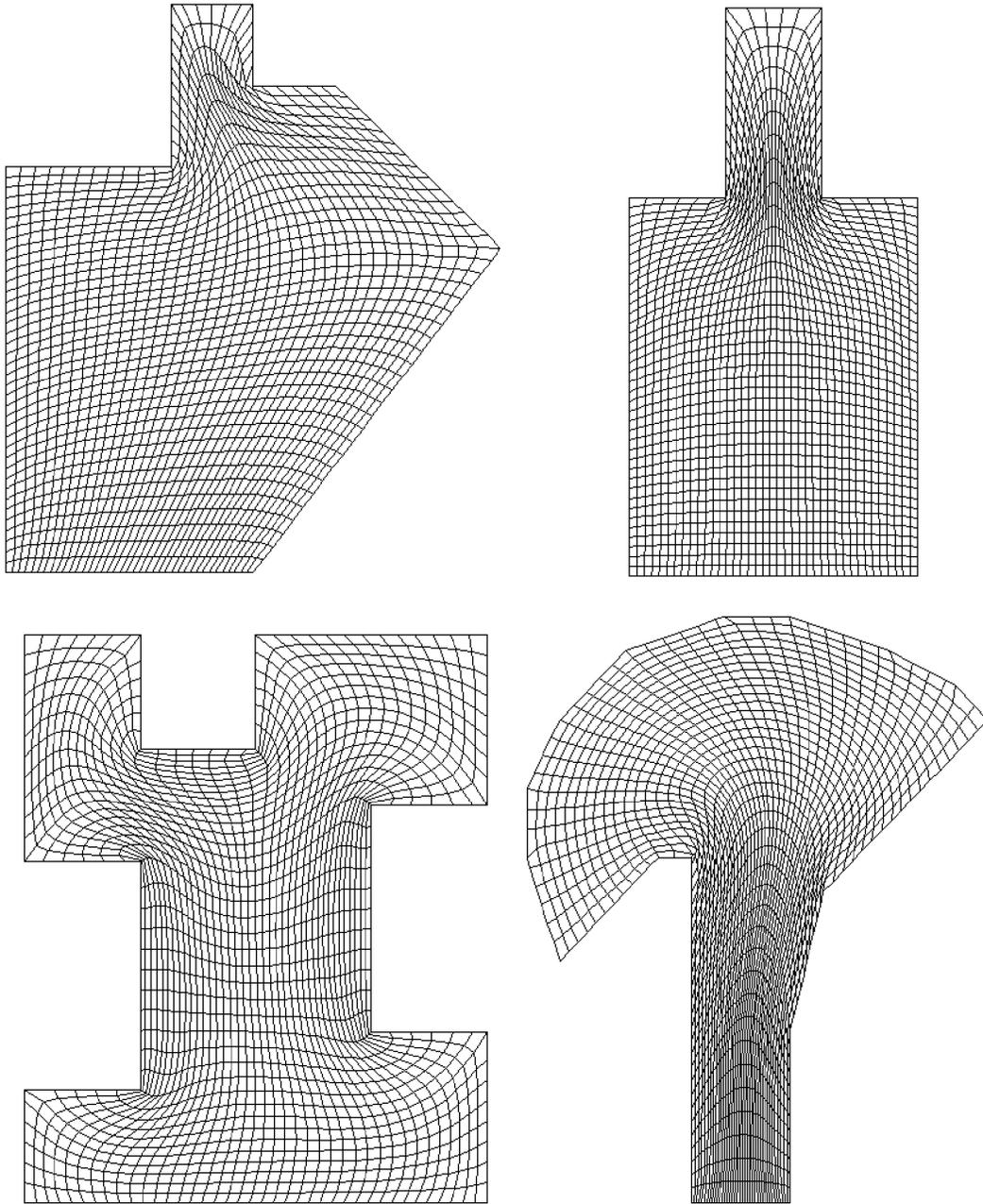


Figura 6.3.- Mallas Optimas correspondientes al Funcional Recíproco de Area-Longitud con  $\tau = .75$ . Regiones M12, M13, M19 y M26.

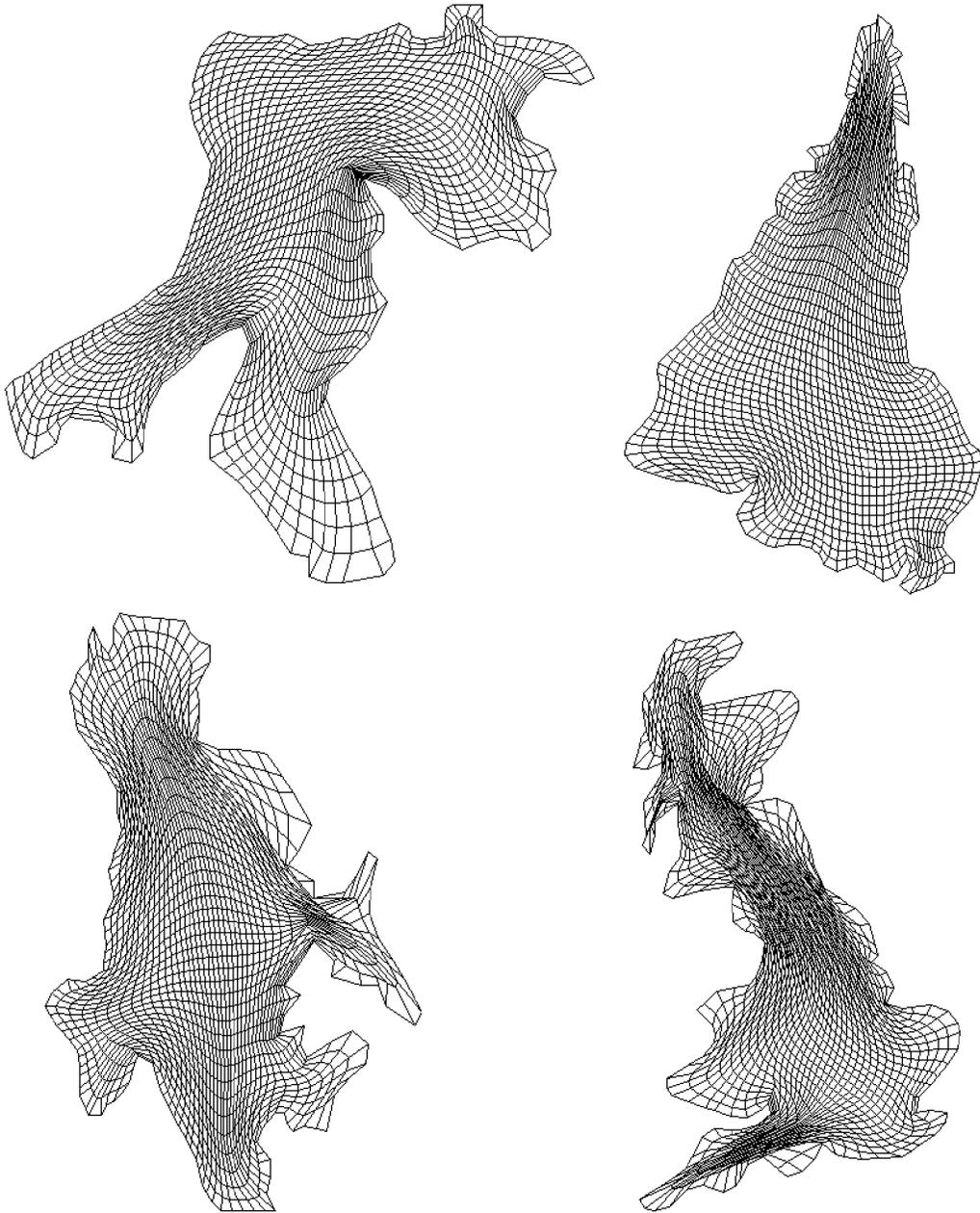


Figura 6.4.- Mallas Optimas correspondientes al Funcional Recíproco de Area - Longitud  $\tau = .75$ . Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 6.1.3 Los Funcionales de Area Bilateral - Longitud

Las combinaciones convexas del funcional de area bilateral y del funcional de longitud, dadas por

$$F_{A2L-l}^{(\tau)} = \tau F_{A2L} + (1 - \tau)F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

conducen a mallas óptimas convexas muy buenas tanto en control del tamaño de las áreas como en suavidad. Se reportan en la tabla 6.3 los resultados obtenidos con algunos de estos funcionales a partir de las mallas iniciales en las regiones de prueba. Aquí también debe remarcarse que no hubo necesidad de pre-tratamiento alguno para lograr convergencia. Las gráficas de las mallas que se muestran (Figuras 6.5 y 6.6) corresponden al valor  $\tau = .75$ .

Tabla 6.3.- Resultados para el Funcional de Area Bilateral - Longitud

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_f$	$\alpha_t$	$\alpha_c$	$\alpha_c$	$\sigma^2$	longi
M12	.50	0	52	0.133	3.131	0.440	2.511	0.061	1.296
	.75	0	45	0.199	2.823	0.526	2.174	0.027	1.350
	.95	0	37	0.288	1.840	0.747	1.356	0.006	1.488
M13	.50	0	47	0.163	3.631	0.447	2.894	0.073	1.420
	.75	0	29	0.154	3.295	0.447	2.487	0.049	1.446
	.95	0	25	0.041	3.450	0.255	2.896	0.028	1.489
M19	.50	0	56	0.155	3.349	0.427	2.655	0.129	1.377
	.75	0	39	0.215	2.741	0.531	2.218	0.056	1.487
	.95	0	49	0.315	1.804	0.691	1.788	0.015	1.734
M26	.50	0	40	0.065	3.868	0.196	3.238	0.452	1.673
	.75	0	52	0.120	3.084	0.267	2.483	0.184	2.077
	.95	0	77	0.150	2.381	0.295	1.933	0.036	3.132
HAB	.50	0	173	0.087	4.357	0.313	3.795	0.331	1.745
	.75	0	130	0.080	4.353	0.396	3.460	0.213	1.921
	.95	0	112	0.065	4.345	0.660	2.739	0.097	2.516
SUD	.50	0	80	0.103	3.557	0.294	2.722	0.105	1.708
	.75	0	67	0.139	3.222	0.352	2.285	0.058	1.809
	.95	0	83	0.201	2.407	0.501	1.801	0.024	2.085
UCH	.50	0	74	0.047	3.990	0.219	3.617	0.286	2.192
	.75	0	55	0.047	3.990	0.283	3.616	0.217	2.314
	.95	0	47	0.047	3.990	0.369	3.616	0.127	2.873
ENG	.50	0	206	0.050	3.851	0.211	3.179	0.423	2.791
	.75	0	170	0.070	3.816	0.259	2.909	0.299	3.071
	.95	0	226	0.108	3.754	0.333	2.819	0.170	4.229

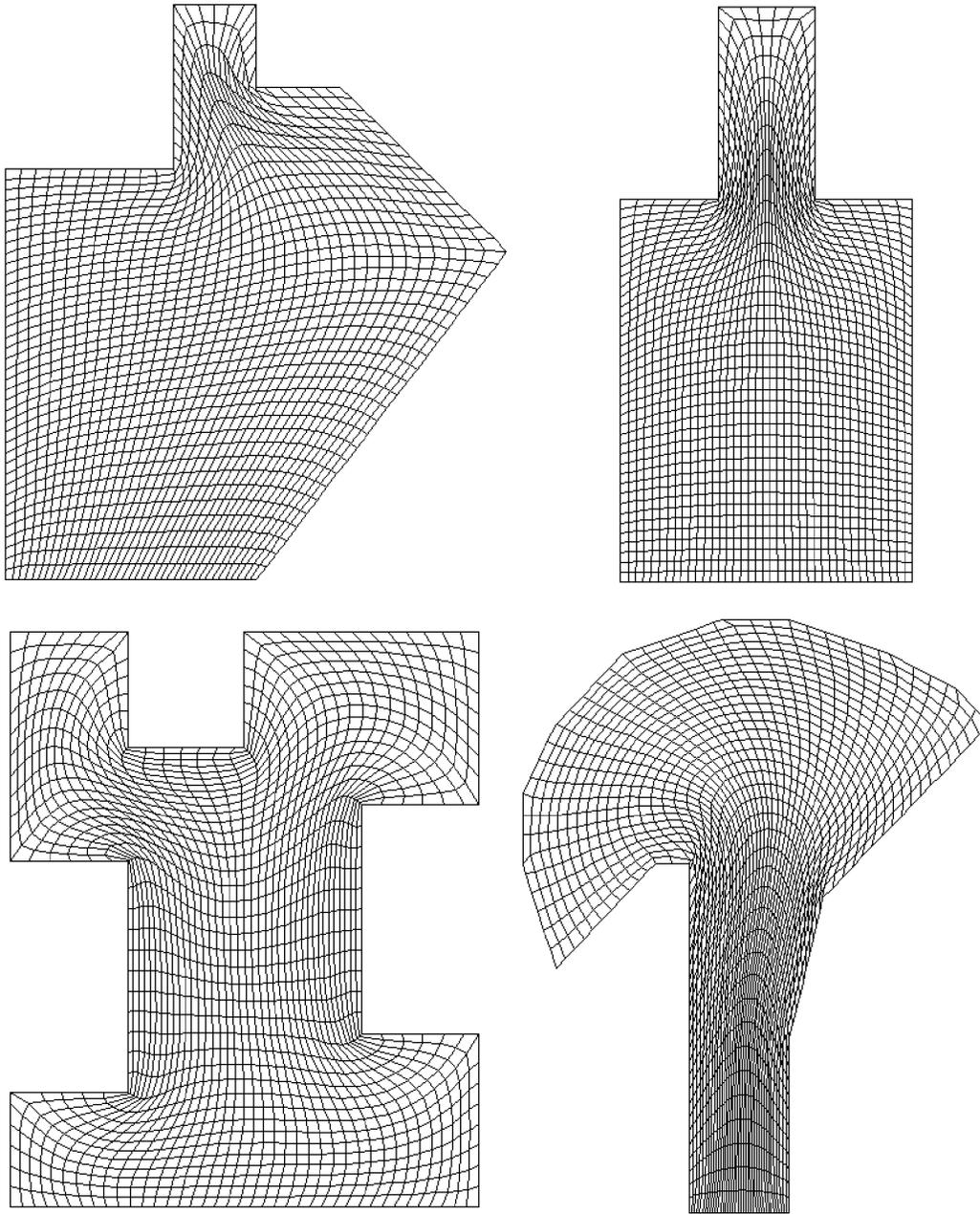


Figura 6.5.- Mallas Optimas correspondientes al Funcional Area Bilateral-Longitud con  $\tau = .75$ . Regiones M12, M13, M19 y M26.

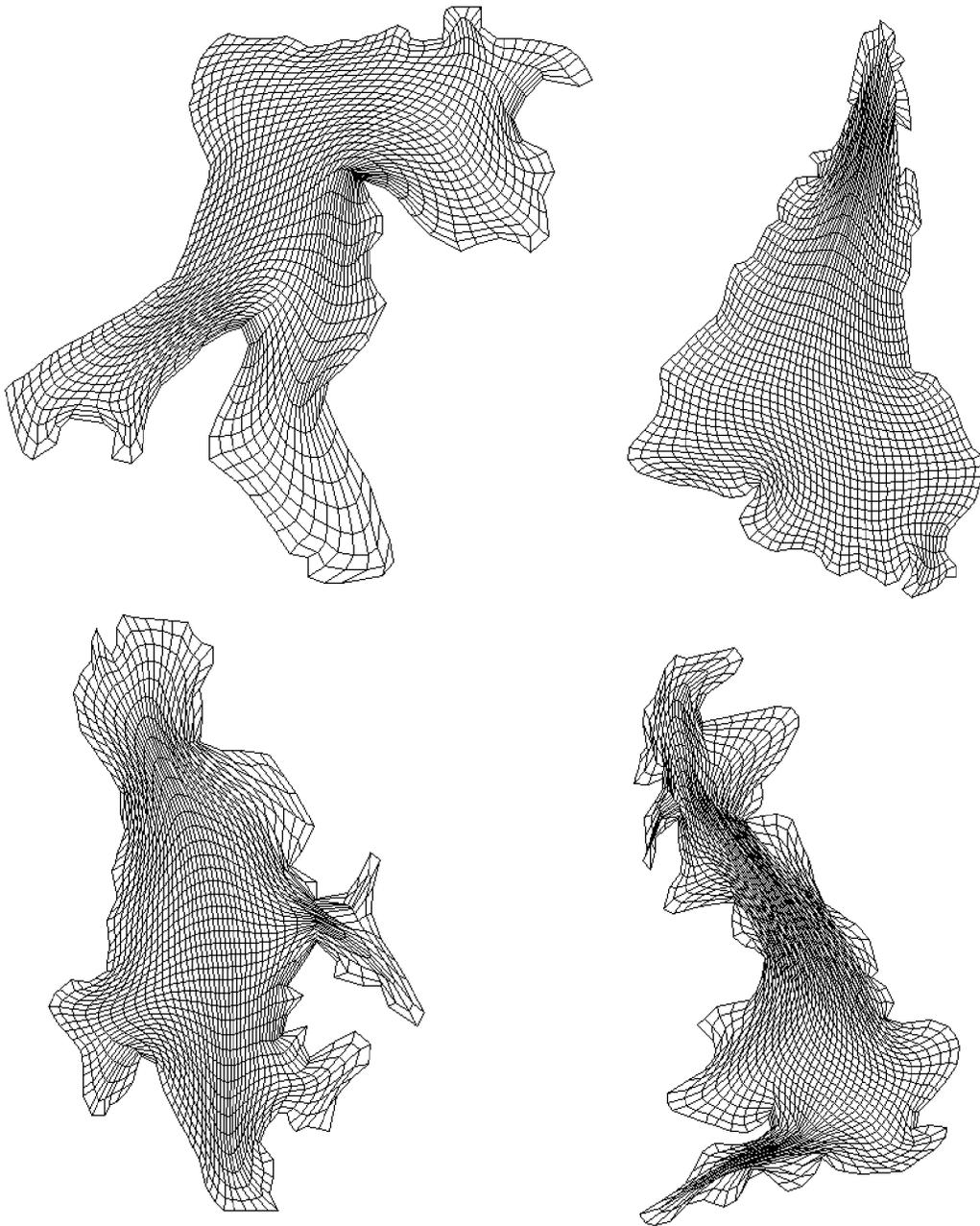


Figura 6.6.- Mallas Optimas correspondientes al Funcional Area Bilateral-Longitudud  $\tau = .75$ . Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

## 6.2 Funcionales de Area-Ortogonalidad

También es posible combinar los funcionales de área con el funcional de ortogonalidad. Esto conduce a mallas relativamente suaves, que se obtienen en un tiempo razonable. Los funcionales de este tipo que se han probado son las combinaciones correspondientes de  $F_{A4P}$

$$F_{A4P-O}^{(\tau)} = \tau F_{A4P} + (1 - \tau)F_O \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

y del funcional de área recíproco

$$F_{A^{-1}-O}^{(\tau)} = \tau F_{A^{-1}}^{(\tau)} + (1 - \tau)F_O \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Las combinaciones con el funcional de área recíproco ejercen un buen control en el tamaño de las celdas sólo para valores de  $\tau$  cercanos a 1; sin embargo pudieran ser útiles en aplicaciones que requieran de una malla convexa con líneas coordenadas aproximadamente ortogonales.

Mostramos a continuación los resultados correspondientes (Tablas 6.4 y 6.5). Las gráficas de las mallas que se muestran en las figuras 6.7, 6.8, 6.9 y 6.10 corresponden al valor  $\tau = .5$ .

Tabla 6.4.- Resultados para el Funcional A4P-Ortogonalidad

$$F_{A4P-O} = \tau F_{A4P} + (1 - \tau)F_O$$

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_{\mathcal{J}}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{-c}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.50	3	161	-0.255	2.437	0.094	1.797	0.088	1.743
	.75	2	123	-0.032	2.039	0.384	1.518	0.048	1.748
	.95	0	125	0.186	1.611	0.595	1.343	0.020	1.763
M13	.50	0	299	0.022	2.176	0.318	1.777	0.078	1.735
	.75	0	179	0.167	1.851	0.520	1.673	0.050	1.769
	.95	0	197	0.331	1.549	0.737	1.498	0.026	1.850
M19	.50	0	76	0.016	2.281	0.218	2.203	0.131	1.687
	.75	0	76	0.081	2.091	0.344	2.001	0.087	1.735
	.95	0	88	0.214	1.782	0.577	1.680	0.041	1.873
M26	.50	5	500	-0.324	2.778	-0.086	2.286	0.376	1.927
	.75	3	500	-0.327	2.443	-0.046	1.990	0.259	2.146
	.95	1	500	-0.160	2.031	0.160	1.679	0.110	3.131
HAB	.50	8	87	-0.298	4.534	0.107	3.326	0.271	2.408
	.75	5	280	-0.754	4.039	0.207	2.917	0.183	2.592
	.95	8	282	-1.331	3.797	0.172	2.318	0.112	3.067
SUD	.50	11	500	-0.318	2.578	0.020	1.840	0.119	2.118
	.75	3	398	-0.181	2.162	0.199	1.634	0.073	2.163
	.95	1	169	-0.044	1.719	0.394	1.451	0.040	2.281
UCH	.50	45	308	-1.960	3.839	-0.784	3.059	0.284	3.065
	.75	39	186	-1.506	3.468	-0.438	2.948	0.190	3.135
	.95	23	208	-1.174	3.179	-0.125	2.846	0.112	3.349
ENG	.50	103	361	-1.915	3.646	-0.831	2.464	0.360	3.832
	.75	71	341	-1.512	3.353	-0.599	2.315	0.255	4.029
	.95	42	500	-0.805	2.802	-0.267	2.040	0.164	4.611

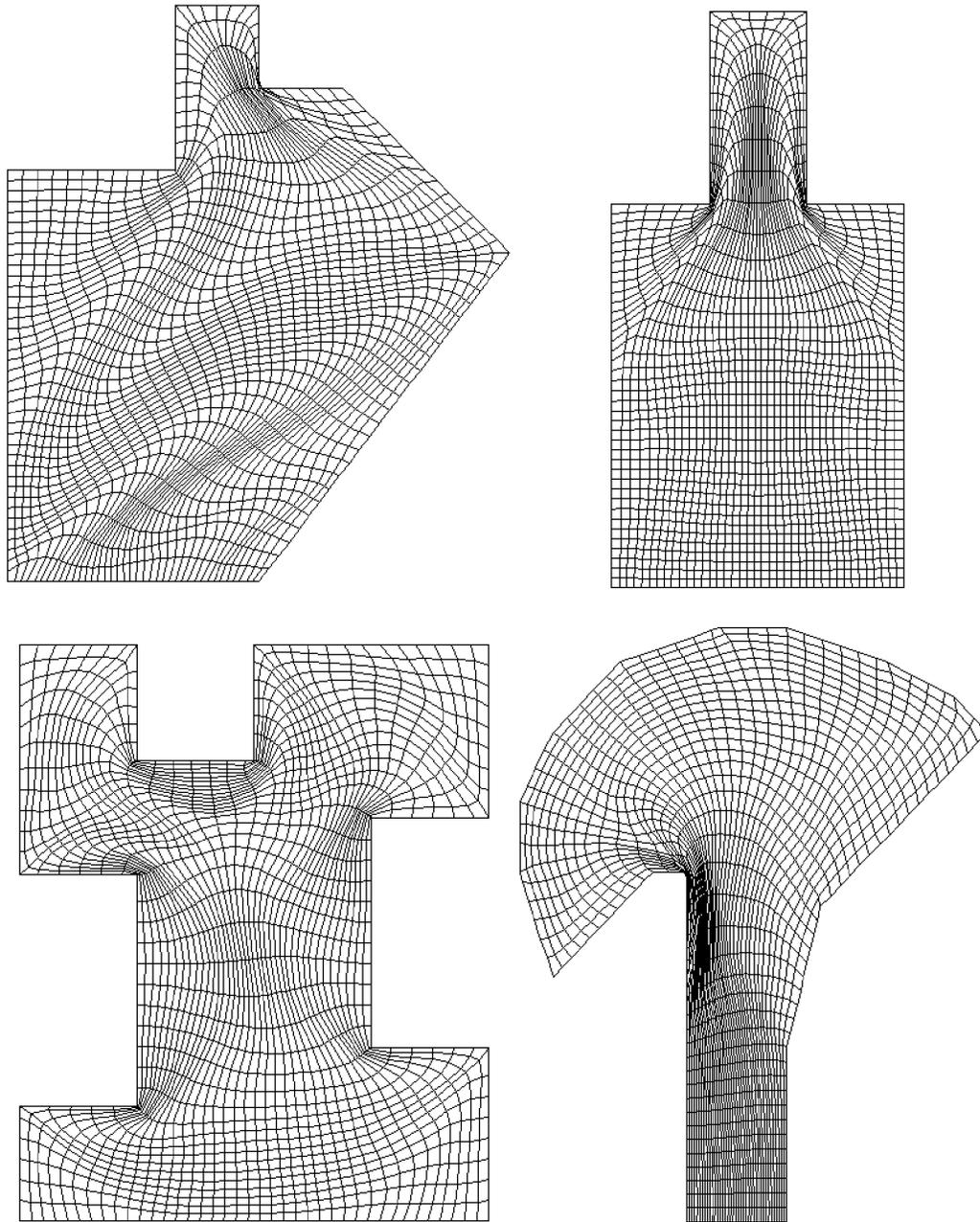


Figura 6.7.- Mallas Optimas para el Funcional A4P-Ortogonalidad. Regiones M12, M13, M19 y M26.

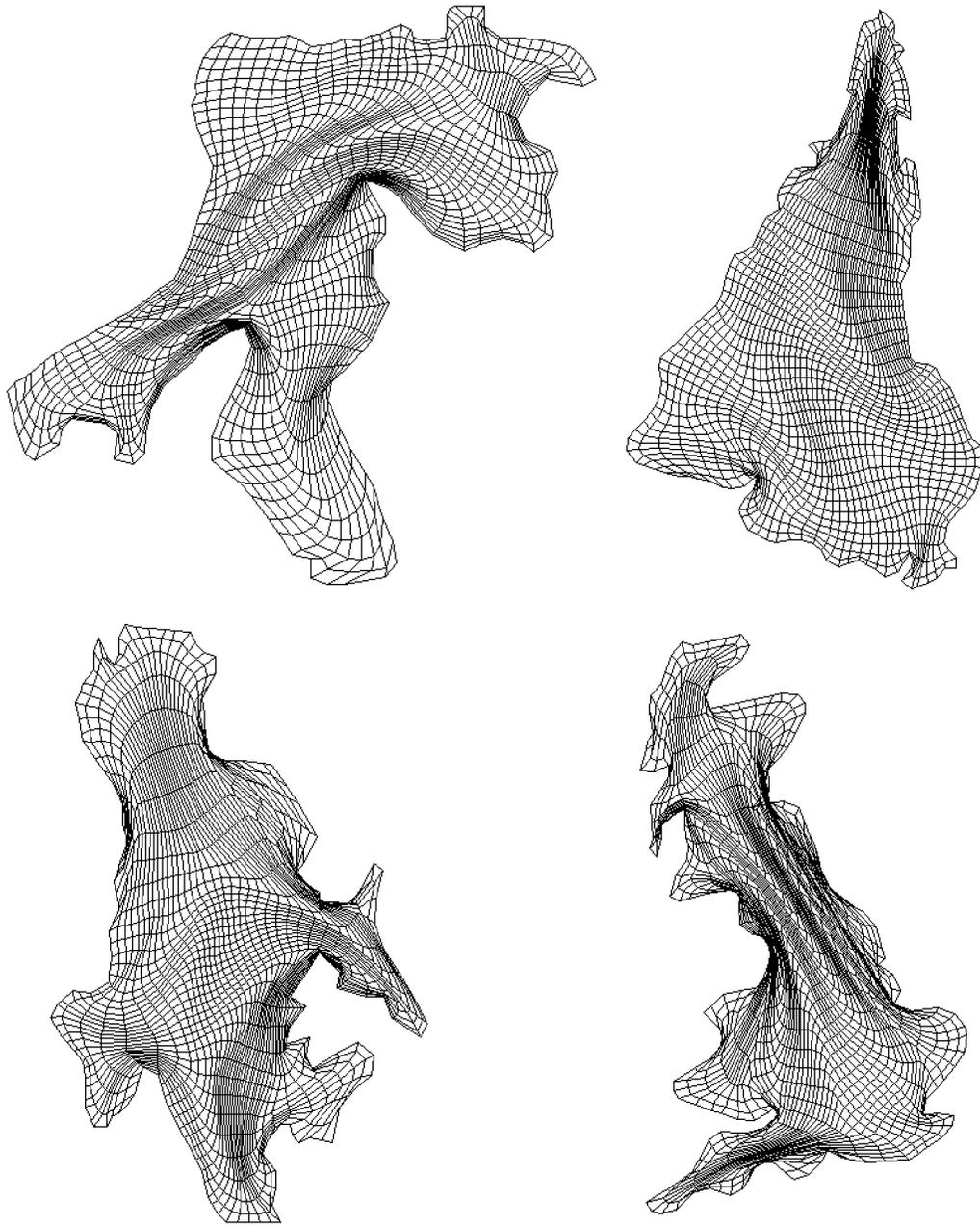


Figura 6.8.- Mallas Optimas para el Funcional A4P-Ortogonalidad. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

Tabla 6.5.- Resultados para el funcional Recíproco de Area-Ortogonalidad

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha t$	$\alpha_+ t$	$\alpha c$	$\alpha_+ c$	$\sigma^2$	longi
M12	.50	0	89	0.194	6.280	0.538	4.916	0.123	1.741
	.75	0	40	0.257	3.258	0.677	2.121	0.025	1.719
	.95	0	59	0.340	1.780	0.802	1.290	0.007	1.687
M13	.50	0	44	0.279	4.934	0.677	4.064	0.144	1.709
	.75	0	45	0.363	3.483	0.783	2.430	0.040	1.771
	.95	0	34	0.411	1.836	0.855	1.491	0.012	1.946
M19	.50	0	38	0.201	3.704	0.478	3.074	0.135	1.732
	.75	0	40	0.227	3.273	0.573	2.429	0.059	1.804
	.95	0	77	0.290	1.987	0.692	1.930	0.019	1.912
M26	.50	0	107	0.142	5.545	0.395	4.798	0.412	2.002
	.75	0	151	0.151	4.884	0.383	4.187	0.203	2.826
	.95	0	140	0.210	2.817	0.529	2.345	0.047	4.159
HAB	.50	0	105	0.163	13.479	0.361	11.834	0.492	2.340
	.75	0	116	0.274	13.304	0.464	11.617	0.335	2.617
	.95	0	118	0.344	11.992	0.562	9.722	0.204	2.898
SUD	.50	0	86	0.165	6.266	0.335	4.099	0.147	2.224
	.75	0	88	0.184	5.580	0.430	3.633	0.075	2.296
	.95	0	142	0.218	3.423	0.574	2.020	0.029	2.411
UCH	.50	0	200	0.111	13.774	0.421	9.422	1.142	3.567
	.75	0	183	0.107	12.618	0.274	11.394	0.554	3.033
	.95	0	168	0.189	10.787	0.481	7.564	0.235	3.344
ENG	.50	0	448	0.035	24.287	0.291	19.879	2.117	4.700
	.75	0	256	0.072	11.071	0.389	8.436	0.739	4.564
	.95	0	225	0.093	9.701	0.437	5.793	0.316	5.072

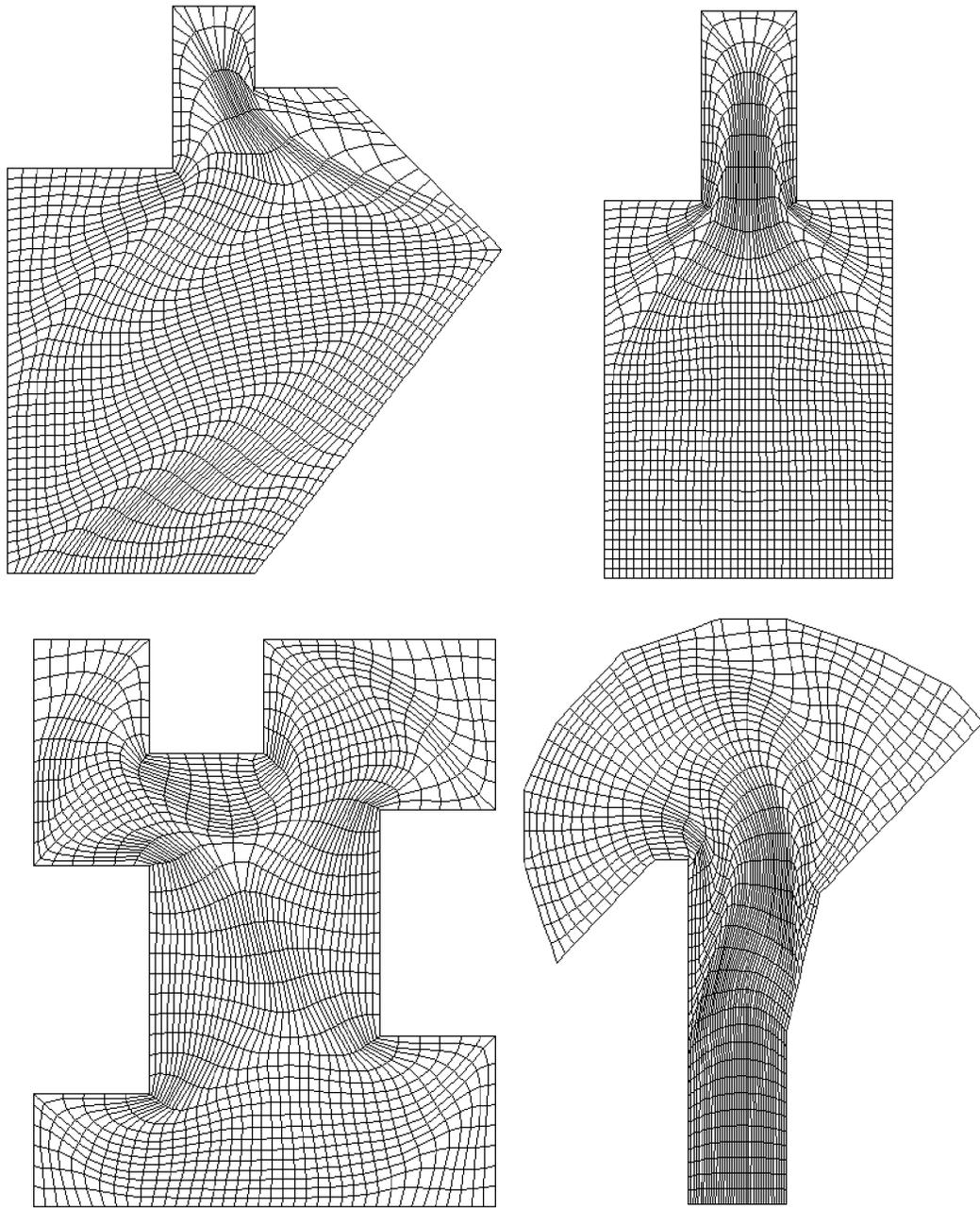


Figura 6.9.- Mallas Optimas para el Funcional Recíproco de Area - Ortogonalidad. Regiones M12, M13, M19 y M26.

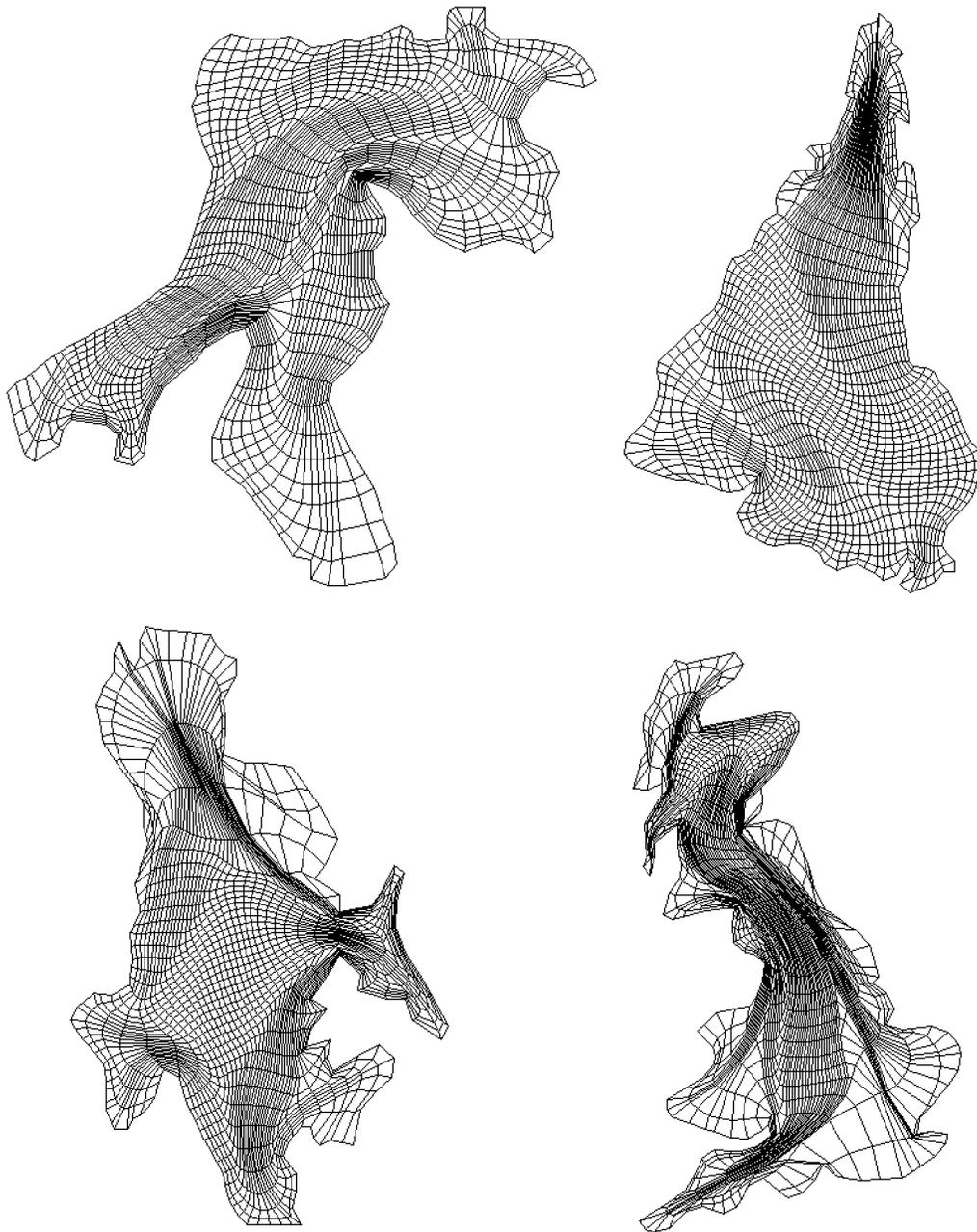


Figura 6.10.- Mallas Optimas para el Funcional Recíproco de Area - Ortogonalidad. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

### 6.3 Combinaciones de Suavidad con Area

Como se menciona al principio de este capítulo, otra manera de obtener mallas convexas y suaves que tengan una buena distribución del tamaño de las celdas es combinar el esquema adaptivo de los funcionales de suavidad del capítulo 4 con algún funcional de área. Esta idea da muy buenos resultados para las combinaciones con el funcional clásico de área

$$F_{S-A}^{(\tau)} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A^2} \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

y con el funcional A4P

$$F_{S-A4P}^{(\tau)} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A4P} \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Al variar el parámetro  $\tau$  entre 0 y 1, se puede "balancear" la cantidad de control de área y de suavidad para obtener mallas adecuadas. Esto da alternativas al uso del funcional de suavidad bilateral. En particular se ha notado que las combinaciones correspondientes a  $\tau = .5$  producen mallas de muy buena calidad y esto es útil si se quiere implementar un sistema de generación de mallas que sea automático.

Las tablas 6.6 y 6.7 muestran los datos de la optimización de las mallas iniciales de 40 por 40 usando los funcionales anteriores. Para el parámetro  $k$  se usó la estrategia de TOPE, de la que ya se habló anteriormente. Las gráficas de las mallas que se presentan en las figuras 6.11, 6.12, 6.13 y 6.14 corresponden al valor  $\tau = .5$ .

Tabla 6.6.- Resultados para el Funcional de Suavidad-Area.  $F_{SA} = \tau F_k + (1 - \tau)F_{A^2}$ 

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_{\mathcal{L}}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{\mathcal{C}}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.25	0	74	0.045	2.074	0.333	1.757	0.022	1.360
	.50	0	55	0.051	2.882	0.262	2.266	0.054	1.318
	.75	0	61	0.061	3.875	0.247	3.076	0.105	1.309
M13	.25	0	63	0.041	2.417	0.207	1.877	0.036	1.505
	.50	0	54	0.052	3.576	0.187	2.630	0.081	1.488
	.75	0	46	0.065	5.391	0.211	3.802	0.158	1.518
M19	.25	0	62	0.116	2.194	0.317	1.886	0.044	1.523
	.50	0	59	0.086	2.819	0.190	2.177	0.102	1.415
	.75	0	57	0.068	3.750	0.152	2.900	0.191	1.364
M26	.25	0	100	0.029	2.573	0.121	2.003	0.157	2.131
	.50	0	97	0.046	3.096	0.113	2.501	0.312	1.799
	.75	0	54	0.087	3.720	0.153	3.104	0.485	1.641
HAB	.25	0	123	0.055	4.939	0.304	3.145	0.152	2.074
	.50	0	114	0.103	5.342	0.210	3.743	0.283	1.828
	.75	0	94	0.066	6.378	0.128	4.584	0.455	1.731
SUD	.25	0	107	0.025	2.494	0.134	1.773	0.041	1.909
	.50	0	99	0.024	3.540	0.128	2.385	0.077	1.856
	.75	0	107	0.025	5.173	0.128	3.508	0.137	1.886
UCH	.25	0	127	0.017	4.390	0.136	3.940	0.155	2.492
	.50	0	154	0.023	5.799	0.136	4.075	0.288	2.339
	.75	0	121	0.029	8.651	0.169	6.035	0.522	2.369
ENG	.25	0	217	0.012	4.790	0.060	2.996	0.201	3.322
	.50	0	207	0.013	5.130	0.048	3.871	0.336	3.089
	.75	0	203	0.013	7.025	0.050	4.978	0.542	3.061

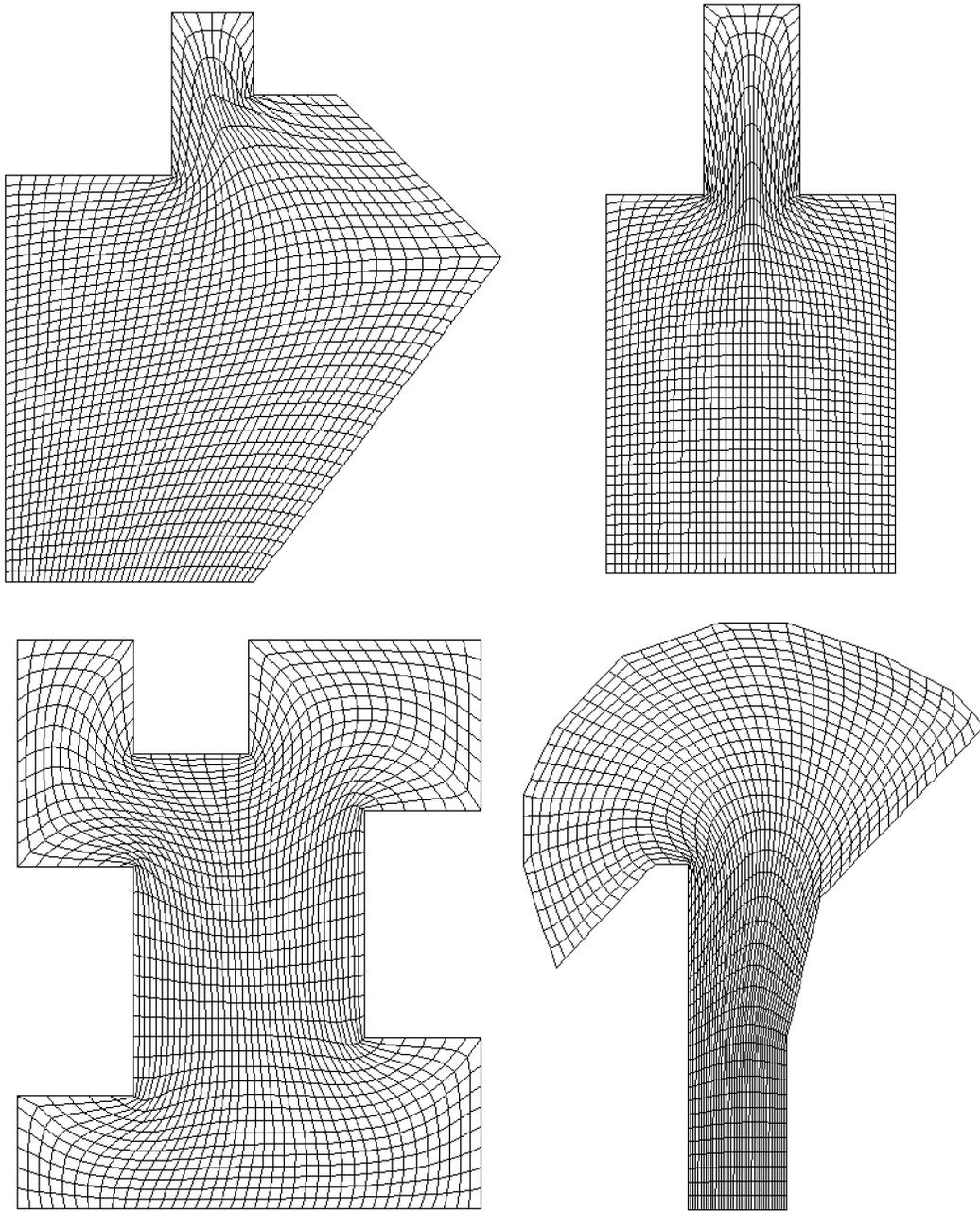


Figura 6.11.- Mallas Optimas para el Funcional Suavidad - Area Clásica. Regiones M12, M13, M19 y M26.

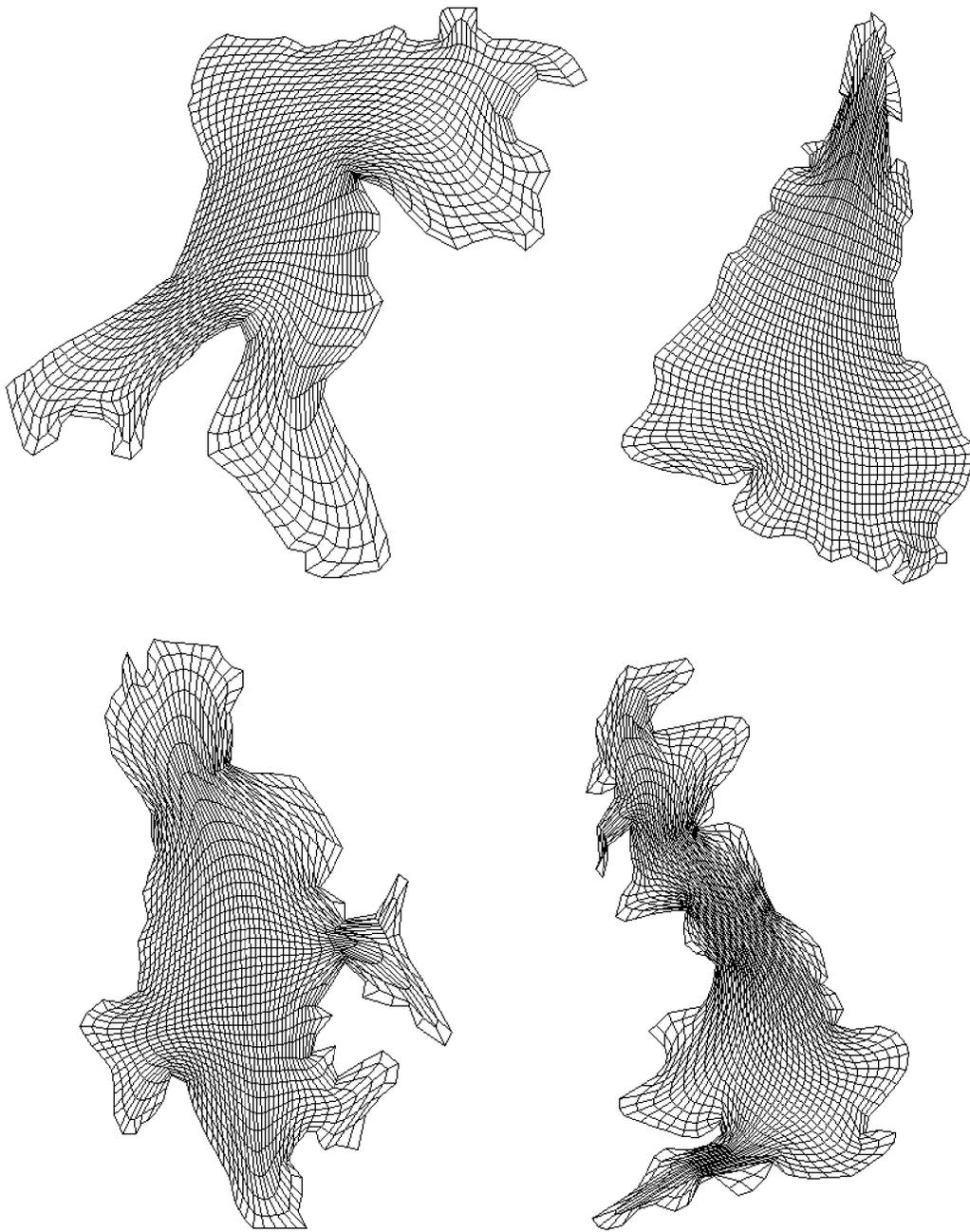


Figura 6.12.- Mallas Optimas para el Funcional Suavidad - Area Clásica. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

Tabla 6.7.- Resultados para el Funcional de Suavidad-Area.  $F_{sa} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A4P}$ 

Malla	$\tau$	nc	it	$\alpha_{\mathcal{L}}$	$\alpha_{+t}$	$\alpha_{\mathcal{C}}$	$\alpha_{+c}$	$\sigma^2$	longi
M12	.25	0	38	0.052	1.911	0.308	1.683	0.060	1.325
	.50	0	41	0.054	2.194	0.259	1.875	0.083	1.316
	.75	0	40	0.058	2.570	0.239	2.102	0.107	1.314
M13	.25	0	45	0.075	2.001	0.226	1.725	0.049	1.534
	.50	0	60	0.079	2.347	0.179	1.970	0.068	1.529
	.75	0	48	0.061	2.808	0.151	2.274	0.092	1.533
M19	.25	0	51	0.130	1.936	0.282	1.778	0.089	1.450
	.50	0	42	0.084	2.236	0.189	1.965	0.130	1.407
	.75	0	49	0.070	2.577	0.156	2.164	0.177	1.381
M26	.25	0	66	0.035	2.195	0.132	1.838	0.238	1.953
	.50	0	70	0.041	2.373	0.104	2.031	0.327	1.824
	.75	0	47	0.082	2.665	0.149	2.212	0.417	1.725
HAB	.25	0	155	0.038	4.703	0.319	2.709	0.178	2.152
	.50	0	105	0.062	4.708	0.219	2.867	0.244	2.007
	.75	0	82	0.079	4.724	0.153	3.059	0.321	1.900
SUD	.25	0	78	0.024	1.985	0.133	1.738	0.076	1.884
	.50	0	93	0.023	2.316	0.125	1.996	0.102	1.881
	.75	0	107	0.023	2.771	0.124	2.324	0.130	1.908
UCH	.25	0	138	0.011	4.043	0.120	3.656	0.174	2.604
	.50	0	152	0.019	4.111	0.120	3.708	0.240	2.536
	.75	0	119	0.022	4.221	0.150	3.788	0.320	2.505
ENG	.25	0	186	0.008	3.410	0.058	2.372	0.220	3.301
	.50	0	207	0.010	3.532	0.047	2.488	0.290	3.224
	.75	0	206	0.013	3.910	0.049	2.649	0.365	3.147

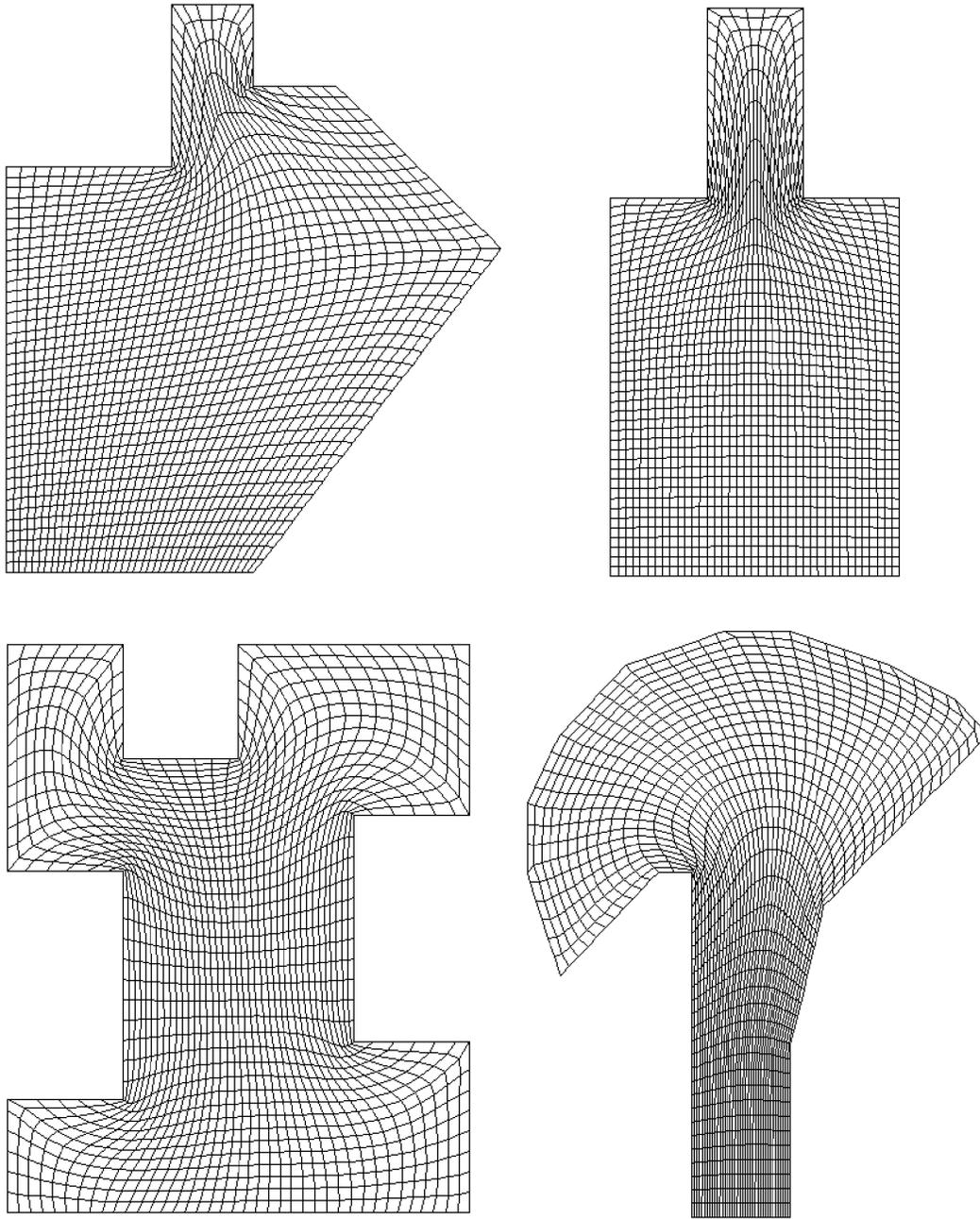


Figura 6.13.- Mallas Optimas para el Funcional Suavidad - A4P. Regiones M12, M13, M19 y M26.

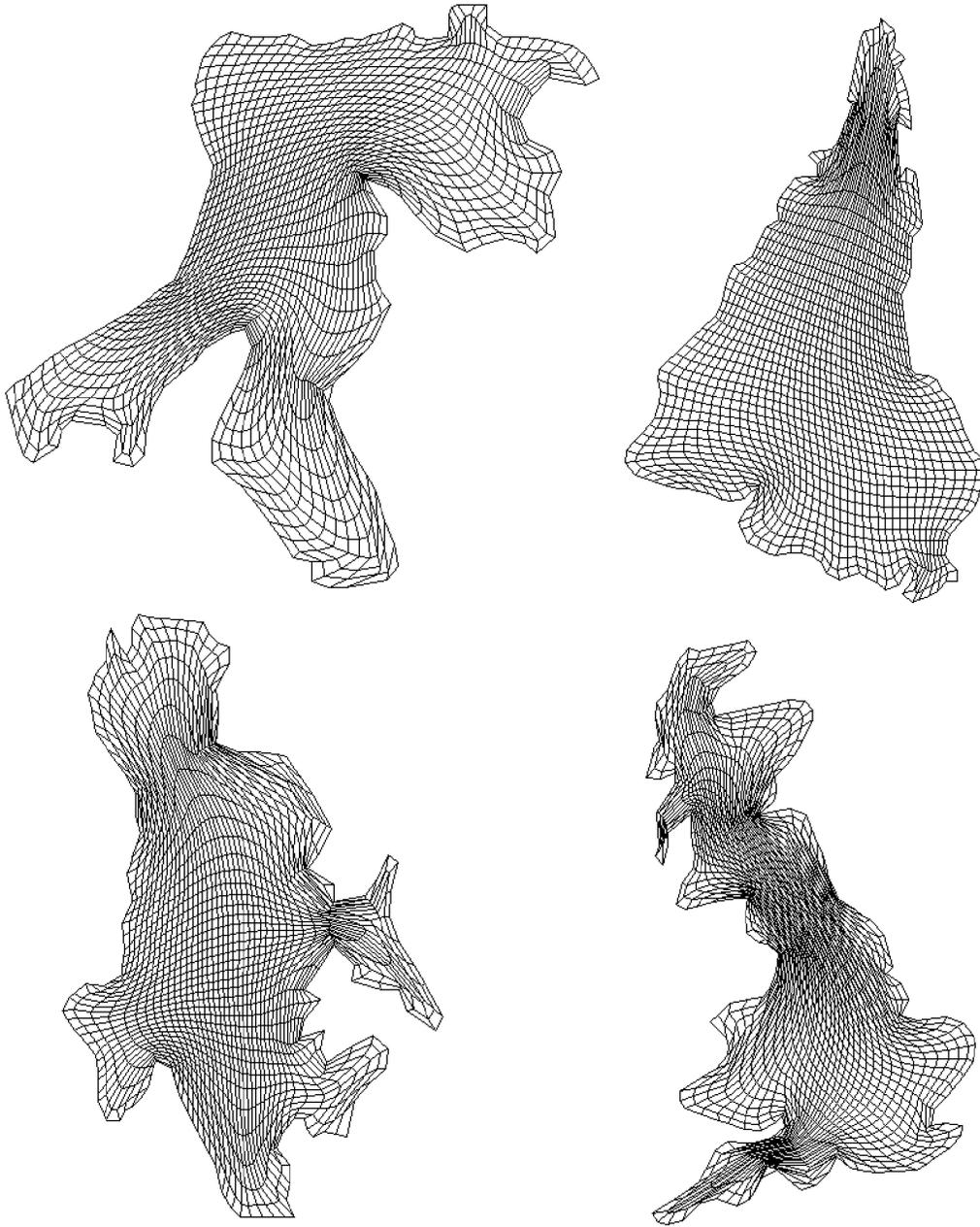


Figura 6.14.- Mallas Optimas para el Funcional Suavidad - A4P. Regiones HAB, SUD, UCH y ENG.

## 6.4 Conclusiones

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con los diferentes funcionales expuestos en los capítulos 4, 5 y 6. Con el objetivo de resaltar los méritos de cada uno de ellos, se hará un análisis desde diferentes puntos de vista que corresponden a las tres principales características que se señalaron como deseables al principio de este trabajo: convexidad, suavidad y control del tamaño de las celdas. En esta parte se usarán las siguientes abreviaturas para los funcionales considerados:

- L** Longitud
- A** Area Clásica
- S** Suavidad Adaptiva
- A4P** Area Cuarta Promedio
- AR** Recíproco de Area
- AB** Area Bilateral
- SB** Suavidad Bilateral
- AL** A - L con  $\tau = .99$
- A4L** A4P - L con  $\tau = .95$
- ARL** AR - L con  $\tau = .75$
- ABL** AB - L con  $\tau = .5$
- AO** A - O con  $\tau = .5$
- A4O** A4P - O con  $\tau = .5$
- ARO** AR - O con  $\tau = .5$
- SA** S - A con  $\tau = .5$
- SA4** S - A4P con  $\tau = .5$

Los valores de  $\tau$  en esta parte fueron elegidos en base a la experiencia numérica. Son los que se recomiendan en la implementación de un sistema generador de mallas como valores por omisión, para hacer dicha implementación automática.

### 6.4.1 Convexidad

A excepción del funcional A4P, todos los nuevos funcionales logran el objetivo primordial de producir mallas óptimas suaves. En particular, los funcionales de suavidad adaptiva y recíproco de área producen mallas convexas con características muy distintas; mientras que con la optimización del primero se consiguen mallas convexas muy suaves, con el segundo se logran mallas óptimas convexas con una mucho menor variación del área. Esto es claro a partir de los resultados de las tablas 4.2 y 5.2. Por otro lado, el funcional de suavidad bilateral y la mayoría de las combinaciones presentadas en este capítulo producen mallas convexas que presentan en cierta medida las características de suavidad y de control de áreas.

## 6.4.2 Suavidad

Es interesante medir esta propiedad para los funcionales que se diseñaron para tratar de controlar más de una característica de la malla. Hasta ahora se ha usado la cantidad *longi* (que no es otra cosa que el valor del funcional de longitud en cada malla) como medida de la suavidad de las mallas producidas. Mientras más pequeño sea este valor, la malla será considerada más suave. Esta manera de medir la suavidad tiene la ventaja de que se puede aplicar a cualquier malla, convexa o no. Otra manera de medir dicha propiedad sobre una malla está dada por el valor que el funcional de suavidad clásico (esto es, el presentado en el capítulo 3) tome sobre ella, este valor sólo es realista si la malla es convexa.

En la Tabla 6.8 se presentan los valores respectivos de estas dos formas de medir la suavidad para las mallas generadas con algunos funcionales, las cuales se denotan en la tabla por *l* y *s*, respectivamente.

Tabla 6.8.- Comparación de *l* y *s* para algunos funcionales

Malla	ARL		ABL		SB		SA		SA4	
	<i>l</i>	<i>s</i>								
M12	1.345	1.361	1.296	1.319	1.279	1.273	1.318	1.301	1.316	1.289
M13	1.426	1.471	1.420	1.465	1.436	1.395	1.488	1.398	1.529	1.424
M19	1.477	1.550	1.377	1.477	1.340	1.410	1.415	1.474	1.407	1.459
M26	2.041	2.517	1.673	2.197	1.542	2.081	1.799	2.229	1.824	2.229
HAB	1.827	2.023	1.745	1.956	1.676	1.753	1.828	1.894	2.007	2.007
SUD	1.799	2.023	1.708	1.990	1.708	1.917	1.856	1.932	1.881	1.928
UCH	2.216	2.412	2.192	2.455	2.280	2.080	2.339	2.211	2.536	2.333
ENG	2.973	3.916	2.791	3.845	2.815	3.333	3.089	3.451	3.224	3.578

Para estos datos se realizó el siguiente proceso: en cada región, se ordenaron de mejor a peor los valores de *l* y *s*; de acuerdo a esto se asignaron los valores del 1 al 5 respectivamente, acto seguido se elaboraron las tablas de frecuencias (Tablas 6.9 y 6.10).

Tabla 6.9.- Eficiencia respecto a *l*

Funcional	Lugar ocupado				
	1	2	3	4	5
ARL	0	2	3	0	3
ABL	4	4	0	0	0
SB	5	1	2	0	0
SA	0	0	1	7	0
SA4	0	0	2	1	5

Tabla 6.10.- Eficiencia respecto a *s*

Funcional	Lugar ocupado				
	1	2	3	4	5
ARL	0	0	0	1	7
ABL	0	1	1	5	1
SB	8	0	0	0	0
SA	0	4	4	0	0
SA4	0	3	4	1	0

De estas tablas, se puede concluir que las dos medidas de suavidad no son equivalentes: mientras que respecto a  $l$  los mejores funcionales son ABL y SB y los peores de la lista parecen ser SA y SA4, los valores de  $s$  indican que los mejores son SB, SA y SA4 y los peores son ARL y ABL. Sería posible, haciendo una combinación de los datos de las dos tablas concluir que, para los funcionales ahí considerados, las mallas más suaves son producidas por el funcional de suavidad bilateral y le siguen las correspondientes a los funcionales ABL, SA, SA4 y ARL, aproximadamente en ese orden.

### 6.4.3 Control de áreas

Para intentar hacer una comparación de la manera en que los funcionales anteriores controlan el tamaño de las celdas en la malla, se extrajeron de las diferentes tablas de resultados las partes correspondientes al tamaño de las celdas más pequeñas, Tamaño de las celdas más grandes, así como la variancia de las áreas. Estos datos se presentan en la siguientes tablas (Tablas 6.11 a 6.18).

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.548	2.420	.031
ABL	.440	2.511	.061
SB	.161	2.697	.133
SA	.262	2.266	.054
SA4	.259	1.875	.083

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.458	4.505	.076
ABL	.447	2.894	.073
SB	.179	3.731	.100
SA	.187	2.630	.081
SA4	.179	1.970	.068

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.530	2.383	.062
ABL	.427	2.655	.129
SB	.139	2.902	.278
SA	.190	2.177	.102
SA4	.189	1.965	.130

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.270	3.474	.206
ABL	.196	3.238	.452
SB	.162	3.760	.836
SA	.113	2.501	.312
SA4	.104	2.031	.327

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.390	10.287	.347
ABL	.313	3.795	.331
SB	.094	5.565	.692
SA	.210	3.743	.283
SA4	.219	2.867	.244

Funcional	$\alpha_{-C}$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.356	2.955	.068
ABL	.294	2.722	.105
SB	.096	2.892	.160
SA	.128	2.385	.077
SA4	.125	1.996	.102

Funcional	$\alpha_C$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.323	7.130	.377
ABL	.219	3.617	.286
SB	.119	4.805	.585
SA	.136	4.075	.288
SA4	.120	3.708	.240

Funcional	$\alpha_C$	$\alpha_{+C}$	$\sigma^2$
ARL	.223	4.495	.403
ABL	.211	3.179	.423
SB	.056	4.806	.654
SA	.048	3.871	.336
SA4	.047	2.488	.290

Realizando un proceso similar al anterior se obtuvieron las siguientes tablas de frecuencias (Tablas 6.19, 6.20 y 6.21):

Funcional	Lugar ocupado				
	1	2	3	4	5
ARL	8	0	0	0	0
ABL	0	8	0	0	0
SB	0	0	2	1	5
SA	0	0	5	3	0
SA4	0	0	1	5	2

Funcional	Lugar ocupado				
	1	2	3	4	5
ARL	0	0	2	2	4
ABL	1	1	4	2	0
SB	0	0	0	4	4
SA	0	6	2	0	0
SA4	7	1	0	0	0

Funcional	Lugar ocupado				
	1	2	3	4	5
ARL	4	0	2	2	0
ABL	0	2	3	3	0
SB	0	0	0	0	8
SA	0	6	1	1	0
SA4	4	0	2	2	0

De las tablas anteriores se sigue de manera clara que

1. En lo relativo a la capacidad de evitar mallas con celdas muy pequeñas, el mejor funcional es ARL, seguido de ABL; de los funcionales examinados el que menos tiene esta característica es SB.
2. De los funcionales examinados, los que mejor control ejercen sobre las celdas grandes son SA4 y SA. Nuevamente el que más deficiencias presenta respecto a tal propiedad es SB.
3. Los funcionales que producen mallas óptimas con una menor variancia de las áreas de las celdas son SA4, SA y ARL.

### 6.4.4 Tiempo de Convergencia

Un criterio que también es tomado en cuenta al elegir un método de generación de mallas, es el de la velocidad con que se realice la tarea. Una manera de medir dicha velocidad puede ser la del número de iteraciones necesarias para que el proceso de optimización termine. Sin embargo, para cada uno de los funcionales y regiones el realizar una iteración conlleva la realización de trabajo numérico de diferente duración. Por un lado se necesita evaluar diferentes funciones (valores de los funcionales, gradientes, hessianas, etc), los cuales requieren diferente esfuerzo computacional dependiendo del funcional. También se requiere de diferentes números de evaluaciones de tales cantidades durante los procesos de calcular una dirección de descenso y de búsqueda en la línea.

Todo lo anterior hace que una mejor manera de medir la velocidad de convergencia sea el tiempo requerido. A diferencia del número de iteraciones, dicho tiempo es más dependiente del hardware, por esta razón es necesario precisar el tipo de equipo utilizado. Como fue mencionado, todo el trabajo numérico se realizó en un procesador PENTIUM de 66 MHz y se usó sólo la memoria base (640 Kb). A continuación se reportan los tiempos (en segundos) que fueron necesarios para lograr convergencia con los diferentes funcionales y regiones (Tabla 6.22). Cabe aquí hacer la observación que para regiones relativamente simples, las combinaciones AL y A4L producen buenos resultados en tiempos relativamente bajos; sin embargo, la noción de simplicidad de una región es algo imprecisa y por tanto si no se tiene experiencia en la generación de mallas se recomienda usar un funcional que garantice la convexidad de la malla óptima, a expensas de requerir más tiempo. En relación a los funcionales que se han estado comparando, se puede ver que los más veloces son ARL y ABL, mientras que SA, SA4 y SB requieren de más tiempo, siendo el último de éstos el más lento.

Tabla 6.22.- Tiempos requeridos para convergencia (seg)

Funcional	Región							
	M12	M13	M19	M26	HAB	SUD	UCH	ENG
L	24	28	20	24	24	25	24	24
A	369	514	649	649	913	465	415	1092
AL	245	231	353	514	405	492	612	939
AO	227	219	144	310	316	273	217	316
S	401	384	425	398	639	909	742	1545
SB	633	665	869	865	1840	1679	2008	4664
A4	485	1484	1387	1233	2599	1182	2668	2658
AR	626	1411	567	1069	1499	724	1707	2760
AB	718	1293	608	901	1120	908	724	3250
A4O	1257	2323	591	3871	647	3735	2292	2678
ARO	680	324	300	841	823	660	1563	3516
A4L	482	588	705	1095	980	791	1618	2418
ARL	305	257	378	643	738	468	939	1418
ABL	401	251	335	470	1158	597	456	1473
SA	613	635	635	1175	1260	1091	1685	2220
SA4	477	758	509	880	1144	1033	1646	2302

Como menciona Castillo ([8]), el control efectivo de las áreas es la característica más deseada en una malla, seguida de la suavidad y de la ortogonalidad. Atendiendo a este criterio, a la estabilidad del proceso de optimización y al tiempo de convergencia es que en la implementación de un sistema automático de generación de mallas se recomienda optimizar el funcional ARL como método "por omisión", al menos si el método de optimización usado es el de Newton Truncado.

### 6.4.5 Desarrollos Futuros

Existen varias líneas de desarrollo en las cuales se está interesado. Por un lado, es deseable hacer las modificaciones pertinentes a los funcionales aquí presentados, para contemplar la condensación de puntos en ciertas partes de la región donde así lo requiera la naturaleza de las soluciones numéricas de algún problema diferencial; por ejemplo, donde el gradiente de la solución sea muy grande en magnitud.

También se cree posible extender estos métodos para generar mallas sobre regiones tridimensionales; en este aspecto se deberá primeramente contar con la herramienta de visualización adecuada y determinar el tipo de discretización que sería conveniente (en el caso plano, los elementos geométricos básicos son triángulos, muy posiblemente en el espacio puedan funcionar los tetraedros). Obviamente el problema de optimización correspondiente también se complicará debido al crecimiento del número de variables; será necesario usar métodos de optimización que sean más eficientes tanto en cantidad de memoria requerida, como en tiempo de ejecución (quizá a expensas de perder precisión en la cercanía al óptimo).

# Apéndice A

## El Método de Newton Truncado

Sean  $D \subset \mathbf{R}^M$  y  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  de clase  $C^2$ . Considérese el problema de optimización

$$\text{Min}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D\} \quad (\text{A.1})$$

Un algoritmo iterativo para resolver el problema A.1 es tal que a partir de una aproximación inicial  $\mathbf{x}_0$ , genera valores

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \quad (\text{A.2})$$

con la característica de que cada valor subsecuente produce un valor más cercano al óptimo; esto es,

$$f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_2) > \dots \quad (\text{A.3})$$

y además si  $\mathbf{x}^*$  es la solución a A.1, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*$$

Un vector  $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^M$  es llamado una dirección de descenso para  $f$  en  $\mathbf{x}$  si

$$\nabla f(\mathbf{x})^t \mathbf{d} < 0 \quad (\text{A.4})$$

Para generar la sucesión A.2, la manera más usada es por medio de recursión

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{d}_n \quad (\text{A.5})$$

donde  $\mathbf{d}_n$  es una dirección de descenso y  $\alpha_n$  es algún número real positivo que haga que se cumpla A.3.

La forma de elegir la dirección de descenso marca la diferencia entre los diferentes métodos; esta elección depende de la cantidad de información que se tenga en el punto  $\mathbf{x}_n$ . Una manera inmediata es elegir

$$\mathbf{d}_n = -\mathbf{g}_n = -\nabla f(\mathbf{x}_n)$$

que da lugar al llamado "método de descenso más pronunciado", el cual sin embargo no es conveniente pues puede dar lugar a oscilaciones en el acercamiento al óptimo.

La mejor forma de elegir la dirección de descenso corresponde al método de Newton y es

$$\mathbf{d}_n = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}_n)]^{-1} \mathbf{g}_n \quad (\text{A.6})$$

donde  $\nabla^2 f$  es la matriz hessiana de  $f$ , la conveniencia de su uso se debe a que tiene una rápida convergencia local (cerca del óptimo). Sin embargo, el método de Newton tiene varias desventajas, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

1. Requiere de una buena aproximación inicial.
2. No está definido si la hessiana  $\nabla^2 f(\mathbf{x}_n)$  es singular.
3. Si el problema es no convexo, no necesariamente genera direcciones de descenso.
4. En cada iteración es necesario resolver un sistema lineal de dimensión  $M$ .
5. Debe darse la expresión analítica de la hessiana.

Como una alternativa al uso del método de Newton, se diseñaron los llamados métodos cuasi-Newton, que tratan de conservar las ventajas y evitar las desventajas de aquel. De interés para este trabajo es uno de ellos: el Método de Newton Truncado. Este algoritmo elimina los inconvenientes 1, 2, 3 y 5 antes citados. La forma esquemática que tiene es la siguiente:

Desde  $n = 0$  hasta convergencia

1. Resolver  $B(\mathbf{x}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$
2. Calcular  $\alpha_n$  tal que  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{d}_n$  cumpla A.3

Aquí  $B(\mathbf{x}_n)$  es una aproximación positiva definida a la hessiana en  $\mathbf{x}_n$ , la manera en que se elige esta aproximación toma en cuenta que si se está lejos de la solución, no es conveniente emplear mucho esfuerzo para encontrar de manera precisa la dirección de Newton  $\mathbf{d}_n$ . Es entonces justificado resolver las ecuaciones A.6 usando un método iterativo que proporcione sólo una aproximación a la solución; esto es, las ecuaciones de Newton "se truncan". También es importante la condición de que la cantidad de memoria requerida sea pequeña. El algoritmo usado para obtener tal aproximación a la dirección de Newton es del tipo de Gradientes Conjugados Precondicionado, donde el preconditionador es la inversa de la diagonal de la Hessiana, el cual proporciona

una convergencia superlineal. Para una descripción detallada de este método se puede consultar [7].

Por otro lado, para una dirección de descenso  $\mathbf{d}$  dada,  $\alpha_n$  debería ser tal que

$$f(\mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{d}_n) = \min\{f(\mathbf{x}_n + \alpha \mathbf{d}_n) : \alpha \geq 0\}$$

sin embargo, esta búsqueda exacta del mínimo en la dirección  $\mathbf{d}_n$  no es conveniente, debido a la cantidad de trabajo que requiere. En su lugar se calcula un valor aproximado del mínimo, para lo cual existen diversos algoritmos de búsqueda en la línea; el que aquí se usa es el debido a Moré y Thuente ([32]) que ha probado ser muy efectivo.

# Bibliografía

- [1] Amsden, A. A. and Hirt, C. W. *A Simple Scheme for Generating General Curvilinear Grids*. J. Comp. Physics 11, 348-359. 1973.
- [2] Barrera-Sánchez, P., Castellanos-Noda, L., Pérez-Domínguez, A. *Métodos Variacionales Discretos para la Generación de Mallas*. DGAPA-UNAM, México, D.F., 1994.
- [3] Barrera-Sánchez, P. and, Castellanos-Noda, L.A. *Métodos de Optimización de Gran Escala para el Problema de la Generación de Redes Optimas*. DGAPA-UNAM, México, D.F., 1994.
- [4] Barrera-Sánchez, P., González-Flores, G., Pérez-Domínguez, A., Castellanos-Noda, L. *Manual de Usuarios del Sistema UNAMALLA*. DGAPA-UNAM, México, D.F., 1994.
- [5] Barrera-Sánchez, P., Pérez-Domínguez, A., Castellanos-Noda, L. *Curvilinear Coordinate System Generation Over Plane Irregular Regions*. Vínculos Matemáticos No. 133, Facultad de Ciencias, UNAM, Méx. 1992.
- [6] Brackbill, J. U, and Saltzman, J. S. *Adaptive Zoning for Singular problems in Two Dimensions*. J. Comp. Physics 46, 342-368. 1982.
- [7] Castellanos, J. L. *Generación Numérica de Redes usando Newton Truncado*. Tesis Doctoral, I.C.I.M.A., Ministerio de la Ciencia, Tecnología y el Medio Ambiente. La Habana, Cuba. 1994.
- [8] Castillo-Moreno, José E. *On Variational Grid Generation*. Ph. D. Thesis, The University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico. 1987.
- [9] Castillo, J.E., *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation I*. en *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*. J. Hauser and C. Taylor eds., pp 35-43. Pineridge Press, Swansea, UK. 1986.
- [10] Castillo, J. E., Steinberg, S. and Roache, P.J. *Mathematical Aspects of Variational Grid Generation II*. J. Comp. and Appl. Math. 20, 127-135. 1987.

- [11] Castillo, J. E., Steinberg, S. and Roache, P.J. *Parameter Stimulation in Variational Grid Generation*. Appl. Math. and Comp. 28(2), 1-23. 1988.
- [12] Castillo, J. E., Steinberg, S. and Roache, P.J. *On the Folding of Numerically Generated Grids. Use of a Reference Grid*. Comm. Applied Num. Methods 4, 471-481. 1988.
- [13] Celia, Michael A., and Gray, William, G. *Numerical Methods for Differential Equations*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1992.
- [14] Charakhch'yan, A. A. *The Effect of False Cummulation for Godunov's Scheme on Moving Grids*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol 28, No. 1. pp. 97-100. 1988.
- [15] Conte, S. D., and De Boor, C. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. Third Edition. Mac-Graw Hill, International Student Edition. 1980.
- [16] Eiseman, P. R. *Coordinate Generation with Precise Controls over Mesh Properties*. J. Comp. Physics 47, 331-351. 1982.
- [17] Eiseman, P. R. *Ortogonal Grid Generation*. En *Numerical Grid Generation*. J. F. Thompson, ed., pp 193-226. North Holland, New York. 1982.
- [18] Elsgoltz, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú. 1977.
- [19] Fletcher, R. *Practical Methods of Optimization*. Second Edition. John Wiley & Sons. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore. 1987.
- [20] G'elfand, I.M., and Fomin, S.V. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J. 1963.
- [21] Gordon, W. J., and Hall, C. A. *Construction of Curvilinear Coordinate Systems ans Applications to Mesh Generations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 7, 461-477. 1973.
- [22] Gordon, W. J., and Thiel, L. C. *Transfinite Mappings and their Applications to Grid Generation*. En *Numerical Grid Generation*, J. F. Thompson, ed., pp 171-192. North Holland, New York. 1982.
- [23] González-Flores, G.F. *Generación de Mallas en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Méx. 1994.
- [24] Henrici, P. *Applied an Computational Complex Analysis*. 2 volúmenes. John Wiley and Sons, New York. 1974.

- [25] Ivanenko, S.A., and Charakhch'yan, A.A. *Curvilinear Grids of Convex Quadrilaterals*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol 28, No. 2. pp. 126-133. 1988.
- [26] Ivanenko, S.A. *Generation of Non-Degenerate Meshes*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol 28, No. 5. pp. 141-146. 1988.
- [27] Knupp, Patrick M., and Steinberg, Stanley. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press. Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo. 1993.
- [28] Knupp, P.M. *A Robust Elliptic Grid Generator*. J. Comp. Phys. 100, 409-418. 1992.
- [29] Lehto, O., and Virtanen, K. I. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer Verlag, Berlín. 1973.
- [30] Mastin, C. W. *Error Induced by Coordinate System*. En *Numerical Grid Generation*. J. F. Thompson, ed., pp 31-40. North Holland, New York. 1982.
- [31] Mastin, C.W. and Thompson, J.F. *Elliptic Systems and Numerical Transformations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 62, pp 52-62. 1978.
- [32] Moré J.J., Thuente D.J. *On line search algorithms with guaranteed sufficient decrease*. Math. and Computer Science Division Preprint MCS-P153-0590, Argonne National Lab., Argonne, Ill. 1990.
- [33] Moretti, G. *Grid Generation using Classical Techniques*. En *Numerical Grid Generation Techniques*. R. E. Smith, ed., pp 1-35. NASA CP 2166, NASA Langley Research Center, Hampton VA. 1980.
- [34] Peressini, A.L., Sullivan, F.E., Uhl Jr, J.J. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer-Verlag, New York Inc. 1988.
- [35] Roache, P. J. and Steinberg, S. *A New Approach to Grid Generation Using a Variational Formulation*. AIAA 7th C.F.D. Conference, paper no. 85-1527, pp 360-370. 1985.
- [36] Saunders, B. V. *Algebraic Grid Generation using Tensor Product B-Splines*. NASA Contractor Report 177968. NASA Langley Research Center, Hampton VA. 1985.
- [37] Seidl, A., and Klose, H. *Numerical Conformal Mapping of a Towel-Shaped Región onto a Rectangle*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 6(4), 833-842. 1985.

- [38] Smith, R. E. *Algebraic Grid Generation*. En *Numerical Grid Generation*, J. F. Thompson, ed., pp 137-170. North Holland, New York. 1982.
- [39] Steger, J. L. and Chausee, D. S. *Generation of Body-Fitted Coordinates using Hyperbolic Partial Differential Equations*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1(4), 431-437. 1980.
- [40] Steinberg, S., and Roache, P. J. *Variational Grid Generation*. Num. Meth. for P.D.E.s 2, 71-96. 1986.
- [41] Thompson, J. F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C.W. *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc. New York. 1985.
- [42] Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, C. W. *Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Field Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies*. J. Comp. Physics 15, 299-319. 1974.
- [43] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C.W. *Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review*. Journal of Computational Physics, 47, pp 1-108. 1982.
- [44] Thompson, J.F., ed. *Numerical Grid Generation*. North Holland. 1982.
- [45] Thompson, J.F. *Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics*. AIAA Journal, 22(11), pp 1505-1523. 1984.
- [46] Toledo, D. L. C. *Métodos Numéricos para Mapeo Conforme con Aplicación a la Generación de Mallas*. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. UNAM, México. 1995.
- [47] Warsi, Z.U.A., *Basic Differential Models for Coordinate Generation*. en *Numerical Grid Generation*. . Ed. Joe F. Thompson, pp 41-78. North Holland, 1982.