



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN PUNTO DE VISTA SOBRE EL PROBLEMA DE
CUADRADOS MÍNIMOS LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A :

ALEJANDRA ^{Catalina} VALDEZ ALMA GUER



MEXICO, D. F.



JUNIO DE 1994

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN ESCUELAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CIUDAD UNIVERSITARIA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo
revisado el trabajo de tesis que realizó la pasante ALEJANDRA
CATALINA VALDEZ ALHAQUER
con número de cuenta 7834003-7 con el título: "UN PUNTO DE
VISTA SOBRE EL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS LINEALES"

Consideramos que reúne los méritos necesarios para que pueda conti-
nuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de -
ACTUARIA.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS

FIRMA

Director de Tesis
DR. PABLO BARRERA SANCHEZ
DR. JESUS LOPEZ ESTRADA
M. en C. MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ
Suplente
M. en C. MARIANO LOZANO MARTINEZ
Suplente
M. en C. JOSE GUERRERO GRAJEDA

Ciudad Universitaria, D.F., a 3 de junio de 1994.

A MI MADRE Y HERMANOS:

**Que me brindaron todo su apoyo
para terminar este trabajo.**

A MI ESPOSO, SERGIO:

**Que me ayudo a terminar este
trabajo.**

A MI GRAN BEBE

MARIANA.

UN PUNTO DE VISTA SOBRE
EL PROBLEMA DE CUADRADOS
MINIMOS LINEALES

INDICE

	Página
CAPITULO I INTRODUCCION	
1.1 PLANTEAMIENTO GEOMETRICO Y ALGUNAS APLICACIONES	5
1.2 LA FACTORIZACION DE CHOLESKY	19
1.2.1 LA DESCOMPOSICION DE CHOLESKY	19
1.2.2 ALGORITMO PARA EL METODO DE CHOLESKY	24
1.3 SOLUCION CLASICA AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES EN EL CASO EXPLICITO CON RANGO MAXIMO	25
1.4 SOLUCION CLASICA AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES EN EL CASO IMPLICITO CON RANGO MAXIMO	26
CAPITULO II ASPECTOS CLASICOS DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES	
2.1 INTRODUCCION	28
2.2 ENFOQUE GEOMETRICO DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES	29
2.3 TEOREMA DE LA PROYECCION	30
2.4 EL METODO DE GRAM-SCHMIDT	34
2.5 EL METODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO	36
2.6 SOLUCION AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES CUANDO LA VARIEDAD LINEAL ESTA EN FORMA EXPLICITA	37
2.7 SOLUCION AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES CUANDO LA VARIEDAD LINEAL ESTA EN FORMA IMPLICITA	38
CAPITULO III CARACTERIZACION GEOMETRICA DE LA SOLUCION	
3.1 INTRODUCCION	41
3.2 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL SOBRE LA IMAGEN DE A Y EL ESPACIO ORTOGONAL A LA IMAGEN DE A	41
3.3 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL CUANDO $\phi = N(A)$ o $\phi = N(A)^\perp$ Y $N(A)^\perp = 0$	43
3.3 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL SOBRE UNA VARIEDAD LINEAL EN GENERAL	45
3.4 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL CUANDO $\phi = \text{IMG}(A)$ Y $N(A) \neq 0$	46

CAPITULO IV UN PUNTO DE VISTA MODERNO PARA EL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES.

4.1 INTRODUCCION	50
4.2 REFLEXIONES	50
4.2.1 CARACTERIZACION DE LAS REFLEXIONES	50
4.2.2 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER PARA UNA MATRIZ NO-SINGULAR	54
4.2.3 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER PARA UNA MATRIZ SINGULAR	56
4.3 ROTACIONES	63
4.3.1 CARACTERIZACION DE LAS ROTACIONES	63
4.3.2 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO ROTACIONES DE GIVENS	65
4.4 LA SEUDOINVERSA	67

CAPITULO V SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES

5.1 INTRODUCCION	72
5.2 DESCOMPOSICIONES QUE REVELAN EL RANGO DE UNA MATRIZ	76
5.3 SOLUCIONES DE SISTEMAS TRIANGULARES QUE REVELAN EL RANGO	79
5.4 LA SOLUCION DE LONGITUD MINIMA	84
5.5 LA FACTORIZACION ORTOGONAL COMPLETA	90
5.6 LA DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES	92
5.7 CONDICION DE UN SISTEMA COMPATIBLE	94
5.8 ESTIMACION DE RANGO NUMERICO	95
5.9 CUADRADOS MINIMOS	102
5.10 PROYECCIONES ASOCIADAS CON LOS SUBESPACIOS DE UNA MATRIZ A	118
Bibliografia	121

INTRODUCCION

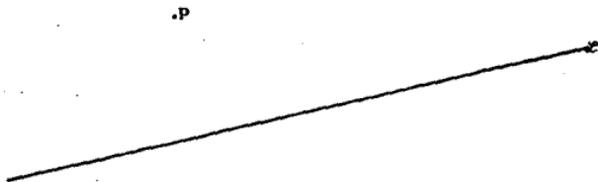
1.1 PLANTEAMIENTO GEOMETRICO Y ALGUNAS APLICACIONES .

En este trabajo abordaremos un problema más general, que el problema de cuadrados mínimos lineales. El cual esbozamos a continuación a través de los siguientes problemas.

PROBLEMA NO 1 Aquí trataremos de encontrar un punto p^* sobre una recta \mathcal{L} , tal que, la distancia a un punto dado, p , es la más pequeña de todas las distancias tomadas del punto, p a cualquier punto de la recta \mathcal{L} , esto es,

$$\|p^* - p\| = \min_{r \in \mathcal{L}} \|r - p\|$$

Un factor fundamental para obtener la solución del problema es la forma en la que está dada la recta \mathcal{L} . Gráficamente tenemos.



Siempre consideraremos que la recta \mathcal{L} está contenida en un espacio de dimensión mayor que uno

Caso 1: Consideremos que la recta está en un espacio de dimensión dos. La recta \mathcal{L} puede estar dada de dos maneras diferentes, esto es, la recta puede estar dada en forma paramétrica (forma explícita) o como una ecuación (en forma implícita).

▷ Si la recta \mathcal{L} , está dada en forma explícita, esto es, a través de su forma paramétrica, es decir, como

donde $a + tb$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Tenemos el vector que genera la recta \mathcal{L} , a saber $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, y el problema lo podemos solucionar de dos maneras diferentes:

a) Observaremos que el vector b debe ser ortogonal al vector

$$p - (a + tb)$$

Ya que, el vector p lo podemos descomponer como la suma de un vector sobre la recta \mathcal{L} más un vector que esté en el complemento ortogonal de \mathcal{L} , esto es

$$p = (a + tb) + (p - (a + tb))$$

y debe satisfacerse

$$b^t (p - a - tb) = 0$$

que es una ecuación lineal en t , cuya solución es

$$t^* = \frac{b^t (p - a)}{b^t b}$$

la cual nos ayuda a encontrar el punto $p^* = a + t^* b$, sobre \mathcal{L} , más

cercano a p.

b) El problema es encontrar el valor de t que minimice

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 + t\beta_1 \\ \alpha_2 + t\beta_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad p = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

Minimizar la expresión anterior es equivalente a minimizar

$$(\rho_1 - \alpha_1 - t\beta_1)^2 + (\rho_2 - \alpha_2 - t\beta_2)^2$$

si usamos la norma euclidiana. El valor de t que minimiza la expresión anterior lo podemos encontrar a través de solucionar la ecuación lineal que obtenemos al derivar la expresión anterior e igualar a cero, entonces

$$a + t^*b$$

es el más cercano a p.

4) Si la recta \mathcal{L} esta dada en forma implícita, esto es, a través de la ecuación general de la recta, es decir, de la forma

$$ax + \beta y + \gamma = 0 \quad x, y \in \mathbb{R}$$

la podemos escribir como

$$\langle \alpha, \beta \rangle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\gamma \quad 1.1.1$$

o bien como

$$n^t r = -\gamma \quad \text{donde } n = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ y } r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

en particular un punto $r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ sobre la recta, debe satisfacer

$$\langle \alpha, \beta \rangle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\gamma$$

por lo que la ecuación de la recta la podemos escribir como

$$n^t(r - r_0) = 0$$

asi que el vector normal n debe ser ortogonal a la recta \mathcal{L} , luego la ecuación de la recta ortogonal a \mathcal{L} , que pasa por p , podemos escribirla como

$$\hat{r} = p + n t \quad t \in \mathbb{R} \quad 1.1.2$$

en particular cuando $t=0$ se tiene $\hat{r} = p$.

La intersección de la recta (1.1.1) con la recta (1.1.2) es el punto p^* . Este punto debe ser de la forma $\hat{r} = p + nt$ y debe satisfacer (1.1) por lo que tenemos

$$n^t(p + n t) = \gamma$$

y la solución de esta ecuación es

$$t^* = \frac{\gamma - n^t p}{n^t n}$$

la cual nos ayuda a encontrar $p^* = p + n t^*$.

Caso 2: Ahora consideremos que la recta está contenida en un espacio de dimensión tres. entonces la recta \mathcal{L} , puede estar dada en dos formas diferentes; a través de la forma paramétrica (explícitamente) o a través de un sistema de ecuaciones (implícitamente).

(i) Si la ecuación de la recta está dada en forma paramétrica, es decir, de la forma

$$a + tb$$

donde

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

la podemos resolver en forma análoga al caso en que el espacio es de dimensión dos, para obtener

$$t^* = \frac{(p-a)^t b}{b^t b}$$

y encontrar $p^* = a + t^*b$.

(f) Si la ecuación de la recta está dada como un sistema de ecuaciones, esto es

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$$

o bien como

$$\begin{matrix} n_1^t r = \delta_1 \\ n_2^t r = \delta_2 \end{matrix} \quad \text{donde} \quad n_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad n_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

que representa la intersección de dos planos. Para encontrar los puntos que pertenecen a la recta debemos resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} n_1^t \\ n_2^t \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad 1.1.3$$

$$B r = d$$

el cual tiene una infinidad de soluciones, de todas ellas sólo nos interesa la solución más cercana al punto p , es decir, p^* tal que

$$\| p - p^* \| = \min_{r \in \mathcal{L}} \| p - r \|^2$$

el sistema de ecuaciones 1.1.3 también podemos escribirlo como

$$\begin{matrix} n_1^t (r - r_0) = 0 \\ n_2^t (r - r_0) = 0 \end{matrix} \quad r_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}$$

Como $(r - r_0)$ está en \mathcal{L} , entonces n_1 y n_2 son ortogonales a la recta \mathcal{L} . Por otra parte, el vector $p^* - p$ también es ortogonal a \mathcal{L} , por lo que el vector $p^* - p$ debe ser una combinación lineal de n_1 y n_2 , esto es,

$$p^* - p = t_1 n_1 + t_2 n_2$$

o bien

$$p^* = t_1 n_1 + t_2 n_2 + p$$

en forma matricial

$$p^* = [n_1 \ n_2] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} + p$$

entonces p^* debe tener la forma

$$p^* = B^t z + p \quad \text{donde} \quad z = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

y debe satisfacer (1.1.3) por lo que tenemos

$$B B^t z + B p = d$$

o bien

$$B B^t z = d - B p \quad 1.1.4$$

la solución del sistema anterior, z^* , determinará p^* y "no es difícil de encontrar teóricamente", ya que, como B tiene renglones linealmente independientes, entonces $B B^t$ es una matriz no-singular y podemos encontrar la inversa de $B B^t$ para determinar z^* que satisface (1.1.4) y la solución es única.

Caso 3: Ahora consideremos que la recta se encuentra en un espacio de dimensión m . En este caso también puede estar dada en forma explícita o en forma implícita.

i) Si la recta está en forma explícita, entonces tenemos la forma paramétrica de la recta, es decir,

$$r = a + t b \quad a, b \in \mathbb{R}^m \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

donde b es un vector de dimensión m que genera la recta. El problema lo podemos resolver en forma análoga al caso en que el espacio es de dimensión dos y se tiene una forma explícita de la recta, y así

obtenemos

$$t^* = \frac{(p-a)^t b}{b^t b}$$

para encontrar $p^* = a + t^* b$.

ii) Si la recta está dada en forma implícita, entonces estará dada como la solución de un sistema de $m-1$ ecuaciones con m incógnitas, esto es, de la forma

$$Bz = d$$

$$B_{(m-1) \times m}, r_{m \times 1}, d_{(m-1) \times 1}$$

la cual también podemos escribir como

$$B(r - r_0) = 0$$

$$d = B r_0, r_0 \in \mathcal{L}$$

donde el vector $(r - r_0)$ pertenece a \mathcal{L} , lo cual quiere decir que cada uno de los renglones de B es ortogonal a \mathcal{L} y este caso es similar a el caso 2, con la forma implícita de la recta. La solución será de la forma

$$p^* = B^t z^* + p$$

donde z^* es el vector solución del sistema de ecuaciones

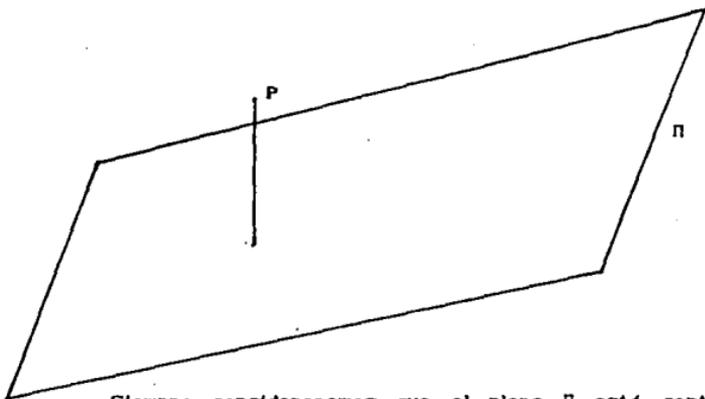
$$B B^t z = d - Bp$$

que es un sistema de $(m-1) \times (m-1)$ no singular, ya que, B tiene renglones linealmente independientes.

PROBLEMA NO. 2 Ahora trataremos de encontrar un punto p^* sobre un plano Π , tal que, la distancia a un punto dado, p , es la más pequeña de todas las distancias tomadas del punto, p , a cualquier punto del plano Π , esto es,

$$\| p^* - p \| = \min_{r \in \Pi} \| r - p \|$$

Un elemento importante para solucionar el problema es la forma en la que está dado el plano Π . Gráficamente tenemos.



Siempre consideraremos que el plano Π está contenido en un espacio de dimensión mayor que dos.

Caso 1: Consideremos que el plano está en un espacio de dimensión tres.

El plano puede estar dado de dos formas: en forma paramétrica (explícitamente) o por un ecuación (implícitamente)

i) Si el plano está dado explícitamente, esto es, a través de la ecuación paramétrica del plano, es decir como

$$\Pi = \{r \mid r = a_1 t + a_2 s + r_0; \text{ donde } t, s \in \mathbb{R}; r_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3\}$$

cualquier punto en el plano puede ser expresado de la forma anterior, en particular p^* , lo podemos escribir como

$$p^* = a_1 t^* + a_2 s^* + r_0$$

o en forma matricial

$$p^* = [a_1 \ a_2] \begin{pmatrix} t^* \\ s^* \end{pmatrix} + r_0 \quad 1.1.5$$

$$A y^* + r_0$$

Por otra parte, $p^* - p$ es un vector ortogonal al plano, entonces debe ser ortogonal a a_1 y a_2 , esto es

$$a_1^t (p^* - p) = 0$$

$$a_2^t (p^* - p) = 0$$

o bien

$$A^t (p^* - p) = 0$$

como p^* debe ser de la forma 1.1.5 tenemos

$$A^t (A y + r_0 - p) = 0$$

o bien

$$A^t A y = A^t (p - r_0) \quad 1.1.6$$

y con la solución de este sistema, y^* , encontramos $p^* = A y^* + r_0$.

la solución del sistema 1.1.6 "no es difícil de encontrar teóricamente" por que A tiene renglones linealmente independientes, entonces $A^t A$ es una matriz no-singular.

ii) Si el plano está dado implícitamente, esto es, como una ecuación de la forma

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$$

que podemos escribir como

$$(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \delta_i$$

o bien

$$n^t r = \delta_i \quad n = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en particular un punto r_0 en el plano debe satisfacer

$$n^t r_0 = \delta_i$$

entonces la ecuación del plano la podemos escribir como

$$n^t (r - r_0) = 0 \quad 1.17$$

por lo que el plano Π lo podemos expresar de la forma

$$\Pi = \{ r \mid n^t (r - r_0) = 0 \}$$

por otra parte, el vector $p^* - p$, es ortogonal al plano, entonces

$p^* - p$ debe ser paralelo a n y lo podemos escribir como

$$p^* - p = tn \quad t \in \mathbb{R}$$

de lo anterior se desprende que p^* debe tener la forma

$$p^* = tn + p$$

y como está en el plano debe satisfacerse (1.17) por lo que

$$n^t (tn + p - r_0) = 0$$

o bien

$$n^t nt = n^t (r_0 - p)$$

$$t^* = \frac{n^t (r_0 - p)}{n^t n}$$

y con la solución t^* , encontramos $p^* = p + t^* n$

Caso 2: ahora consideremos que el plano está contenido en un espacio de dimensión m , el plano puede estar dado en forma explícita o en forma implícita

i) Si el plano está dado en forma explícita, esto es, a través de su ecuación paramétrica, es decir, de la forma

$$\Pi = \langle r \mid r = a_1 t + a_2 s + r_0 \rangle; \text{ donde } a_1, a_2, r_0 \in \mathbb{R}^n, t, s \in \mathbb{R} \rangle$$

Como se puede observar este caso es análogo al caso 1.i así que y^* es la solución del sistema

$$A^t A y = A^t (p - r_0)$$

donde

$$A = [a_1 \ a_2]^t, \quad y = \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

la solución es única, y así podemos hallar $p^* = A y^* + r_0$.

ii) Si el plano está dado en forma implícita, esto es como la solución de un sistema de $m-2$ ecuaciones independientes con m incógnitas cada una, que en forma matricial tenemos como

$$\Pi : \langle r \mid B r = d \rangle \quad B_{(m-2) \times m}, \quad r_{m \times 1}, \quad d_{m \times 1}$$

como podemos ver, este caso es similar al caso 3.ii del problema no.1 así que z^* es la solución del sistema

$$B B^t z = d - B p \tag{1.18}$$

la cual determinara $p^* = B^t z^* + p$

la solución del sistema 1.18 es única, debido a que $B B^t$ es no-singular puesto que B tiene renglones linealmente independientes.

PROBLEMA NO 3. Ahora trataremos de encontrar un punto p^* sobre una variedad lineal Π , tal que la distancia a un punto p , es la más pequeña de todas las distancias tomadas del punto p , a cualquier punto de la variedad lineal Π , esto es

$$\| p^* - p \|^2 = \min_{r \in \Pi} \| r - p \|^2$$

Un elemento importante para hallar la solución del problema es la manera en que está presentada la variedad lineal Π , ya que puede estar dada en forma explícita o implícita, para tratar estos casos consideremos que la variedad lineal, de dimensión k , está contenida en un espacio de dimensión m ($m > k$).

i) Si la variedad lineal está en forma explícita es decir de la forma $\Pi = \{ r \mid r = r_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_k t_k \}$ donde $t_i \in \mathbb{R}$ $a_i \in \mathbb{R}^m$ ($i=1, \dots, k$) cualquier punto de la variedad lineal puede ser expresado en la forma anterior, en particular el punto p^* , que buscamos puede ser expresado como

$$p^* = r_0 + a_1 t_1^* + a_2 t_2^* + \dots + a_k t_k^*$$

o en forma matricial

$$p^* = [a_1 | a_2 | \dots | a_k] \begin{bmatrix} t_1^* \\ \vdots \\ t_k^* \end{bmatrix} + r_0$$

$$A y^* + r_0 \tag{1.10}$$

El vector $p^* - p$ es un vector ortogonal a la variedad lineal, entonces debe ser ortogonal a cada uno de los vectores a_i $i = 1, \dots, k$, esto es

$$A^t (p^* - p) = 0$$

que es semejante al caso 1.i del problema no. 2, entonces la y^* que determinará $p^* = A y^* + r_0$ es la solución del sistema

$$A^t A y^* = A^t (p - r_0) \tag{1.10}$$

la cual es única, ya que, como A tiene renglones linealmente independientes entonces $A^t A$ es no-singular y la solución 1.1.10 "no es difícil de encontrar teóricamente".

i) Si la variedad lineal está en forma implícita, es decir, como el conjunto de soluciones de un sistema de $(m-k)$ ecuaciones con m incógnitas, esto es,

$$\Pi = \{ r \mid Br = d \} \quad B_{(m-k) \times m} \quad r_{m \times 1} \quad d_{(m-k) \times 1}$$

el caso es análogo al caso 2.ii del problema no.2 cuya solución

$p^* = B^T z^* + p$ será determinada en forma única con la z^* que satisface

$$BB^T z = d - Bp$$

la que teóricamente no es difícil de encontrar debido, a que B tiene renglones linealmente independientes y esto hace que BB^T sea no-singular.

PROBLEMA NO. 4 El problema general que trataremos es : dado un punto p , encontrar un punto sobre una variedad lineal Π , tal que, la distancia a p es lo más pequeña posible donde la dimensión de la variedad lineal es desconocida y el espacio donde se encuentra contenida es de dimensión m .

Un factor importante para encontrar la solución del problema es la forma en como se presenta la variedad lineal: si es en forma implícita o es en forma explícita

i) Si la variedad lineal está en forma explícita, esto es,

$$\Pi = \{ r \mid r = r_0 + Ay \}$$

donde A es una matriz de m renglones y n columnas de rango desconocido. Para determinar p^* tal que

$$\| p^* - p \| = \min \| r - p \|$$

$$r \in \Pi$$

se tiene el sistema

$$A^t Ay = A^t (p - r_0)$$

cuyas soluciones y^* determinarán $p^* = Ay^* + r_0$

Hallar la solución del sistema anterior puede ser difícil debido a las complicaciones que se presentan desde el punto de vista práctico, ya que, se tiene que determinar la dimensión de la imagen de A, es decir, el rango de A .

ii) Si la variedad lineal está en forma implícita, esto es,

$$\Pi = \{ r / Br = d \}$$

donde B es una matriz de m renglones y n columnas. Para determinar p^* , tal que

$$\| p^* - p \| = \min \| r - p \|$$

$$r \in \Pi$$

se tiene el sistema

$$BB^t z = B(p - r_0)$$

cuyas soluciones z^* , determinarán $p^* = Bz^* + p$

Hallar la soluciones del sistema anterior puede ser difícil debido a las complicaciones que se presentan desde el punto de vista práctico, ya que, se tiene que determinar la dimensión del núcleo de B .

1.2 LA FACTORIZACION DE CHOLESKY .

Cuando A de $m \times n$ es de rango n , entonces $A^t A$ es positiva definida como le muestra el siguiente teorema

Teorema

Si $A_{m \times n}$ y el rango(A)= n , entonces $P=A^t A$ es positiva definida

Demostración

$$\begin{aligned}x^t P x &= X^t A^t A x = \| A x \|^2 \geq 0 \\ \text{Si } A x &= 0 \text{ se tiene que } x \in N(A) \\ \text{como } N(A) &= \{ 0 \} \text{ se deduce que } x = 0 \\ \text{Entonces si } x &\neq 0, \text{ se tiene } A x \neq 0 \\ &\text{de donde } \| A x \|^2 \neq 0 \\ \text{Por lo anterior podemos afirmar} \\ x^t P x &> 0 \quad \text{si } x \neq 0\end{aligned}$$

□

1.2.1 LA DESCOMPOSICION DE CHOLESKY

Si P es una matriz definida positiva, entonces podemos usar el método de Cholesky para resolver el sistema de ecuaciones normales que se basa en el hecho de que existe una matriz triangular inferior L tal que

$$L L^t = P \qquad P = A^t A$$

Resultado

Si P es positiva definida, entonces existe una única matriz triangular inferior L con elementos positivos en la diagonal tal que

$$P = L L^t.$$

Demostración (la demostración es por inducción).

Si P es de orden 1 y es positiva definida, entonces $\alpha_{11} > 0$ y es unicamente definida por

$$\lambda_{11} = \sqrt{\alpha_{11}}$$

Supongamos que se cumple para las matrices de orden $n - 1$.

Puesto que \tilde{P} es positiva definida, de orden n y es simétrica, podemos particionarla en la forma

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & a \\ a^t & \lambda \end{pmatrix}$$

donde P es definida positiva. Por hipótesis de inducción existe una única matriz, L , triangular inferior con elementos positivos de la diagonal que satisface

$$LL^t = P$$

Ahora buscamos una matriz, L , triangular inferior que satisfaga

$$\tilde{L}\tilde{L}^t = \tilde{P}$$

donde \tilde{L} será particionada en la forma

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ \ell^t & \alpha \end{pmatrix}$$

de donde observamos que

$$P = LL^t \quad (\text{Hipótesis de inducción})$$

$$a = L\ell$$

$$a^t = \ell^t L^t$$

$$\lambda = \ell^t \ell + \alpha^2$$

donde L es una matriz triangular inferior con elementos positivos en la diagonal, por lo tanto no singular, luego el vector ℓ lo podemos construir como

$$\ell = L^{-1}a$$

el cual es único, dado que L y a son únicos. Finalmente λ la podemos obtener como

$$\lambda = (\alpha - \ell^t \ell)^{1/2}$$

si $\alpha - \ell^t \ell > 0$

□

Para mostrar que efectivamente $\alpha - \ell^t \ell > 0$, usaremos la no-singularidad de L debido a que P es positiva definida.

Sea $b = P^{-1}a$, entonces debido a que p es definida positiva

$$0 < (b^t, -1) \begin{pmatrix} P & a \\ a^t & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= b^t P b - 2b^t a + \lambda$$

$$= \lambda - b^t a$$

$$= \lambda - a^t P^{-1} a$$

$$= \lambda - a^t (LL^t)^{-1} a$$

$$= \lambda - (L^{-1}a)^t (L^{-1}a)$$

$$= \lambda - \ell^t \ell$$

□

Esta demostración nos permite construir la matriz de descomposición de Cholesky, usando recursividad ya que si P_k es la submatriz principal de orden k en el paso K -ésimo de la descomposición de Cholesky de la matriz $P = A^t A$, entonces a P_k la podemos expresar como

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{k-1} & a_k \\ a_k^t & \lambda_{kk} \end{bmatrix}$$

donde P_{k-1} es la submatriz principal de orden $(k-1)$.

se sigue de la demostración anterior que

$$L_k = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ \zeta_k^t & \alpha_{kk} \end{bmatrix}$$

Donde L_{k-1} se construyó en el paso $k-1$

y los otros componentes de L podemos obtenerlos como sigue

$$\zeta_k = L_{k-1}^{-1} a_k$$

$$\alpha_{kk} = \sqrt{\lambda_{kk} - \zeta_k^t \zeta_k}$$

lo cual podemos apreciar mejor en el siguiente ejemplo

Consideremos a la siguiente matriz P de orden 4

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 25 & 32 & 30 \\ 2 & 32 & 77 & 92 \\ 10 & 30 & 92 & 140 \end{bmatrix}$$

En el paso $K = 1$ la matriz a descomponer es de orden 1 $P_1 = (4)$, por lo que no hay que resolver un sistema de ecuaciones y se obtiene un elemento de la matriz triangular que esta dado por

$$L_{11} = \alpha_{11} = 2$$

En el paso $K = 2$ la matriz a descomponer es de orden 2

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4 & \sigma \\ \sigma & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & a_1 \\ a_1 & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad P_1 = L_1 L_1^t$$

hay que resolver $L_1^t \ell_1 = a_1$ y encontrar α_{22} y obtenemos

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

En el paso $k = 3$ la matriz a descomponer es de orden 3

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4 & \sigma & 8 \\ \sigma & 25 & 32 \\ 8 & 32 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & a_2 \\ a_2^t & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

hay que resolver $L_2 \cdot \ell_2 = a_2$ y encontrar α_{33} y obtenemos

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & \sigma \end{bmatrix}$$

En el paso $K = 4$ la matriz a descomponer es de orden 4

$$P_4 = \begin{bmatrix} 4 & \sigma & 8 & 10 \\ \sigma & 25 & 32 & 30 \\ 8 & 32 & 77 & 92 \\ 10 & 30 & 92 & 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 & a_3 \\ a_3^t & \lambda_{44} \end{bmatrix}$$

hay que resolver el sistema de ecuaciones $Lz = \ell_4 = a_4$ y encontrar α_{44} y obtenemos

$$L_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

con lo que concluimos el proceso, obteniendo una matriz L triangular inferior con elementos positivos en la diagonal que satisface

$$LL^t = P$$

1.2.2 ALGORITMO PARA EL METODO DE CHOLESKY

En la construcción del algoritmo, para calcular la descomposición de Cholesky, de una matriz definida positiva P , dado que P es simétrica, es suficiente trabajar con la parte triangular inferior de la matriz. Y como se puede observar en el ejemplo, para calcular ℓ_k no es necesario construir L_{k-1}^{-1} , basta resolver el sistema de ecuaciones

$$L_{k-1} \ell_k = a_{k-1}$$

que es un sistema triangular.

Sea P definida positiva de orden n , el siguiente algoritmo regresa la matriz de la descomposición de Cholesky de $P = [\lambda_{kl}]$ en

una matriz triangular inferior $A = [\alpha_{ki}]$

Para $K = 1, \dots, n$

1) Encuentra L_k^i resolviendo

$$L_{k-1}^i L_k^i = a_{k-1}^i$$

Para $i = 2, \dots, K-1$

$$1) \alpha_{ki} = \left[\alpha_{ii} \right]^{-1/2} \left[\lambda_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji} \alpha_{kj} \right]$$

2) Encuentra el k -ésimo elemento de la diagonal

$$\alpha_{kk} = \sqrt{\lambda_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki}^2}$$

□

1.3 SOLUCION CLASICA AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES EN EL CASO EXPLICITO CON RANGO MAXIMO

El problema que tratamos de resolver: consiste en encontrar $p^* \in \Pi$ tal que

$$\| p^* - p \| = \min_{r \in \Pi} \| r - p \|^2$$

cuando

$$\Pi = \{ r \mid r = r_0 + Ay \}$$

para encontrar p^* , se tiene que resolver el sistema

$$A^t Ay = A^t (p - r_0)$$

cuyas soluciones determinarán $p^* = Ay^* + r_0$.

El algoritmo para encontrar y^* usando la descomposición de Cholesky es el siguiente :

- 1) Formar $P = A^t A$
- 2) Usando la descomposición de Cholesky calcular L tal que $L^t L = P$
- 3) Calcular $d = A^t(p - r_0)$
- 4) Encontrar z tal que $L^t z = d$
- 5) Solucionar $Ly^* = z$
- 6) Determinar $p^* = Ay^* + r_0$

Cuando resolvemos el sistema de ecuaciones normales usando el método de Cholesky pueden surgir problemas cuando A es mal condicionada, dado que, al calcular $A^t A$ se pierde estabilidad numérica, por lo que es recomendable calcular $A^t A$ en doble precisión para obtener una estabilidad numérica aceptable y que la solución del sistema de ecuaciones normales sea lo más aproximada posible a la solución real.

1.4 SOLUCION CLASICA AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES EN EL CASO IMPLICITO CON RANGO MAXIMO

El problema que tratamos de resolver consiste en encontrar $p^* \in \Pi$ tal que

$$\| p^* - p \|^2 = \min_{r \in \Pi} \| r - p \|^2$$

cuando

$$\Pi = \{ r \mid Br = d \}$$

para encontrar p^* se tiene que resolver

$$BB^t z = d - Bp$$

cuyas soluciones determinarán $p^* = Bz^* + p$.

El algoritmo para encontrar z^* usando la descomposición de Cholesky es

el siguiente :

- 1) Formar $P = BB^t$
- 2) Usando la descomposición de Cholesky calcular L tal que $L^t L = P$
- 3) Calcular $c = d - Bp$
- 4) Encontrar z tal que $L^t y = c$
- 5) Solucionar $Lz^* = y$
- 6) Determinar $p^* = B^t z^* + p$

Quando resolvemos el sistema de ecuaciones normales usando el método de Cholesky pueden surgir problemas cuando B es mal condicionada, dado que, al calcular BB^t se pierde estabilidad numérica, por lo que es recomendable calcular BB^t en doble precisión para obtener una estabilidad numérica aceptable y que la solución del sistema de ecuaciones normales sea lo más aproximada posible a la solución real.

CAPITULO II

ASPECTOS CLASICOS DEL PROBLEMA DE

CUADRADOS MINIMOS LINEALES

(Factorización QR)

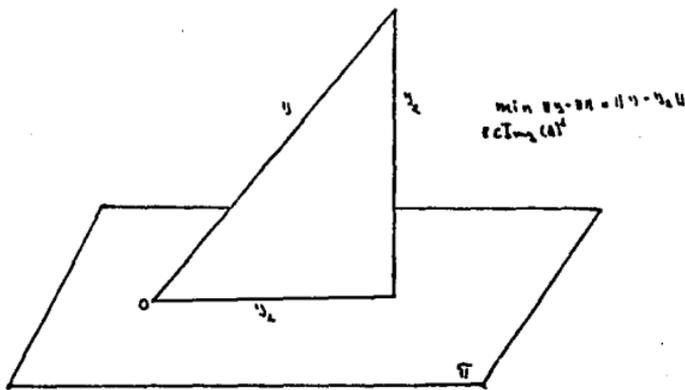
2.1 INTRODUCCION

En este capítulo veremos como obtener la solución del problema de cuadrados mínimos, cuando la variedad lineal es un subespacio Π . Consideraremos primero el caso en que Π es la imagen de una matriz A , es decir, cuando Π está dada en forma explícita y al final veremos el caso cuando Π está definido como el núcleo de una matriz A , es decir cuando Π está dada en forma implícita. Así mismo sólo consideraremos el caso cuando A tiene rango máximo, es decir, $\text{rango}(A) = \min \{m, n\}$

2.2 ENFOQUE GEOMETRICO DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES

El problema de cuadrados mínimos lineales se puede abordar a partir de la interpretación geométrica

$$\min_{z \in \text{Im}(A)} \|y - z\| = \|y - y_1\|$$



$$\Pi = \{z \mid z = Ax\} = \text{Im}(A)$$

Observe que si descomponemos y como

$$y = y_1 + y_2$$

donde y_1 y y_2 son ortogonales, entonces

$$Ax^* = y_1$$

y además

$$y - Ax^* = y_2$$

y_1 es la proyección ortogonal de y sobre la imagen de A . La proyección ortogonal es fácil de calcular cuando tenemos una base ortogonal del subespacio sobre el cual se calcula la proyección. En efecto, esto nos lo dice el siguiente resultado.

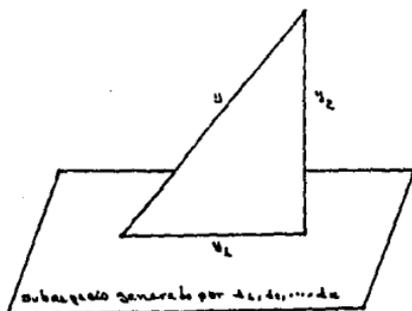
2.3 TEOREMA DE LA PROYECCION

Sea $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proyección ortogonal sobre el subespacio $\Pi \subset \mathbb{R}^m$ si $\{o_1, o_2, \dots, o_k\}$ es una base ortogonal de Π , entonces

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

donde P_1, P_2, \dots, P_k son las proyecciones ortogonales de \mathbb{R}^m sobre el subespacio generado por los vectores $\{o_1, o_2, o_3, \dots, o_k\}$

Demostración



sea y la proyección ortogonal de y sobre Π

consideremos la matriz

$$A = [o_1 | \dots | o_k]$$

cuyas columnas están definidas por o_1, \dots, o_k , entonces el vector y_1 lo podemos escribir como

$$Ax = y_1$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

es decir, como una combinación lineal de o_1, \dots, o_k y además

$$y_2 = y - y_1 = y - Ax$$

y como y_1 es la proyección sobre o_1, \dots, o_k y y_2 está en el espacio

ortogonal a ϕ_1, \dots, ϕ_k se tiene que

$$A^t y_2 = 0$$

o bien

$$A^t (y - Ax) = 0$$

esto es

$$A^t y = A^t Ax$$

como las columnas de A son ϕ_1, \dots, ϕ_k un conjunto de vectores ortogonales se satisface que $\phi_i^t \cdot \phi_j = 0$ si $i \neq j$, entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} \phi_1^t y \\ \vdots \\ \phi_k^t y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^t \\ \vdots \\ \phi_k^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \dots \phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1^t y \\ \vdots \\ \phi_k^t y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^t \phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_k^t \phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

ya que

$$\phi_i^t \cdot \phi_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

luego para encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tales que nos determinen la combinación lineal de ϕ_1, \dots, ϕ_k para encontrar y_1 podemos multiplicar por la inversa de $A^t A$, que es una matriz diagonal, esto es

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 / \phi_1^t \phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 / \phi_k^t \phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^t y \\ \vdots \\ \phi_k^t y \end{bmatrix}$$

Ya que encontramos los coeficientes de la combinación lineal para encontrar la proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por ϕ_1, \dots, ϕ_k , entonces podemos determinar y_1 como sigue

$$y_i = Ax = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

o bien

$$y_i = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 / \alpha_1^t \alpha_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & 1 / \alpha_k^t \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^t y \\ \vdots \\ \alpha_k^t y \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos

$$y_i = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^t \alpha_1} & \dots & \frac{\alpha_k}{\alpha_k^t \alpha_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^t y \\ \vdots \\ \alpha_k^t y \end{bmatrix}$$

$$y_i = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_1^t \alpha_1} \left(\alpha_1^t y \right) + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_k^t \alpha_k} \left(\alpha_k^t y \right) \right]$$

reacomodando en forma diferente los términos tenemos

$$y_i = \left[\frac{\alpha_1 \alpha_1^t}{\alpha_1^t \alpha_1} y + \dots + \frac{\alpha_k \alpha_k^t}{\alpha_k^t \alpha_k} y \right]$$

factorizando y en la expresión anterior tenemos

$$y_i = \left[\frac{\phi_i^t \phi_i^t}{\phi_i^t \phi_i^t} + \dots + \frac{\phi_k^t \phi_k^t}{\phi_k^t \phi_k^t} \right] y$$

por lo que, la proyección de un vector sobre el espacio generado por los vectores ϕ_1, \dots, ϕ_k la podemos expresar como

$$P_{(A)} = \frac{\phi_1^t \phi_1^t}{\phi_1^t \phi_1^t} + \dots + \frac{\phi_k^t \phi_k^t}{\phi_k^t \phi_k^t}$$

es decir, la proyección sobre el espacio generado por ϕ_1, \dots, ϕ_k la podemos calcular como la suma de las proyecciones sobre P_i

$$P_i = \frac{\phi_i^t \phi_i^t}{\phi_i^t \phi_i^t}$$

En la sección siguiente consideraremos el caso cuando las columnas de A no son ortogonales, en este caso el procedimiento usual consiste en construir una base ortogonal de la imagen de A usando las columnas de A

2.4 EL METODO DE GRAM-SCHMIDT

Hemos visto que una forma de resolver el problema

$$\min \|Ax - Y\|$$

es mediante la proyección ortogonal del vector y sobre el espacio generado por las columnas de A . El método clásico para pasar de una matriz $A = [a_1 | a_2 | \dots | a_k]$ con columnas linealmente independientes a una matriz $Q = [q_1 | \dots | q_k]$ con columnas ortogonales, tal que, el espacio generado por q_1, \dots, q_k es el mismo espacio generado por a_1, \dots, a_k es el método de Gram-Schmidt.

Este método nos dice que dada $A = [a_1 | \dots | a_k]$ con columnas linealmente independientes para construir $Q = [q_1 | \dots | q_k]$, tal que que $q_i \perp q_j \quad \forall i \neq j$ debemos tomar

$$1) \quad q_1 = a_1$$

- 2) Para $i = 2, \dots, k$
 Calcular \hat{a}_i la proyección ortogonal de a_i sobre el espacio generado por q_1, \dots, q_{i-1}

(Que podemos calcular usando el teorema de la proyección)

luego $a_i - \hat{a}_i \perp a$ donde a es cualquier elemento generado por q_1, \dots, q_{i-1}

- 3) Finalmente calcular $q_i = a_i - \hat{a}_i$

Todo este procedimiento podemos expresarlo de la siguiente manera.

$$q_1 = a_1$$

$$q_2 = a_2 - \xi_{12} q_1$$

$$q_3 = a_3 - \xi_{13} q_1 - \xi_{23} q_2$$

⋮

$$q_k = a_k - \xi_{1k} q_1 - \xi_{2k} q_2 - \dots - \xi_{k-1,k} q_{k-1}$$

Donde ζ_{ij} denota la proyección ortogonal del vector a_j sobre el espacio generado por el vector q_i , es decir

$$\zeta_{ij} = \frac{q_i^t q_j}{q_i^t q_i} a_j$$

este sistema de ecuaciones podemos reescribirlo como

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \\ a_2 &= q_2 + \zeta_{12} q_1 \\ &\vdots \\ a_k &= q_k + \zeta_{1k} q_1 + \dots + \zeta_{k-1,k} q_{k-1} \end{aligned}$$

que podemos expresarlo matricialmente como

$$\begin{bmatrix} a_1 & | & \dots & | & a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \dots & \zeta_{1,k-1} & \zeta_{1k} \\ 0 & 1 & \zeta_{23} & \dots & \zeta_{2,k-1} & \zeta_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \zeta_{k-2,k-1} & \zeta_{k-2,k} \\ \vdots & & & & 1 & \zeta_{k-1,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde podemos observar que estas bases están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A &= QR & A &= \begin{bmatrix} a_1 & | & \dots & | & a_k \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} q_1 & | & \dots & | & q_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde R es una matriz triangular superior con 1's en al diagonal,

la cual establece el cambio de coordenadas de la base definida por las columnas de Q a la base definida por las columnas de A .

2.5 EL METODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO

Una forma alternativa de realizar el proceso de Gram-Schmidt es construir en cada paso subespacios ortogonales de la imagen de A , esto es crear

$$s_i = [q_1, \dots, q_i] \quad \& \quad s_i^\perp = [a_{i+1}^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}]$$

tales que la $\text{Im}(A) = s_i \oplus s_i^\perp$

(Ahora veremos a través de inducción como realizar este procedimiento)

Para realizar este procedimiento como primer paso tomamos

$$s = [q_1] \quad \& \quad s^\perp = [a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_k^{(1)}]$$

donde $q_1 = a_1$ & $a_\ell = a_\ell^{(1)} - P_1(a_\ell) \quad \ell=2, \dots, k$

y P_1 denota la proyección sobre q_1 .

Si tenemos $s_i = [q_1, \dots, q_i] \quad \& \quad s_i^\perp = [a_{i+1}^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}]$, entonces podemos construir

$$s_{i+1} = [q_1, \dots, q_{i+1}] \quad \& \quad s_{i+1}^\perp = [a_{i+2}^{(i+1)}, \dots, a_k^{(i+1)}]$$

tomando $q_{i+1} = a_{i+1}^{(i)} \quad \& \quad a_\ell = a_\ell^{(i+1)} = a_\ell^{(i)} - P_{i+1}(a_\ell^{(i)}) \quad \ell = i+2, \dots, k$

y P_{i+1} denota la proyección sobre q_{i+1} .

a esta forma de obtener Q se conoce como el procedimiento de Gram-Schmidt modificado

2.6 SOLUCION AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES CUANDO LA VARIEDAD LINEAL ESTA DADA EN FORMA EXPLICITA ($\Pi = \text{Im}(A)$)

La descomposición de una matriz como el producto de una matriz con columnas ortogonales y una matriz triangular superior se le conoce como la descomposición QR, por lo que, utilizando el método de Gram-Schmidt o el método de Gram-Schmidt modificado podemos hallar la descomposición QR de una matriz A.

Ahora bien, usando la factorización QR podemos obtener la solución del problema de cuadrados mínimos como sigue, ya que el problema es encontrar x^n tal que

$$\min_x \|y - Ax\| = \min_x \|y - QRx\|$$

entonces $y - QRx$ debe ser ortogonal al espacio generado por las columnas de Q, por lo que debe suceder

$$Q^t(y - QRx) = 0$$

de donde obtenemos

$$Q^t y = Q^t QRx$$

como Q tiene columnas ortogonales $Q^t Q = D$ y entonces x^n es el que satisface

$$Rx = D^{-1} Q^t y$$

este es un sistema muy fácil de resolver porque R es triangular superior. Entonces

$$x = R^{-1} D^{-1} Q^t y$$

luego

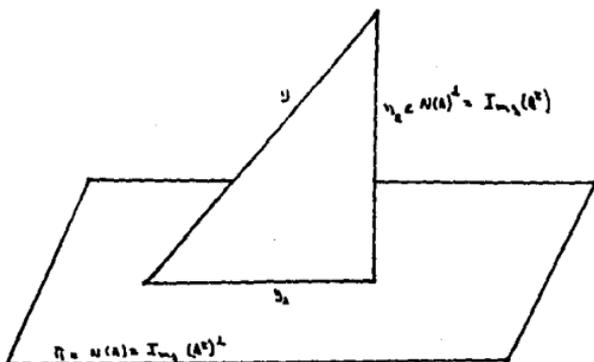
$$y_1 = Ax = QR(R^{-1} D^{-1} Q^t) y$$

simplificando

$$y_1 = Q D^{-1} Q^t y$$

esta expresión es sólo para presentar de manera simple el resultado

2.7 SOLUCION DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS LINEALES CUANDO LA VARIEDAD LINEAL ESTA DADA EN FORMA IMPLICITA ($\Pi = N(A)$).



Ahora estamos interesados en encontrar una $y_1 \in N(A)$ tal que

$$\|y - y_1\|$$

sea lo más pequeña posible. Este problema es fácil de resolver formalmente observando que

$$N(A) = \text{Im}(A^t)^{\perp}$$

ya que, si $x \in N(A)$, se satisface

$$Ax = 0$$

que es lo mismo que

$$x^t A^t = 0$$

entonces tenemos

$$x^t A^t z = 0$$

lo que implica

$$x^t (A^t z) = 0$$

por lo que

$$x \perp \text{Im}(A^t)$$

esto es

$$x \in \text{Im}(A^t)^\perp$$

esto es, x está en el espacio ortogonal a la imagen de A^t

Por consiguiente, en este caso nos conviene calcular y_2 , ya que, y_2 se encuentra en la imagen de A^t , como $N(A^t) = 0$ podemos aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt o el procedimiento de Gram-Schmidt modificado a A^t para obtener

$$A^t = \tilde{Q} \tilde{R}$$

como el espacio generado por las columnas de A^t es igual al espacio generado por las columnas de \tilde{Q} , el vector $y - A^t z^*$ debe ser ortogonal a cada uno de las columnas de \tilde{Q} , entonces se tiene

$$\tilde{Q}^t (y - A^t z^*) = 0$$

o bien

$$\tilde{Q}^t (y - \tilde{Q} \tilde{R} z^*) = 0$$

de donde obtenemos

$$\tilde{R} z^* = D^{-1} \tilde{Q}^t y$$

donde $D = \tilde{Q} \tilde{Q}^t$

y así encontramos

$$z^* = \tilde{R}^{-1} D^{-1} \tilde{Q}^t y$$

luego

$$\begin{aligned} y_2 &= A^t z^* = \tilde{Q} \tilde{R} \tilde{R}^{-1} D^{-1} \tilde{Q}^t y \\ &= \tilde{Q} D^{-1} \tilde{Q}^t y \end{aligned}$$

entonces el vector que buscamos es

$$\begin{aligned} y_1 &= y - y_2 = y - \tilde{Q} D^{-1} \tilde{Q}^t y \\ &= (I - \tilde{Q} D^{-1} \tilde{Q}^t) y \end{aligned}$$

las expresiones anteriores sólo son para presentar los resultados en forma sencilla. En la práctica no se calculan.

CAPITULO III

CARACTERIZACION GEOMETRICA

DE LA SOLUCION

3.1 INTRODUCCION

Hemos visto que el problema de encontrar el punto y^* más cercano a y , sobre un subespacio ϕ es equivalente a encontrar la proyección ortogonal del vector y sobre ϕ .

En la practica ϕ puede estar dado en forma explicita o implicita es decir,

$$(i) \quad \phi = \{ s / s = Ax ; x \in \mathbb{R}^n \} = \text{Img}(A)$$

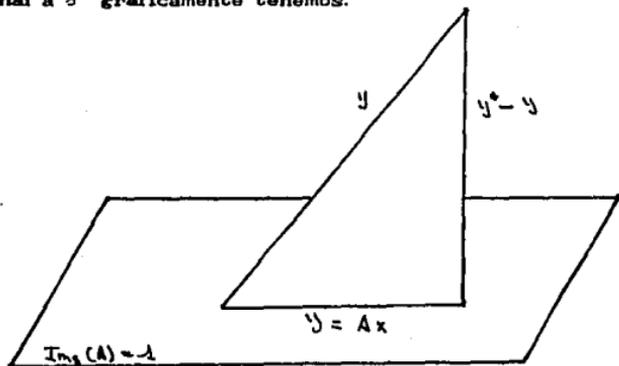
$$(ii) \quad \phi = \text{Img}(A)^\perp$$

$$(iii) \quad \phi = N(A)$$

$$(iv) \quad \phi = N(A)^\perp$$

3.2 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL SOBRE LA IMAGEN DE A Y SOBRE EL ESPACIO ORTOGONAL DE LA IMAGEN DE A CUANDO $N(A)^\perp = \{0\}$

Primero trataremos el caso cuando $\phi = \text{Img}(A)$. En este caso hemos visto que el punto más cercano, $y^* = Ax^*$, a y es tal que, $y^* - y$, es ortogonal a ϕ graficamente tenemos.



De aquí, se tiene que debe satisfacerse

$$A^T(y^* - y) = A^T(Ax^* - y) = 0$$

que son las ecuaciones normales, las cuales podemos reescribir como

$$A^t A x^* = A^t y \quad 3.2.1$$

Por otra parte, sabemos $N(A) = \{0\}$, entonces $A^t A > 0$, por lo que la x^* que satisface 3.2.1 podemos calcularla como

$$x^* = (A^t A)^{-1} A^t y$$

entonces el punto y^* esta dado como

$$y^* = A x^* = A (A^t A)^{-1} A^t y$$

de donde deducimos que

$$P_{\text{Im}(A)} = A (A^t A)^{-1} A^t$$

Esta expresión no es práctica, nos conviene más expresar $P_{\text{Im}(A)}$ en función de la factorización QR de A, esto es, si $A = QR$ donde $Q^t Q = I$ entonces

$$(A^t A) = (QR)^t QR = R^t Q^t Q R = R^t R$$

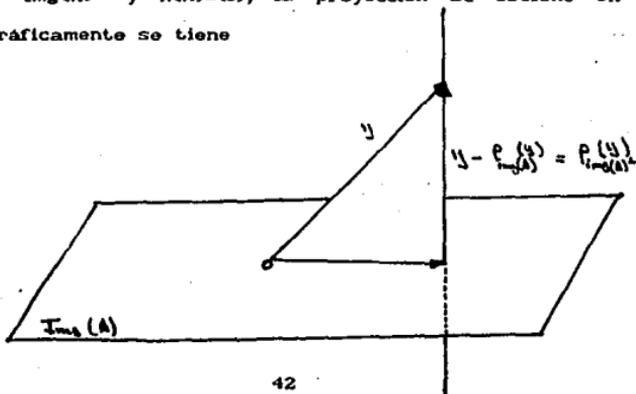
por lo que

$$(A^t A)^{-1} = R^{-t} R^{-1}$$

luego la proyección sobre la imagen de A usando los factores QR de A está dada como

$$\begin{aligned} P_{\text{Im}(A)} &= QR(R^{-t} R^{-1}) R^t Q^t \\ &= Q Q^t \end{aligned}$$

cuando $\circ = \text{Im}(A)^\perp$ y $N(A) = \{0\}$, la proyección se obtiene en forma inmediata. Gráficamente se tiene

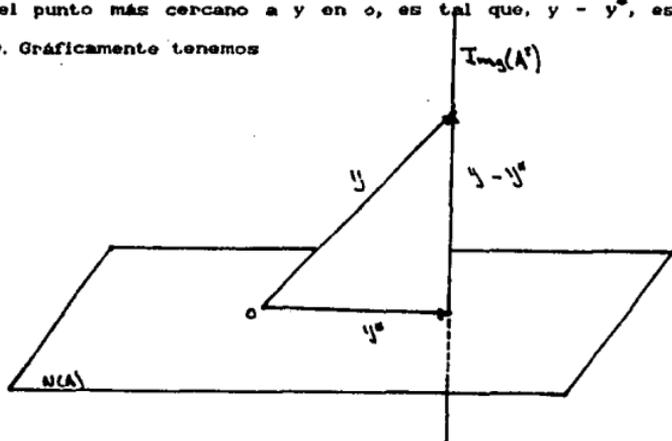


esto es

$$P_{\text{Im}(A)^\perp} = I - P_{\text{Im}(A)} = I - Q^T Q$$

3.3 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL CUANDO $\phi = N(A)$ o $\phi = N(A)^\perp$ Y $N(A)^\perp = \{0\}$

Primero trataremos el caso cuando $\phi = N(A)$. En este caso tenemos que y^* el punto más cercano a y en ϕ , es tal que, $y - y^*$, es ortogonal $N(A)$. Gráficamente tenemos



Como $\phi = N(A)$, entonces $y - y^* \in N(A)^\perp$, pero sabemos $N(A)^\perp = \text{Im}(A^T)$ entonces tenemos

$$y - y^* = A^T z^*$$

luego el punto y^* que buscamos está dado como

$$y^* = y - A^T z^*$$

como $y^* \in N(A)$ debe satisfacer

$$A y^* = 0$$

o bien

$$A(y - A^T z^*) = 0$$

esto es

$$AA^t z^* = A^t y$$

3.3.1

debido a que $N(A^t) = \{0\}$ se tiene $AA^t > 0$ por lo que z^* que satisface 3.3.1 está dada como

$$z^* = (AA^t)^{-1} A^t y$$

luego el vector que buscamos es

$$\begin{aligned} y^* &= y - A^t z^* \\ &= y - A^t (AA^t)^{-1} A^t y \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} y^* &= y - P_{\text{Im}(A^t)}(y) \\ &= (I - P_{\text{Im}(A^t)})(y) \\ &= P_{\text{Im}(A^t)^\perp}(y) \end{aligned}$$

Para obtener una expresión más práctica para la $P_{\text{Im}(A^t)}$ calculemos la factorización QR de A^t la cual denotaremos como

$$A^t = QR$$

entonces

$$P_{\text{Im}(A^t)} = Q^t Q$$

y

$$P_{\text{Im}(A^t)^\perp} = I - Q^t Q$$

3.4 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL SOBRE UNA VARIEDAD LINEAL EN GENERAL.

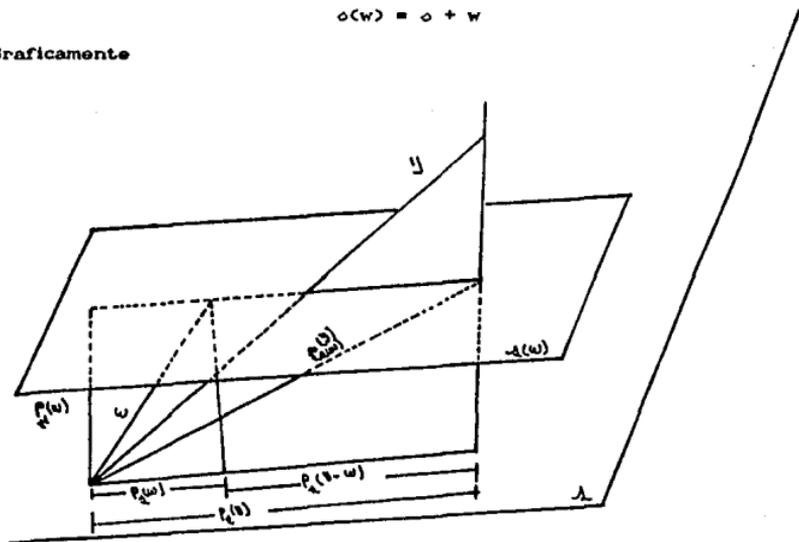
Supongamos que tenemos una variedad lineal $\sigma(w)$ paralela a σ , es decir,

$$\sigma(w) = \{ s / s = s + w ; s \in \sigma \}$$

o bien

$$\sigma(w) = \sigma + w$$

Graficamente



sea $P_{\sigma(w)}$ la proyección ortogonal sobre la variedad lineal $\sigma(w)$, como podemos observar en la figura, se tiene

$$\sigma(w) \perp \perp = \sigma \perp$$

y por consiguiente

$$P_{\sigma(w) \perp} = P_{\sigma \perp}$$

también podemos observar que en la figura se tiene

$$P_{\sigma(w) \perp}(y) = P_{\sigma}(y) + P_{\sigma \perp}(w)$$

que podemos reescribir como

$$P_{\phi(v)}(y) = w + P_{\phi}(y - w)$$

la cual no es difícil de calcular, como hemos visto en los siguientes casos

i) $\phi = \text{Im}(A)$ & $N(A) = 0$ usando la factorización QR de A
tenemos $P_{\phi} = Q^t Q$

ii) $\phi = \text{Im}(A)^{\perp}$ & $N(A) = 0$ usando la factorización QR de A
tenemos $P_{\phi} = I - Q^t Q$

iii) $\phi = N(A)$ & $N(A^t) = 0$ usando la factorización $A^t = Q R$

$$P_{\phi} = P_{\text{Im}(A^t)^{\perp}} = I - Q^t Q$$

$$\text{ya que, } P_{\text{Im}(A^t)} = Q^t Q$$

iv) $\phi = N(A)^{\perp}$ & $N(A^t) = 0$ usando la factorización $A^t = Q R$

$$P_{\phi} = P_{\text{Im}(A^t)} = Q^t Q$$

3.5 CALCULO DE LA PROYECCION ORTOGONAL CUANDO $\phi = \text{Im}(A)$, $N(A) \neq 0$, ESTO ES, CUANDO A NO ES UNA MATRIZ DE RANGO COMPLETO

En el caso que el subespacio ϕ este generado por una matriz A, con columnas dependientes, tenemos el problema de que $A^t A$ no es positiva definida y por lo tanto la factorización QR como tal no nos sirve, por que R sería singular. Desde de un punto de vista técnico el problema tiene fácil solución, ya que, si A es de rango k es posible reordenar las columnas de A de tal forma que las columnas de AP, tenga las primeras k columnas independientes, entonces al aplicar la factorización QR de AP obtendremos

$$AP = QR = Q \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde R_{11} es de $k \times k$ triangular no-singular y entonces.

$$A = Q \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^t$$

para que esta descomposición sea útil sería conveniente que R_{12} fuera cero, esto se puede lograr si elegimos \hat{Q} ortogonal tal que

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces tendríamos que

$$A = Q \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Q}^t P^t$$

o bien

$$A = Q \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^t P^t$$

esto es

$$A = Q \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K^t$$

donde $K = P \hat{Q}$.

Con esta descomposición obtendremos que

$$A^t A = K \begin{bmatrix} \hat{R}_{11}^t \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K^t$$

por lo que el sistema

$$A^t A x = A^t y$$

se convertirá en

$$K \begin{bmatrix} \hat{R}_{11}^t \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K^t x = A^t y$$

o bien en

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_{11}^t \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = K^t A^t y = \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^t y$$

donde $x = K^t x$

Si hacemos $Q^t y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ & $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ entonces el sistema se simplifica

en

$$\hat{R}_{11}^t \hat{R}_{11} x_1 = \hat{R}_{11}^t c_1$$

el cual podemos simplificar aún más multiplicando a la izquierda por

$$R_{11}^{-1}$$

$$K_{11} x_1 = c_1$$

x_2 arbitrario

si elegimos $x_2 = 0$, como

$$x = K^t x$$

se tiene

$$x = K x$$

por lo que

$$y^w = Ax = Q \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K^t K x$$

esto es

$$\begin{aligned} y^w = Ax &= Q \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = Q \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} R_{11} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si hacemos $Q = [Q_1 | Q_2]$ entonces es fácil verificar $c_1 = Q_1^t y$ con lo cual tenemos

$$y^w = Q_1 Q_1^t y$$

y por lo tanto

$$P_{\text{Im}(A)} = Q_1 Q_1^t$$

se puede hacer un desarrollo similar en los otros casos, sin embargo, no lo haremos, ya que, el problema principal es determinar el rango de A . Por lo cual consideraremos primero el problema de construir descomposiciones de A que revelen el rango de A , en el siguiente capítulo.

CAPITULO IV
UN PUNTO DE VISTA MODERNO
PARA EL PROBLEMA DE
CUADRADOS MINIMOS LINEALES

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo describiremos procedimientos de como alcanzar una forma triangular a través de una secuencia de matrices ortogonales. Los enfoques que describiremos son frecuentemente aplicados a problemas de cuadrados mínimos lineales, pero también son útiles para resolver sistemas compatibles de rango desconocido. Una técnica popular para la construcción de matrices ortogonales que reducen una matriz A a una forma triangular, involucra una clase especial de matrices que son simultáneamente: simétricas, ortogonales y elementales, estas matrices están definidas por

i) Reflexiones de Householder

ii) Rotaciones de Givens

las cuales tienen excelente estabilidad numérica, puesto que para obtener un resultado razonablemente aceptable basta con usar simple precisión.

4.2 REFLEXIONES

4.2.1 CARACTERIZACION DE LAS REFLEXIONES

La reflexión de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio \mathcal{L} podemos expresarla como

$$R_{\mathcal{L}}(x) = P_{\mathcal{L}}(x) - P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

efectivamente, si $\mathbb{R}^n = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}$, entonces cada $x \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse como

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{con } x_1 \in \mathcal{L} \text{ y } x_2 \in \mathcal{L}^{\perp}$$

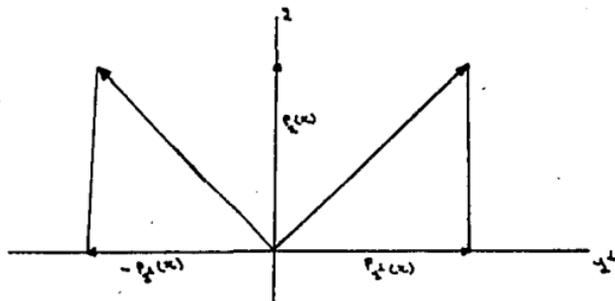
Por lo que

$$x = P_{\mathcal{L}}(x) + P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

luego, la reflexión de x a través de \mathcal{L} lo único que hace es cambiar $P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$ por $-P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$, de donde obtenemos

$$R_{\mathcal{L}}(x) = P_{\mathcal{L}}(x) - P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

Esto podemos verlo gráficamente como sigue



Por otra parte algebraicamente se tiene

$$R_{\mathcal{L}}(x) = P_{\mathcal{L}}(x) - P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

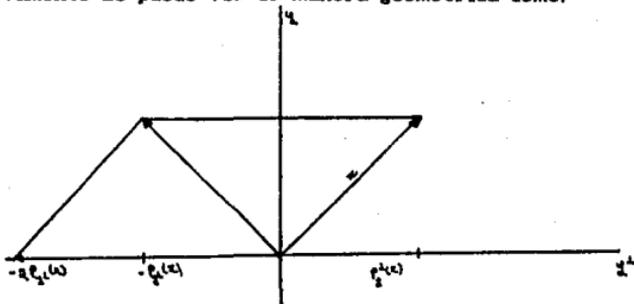
o bien

$$R_{\mathcal{L}}(x) = x - P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x) - P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

$$= x - 2P_{\mathcal{L}^{\perp}}(x)$$

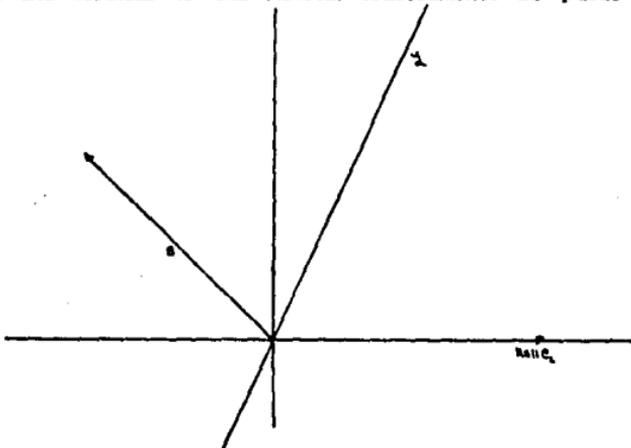
$$= (I - 2P_{\mathcal{L}^{\perp}})(x)$$

lo cual nuevamente se puede ver de manera geométrica como:



Cuando la dimensión de \mathcal{L} es 1 o la del subespacio ortogonal de \mathcal{L} es 1 decimos que es una reflexión ortogonal simple.

Ahora bien, si podemos encontrar un subespacio \mathcal{L} o \mathcal{L}^\perp de dimensión uno, tal que, al reflejar un vector s , sobre dicho subespacio, dé como resultado un vector que se encuentre sobre el primer eje coordenado. Entonces podemos usar las reflexiones elementales para introducir ceros en una columna de una matriz. Gráficamente se puede ver como sigue



Para resolver este problema Householder propuso la construcción de un vector u dado el vector s , que genere a \mathcal{L}^\perp como sigue

$$u = s + \alpha \|s\| e_1, \quad \text{donde } \alpha = \text{signo}(s_1)$$

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^t$$

Como ya habíamos visto, una reflexión elemental podemos expresarla como

$$R_{\mathcal{L}}(s) = \left[I - 2P_{\mathcal{L}^\perp} \right] (s)$$

donde

$$P_{\mathcal{L}^\perp} = I - \frac{uu^t}{u^t u} \quad \text{ya que } \mathcal{L}^\perp \text{ es el espacio generado por } u$$

De donde obtenemos la siguiente expresión en forma matricial para la reflexión a través de \mathcal{L}

$$H = I - \frac{2uu^t}{u^t u}$$

Esta última expresión se conoce también como una reflexión de Householder y la matriz H satisface

$$H^2 = I, \quad H^t = H$$

En el contexto de reducción a la forma triangular, tiene dos propiedades cruciales, primero que para cualesquiera dos vectores distintos de igual longitud euclidiana, existe una matriz de Householder que transforma uno dentro del otro. Segundo que cualquier vector transformado por H tiene una forma especial, la cual se obtiene al aplicar H al vector s

$$Hs = \left(I - \frac{2uu^t}{u^t u} \right) s = s - \frac{2(u^t s)}{u^t u} u \quad 4.2.1$$

la diferencia entre el vector original s y un múltiplo especial del vector de householder u .

4.2.2 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO LAS REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER PARA UNA MATRIZ NO-SINGULAR

Para una matriz $A=[a_1 | \dots | a_n]$ no-singular, las propiedades descritas en la sección anterior nos permiten construir una secuencia de $n-1$ matrices de Householder tales que

$$H_{n-1} \dots H_2 H_1 A = R$$

donde R es una matriz triangular superior no-singular de $n \times n$.

El primer paso de este proceso es construir una matriz de Householder H_1 que transforme a_1 (la primera columna de A) en un múltiplo de e_1 , el primer vector coordenado (esto es, deseamos eliminar desde la segunda hasta la n -ésima componente de a_1) la longitud euclidiana es preservada por una transformación ortogonal, así que el resultado será

$$H_1 a_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \|u\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > a_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \|a_1\| e_1 = \begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $|r_{11}| = \|a_1\|_2$. Conocemos de 4.2.1.1 que u_1 debe ser múltiplo del vector $\|a_1\|_2 e_1 - a_1$. Debido a que H_1 depende sólo de la dirección de u_1 , u_1 puede ser tomada como el siguiente vector, el cual difiere de a_1 sólo en la primera componente

$$\begin{pmatrix} a_{11} - r_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

en la definición de u_1 , el signo de r_{11} puede ser tomado como positivo o negativo (excepto cuando a_1 ya es múltiplo de e_1) para evitar el

error de cancelar la primera componente de u_1 , el signo de r_{11} es usualmente escogido como el signo contrario de a_{11} , así que el $\text{signo}(r_{11}) = -\text{signo}(a_{11})$, después de aplicar la matriz de Householder H_1 la primera columna de la matriz parcialmente reducida $A^{(2)} = H_1 A$ es un múltiplo de e_1 (el primer vector coordenado)

$$A^{(2)} = H_1 A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(m-1) \times 1} & A_{2 \times (m-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}$$

donde, en general todos los elementos de A han sido alterados.

En la construcción de la segunda transformación de Householder, hay que reducir la primera columna de la matriz residuo denotada por A_2 sin alterar el primer renglon y primera columna de la matriz reducida parcialmente. Por 4.2.1 este resultado puede ser alcanzado por definir el segundo vector de Householder u_2 con cero en la primera componente. Con esta selección la aplicación de H_2 a un vector en general no altera la primera componente y la aplicación de H_2 a un múltiplo de e_1 (tal como la primera columna de $A^{(2)}$) deja al vector completamente sin cambios.

Si A es no-singular $n-1$ pasos de reducciones de Householder son necesarios para realizar la triangularización de A . Y siempre la primera columna de la matriz residuo será diferente de cero en cada paso (la última columna no necesita reducción) entonces tenemos

$$H_{n-1} \dots H_2 H_1 A = R$$

donde R es una matriz triangular superior. Denotemos por Q^t la matriz ortogonal de $n \times n$

$$Q^t = H_{n-1} \dots H_2 H_1 \quad \text{así que } Q = H_1 H_2 \dots H_{n-1}$$

Cada una de las siguientes formas es llamada la factorización QR de A:

$$Q^T A = R \quad \text{o} \quad A = QR$$

4.2.3 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO LAS REFLEXIONES DE HOUSEHOLDER PARA UNA MATRIZ SINGULAR

Nuestro enfoque básico para resolver un sistema no-singular lineal es reducir la matriz a una forma agradable (triangular superior) por aplicar una secuencia de transformaciones especiales. Ahora describiremos como extender estas técnicas para transformar, una matriz general A, a una forma triangular que revele el rango. Asumiremos que cualquier proceso de reducción termina cuando se carece de reducir a cero una columna, las inevitables complicaciones en tales extensiones es la necesidad de revelar el rango.

Una matriz general A puede ser reducida a una forma triangular superior que revele el rango usando transformaciones ortogonales. La principal diferencia del caso no-singular involucra la necesidad de intercambiar columnas para asegurar que el rango es completamente revelado. Sin intercambio de columnas la reducción de Householder terminará inmediatamente en una matriz diferente de cero cuya primera columna es un vector cero.

Si la matriz residuo es la matriz cero o nula, la reducción es terminada, en otro caso, al menos una columna es diferente de cero en la matriz residuo (la columna pivote) la cual puede ser escogida como el siguiente candidato para reducir y debe ser movida al frente de la matriz residuo por un intercambio de columnas (el intercambio de renglones no es necesario con reducciones ortogonales por la izquierda

debido a que la norma dos de la columna que es reducida es preservada) En teoría cualquier columna diferente de cero será seleccionada como columna pivote, no debe sorprendernos que algunas consideraciones numéricas sugieren la indeseabilidad de una columna pivote que es demasiado pequeña. Aquí la estrategia es escoger la columna más grande en la matriz residuo como columna pivote.

Desafortunadamente, la mejor definición de más grande en este contexto es algunas veces ambiguo. Con el significado más obvio la columna pivote es tomada como la columna de norma euclidiana más grande en la matriz residuo. Una interpretación alternativa es que la columna pivote deberá ser la columna menos reducida en la matriz residuo, es decir, la columna con la razón más grande de presente a la original longitud euclidiana. Hablando ampliamente esta segunda estrategia es diseñada para escoger la columna más independiente como la columna pivote.

Si una estrategia de pivoteo es usada, en el k -ésimo paso de la reducción a una forma triangular por transformaciones de Householder se aplica un intercambio de columnas (si es necesario) para mover la columna pivote a la k -ésima posición. Formalmente tal movimiento corresponde a multiplicar la matriz residuo por una permutación por la derecha, esto es, si $A^{(k)}$ es el resultado del paso k de la reducción de Householder, se tiene

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} R_k & r_{kk} \\ 0 & A_k \end{bmatrix}$$

donde $A^{(k)}$ es la matriz residuo, debemos elegir la columna de norma

mayor de A_k e intercambiarla por la primera columna de A_k . Este procedimiento lo realizamos multiplicando por la derecha a A_k por una matriz de permutaciones P_k' con la cual definimos

$$P_k = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & 0 \\ 0 & P_k' \end{bmatrix}$$

que será aplicada por la derecha a $A^{(k)}$ para realizar el intercambio de columnas en A_k sin alterar R_{kk} . Con lo cual obtenemos

$$A^{(k)} P_k = \begin{bmatrix} R_k & r_k' \\ 0 & A_k' \end{bmatrix}$$

ahora con la primera columna de A_k' definimos H_{k+1}' para reducir esta columna y construimos

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & 0 \\ 0 & H_{k+1}' \end{bmatrix}$$

para aplicarla por la izquierda a $A^{(k)} P_k$ para reducir la columna k a la forma deseada y así obtenemos un paso más de la triangularización, esto es,

$$A^{(k+1)} = H_{k+1} A^{(k)} P_k = \begin{bmatrix} R_{kk} & r_{1,k+1} & r_{1,k+2} & \dots & r_{1,m} \\ & r_{2,k+1} & r_{2,k+2} & \dots & r_{2,m} \\ \hline 0 & -\alpha | a_{k+1}^{(k)} | & r_{k+1,k+2} & \dots & r_{k+1,m} \\ \hline 0 & 0 & A_{k+1} & \dots & \end{bmatrix}$$

Con una adecuada estrategia de pivoteo y aritmética exacta, este procedimiento de Householder termina después de r pasos cuando la matriz residuo llega a ser cero o nula.

En general r permutaciones $\langle P_k \rangle$ y r matrices de householder $\langle H_k \rangle$ $k=1, \dots, r$ son requeridos para completar la reducción. Después de r pasos la configuración final es

$$H_r \dots H_1 A P_1 \dots P_r = \hat{R}$$

donde

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R & \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & \end{bmatrix}$$

es una forma triangular que revela el rango y R_{11} es una matriz triangular superior de $r \times r$. Combinando los intercambios de columnas en una simple matriz de permutación P y las transformaciones de Householder en una simple matriz ortogonal Q^t obtenemos

$$Q^t A P = \hat{R}$$

$$\text{donde } Q^t = H_r \dots H_1$$

$$P = P_1 \dots P_r$$

y una forma equivalente y probablemente más común es

$$A P = Q R$$

$$\text{donde } Q = H_1 \dots H_r$$

la matriz ortogonal Q (el producto en orden inverso de las transformaciones de Householder) es frecuentemente presentada en forma factorizada.

La factorización QR , $AP = QR$ expresa una versión de las columnas permutadas de A como el producto de una matriz triangular superior de

$m \times m$ que revela que el rango es r . Una versión más compacta de esta factorización puede ser obtenida por destinar las primeras r columnas de Q como la matriz Q_r de $m \times r$ y la $s = m - r$ columnas restantes como Q_{m-r} , entonces la factorización puede ser escrita como

$$AP = QR = (Q_r \quad Q_{m-r}) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

que podemos reducir a

$$AP = Q_r R$$

la última forma expresa una matriz permutada de las columnas de A en una forma que retiene el rango. Cuando la columna pivote es escogida como la columna de norma más grande, la matriz residuo R es una matriz triangular superior normalizada con la propiedad de que sus elementos en la diagonal son de magnitud no decreciente, así que,

$$|r_{11}| \geq \dots \geq |r_{rr}|$$

Aunque no podemos forzar a R a ser cuadrada, podemos alcanzar esencialmente el mismo efecto por construir una matriz ortogonal V que puede ser aplicada a R por la derecha, eliminando la matriz R_{12} , esto es,

$$RV = (R_{11} \quad R_{12})V = (\bar{R} \quad 0)$$

donde la matriz R de $r \times r$ es una matriz triangular superior no-singular. V puede ser expresada como una secuencia de transformaciones de Householder aplicadas por la derecha para eliminar las columnas seleccionadas de R . Debido a nuestra preferencia para trabajar con columnas, nos parece más fácil describir este proceso en términos de reducir una matriz triangular inferior R^t desde el lado izquierdo. Ya que necesitamos explícitamente referir los elementos usaremos \hat{R} y W para denotar las matrices R_{11} y R_{12} .

La transpuesta del resultado deseado $RV = (\hat{R} \quad W)V = (\bar{R} \quad 0)$ es

$$V^t R^t = V^t \begin{bmatrix} R^t \\ W^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde \bar{R}^t es triangular inferior. Los primeros r renglones de R^t son simplemente la matriz \bar{R}^t (el renombrado de R^t_{11}) la cual es ya una forma triangular inferior. Las características especiales de las transformaciones de Householder nos permiten construir una sucesión de éstas cuyo producto, no sólo elimina a W^t (la renombrada R^t_{12} , los últimos $n-r$ renglones de R^t) sino, también retiene la forma triangular inferior (no los elementos de los primeros r renglones) la característica crucial es que las columnas de R^t son procesadas en orden inverso.

Primero consideraremos la última columna de R^t . Una transformación de Householder \bar{H}_r es construida para crear ceros en las componentes $r+1$ hasta la n , sin cambiar las primeras $r-1$ componentes. En esta forma \bar{H}_r elimina la columna r de W^t pero no altera el renglón 1 hasta el $r-1$ de R^t . Por lo tanto preservamos la estructura triangular inferior de los primeros r renglones. El vector de Householder \bar{u}_r tiene ceros en las primeras $r-1$ componentes. La aplicación de \bar{H}_r a R^t tiene el siguiente efecto sobre la matriz R^t

$$\bar{H}_r R^t = \begin{bmatrix} r_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1,r-1} & \dots & \dots & r_{r-1,r-1} & \dots & 0 \\ r_{1,r} & \dots & \dots & r_{r-1,r} & \dots & r_{r,r} \\ w_{11} & \dots & \dots & w_{r-1,r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,n-r} & \dots & \dots & w_{r-1,n-r} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{R}_{rr}^2 = r_{rr}^2 + w_{ir}^2 + \dots + w_{n-r,r}^2$ y los elementos alterados son denotados por \tilde{R}_{ij} y \tilde{W}_{ij} la última columna de $H_r R^t$ está ahora en la forma deseada. Moviendonos a la izquierda (a la columna r-1) buscamos una transformación \tilde{H}_{r-1} con tres propiedades

- i) Que elimine la columna r-1 de W^t transformada
- ii) No altere los ceros en las primeras r-2 posiciones de esta columna
- iii) No cambie la columna r de $\tilde{H}_r R^t$

los señalamientos (ii) y (iii) son realizados si el vector de Householder \tilde{u}_{r-1} tiene ceros desde la componente uno hasta la r-2 y un cero en la componente r, esto se debe a que si \tilde{u}_{r-1} en alguna componente, tiene cero, digamos en la componente j, entonces el renglon j no es afectado por la aplicación de \tilde{H}_{r-1} . La propiedad (iii) es asegurada debido a que \tilde{u}_{r-1} es ortogonal a la última columna de $\tilde{H}_r R^t$ la cual consecuentemente queda sin cambiar por \tilde{H}_{r-1} .

Continuando, para movernos a la izquierda a través de las columnas, cada vector de Householder es construido con un patron de ceros que preserva la forma deseada en las columnas ya reducidas. Eventualmente las r columnas de W^t son eliminadas en orden opuesto por las r transformaciones. El resultado final es

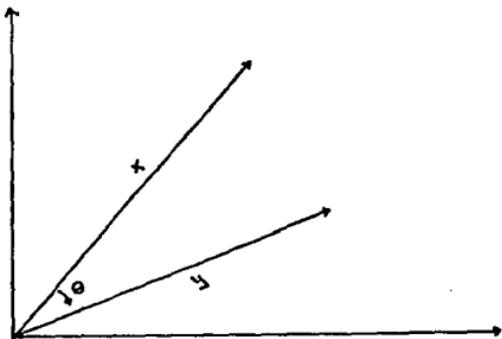
$$\tilde{H}_1 \dots \tilde{H}_r R^t = \begin{pmatrix} \tilde{R}^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde \tilde{R}^t es una forma triangular inferior de $r \times r$ no-singular, transponiendo obtenemos la forma deseada

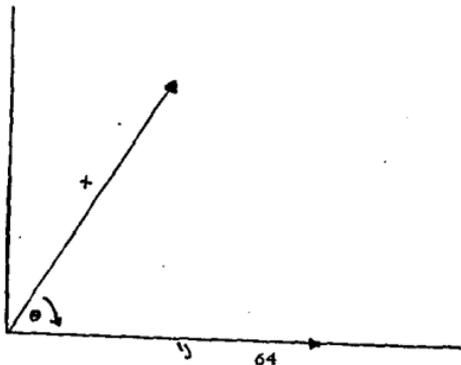
$$R \tilde{H}_1 \dots \tilde{H}_r = RV = (\tilde{R} \ 0) \quad \text{donde } V = \tilde{H}_r \dots \tilde{H}_1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

entonces y es x rotado por el ángulo θ como se muestra en la figura



Cuando se multiplica un vector $x \in \mathbb{R}^n$ por una matriz que define una rotación sobre un plano se modifican sólo dos componentes del vector (las que están en el plano) y las demás componentes quedan intactas. Una clase especial de este tipo de rotaciones son aquellas que dado un vector en el plano lo mandan al primer eje coordenado, gráficamente se tiene



esto es, dado un vector x con dos componentes se define

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad s = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

donde $c^2 + s^2 = 1$ y se satisface

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c^2 + s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A este tipo de rotaciones se les conoce como rotaciones de Givens, las cuales tienen una excelente estabilidad numérica

4.3.2 CALCULO DE LA FACTORIZACION QR USANDO ROTACIONES DE GIVENS

Un ingrediente esencial en el calculo de la factorización de una matriz es la producción de ceros en lugares estratégicos, es decir, la eliminación de elementos seleccionados. Por ejemplo, la factorización QR es basada en transformaciones que reducen un vector a un múltiplo del primer vector coordenado e_1 , por introducir ceros en todas las componentes excepto en la primera.

Para realizar la creación de ceros es importante, en particular, la habilidad para producir ceros en una componente simple de un vector v dado, digamos en el lugar j , la forma común de realizar esto involucra la aplicación de transformaciones especiales a v (por simplicidad consideraremos sólo transformaciones por la izquierda). Una matriz conveniente y simple que elimina la componente j de v puede ser construida usando sólo algún elemento de v (diferente de cero) (digamos la componente i). La transformación deja sin cambio todas las

componentes de v excepto las componentes i & j .

La transformación adecuada para el vector v , con un par de índices (i,j) donde el segundo índice da el lugar a transformar a cero será denotada por $\rho_{i,j}$. Los subíndices contienen los índices separados por una coma, es decir $\rho_{n,n-1}$ para el par de índices $(n,n-1)$ y tiene las siguientes propiedades:

- i) $\rho_{i,j}$ transforma el j -ésimo elemento de v a cero, es decir, $(\rho_{i,j}v)_j = 0$; donde $(\)_j$ denota la j -ésima componente del vector en parentesis.
- ii) Dado algun n -vector z ; $(\rho_{i,j}z)_k = z_k$ para toda $k \neq i$ y $k \neq j$

La segunda propiedad puede ser alcanzada facilmente por tomar todos los renglones de $\rho_{i,j}$ (excepto los renglones i y j) como aquellas de la matriz identidad. El renglón i de $\rho_{i,j}$ es cero excepto para los elementos (i,i) y (i,j) y el renglón j es cero excepto para los elementos (j,i) y (j,j) estos cuatro elementos pueden ser arreglados como una submatriz ρ de 2×2 encajada en $\rho_{i,j}$.

Si multiplicamos A por una sucesión de rotaciones de Givens, eliminando los elementos abajo de la diagonal, obtendremos una matriz triangular superior R . De esta manera podemos obtener la factorización QR de A , donde Q es el producto de las rotaciones de Givens que se usaron para eliminar los elementos debajo de la diagonal de A .

Para una matriz general A de $n \times n$ eliminamos desde el elemento 2 hasta el n en la primera columna usando la sucesión de rotaciones de Givens $G_{12} G_{13} \dots G_{1n}$ después eliminamos desde el elemento 3 hasta el elemento n en la segunda columna usando las rotaciones de Givens en el siguiente orden $G_{23} G_{24} \dots G_{2n}$. Y así continuamos en esta forma hasta

llegar a la eliminación del elemento n de la columna $n-1$ usando $G_{n-1,n}$. Finalmente Q es el producto de las matrices transpuestas de cada rotación.

Cada rotación tiene la propiedad de eliminar un elemento más del último renglon manteniendo los ceros creados en cada una de las columnas por previas rotaciones.

4.4 LA SEUDOINVERSA

Una generalización clásica de la inversa que existe para cualquier matriz diferente de cero A es la pseudoinversa denotada por A^+ .

La pseudoinversa puede ser definida formalmente en varias formas. Aquí presentaremos una derivación intuitiva basada directamente en la descomposición de valores singulares.

Sea A una matriz diferente de cero de $m \times n$ y definimos $p = \min(m, n)$. La descomposición de valores singulares de A está dada por $A = USV^t$ donde U es una matriz ortogonal de $m \times m$, V es una matriz ortogonal de $n \times n$ y S es una matriz diagonal no-negativa $\text{diag}\{\sigma_i\}$ $i=1, \dots, p$ de valores singulares. Si $\text{rango}(A) = r$, $r > 0$, entonces A tiene exactamente r valores singulares y S tiene la forma

$$S = \begin{matrix} & r & m-r \\ \left[\begin{array}{cc} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} > r \\ > m-r \end{array} \end{matrix}$$

donde Σ es una matriz diagonal de $r \times r$, $\text{diag}\{\sigma_i\}$ con $\sigma_i > 0$. Por convención los valores singulares $\{\sigma_i\}$ son ordenados, tales que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \quad \text{y} \quad \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0.$$

Cuando A es no-singular todos sus valores son positivos, S misma es

una matriz diagonal no-singular y A^{-1} está dada por $A^{-1} = VS^{-1}U$, usando la regla estandar para invertir el producto de una matriz. Para una matriz general A , la pseudoinversa es similarmente definida por el producto pseudoinvertido de $A = USV^t$ (reservando el orden y tomando la pseudoinversa de cada matriz)

$$A^+ = (USV^t)^+ = (V^t)^+ S^+ U^+ \quad 4.4.1$$

Debido a que las matrices V^t y U son ortogonales sus pseudoinversas son simplemente sus inversas ordinarias $(V^t)^+ = V$ y $U^+ = U^t$. Para usar la expresion 4.4.1, necesitamos sólo definir la pseudoinversa de una matriz diagonal de $m \times n$ $D = \text{diag}(d_i)$, la pseudoinversa de D denotada por D^+ es una matriz diagonal de $n \times m$ $\text{diag}(d_i^+)$ cuyo i -ésimo elemento d_i^+ está dado por

$$d_i^+ = \begin{cases} 1/d_i & \text{Si } d_i \neq 0 \\ 0 & \text{Si } d_i = 0 \end{cases} \quad 4.4.2$$

Existen dos puntos de interes alrededor de esta definición. Primero las dimensiones de D^+ son las dimensiones invertidas de A : Si D es $m \times n$, D^+ es $n \times m$. Segundo, un elemento diferente de cero en D corresponde a su reciproco en D^+ , además un elemento cero de la diagonal en D es asociado con elemento cero en la diagonal en D^+ .

Ahora que S^+ puede ser definida, escribimos A^+ en términos de las matrices de la descomposición de valores singulares de A como

$$A^+ = V S^+ U^t \quad 4.4.3$$

esta expresion tiene una forma familiar de la descomposición de valores singulares donde V y U^t son ortogonales y S^+ es una matriz diagonal no-negativa (los elementos de S^+ no son ordenados en orden decreciente). La pseudoinversa tiene varias propiedades importantes, algunas de las cuales son listadas acontinuación:

$$\begin{aligned}
 (A^+)^+ &= A \\
 (A^+)^+ &= (A^+)^+ \\
 (AA^+)^+ &= AA^+ \\
 (A^+A)^+ &= A^+A \\
 AA^+v &= v \quad \forall v \in R(A) \\
 A^+z &= 0 \quad \forall z \in N(A)
 \end{aligned}$$

La condición de una matriz A definida positiva está dada como

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| / \|A\|$$

y la podemos generalizar para una matriz A diferente de cero por sustituir la pseudoinversa por la inversa ordinaria del número de condición, formalmente

$$\text{cond}(A) = \|A^+\| / \|A\|$$

donde el valor real de la $\text{cond}(A)$ depende del escogimiento de la norma de la matriz. Usando la norma dos en el caso no-singular, $\|A\|_2$ es σ_1 que es el valor singular más grande de A. El valor de la norma dos de A^+ es también relacionado a los valores singulares de A. Cuando el rango de r es positivo, σ_r es el valor singular más pequeño diferente de cero de A. Ya que, la diagonal es diferente de cero y S^+ son los recíprocos de los valores singulares de A la relación $A^+ = V S^+ U^t$ muestra que $1/\sigma_r$ es el valor singular más grande de A^+ por lo que

$$\|A^+\| = 1/\sigma_r$$

El número de condición de una matriz A diferente de cero (medida en la matriz con norma dos) es este

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|_2 / \|A\|_2 = \sigma_1 / \sigma_r$$

Justamente como en el caso no-singular la condición de una matriz A indica la sensibilidad de un sistema lineal a perturbaciones en los

datos. La condición de una matriz en general también da información acerca de la dependencia lineal entre las columnas de A . Debemos tener cuidado debido a que existe una crucial diferencia en la interpretación del caso singular y del caso no-singular.

CAPITULO V
SOLUCION DE SISTEMAS
DE ECUACIONES

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo trataremos de calcular soluciones de un sistema lineal en el cual está involucrada una matriz A , que puede ser una matriz rectangular o bien puede ser una matriz cuadrada pero singular.

En un planteamiento general solucionar $Ax=b$ significa calcular un vector x que satisfaga $Ax=b$, las técnicas para resolver estos sistemas son extensiones de aquellas desarrolladas para el caso no-singular e involucran el mismo principio fundamental de reducción a una forma conveniente (como vimos en el capítulo anterior) que haga el problema más fácil de resolver.

Cuando se permite que A sea una matriz general, puede no haber solución de $Ax=b$, a menos de que b sea un vector especial. $Ax=b$ tiene una solución si y sólo si el vector b está en el rango de A , así que b puede ser escrito como una combinación lineal de las columnas de A . En este caso decimos que $Ax=b$ es compatible.

Una complicación a la solución del sistema $Ax=b$, de $m \times n$, es la existencia y la unicidad de la solución, que depende de las dimensiones m y n así como del rango de A . Ya que, si A es una matriz corta y gorda ($m < n$, $\text{rango}(A) = m$) el sistema tendrá un número infinito de soluciones para cualquier lado derecho b . No obstante, si A es una matriz larga y delgada ($n < m$, $\text{rango}(A) = n$) la solución no existe para ciertos lados derechos b , debido a que A tiene columnas linealmente independientes. La solución es única cuando existe. Dada una matriz general A y un vector b que no esté en el rango de A , no existe un vector x tal que $Ax=b$ y el sistema $Ax=b$ se dice que es incompatible.

Una estrategia común, en este caso, es encontrar un vector x tal que Ax sea lo más cercano posible a b , donde la cercanía es medida con la

norma euclidiana a través de resolver un problema de cuadrados mínimos lineales.

A continuación trataremos dos casos especiales de sistemas compatibles que pueden ser resueltos fácilmente.

5.1.1 MATRICES CON RENGLONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Si A es una matriz de $m \times n$ de rango completo con renglones linealmente independientes ($m < n$), el sistema $Ax=b$ tiene algunas propiedades importantes que se derivan de los argumentos de dimensionalidad. Como la dimensión del espacio rango de A es m igual que la dimensión del vector b , entonces las columnas de A generan todo \mathbb{R}^m y todo m -vector está contenido en el rango de A , de esto podemos deducir que el sistema $Ax=b$ es compatible para cualquier vector b en el lado derecho.

De la definición de rango de una matriz, A debe contener al menos un subconjunto de columnas linealmente independientes que formen una base para el espacio rango de A y con estas columnas podemos formar una submatriz no singular de $m \times m$ de A , la cual puede ser usada para resolver $Ax=b$. Una vez determinado un conjunto de m columnas linealmente independientes de A podemos agruparlas en un bloque aplicando una matriz de permutación P por la derecha a A , esto es.

$$AP = [B \mid X]$$

donde B es una submatriz no-singular de $m \times m$ y X es $m \times (n-m)$

El sistema $Ax=b$ podemos expresarlo como $APP^{-1}x = b$ de donde obtenemos

$$[B \mid X] y = b \qquad y = P^{-1}x$$

si particionamos el vector $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ con y_1 de dimensión m y y_2 de dimensión $n-m$, la expresión anterior podemos

escribirla como

$$By_2 + Xy_2 = b$$

la cual tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones

$$By_2 = b$$

ya que, como cada columna de X es una combinación lineal de las columnas de B , podemos tomar $y_2 = 0$ con lo cual basta solucionar $By_2 = b$ que es un sistema compatible y tiene solución única, debido a que B es una matriz no-singular. Una vez determinado y_2 , podemos determinar $x = Py$ donde x es una solución del sistema original compatible. El sistema $By_2 = b$ puede ser solucionado con algunos de los métodos discutidos en los capítulos anteriores. Cada bloque B asociado con A determina una solución básica de $Ax = b$, determinada por $x = Py$. Diferentes bloques B (conjunto de m columnas linealmente independientes) conducen (en general) a diferentes soluciones básicas. Cada solución básica tiene al menos $n-m$ componentes cero, pero no todos los vectores con esta propiedad son soluciones básicas. Una pregunta que surge en este momento es: Como determinar una submatriz no-singular B ? En ciertos casos especiales existe un candidato natural para B . Por ejemplo supongamos que A tiene la forma

$$A = (TV) \quad 5.1.1$$

donde T es una matriz triangular de $m \times m$ con elementos en la diagonal diferentes de cero, entonces T es no-singular y puede ser tomada como B . Más generalmente; si las columnas de A contienen las columnas de una matriz triangular no-singular en algún orden, estas columnas pueden ser agrupadas conjuntamente para crear B . Además solucionar $By_2 = b$, es fácil cuando B es una matriz triangular o un triángulo permutado.

La estructura triangular empotrada en 5.1.1, puede ser

considerada como la ideal, varios de los métodos que han sido presentados en el capítulo anterior, esencialmente involucran, transformar A en una versión permutada de 5.1.1.

5.1.2 MATRICES CON COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

La estrategia de encontrar una submatriz no-singular también se aplica en este caso. Cuando A tiene columnas de rango completo, las n columnas son linealmente independientes y el sistema $Ax=b$ no es necesariamente compatible, si sucede que es compatible la solución es única. La suposición de columnas de rango completo garantiza que A debe contener al menos un subconjunto de n renglones linealmente independientes para constituir una matriz no-singular B de $n \times n$, la cual se puede usar para resolver $Ax=b$. Una vez determinado un conjunto de n renglones linealmente independientes de A podemos agruparlos en un bloque aplicando una matriz de permutación P por la izquierda a A, esto es,

$$PA = \begin{bmatrix} B \\ X \end{bmatrix} \begin{matrix} n \times n \\ n \times (m-n) \end{matrix}$$

donde B es una matriz no-singular y cada renglon de X es una combinación lineal de los renglones de B y el sistema $Ax=b$ podemos escribirlo como

$$PAx = Pb, \text{ entonces } \begin{bmatrix} B \\ X \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ b_x \end{bmatrix}$$

Si b está en el rango de A, $Ax=b$ es compatible y la solución es única, y podemos encontrarla al resolver el sistema no-singular $Bx=b_B$ y exactamente como en el caso de renglones de rango completo una elección obvia de B ocurre cuando una matriz triangular no-singular de $n \times n$ es incluida entre los renglones de A

5.2 DESCOMPOSICIONES QUE REVELAN EL RANGO DE UNA MATRIZ

Los dos casos de rango completo que vimos en la sección anterior son los ejemplos más simples de sistemas compatibles. No obstante, en el caso general de una matriz A y un vector compatible b , podemos caracterizar el conjunto de soluciones del sistema compatible si conocemos un vector x_0 (una solución particular) que satisfaga $Ax_0 = b$ y una solución del sistema homogéneo asociado, es decir, q tal que $Aq=0$. Entonces para cualquier escalar γ , el vector $x_0 + \gamma q = b$ debe también ser solución, ya que $A(x_0 + \gamma q) = Ax_0 = b$

Cuando A es una matriz arbitraria de rango desconocido, tres preguntas importantes surgen al tratar de resolver $Ax=b$

(i) Si b está en el rango de A (Si no, no existe solución)

(ii) Si es así, como podemos encontrar una solución particular x tal que $Ax=b$?

(iii) ¿Cómo podemos caracterizar todos los vectores q tales que $Aq=0$?

La estrategia para responder a estas preguntas es reducir la matriz A a una forma que revele no sólo su rango, sino también la estructura del espacio del rango.

El término formas triangulares superiores que revelan el rango denota la estructura genérica de una matriz de $m \times n$ de rango r correspondiente a

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} T = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \quad 5.2.1$$

donde T_{11} es una matriz triangular superior no-singular de $r \times r$, T_{12} es

de $r \times (n-r)$, cuando T tiene renglones de rango completo, es decir, tiene una estructura como

$$T = \begin{bmatrix} x & x & x \\ & x & x \end{bmatrix} \quad m < n, \text{ rango}(A) = m$$

donde x denota un elemento diferente de cero. Ambos bloques de ceros son ausentes.

Cuando T tiene columnas de rango completo, es decir, tiene la estructura

$$T = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ & 0 \end{bmatrix} \quad m > n, \text{ rango}(A) = n$$

la matriz T_{12} y el bloque del lado derecho de ceros son ausentes.

Más generalmente, el rango de la matriz F de $m \times n$ es r . Si F tiene la forma

$$F = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \quad 5.2.2$$

donde F es de $r \times n$ y los renglones de F son conocidos por ser linealmente independientes. La estructura 5.2.2 ocurre cuando usamos la descomposición de valores singulares de A para resolver $Ax=b$.

Cada forma (5.2.1) y (5.2.2) se dicen ser reveladoras del rango, debido a que estructura de la matriz despliega explícitamente su rango. La estructura de la matriz también da una simple caracterización del espacio rango. Cualquier m -vector b que es una combinación de las columnas de T tendrá automáticamente ceros en las últimas $m-r$ componentes, lo cual significa que cada vector b en el espacio rango de T debe tener la forma

$$b = \begin{bmatrix} b_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$

Si deseamos resolver un sistema lineal cuya matriz está en forma que revela el rango, la estructura del lado de la mano derecha indica inmediatamente si el sistema es compatible. Una forma triangular revela el rango y también nos permite encontrar una solución particular de $Ax=b$ que es fácil de calcular.

El enfoque más ampliamente conocido para solucionar sistemas compatibles $Ax=b$ es basado en hallar matrices no-singulares $C(m \times m)$ y $B(n \times n)$ tales que

$$C A B = \overset{n}{T}$$

donde T es una forma triangular que revela el rango.

La no-singularidad de C significa que cada solución de $Ax=b$ debe también satisfacer $CAx=Cb$, insertando la identidad $BB^{-1} = I$, la relación $CAx=Cb$ puede ser escrita como

$$CABB^{-1}x = \overset{n}{T}(B^{-1}x) = Cb \quad 5.2.3$$

Debido a la estructura especial del espacio rango de $\overset{n}{T}$ este sistema será compatible si y sólo si las últimas $m-r$ componentes de Cb son cero y la compatibilidad puede ser probada formando y examinando Cb . Si el sistema es compatible, por definición debe existir un n -vector y tal que

$$\overset{n}{T}y = Cb \quad \text{donde } y = B^{-1}x$$

y el vector $x = By$ satisfecerá el sistema original $Ax=b$.

Nuestro enfoque básico para resolver un sistema no-singular lineal es reducir la matriz a una forma triangular superior aplicando una sucesión de transformaciones especiales. En el capítulo anterior describimos las técnicas para transformar una matriz general A a una forma triangular que revele su rango. A continuación veremos como

hallar la solución de los sistemas de ecuaciones usando las descomposiciones que revelan el rango de una matriz.

5.3 SOLUCIONES DE SISTEMAS TRIANGULARES QUE REVELAN EL RANGO

Dada una matriz general A de $m \times n$ de rango $r > 0$, cada eliminación Gaussiana o triangularización de Householder con una estrategia apropiada de pivoteo produce la siguiente factorización genérica

$$CAP = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 5.3.1$$

donde C es una matriz no-singular de $m \times m$ y P es una matriz de permutación y T es una matriz triangular superior que revela el rango. La matriz T es de $m \times m$, la matriz T_{11} de $r \times r$ es no-singular y T_{12} tiene $n-r$ columnas. Esta forma permite un procedimiento fácil para calcular la solución x de $Ax=b$

Multiplicando el sistema $Ax=b$ a la izquierda por C e insertando la identidad PP^t y sustituyendo CAP por $\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}$ obtenemos

$$CAx = CAP(P^t x) = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} (P^t x) = Cb$$

lo cual puede ser escrito como $\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} y = d$ donde $y = P^t x$, y $d = Cb$. El sistema $\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} y = d$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} y = d \quad 5.3.2$$

ya que, los últimos $m-r$ rengiones de T son cero. Este sistema es compatible sólo si las últimas $m-r$ componentes de d son cero.

El primer paso que involucra x es el cálculo de d particionada como

$$d = C b = \begin{bmatrix} d_r \\ d_{m-r} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$

si $d_{m-r} = 0$ el sistema original es compatible y podemos proceder. En la práctica el sistema es considerado compatible si $\|d_{m-r}\|$ es pequeña.

(Más adelante se realizara la deducción para hacer esta decisión). Si $\|d_{m-r}\|$ no es pequeña, b no está en el espacio rango de A y el sistema $Ax=b$ no tiene solución. Cuando $d_{m-r} = 0$ cualquier vector y que satisfaga $Ty=d_r$, las primeras r ecuaciones de 5.3.2, automáticamente satisficera $Ty=d$.

Sea y particionado en y_r , sus primeras r componentes, y y_{n-r} , sus últimas $n-r$ componentes

$$y = \begin{bmatrix} y_r \\ y_{n-r} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \quad 5.3.3$$

buscamos un vector y de la forma 5.3.3 tal que

$$T y = [T_{11} \ T_{12}] \begin{bmatrix} y_r \\ y_{n-r} \end{bmatrix} = d_r \quad 5.3.4$$

Los renglones de la matriz T que son linealmente independientes están contenidos en T_{11} una submatriz triangular superior no-singular.

Ahora bien, para encontrar la solución de un sistema triangular debemos considerar dos casos, dependiendo de si el lado derecho, b , del sistema original es diferente de cero o es cero.

Caso 1: $b \neq 0$: Cuando el lado derecho b , del sistema original es diferente de cero la no-singularidad de C implica que el vector $d = Cb$ es diferente de cero, por lo que el sistema original $Ax=b$ es compatible sólo si $d_{m-r} = 0$ y d_r es diferente de cero. Entonces puede ser tomada una solución básica cuyas r primeras componentes y_r son las

únicas diferente de cero en el r -vector y_n que satisfaca

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ 0 \end{bmatrix} = T_{11} y_n = d_r \quad 4.3.5$$

Y una solución x del sistema original es

$$x = P \begin{bmatrix} y_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.3.6$$

Ya que P es una matriz de permutaciones, x es una "versión revuelta" de y , cualquier solución x derivada de esta forma es una solución básica reordenada y debe contener al menos $n-r$ componentes cero.

Caso 2: $b = 0$; Cuando $r < n$ una solución particular diferente de cero de las ecuaciones homogéneas $Ax=0$ puede ser siempre encontrada usando la relación

$$T y = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ y_{n-r} \end{bmatrix} = d_r$$

Si $b = 0$ el vector d_r también es cero y la relación anterior se convierte en

$$T_{11} y_r + T_{12} y_{n-r} = 0$$

Como T_{11} es no-singular, esta relación revela que una solución, y , adecuada puede ser encontrada por seleccionar algún vector y_{n-r} y entonces definimos y_r como la solución de

$$T_{11} y_r = - T_{12} y_{n-r} \quad 5.3.7$$

Para asegurar que y_r sea diferente de cero seleccionamos y_{n-r} de modo que $T_{12} y_{n-r}$ sea diferente de cero y la relación 5.3.7 complete el resto de y .

Una conveniencia particular de escoger y_{n-r} puede ser hecha cuando la j -ésima columna de T_{12} (denotada por t_j) es diferente de cero. Si escogemos y_{n-r} como e_j , el j -ésimo vector de dimensión $n-r$, el vector

$T_{12} y_{n-r}$ es $T_{12} e_j = t_j$ y la relación 5.3.7 se convierte en

$$T_{11} y_r = -t_j, \quad y_r = -T_{11}^{-1} t_j \quad 5.3.8$$

y el vector compuesto

$$y = \begin{bmatrix} y_r \\ e_j \end{bmatrix} \text{ es entonces una solución de } [T_{11} \ T_{12}] y = 0 \quad 5.3.9$$

y la correspondiente solución diferente de cero, x , del sistema original $Ax=0$ es definida por

$$x = P y = P \begin{bmatrix} y_r \\ y_{n-r} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -T_{11}^{-1} t_j \\ e_j \end{bmatrix} \quad 5.3.10$$

la relación genérica $CAP = \tilde{T}$ puede ahora ser enfocada a las formas que surgen de la eliminación gaussiana y de la reducción de Householder.

5.3.1 Usando la factorización LU

La forma de eliminación de la factorización LU resultado de la eliminación Gaussiana es $MPAP = U$ donde $M = L^{-1}$. En términos de la factorización genérica $CAP = T$, tenemos

$$C = MP = L^{-1}P \quad \text{y} \quad T = U$$

la estructura de U es

$$U = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que demuestra que las matrices T_{11} y T_{12} necesitadas en (5.3.4) son U_{11} y U_{12}

Caso 1 $b \neq 0$ el vector $d = Cb$ está dado por

$$d = L^{-1}Pb$$

así que d satisface

$$Ld = Pb$$

donde Pb es una versión reordenada de b . El r -vector y_B de (5.3.5) soluciona

$$U_{11}y_B = dr \quad y \quad x = P \begin{bmatrix} y_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una solución básica de $Ax = b$

Caso 2: $b = 0$; Una solución diferente de cero de la ecuación homogénea $Ax = 0$ puede ser calculada por determinar el índice j de una columna diferente de cero (denotada por U_j ver (5.3.8)) de U_{11} . Un vector y tal que $Uy = 0$ es encontrado por escoger y_r (las primeras r componentes de y) como la solución de

$$U_{11} y_r = -U_j$$

y establecemos y_{n-r} a e_j . Donde e_j es el j -ésimo vector coordenado de dimensión $n-r$. Los vectores deseados son

$$y = \begin{bmatrix} y_r \\ e_j \end{bmatrix}, \quad x = Py$$

5.3.2 Usando la factorización QR

Con la factorización QR, las matrices en la factorización genérica $CAP = T$ son $T = R$, $C = Q^t$. la matriz R tiene la forma

$$R = (R_{11} \ R_{12})$$

así que la matriz triangular superior R_{11} de $r \times r$ juega el papel de T_{11} caso 1: $b \neq 0$;

El vector $d = Cb$ es obtenido por formar $d = Q^t b$, donde Q ha sido almacenada en forma explícita, o en forma factorizada.

El vector y_B de (5.3.5) soluciona

$$R_{11} y_r = d_r, \quad x = \begin{bmatrix} y_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una solución básica de $Ax = b$

Caso 2: $b = 0$; Como en el caso de la factorización LU, una solución diferente de cero de las ecuaciones homogéneas $Ax = 0$ puede ser calculada por seleccionar una columna diferente de cero r_j de R_{12} . Definimos y_r como la solución de $R_{11} y_r = -r_j$ & y_{n-r} como e_j el cual da

$$y = \begin{bmatrix} y_r \\ e_j \end{bmatrix}, \quad x = Py$$

5.4 LA SOLUCION DE LONGITUD MINIMA

Sea A una matriz diferente de cero de $m \times n$ de rango r . Cuando A tiene columnas de rango completo ($r=n$) cualquier solución de $Ax=b$ es única. En contraste existen una infinidad de soluciones si $r < n$ y es frecuentemente deseable calcular la solución de longitud euclidiana mínima.

Sea b un vector en el rango de A . Sabemos que cada solución de $Ax=b$ puede ser escrita como $x_0 + \gamma q$ donde x_0 es una solución particular y q está en el espacio nulo de A . De hecho existe una única solución de longitud euclidiana mínima, frecuentemente llamada la solución de longitud mínima y denotada por x_+ tal que

$$Ax_+ = b \text{ y } \|x_+\|_2 < \|x\|_2 \text{ para cualquier otra } x$$

que satisface $Ax=b$

Cualquier n -vector, x diferente de cero, que satisface $Ax=b$ puede ser únicamente expresado en términos de sus componentes en el rango de A^t

y del espacio nulo de A, esto es,

$$x = x_R + x_N \quad \text{con} \quad \|x\|_2^2 = \|x_R\|_2^2 + \|x_N\|_2^2$$

donde $x_R = A^t x_A$ para alguna x_A , $x_R \neq 0$ si $b \neq 0$; $Ax_N = 0$ & $x_A^t x_N = 0$

por lo tanto $\|x\|_2^2 \geq \|x_R\|_2^2$ con la igualdad si y sólo si $x_N = 0$ aquí

cualquier vector x que satisface $Ax=b$ está completamente en el rango

de A^t y tiene longitud euclídiana mínima. Tal solución será denotada

por x_* y debe ser diferente de cero si A y b son diferentes de cero.

Obsérvese que la solución de norma mínima, no es más, que el punto más

cercano al origen de la variedad lineal $\langle x \mid Ax=b \rangle$ que corresponde a uno de los casos tratados en el capítulo tres en su forma implícita.

En este caso el punto dado es el origen.

A continuación obtendremos una representación formal y útil basada en los factores que retienen el rango.

5.4.1 USANDO LOS FACTORES QR DE A

Cualquier matriz A de $m \times n$ de rango r puede ser escrita en una forma que retenga el rango como

$$A=QH \tag{5.4.1}$$

donde Q es de $m \times r$ con rango r y H es de $r \times n$ con rango r, ya que Q tiene columnas linealmente independientes y H tiene renglones linealmente independientes se sigue que las matrices $Q^t Q$ y HH^t son de $r \times r$ y no singulares. Las columnas de Q forman una base para el espacio rango de A, H y A tienen el mismo nulo. La representación 5.4.1 no es única.

Si x_* satisface $Ax_*=b$, entonces a x_* podemos escribir como una

combinación lineal de los renglones de A, es decir,

$$x_+ = A^+ v \quad \text{para alguna } v$$

una forma conveniente para x_+ puede ser derivada por explotar las propiedades de los factores que retienen el rango de A. Ya que, b está en el rango de A, también está en el rango de G, como G tiene columnas de rango completo entonces podemos escribirlo como $b = Gs$ para un único r-vector s. Sustituyendo las expresiones: $A = GH$, $x_+ = A^+ v$ y $b = Gs$ en la relación $Ax_+ = b$ tenemos

$$Ax_+ = AA^+ v = GHH^+ G^+ v = Gs = b$$

debido a que las columnas de G son linealmente independientes podemos cancelar G de ambos lados de la ecuación, con lo que obtenemos

$$HH^+ G^+ v = s \quad \text{ó} \quad G^+ v = (HH^+)^{-1} s$$

ya que, HH^+ es no-singular. Por otra parte $x_+ = A^+ v$ y $A^+ = H^+ G^+$ así que multiplicando la relación $G^+ v = (HH^+)^{-1} s$ por H^+ encontramos la siguiente expresión para x_+

$$x_+ = H^+ G^+ v = H^+ (HH^+)^{-1} s \quad 5.4.1.a$$

o bien

$$x_+ = H^+ z \quad \text{donde } s = HH^+ z \quad \text{y } Gs = b \quad 5.4.1.b$$

x_+ es única y por lo tanto independiente de la elección particular de G y H. Sin embargo, el vector v tal que $x_+ = A^+ v$ no es único a menos que A tenga renglones de rango completo ($r=m$). En el siguiente algoritmo resumimos el cálculo de la solución de longitud mínima de $Ax=b$ desde los factores que retienen el rango de A.

Algoritmo 5.1 SOLUCION DE LONGITUD MINIMA DE UN SISTEMA COMPATIBLE

Algoritmo 5.1 SOLUCION DE LONGITUD MINIMA DE UN SISTEMA COMPATIBLE

Paso 1) Determinar el r-vector s para resolver $Gs=b$

Paso 2) Formar HH^t y encontrar el r-vector z para resolver $HH^t z=s$

Paso 3) Formar $x_* = H^t z$

Ahora veremos como calcular x_* desde la factorización QR descrita en el capítulo anterior.

5.4.1.a USANDO LOS FACTORES QR DE A

La forma que retiene el rango de la factorización QR es $AP=Q_r R$ las matrices asociadas G y H son $G=Q_r$ y $H=RP^t$ las cuales pueden ser sustituidas en los pasos del algoritmo 5.1 Ya que, $Q_r^t Q_r = I$ la única solución s de $Gs=b$ encontrada en el paso 1 satisface $Q_r^t s=b$ y es simplemente

$$s=Q_r^t b$$

la matriz HH^t es $RP^t PR^t = RR^t$ así que el vector z del paso 2 es la solución de

$$RR^t z = s = Q_r^t b \quad \text{ó} \quad z = (RR^t)^{-1} Q_r^t b$$

Finalmente x_* es definida como $H^t z$

o bien

$$x_* = PR^t z = PR^t (RR^t)^{-1} Q_r^t b \quad 5.4.1.1$$

no es sorpresa que la expresión tienda a ser insatisfactoria numéricamente si A es mal condicionada debido a que la condición de R (la cual siempre refleja la condición de A) está al cuadrado en la matriz RR^t .

5.4.1.b USANDO LOS FACTORES QR DE A^t

la deterioración en la condición asociada con la presencia de RR^t en

(5.4.1.1) puede ser evitada si estamos preparados para calcular los factores QR de la matriz transpuesta A^t . Esta técnica es más comúnmente usada cuando la matriz original A es "corta y gorda" es decir $m < n$ y damos una forma eficiente de calcular la solución de longitud mínima (mejor que una solución básica) cuando A tiene renglones de rango completo. Por tanto asumiremos en esta discusión que A es $m \times n$ donde $m < n$ con rango $r > 0$ (si $m > n$ el procedimiento escogido es usualmente la factorización ortogonal completa)

Cuando el algoritmo estandar de Householder con pivoteo en las columnas es aplicado a A^t (la cual es $n \times m$ con $n > m$ y aqui por suposición larga y delgada) el resultado de la factorización es

$$A^t = QRP^t = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} P^t = Q \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^t$$

donde P es una permutación de $m \times m$, Q es una matriz ortogonal de $n \times n$, R es $n \times m$ R es de $r \times n$ y R_{11} es una matriz triangular superior $r \times r$ (aunque usamos las mismas letras P, Q y R enfatizamos que aqui esto significa que los factores QR de la matriz transpuesta A^t) en forma condensada tenemos

$$A^t = Q_r P_r^t = Q_r (R_{11} \ R_{12}) P_r^t$$

donde Q_r designa la matriz de $n \times r$ que consiste de las primeras r columnas de Q. El resultado de transponer es

$$A = P R^t Q_r^t = P \begin{pmatrix} R_{11}^t \\ R_{12}^t \end{pmatrix} Q_r^t \quad 5.4.2.1$$

Ya que la transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior, cada una de estas formas (con R remplazada por L) puede ser llamada la factorización LQ de A. La relevancia de 5.4.2.1

es que ésta es una factorización que retiene en el rango A

$$A=GH \text{ con } G = PR^t = P \begin{pmatrix} R_{11}^t \\ R_{12}^t \end{pmatrix} \text{ y } H = Q_r^t \quad 5.4.2.2$$

la expresión (5.4.1.a) para x_* contiene la matriz $H^t(HH^t)^{-1}$. Debido a que la particular H en 5.4.2.2. es Q_r^t cuyos renglones son ortonormales, HH^t llega a ser una matriz bien comportada

$$HH^t = Q_r^t Q_r = I_r$$

La identidad de dimensión r.

Ya que conocemos que b está en el rango de A, el sistema $Gs=PR^t b$ es garantizado a ser compatible y por lo tanto la solución del sistema anterior es única. La permutación P es ortogonal, multiplicando otra vez por P^t y desplegando la estructura de R^t vemos que s satisface

$$R^t s = \begin{pmatrix} R_{11}^t \\ R_{12}^t \end{pmatrix} s = P^t b = b \quad 5.4.2.3$$

Debido a su unicidad, s es la solución de cualquier subconjunto de ecuaciones linealmente independientes escogidas entre los renglones de (5.4.2.3). La presencia de la matriz triangular inferior no-singular R_{11}^t en los primeros r renglones da una idea fuerte para escoger estas ecuaciones, y s puede ser obtenida por resolver

$$R_{11}^t s = b_r$$

donde b_r denota las primeras r componentes del vector b reordenado $b=P^t b$. Debido a que $(HH^t)^{-1} = I$, la fórmula $x_* = H^t(HH^t)^{-1} s$ se simplifica a

$$x_* = Q_r s = Q_r R_{11}^{-t} b_r$$

este procedimiento involucra la multiplicación de s por una matriz ortogonal y la solución de un sistema triangular inferior cuya

condición es la de A.

Por lo que podemos afirmar, que la solución de longitud mínima de una matriz A, "Corta y Gorda", puede ser obtenida desde los factores QR de A^t sin elevar al cuadrado el número de condición.

5.5 LA FACTORIZACION ORTOGONAL COMPLETA

Cuando usamos los factores QR de una matriz A, para encontrar la solución de longitud mínima, vimos que esta estaba dada por

$$x_* = PR^t (RR^t)^{-1} Q_r^t b \quad \text{donde } R = (R_{11} \ R_{12})$$

la cual puede ser mal condicionada. Si R fuera no-singular, esto es, que R_{12} sea de dimensión cero, el número de condición no sería el cuadrado de la fórmula anterior, puesto que la matriz "Mala" de $R^t R$ desaparece, esto es,

$$(R R^t)^{-1} = R^{-1} R^{-1}$$

así que

$$R^t (R R^t)^{-1} = R^t R^{-1} R^{-1} = R^{-1} \quad 5.5.1$$

no podemos forzar a R a ser cuadrada, aunque podemos alcanzar el mismo efecto al construir una matriz ortogonal V que pueda ser aplicada a R por la derecha, eliminando la matriz R_{12} :

$$RV = (R_{11} \ R_{12}) V = (\bar{R} \ 0)$$

donde \bar{R} es una matriz de $r \times r$ triangular superior no-singular, como V es ortogonal, esta relación puede ser escrita como

$$R = (\bar{R} \ 0) V^t$$

así que

$$R R^t = \langle \bar{R} \ 0 \rangle V^t V \begin{bmatrix} R^t \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \bar{R} \ 0 \rangle \begin{bmatrix} R^t \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{R} \bar{R}^t$$

usando la expresión anterior vemos que la expresión $R^t \langle R R^t \rangle^{-1}$ en la fórmula para x_+ llega a ser

$$R^t \langle R R^t \rangle^{-1} = V \begin{bmatrix} \bar{R}^t \\ 0 \end{bmatrix} \langle R R^t \rangle^{-1} = V \begin{bmatrix} \bar{R}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.5.2$$

y la matriz $R R^t$, aparece no larga, debido a que V es ortogonal, la condición de \bar{R} es la misma que la condición de R .

La matriz ortogonal V la podemos encontrar como una secuencia de transformaciones ortogonales, aplicadas por la derecha para eliminar las columnas seleccionadas de R . (como se vio en el capítulo anterior).

La solución de longitud mínima x_+ con la simplificación 5.5.2 está dada por

$$\begin{aligned} x_+ &= PV \begin{bmatrix} \bar{R}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} Q_r^t b \\ &= PV \begin{bmatrix} \bar{R}^{-1} Q_r^t b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= PV \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{donde } \bar{R}v = Q_r^t b \quad 5.5.3 \end{aligned}$$

calculando la factorización QR de A y la reducción de R por el lado derecho, la solución de longitud mínima de un sistema compatible de rango deficiente, puede ser calculada sin el número de condición al cuadrado. Multiplicando la representación $AP = QR$ por V , en el lado derecho, obtenemos tres relaciones equivalentes

$$APV = Q_r R V = Q_r \bar{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

$$AP = Q_r \bar{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix} V^t$$

5.5.4

$$A = Q_r \bar{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix} V^t P^t$$

cualquiera de estas formas puede ser llamada la factorización ortogonal completa de A y todas nos conducen a una factorización que retiene el rango

$$A = GH \quad \text{con } G = Q_r \text{ \& } H = \begin{pmatrix} \bar{R} & 0 \end{pmatrix} V^t$$

Una interpretación de la factorización ortogonal completa es que la primera sucesión de transformaciones ortogonales identifica r columnas linealmente independientes de A que son movidas al frente y reducidas desde la izquierda. Y la reducción por la derecha elimina las n-r columnas dependientes.

5.6 LA DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES

La descomposición de valores singulares de A, $A = USV^t$ puede ser usada para resolver sistemas compatibles y en realidad produce automáticamente la solución de longitud mínima x . Supongamos que A es una matriz de $m \times n$ diferente de cero de rango $r > 0$, por lo que podemos escribirla como

$$A = USV^t = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^t$$

donde U es de $m \times m$, V es de $n \times n$ Σ es una matriz diagonal de $r \times r$ de valores singulares positivos. Aunque la descomposición de SVD es más cara para su cálculo que la factorización QR, da una forma más segura para resolver sistemas que involucran matrices mal condicionadas y de

rango desconocido. Una expresión para x_* será derivada por reordenar la SVD en una factorización que retenga el rango ($A = GH$) y después aplicar el algoritmo 5.1.

Denotemos por U_r las primeras r columnas de U y por U_{m-r} las últimas $m-r$ columnas, similarmente denotamos V_r y V_{n-r} , entonces

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^t$$

$$A = (U_r \quad U_{m-r}) \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_{n-r} \end{bmatrix}$$

así que

$$A = U_r \Sigma V_r^t$$

La matriz U_r es de $m \times r$ con rango r , tiene columnas ortonormales, la matriz ΣV_r^t es $r \times n$ con rango r y V_r^t tiene renglones ortonormales. La forma $A = U_r \Sigma V_r^t$ es una factorización que retiene el rango $A = GH$ con $G = U_r$ y $H = \Sigma V_r^t$. La estructura especial de estos factores conducen a varias simplificaciones en el cálculo de x_* , usando el algoritmo 5.1.

Debido a que $U_r^t U_r$ es la identidad, el vector s del paso 1 satisface $Gs = U_r s = b$, similarmente $V_r^t V_r = I$ y Σ es diagonal, así que la matriz HH^t necesitada en el paso 2 es

$$HH^t = \Sigma V_r^t V_r \Sigma = \Sigma^2$$

$$H^t (HH^t)^{-1} = V_r \Sigma (\Sigma^2)^{-1} = V_r \Sigma^{-1}$$

expresada en términos de las matrices de SVD la fórmula para x_* $H^t (HH^t)^{-1} s$ llega a ser

$$x_* = V_r \Sigma^{-1} U_r^t b \quad 5.6.1$$

lo cual muestra que la solución de longitud mínima de un sistema compatible puede ser calculada directamente desde SVD. La

representación 5.6.1 muestra que la solución de longitud mínima puede ser representada como el producto de la pseudoinversa y b

$$x_+ = A^+ b \quad 5.6.2$$

este resultado no es una sorpresa, ya que, la única solución de un sistema lineal no-singular $Ax=b$ es formalmente expresado en términos de su inversa ordinaria como $x=A^{-1}b$. La relación 5.6.2 muestra que la pseudoinversa juega un papel analogo en la representación de la solución única de longitud mínima de un sistema compatible en general

5.7 CONDICION DE UN SISTEMA COMPATIBLE

La condición de un problema refleja la sensibilidad de la solución exacta a cambios en los datos. Aquí sólo consideramos las perturbaciones que retienen la compatibilidad.

Si x_+ es la solución de longitud mínima de un sistema compatible $Ax=b$ Dos relaciones importantes que se tienen son

$$Ax_+ = b \quad || b || \leq || A || || x_+ || \quad 5.7.1$$

Ahora consideremos primero la solución de longitud mínima del sistema perturbado

$$A(x_+ + \delta x_b) = b + \delta b$$

donde $b \neq 0$ y δb está en el rango de A. Como $x_+ = A^+ b$ la solución perturbada satisface

$$x_+ + \delta x_b = A^+(b + \delta b)$$

asi que δx_b está dado por

$$\delta x_b = A^+ \delta b$$

combinando la desigualdad resultante $|| \delta x_b || \leq || A^+ || || \delta b ||$ con la desigualdad 5.7.1 tenemos

$$\frac{\|\delta x_b\|}{\|x_+\|} \leq \|A^+\| \|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad 5.7.2$$

la relación anterior nos dice que el cambio relativo en la solución exacta puede ser tan grande como la perturbación relativa en b multiplicado por la $\text{cond}(A)$.

Quando la matriz A es perturbada por δ_A el sistema

$$(A + \delta_A)(x + \delta x_A) = b$$

se garantiza que retiene la compatibilidad para todos los vectores b que estén en el rango de A sólo si el espacio rango de la matriz perturbación δ_A es un subespacio del rango A . Bajo esta suposición, la aplicación directa de la desigualdad de normas nos conduce al siguiente resultado

$$\frac{\|\delta x_A\|}{\|x_+ + \delta x_A\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}$$

la cual es similar a la cota para un sistema no-singular.

5.8 ESTIMACION DE RANGO NUMERICO

El rango de una matriz puede asumir sólo valores enteros y los cambios en el rango tiene dramáticos efectos (tales como discontinuidad en la pseudoinversa).

Desafortunadamente, no es claro, que significa rango en un contexto de precisión finita, ya que, la matriz A se dice tener rango numérico \hat{r} si \hat{r} es el más pequeño rango de todas las matrices B tales que

$$\|A - B\| \leq \epsilon$$

donde ϵ es pequeño. Desde luego la pregunta difícil es como formular

una caracterización precisa y sensible de pequeño, ya que, cualquier decisión acerca del rango de una matriz es inherente al problema de dependencia lineal. La elección correcta del rango no depende sólo del tamaño de los datos, sino también de la procedencia y aproximación de los datos que definen A.

Supongamos que la matriz A de $m \times n$ ha sido reducida a una forma triangular que revela el rango T con la factorización QR así que tenemos la forma genérica $CAP=T$ para alguna matriz no-singular C y una matriz P de permutaciones. Hemos visto que para determinar si un vector b está en el rango de A, al multiplicarlo por la izquierda por C debe ser de la forma

$$d=Cb = \begin{Bmatrix} d_r \\ d_{m-r} \end{Bmatrix}$$

donde r es el rango de A y $\|d_{m-r}\|$ debe ser cero, la dificultad de formular esta prueba es prácticamente para compatibilidad, se debe a que la versión calculada $\|d_{m-r}\|$ es improbable que sea cero aún si b está exactamente en el rango de A. Sin embargo, ya que, la norma de la matriz C, en la forma genérica, es uno para el caso QR ($C = Q^t$) el cálculo del vector d_{m-r} puede razonablemente ser incorrecto si

$$\|d_{m-r}\|_2 \leq \tau \|b\|_2 u$$

donde u es la unidad de redondeo y τ es una constante de orden uno.

5.8.1 LA DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES

Con aritmética exacta, el rango de una matriz es igual al número de valores singulares diferentes de cero y puede ser determinado

directamente desde su SVD. Una característica especial de la SVD es que el valor singular más pequeño de A caracteriza la relación del rango de A y la vecindad de matrices alrededor de A que tienen al menos rango r, esto es, si A es una matriz diferente de cero que tiene rango r exactamente, así que $\sigma_r > 0$, entonces se satisface que

(i) Cualquier matriz B tal que $\|B - A\| < \sigma_r$

tiene al menos rango r.

(ii) La matriz más cercana de rango r-1 (digamos C)

satisface $\|C - A\| = \sigma_r$.

En efecto σ_r da la distancia de A a la matriz más cercana de rango menor. Si σ_r no es pequeño A no puede ser cercana a una matriz de rango menor. Esta propiedad sugiere que el rango numérico r(A) será tomado como el número de valores singulares no insignificantes con esta elección A es tratada para propósitos de cálculo como

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}$$

donde \hat{U} contiene las primeras \hat{r} columnas de U, $\hat{\Sigma}$ es la matriz diagonal de $r \times r$ y \hat{V} contiene las primeras \hat{r} columnas de V.

La estrategia de búsqueda para el primer valor singular insignificante es más satisfactoria cuando existe una clara brecha entre valores singulares grandes y pequeños. Como la definición de insignificante es ambigua cualquier decisión óptima, con respecto a este punto, será sujeto de duda.

Apesar de estos problemas irresolubles, la examinación de valores singulares es la técnica más efectiva para seleccionar el rango numérico, sin agregar un conocimiento anterior al problema. No obstante la factorización QR puede también ser usada para estimar el

rango.

5.8.2 FACTORIZACION TRIANGULAR

Cuando aplicamos a una matriz A con rango r (usando aritmética exacta) la reducción de householder con intercambio de columnas obtenemos una matriz residuo nula o cero después de r pasos. Por analogía con el tratamiento de valores singulares pequeños como cero uno puede observar que A tiene un rango numérico \hat{r} si la norma de la matriz residuo es insignificante después de \hat{r} pasos. Esta estrategia no puede indicar ampliamente la cercanía de rango deficiente, ya que, una matriz residuo pequeña es una garantía que indica al menos un valor singular pequeño. Desafortunadamente este enfoque puede fracasar por detectar un rango deficiente cercano. Un rango deficiente cercano es casi siempre revelado en la práctica por una columna residuo pequeña durante la reducción de Householder.

La factorización QR con intercambio de columnas es una técnica extremadamente confiable y popular para la estimación del rango de una matriz en general.

Para estimar el rango durante el cálculo de la factorización QR, se toma como el número de elementos de la diagonal no-insignificantes, como el rango numérico, esto se lleva a cabo comparando la longitud original de la columna pivote con la longitud de su subcolumna en la matriz residuo actual usando una tolerancia ϵ_r (" r " por rango) con una política liberal de la estimación del rango (En la cual se intenta escoger el valor más grande posible de rango) ϵ_r es de orden u (la unidad de redondeo). Una estrategia conservadora escogera ϵ_r del

orden γ o más grande. Al inicio del paso k -ésimo de la reducción de householder $k-1$ columnas han sido exitosamente reducidas, así que la estimación actual del rango es $k-1$. Denotemos por γ_k la norma más grande de las columnas en la matriz residuo, así que la correspondiente columna es la candidata a columna pivote. Si el paso k -ésimo de reducción fuera completado el elemento (k,k) de la diagonal de R tendría magnitud γ_k . Denotemos por l el índice de la columna pivote en la matriz original. La columna pivote es tratada como insignificante si

$$\gamma_k < \epsilon_r (1 + \|a_l\|)_2$$

donde 1 es agregado a $\|a_l\|$ para reflejar un conjunto ampliamente usado de suposiciones de escalamiento. Si esta condición se tiene, el rango numérico de A es tomado como $k-1$ y la reducción termina. En otro caso el rango estimado es incrementado por uno y la reducción continúa (Este procedimiento debe terminar eventualmente cuando no halla más columnas residuo para ser procesadas).

Dado el rango numérico determinado en esta forma es \hat{r} el resultado de la forma que revela el rango

$$AP = \hat{Q} \begin{pmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ & E \end{pmatrix} \quad 5.8.6$$

donde P es una permutación \hat{Q} es el producto de \hat{r} transformaciones de Householder \hat{R}_{11} es una matriz triangular superior de $\hat{r} \times \hat{r}$ y E es una matriz insignificante de $(m-\hat{r}) \times (n-\hat{r})$. Para propósitos de cálculo E es tratada como cero y A es reemplazada por \hat{A}

$$\hat{A} = \hat{Q} \begin{pmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ & 0 \end{pmatrix} P^t$$

Para calcular la solución básica de $Ax = b$ procedemos como describimos

anteriormente. Formamos

$$\hat{A} = Q^t b \begin{pmatrix} \hat{d} \\ d_k \end{pmatrix}$$

donde \hat{d} tiene \hat{r} componentes y definimos

$$\hat{x} = P \begin{pmatrix} \hat{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \hat{R}_1 \hat{y}_1 = \hat{d}$$

ya que \hat{Q} es ortogonal el correspondiente residual para \hat{x} está dado por

$$b - A\hat{x} = \hat{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ d_k \end{pmatrix}$$

y satisface $\|b - A\hat{x}\|_2 = \|d_k\|_2$

la cantidad $\|d_k\|_2$ da una medida de la desviación del resultado de la compatibilidad de ignorar las últimas $n - \hat{r}$ columnas de AP.

5.8.3 LOS EFECTOS DE LAS ESTRATEGIAS DE LA ESTIMACION DE RANGO

En la solución de un sistema compatible $Ax=b$ la filosofía adoptada para estimar el rango usualmente afecta la solución calculada natural y el tamaño del residual. En una política conservadora se corre el riesgo de subestimar el rango, en situaciones dudosas puede hacerse. Ya que, una matriz residuo pequeña es más probable que refleje ruido más que información insignificante. Hablando ampliamente una estimación menor del rango tiende a producir una solución de norma más pequeña, pero corre el riesgo de no contar información útil o causar incompatibilidad inaceptable. Mientras que con una política liberal se corre el riesgo de tolerar valores singulares pequeños. Muy pequeños

elementos en la diagonal de R retienen el máximo nivel de información. La desventaja es que en los casos límite (de la frontera) la solución será calculada con una matriz que es mal condicionada e inaproximada. Como con la estimación del rango mismo, cada punto de vista es apropiado en ciertas circunstancias.

5.9 CUADRADOS MINIMOS

Nuestra discusión de problemas de álgebra lineal en las previas secciones se ha concentrado exclusivamente en la ecuación $Ax=b$ en la cual buscamos acoplar el lado derecho b exactamente con una combinación lineal de las columnas de A . En muchos casos b no puede ser expresada como una combinación lineal de las columnas de A , en la forma $Ax=b$, y el sistema $Ax=b$ es incompatible. El problema de cuadrados mínimos lineales toma un paso más cercano a la optimización por preguntar por un vector x que en algún sentido dá el mejor (aunque no perfecto) ajuste entre Ax y b .

Una alternativa natural para satisfacer $Ax=b$ es encontrar una x tal que Ax sea tan cercana como sea posible a b . La norma más ampliamente usada en minimización es la euclídiana o norma dos. Cuando $\|b - Ax\|_2^2$ es tan pequeña como sea posible, decimos que x es una solución (óptima) del problema de cuadrados mínimos lineales.

Es útil pensar que el problema de cuadrados mínimos involucra la matriz A en términos de los subespacios definidos por A , esto es, si el problema está dado en forma explícita el subespacio involucrado será el rango de A , pero si el problema está dado en forma implícita el subespacio involucrado es el definido por el núcleo de A . Entonces nuestro problema lo podemos ver como: Dado un vector $b \in \mathbb{R}^n$ y el espacio definido por A , debemos encontrar un punto sobre tal espacio tal que sea lo más cercano a b , como ya hemos visto en el capítulo tres, el punto que buscamos es la proyección ortogonal de b sobre el espacio dado. Este punto es el que nos da un residual óptimo como veremos en la siguiente sección.

5.9.1 CARACTERIZACION DEL RESIDUAL OPTIMO

Dada una matriz A diferente de cero cualquier m -vector, c , diferente de cero puede ser expresado como la suma de un vector c_R en el rango(A) y un vector c_N en el nulo(A^t) llamado

$$c = c_R + c_N \quad 5.9.1.1$$

Donde las componentes c_R y c_N de c están en el rango y en el espacio nulo. Los vectores c_R y c_N son únicos y satisfacen

$$c_R = Ac_A \text{ para alguna } c_A \quad A^t c_N = 0 \text{ y } c_R^t c_N = 0 \quad 5.9.1.2$$

En general los subíndices r y n en un m -vector denotarán las componentes del espacio rango y del espacio nulo, donde la matriz asociada A será clara desde el contexto. La notación c_A se refiere algún n -vector que satisface $c_R = Ac_A$. La unicidad de c_R y c_N implican que las componentes del espacio nulo y del espacio rango de vectores iguales deben ser iguales. De hecho

$$c = d \text{ si y sólo si } c_R = d_R \text{ y } c_N = d_N \quad 5.9.1.3$$

Aunque c_R es único, el vector c_A es único sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Debido a que la norma euclidiana es definida en términos del producto interno, las relaciones (5.9.1.1) y (5.9.1.2) tienen una importante consecuencia

$$\|c\|_2^2 = \|c_R\|_2^2 + \|c_N\|_2^2 \quad 5.9.1.4$$

así que la representación (5.9.1.1) de un m -vector en términos de sus componentes del espacio rango y del espacio nulo separa su norma euclidiana en dos partes independientes (esta propiedad no se tiene con las otras normas) Estas observaciones son relevantes para el problema de cuadrados mínimos, debido a que ellas determinan el residual de norma euclidiana más pequeño, $\rho = \|b - Ax\|_2$ para todo vector x ,

ya que el lado derecho b y el residual ρ son m -vectores ambos pueden ser escritos de la forma (5.9.1.1)

$$\begin{aligned} b &= b_R + b_N & \text{donde } b_R &= Ab_A \\ \rho &= \rho_R + \rho_N & \text{donde } \rho_R &= A\rho_A \end{aligned} \quad 5.9.1.5$$

combinando la definición de ρ , como $b - Ax$, con estas relaciones tenemos

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_R + \rho_N = b - Ax = b_R + b_N - Ax \\ &= b_R - Ax + b_N \end{aligned}$$

Un punto obvio pero crucial acerca de esta expresión es que el vector Ax está contenido en el rango de A . Cuando Ax es sustraído de b se crea el residual, se sigue desde (5.9.1.3) que la componente del espacio rango de $b - Ax$ debe ser $b_R - Ax$. Encontraste la substracción de Ax no puede haber eliminado alguna de las componentes del espacio nulo de b , así que, las componentes del espacio nulo de $b - Ax$ debe ser igual a b_N , las componentes del espacio nulo y del espacio rango del residual conjuntamente satisfacen

$$\rho_R = b_R - Ax \quad \text{y} \quad \rho_N = b_N \quad 5.9.1.6$$

El problema de cuadrados mínimos involucra minimizar la norma del residual. Conocemos desde (5.9.1.4) y (5.9.1.6) que el cuadrado de la norma euclidiana del residual ρ para cualquier x satisface

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \|\rho\|_2^2 = \|\rho_R\|_2^2 + \|\rho_N\|_2^2 \\ &= \|b_R - Ax\|_2^2 + \|b_N\|_2^2 \\ &\geq \|b_N\|_2^2 \end{aligned}$$

ya que b_N es retenida completamente en el residual, $\|b - Ax\|_2^2$ será minimizada, cuando la componente del espacio rango $\|b_R - Ax\|_2^2$ sea tan pequeña como sea posible.

Debido a que b_r está por definición en el rango(A), un vector x debe existir, tal que, $Ax = b_r$. Para este caso especial x , la componente entera del espacio rango de b es removida por la substracción de Ax .

lo cual significa que $b - Ax = b_N$ y la norma euclidiana del residual es igual a su cota inferior $\|b_N\|_2^2$.

La elección de x tal que $Ax = b_R$ no sólo minimiza la norma dos del residual, sino también fuerza el residual a estar completamente en el espacio nulo de A^t . Esto nos ha conducido a dos caracterizaciones (equivalentes) de la solución de cuadrados mínimos

$$x \text{ minimize } \|b - Ax\|_2^2 \text{ si y sólo si } A^t(b - Ax) = 0 \quad 5.9.1.7$$

$$x \text{ minimize } \|b - Ax\|_2^2 \text{ si y sólo si } Ax = b_R \text{ y } b - Ax = b_N \quad 5.9.1.8$$

un problema de mínimos cuadrados se dice que será compatible si su residual es cero y será incompatible en otro caso.

La ortogonalidad del vector residual a los renglones de A corresponde al principio geométrico que nos dice: que la distancia más corta de un punto a un plano es la longitud de la perpendicular al plano entre el plano y el punto. Aquí el punto es el vector b , y el plano contiene los vectores en el rango de A .

La unicidad de b_N implica que el vector residual óptimo de cuadrados mínimos es siempre único. El vector b_R es también único y el sistema $Ax = b_R$ es compatible por definición. Sin embargo sabemos que el vector x que satisface $Ax = b_R$ es único si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes. Ya que, cualquier vector x que satisface $Ax = b_R$ es una solución de cuadrados mínimos. Una importante conclusión es la siguiente: La solución de minimizar $\|b - Ax\|_2^2$ es única si y sólo si A tiene columnas de rango completo.

La propiedad más importante del residual óptimo de cuadrados mínimos es que se encuentra completamente en el espacio nulo (A^t). Ahora veremos como calcular la solución de cuadrados mínimos usando reflexiones de Householder con residual óptimo.

5.9.2 TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

Un método moderno para el problema de cuadrados mínimos ha sido desarrollado basado en transformaciones ortogonales las cuales preservan la longitud euclidiana y no pueden agrabar la condición de A como en el caso no-singular de sistemas compatibles, el intento es transformar un problema de mínimos cuadrados de manera que llegue a ser fácil de resolver (en este caso reducir A a una forma que revele el rango) Debido a que en la solución de ecuaciones, el conjunto de transformaciones que pueden ser aplicadas a A es restringido a las transformaciones ortogonales puesto que ellas no alteran la norma dos aquí las usaremos.

Sea A una matriz diferente de cero de $m \times n$ con el $\text{rango}(A)=r$. Suponga que una matriz ortogonal Q de $m \times m$ puede ser encontrada para producir una forma que revele el rango

$$Q^t A = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.9.2.1$$

donde F es de $r \times n$ y tiene renglones linealmente independientes. El bloque de ceros será ausente si $r=m$, F es usualmente un triángulo superior permutado la forma anterior permitira resolver el problema de cuadrados mínimos usando las matrices Q y F. Denotemos por d el vector transformado $Q^t b$ particionado como

$$d = Q^t b = \begin{bmatrix} d_r \\ d_{m-r} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}$$

usando esta definición y la estructura mostrada en (5.9.2.1) podemos escribir el residual transformado $Q^t b$ particionado como

$$Q^t(b-Ax) = Q^t b - Q^t Ax = \begin{bmatrix} d_r \\ d_{m-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Fx \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_r - Fx \\ d_{m-r} \end{bmatrix}$$

debido a que Q^t es ortogonal, su aplicación al residual no altera la longitud euclidiana y

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|Q^t(b - Ax)\|_2^2 \quad 5.9.2.2$$

combinando esta relación y la forma del residual transformado, concluimos

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \|Q^t(b - Ax)\|_2^2 \\ &= \|d_r - Fx\|_2^2 + \|d_{m-r}\|_2^2 \\ &\geq \|d_{m-r}\|_2^2 \end{aligned}$$

lo cual significa que $\|b - Ax\|_2^2$ no puede ser menor que $\|d_{m-r}\|_2^2$ para cualquier x que elijamos. El valor más pequeño posible para $\|b - Ax\|_2^2$ es su cota inferior. La igualdad con la cota inferior ocurre si y sólo si x satisface

$$d_r - Fx = 0 \text{ o equivalentemente } d_r = Fx \quad 5.9.2.3$$

ya que, el rango(F)= r , el sistema $Fx=d_r$ debe ser compatible. Cuando $Fx=d_r$, el residual transformado satisface

$$Q^t(b-Ax) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{m-r} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \|b - Ax\|_2^2 = \|d_{m-r}\|_2^2$$

esta discusión muestra que cualquier vector x que satisface $Fx=d_r$ es una solución de mínimos cuadrados. Un sistema que involucra F es fácil de resolver.

El proceso de reducción de Householder, con intercambio de columnas transforma una matriz A diferente de cero de $m \times n$ de rango r a una forma triangular superior que revela el rango. El resultado de la factorización QR puede ser escrito como

$$Q^t A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} R & P^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.9.2.4

donde Q^t representa r transformaciones de Householder, P es una permutación y R es triangular superior.

Los renglones de RP^t son linealmente independientes, así que la matriz transformada de $Q^t A$ tiene la forma deseada con $F=RP^t$. El problema de cuadrados mínimos puede entonces ser resuelto con el siguiente procedimiento

Algoritmo 5.9.2 SOLUCION AL PROBLEMA DE CUADRADOS MINIMOS CON LA FACTORIZACION QR

Paso 1) Calcule la factorización QR de A usando la reducción de Householder con intercambio de columnas, el procedimiento de Householder determina r (el rango de A) y las matrices P , Q y R

Paso 2) Forme $d=Q^t b$ y establezca d_r como las primeras r componentes de d

Paso 3) Calcule cualquier solución y del sistema $Ry=d_r$

Paso 4) Forme $x=Py$

Cuando A tiene columnas linealmente independientes ($r=n$) la matriz R es no-singular, la solución y de $Ry=d_r$ es única y la solución de cuadrados mínimos, x , es única. Cuando las columnas de A son linealmente dependientes ($r < n$) el sistema $Ry=d_r$ de $r \times n$ tiene un número infinito de soluciones. Recordemos que R tiene la forma

$R = (R_{11}, R_{12})$ donde R_{11} es una matriz triangular superior de $r \times r$, la presencia de esta matriz en la izquierda de R sugiere un vector obvio y que satisface $Ry=d_r$ llamado

$$y = \begin{pmatrix} y^p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_{11} y^p = d_r \quad 5.9.2.5.$$

cuando y tiene la forma anterior el vector asociado $x = Py$ es simplemente una reordenación de y y es llamada una solución básica del problema de cuadrados mínimos debido a que a lo más r de sus componentes son diferentes de cero.

5.9.3 LA SOLUCION DE CUADRADOS MINIMOS DE LONGITUD MINIMA

Cuando A tiene columnas de rango completo, la solución de cuadrados mínimos es única. En otro caso la equivalencia (5.9.18) muestra que la solución de longitud mínima del problema de cuadrados mínimos es equivalente a minimizar $\|b - Ax\|_2^2$. Debe de ser única la solución de longitud mínima x_+ del sistema compatible $Ax = b_r$ donde b_r es la componente del espacio rango de b en lo que sigue encontraremos una representación formal de esta.

Las factorizaciones que retienen el rango de A son el ingrediente clave en la definición de x_+ . Para la matriz A de $m \times n$ diferente de cero de rango r una factorización que retiene el rango tiene la forma

$$A = GH \quad \text{donde} \quad \text{rango}(G) = \text{rango}(H) = r$$

G es de $m \times r$ H es de $r \times n$. La solución de longitud mínima x_+ del sistema compatible $Ax = b_r$ puede ser expresada en términos de G , H & b_r como

$$x_+ = H^t z \quad \text{donde} \quad HH^t z = s \quad \& \quad Gs = b \quad 5.9.3.1.a$$

o bien

$$x_+ = H^t (HH^t)^{-1} s \quad 5.9.3.1.b$$

la expresión anterior no puede ser usada directamente para encontrar la solución de longitud mínima de cuadrados mínimos, debido a que el

problema de cuadrados mínimos es establecido en términos del mismo vector b , no en términos de su componente del espacio rango b_R . Para definir x_+ usando (5.9.3.1) necesitamos obtener el vector s que satisface $Gs = b_R$ desde el vector original b . Afortunadamente los factores que retienen el rango contienen información que permite extraer s sin conocer b_R explícitamente, ya que, las columnas linealmente independientes de G forman una base para el rango de A , la existencia de s es garantizada por la compatibilidad de $Gs = b_R$ y las columnas de rango completo de G asegura que s es única.

El espacio nulo de G^t y A^t son el mismo, así que $G^t v = 0$ para cualquier vector en el espacio nulo de A^t , ya que, b_N está en el espacio nulo de A^t se sigue que

$$G^t b = G^t (b_R + b_N) = G^t b_R$$

el punto clave aquí es que la componente del espacio nulo b_N es eliminada por la aplicación de G^t , lo cual significa que el producto $G^t b$ es afectado sólo en la componente del espacio rango de b . Debido a que b_R es definido como Gs la multiplicación de Gs por G^t y la sustitución de $G^t b$ por $G^t b_R$ da

$$G^t Gs = G^t b_R = G^t b$$

ya que $G^t G$ es no-singular, se sigue que s debe ser solución única de

$$G^t Gs = G^t b \quad \text{llamada } s = (G^t G)^{-1} G^t b \quad 5.9.3.2$$

además b_R , la componente del espacio rango de b es definida como Gs así que

$$b_R = Gs = G(G^t G)^{-1} G^t b \quad 5.9.3.3$$

sustituyendo la expresión para s de (5.9.3.2) en (5.9.3.1) obtenemos dos representaciones equivalentes formales de x_+ que involucran sólo G , H & b

$$x_+ = H^t z \quad \text{donde } HH^t z = s \quad \text{y } G^t G s = G^t b \quad 5.9.3.4.a$$

$$x_p = H^t (HH^t)^{-1} (G^t G)^{-1} G^t b \quad 5.9.3.4.b$$

aunque estas formas son matemáticamente correctas, la ocurrencia de dos matrices $G^t G$ y $H^t H$ es una advertencia del difícil potencial numérico del número de condición al cuadrado.

La forma que retiene el rango $A=GH$ asociada con la factorización QR es

$$A = Q_r R P^t \quad \text{con } G = Q_r \quad \text{y} \quad H = R P^t$$

donde Q_r (las primeras r columnas de la matriz original Q) tiene columnas ortonormales R es triangular superior de $r \times r$ y P es una permutación.

La ortogonalidad de las columnas de Q_r significa que el producto $G^t G$ es simplemente $Q_r^t Q_r = I_r$ la identidad de dimensión r . La expresión $(G^t G)^{-1} G^t$ que aparece en (5.9.3.2) se simplifica y s y b_r están dados por

$$s = Q_r^t b \quad \& \quad b_r = Q_r Q_r^t b$$

la expresión formal para la solución de longitud mínima x_p es aplicado tanto para el problema de cuadrados mínimos lineales como para sistemas compatibles de ecuaciones.

$$x_p = P R^t z = P R^t (R R^t)^{-1} Q_r^t b \quad 5.9.3.5$$

Debido a que Q_r tiene columnas ortonormales el vector crucial s está dado por $Q_r^t b$ sin hacer caso si b está o no en el rango de A .

La factorización QR puede ser usada para calcular x_p con la factorización QR que retiene el rango como sigue.

Paso 1) Forme $s = Q_r^t b$

Paso 2) Solucione $R R^t z = s$

Paso 3) Forme $x_p = P R^t z$

Cuando A tiene columnas de rango completo la solución de cuadrados

mínimos es única y R es no-singular. La expresión $R^t(RR^t)^{-1}$ en (5.9.3.5) se simplifica a R^{-t} y el cálculo de x_p llega a ser equivalente al procedimiento para minimizar $\|Q^t(b-Ax)\|_2^2$ usando ecuaciones normales.

Las técnicas para evitar el mal condicionamiento en el cálculo de los factores QR de la matriz transpuesta A^t no es un gran trabajo para el problema de cuadrados mínimos de rango deficiente debido a que la condición de ambos factores que retienen el rango G y H son cuadrados en la expresión (5.9.3.4.b).

5.9.4 LA FACTORIZACION ORTOGONAL COMPLETA

La forma que retiene el rango $A=GH$ de la factorización ortogonal completa es

$$AP=Q_r(\bar{R} \ 0)V^t \quad \text{con } G=Q_r \quad \& \quad H=(\bar{R} \ 0)V^t P^t$$

donde las columnas Q_r son ortonormales, P es una permutación, \bar{R} es de $r \times r$ triangular superior no-singular y V es ortogonal. Sustituyendo estas matrices en (5.9.3.4) obtenemos el siguiente algoritmo para calcular x_p como con la factorización QR, el procedimiento es idéntico al caso compatible, debido a que las columnas de Q_r son ortonormales.

Algoritmo 5.9.4 CALCULO DE x_p CON LA FACTORIZACION ORTOGONAL COMPLETA

Paso 1) Formar $s=Q_r^t b$

Paso 2) Solucionar $\bar{R}v=s$

Paso 3) Formar $x_p = PV \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$

ya que, la condición de \bar{R} es la misma que la condición de A, con esta técnica no aparece el número de condición al cuadrado. La factorización ortogonal completa da un camino seguro para usar las reducciones de Householder, para encontrar la solución de longitud mínima de cuadrados mínimos.

5.9.5 LA DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES

Finalmente la solución de longitud mínima de un problema de cuadrados mínimos puede ser obtenida de la descomposición de valores singulares de A.

$$A = USV^t = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^t$$

donde U es una matriz ortogonal de $m \times m$, V es una ortogonal de $n \times n$ y Σ es una matriz diagonal de $r \times r$ de valores singulares positivos, $\text{diag}(\sigma_i) \quad i=1, \dots, r$. Como anteriormente lo hicimos, las primera r columnas de las matrices ortogonales la designaremos por U_r & V_r . La forma que retiene el rango $A = GH$ de la descomposición de valores singulares es

$$A = U_r \Sigma V_r^t \quad \text{con } G = U_r \quad \& \quad H = \Sigma V_r^t \quad 5.9.5.1$$

sustituyendo en la expresión (5.9.3.4) para x_* las propiedades especiales de U_r , Σ & V_r^t implican que $G^t G = I$ y $H H^t = \Sigma^2$, la forma resultante para x_* es

$$x_* = V_r \Sigma^{-1} U_r^t b$$

la definición y unicidad de la seudo-inversa A^* implican que la

solución de longitud mínima de cuadrados mínimos puede ser escrita como

$$x_+ = A^+ b \quad \text{donde } A^+ = V_r \Sigma^{-1} U_r^t \quad 5.9.5.2$$

la cual es la forma idéntica obtenida en el caso compatible. Esta forma es particularmente útil en caso de rango casi deficiente, en la cual una decisión acerca del rango numérico es basada sobre el tratamiento de valores singulares casi insignificantes. Para encontrar la solución mínima del problema de cuadrados mínimos se involucra la matriz A^+ ; recordemos que la pseudoinversa de A^t es simplemente la transpuesta de A^+ . Ya que, no hemos impuesto restricciones a la dimensionalidad en las ecuaciones derivadas $x_+ = A^+ b$ se sigue desde (5.9.5.2) que la solución de longitud mínima y_+ que

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \|c - A^t y\| \\ &y \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

es

$$y_+ = (A^t)^+ c = U_r \Sigma^{-1} V_r^t c$$

5.9.6 RANGO Y ESPACIO NULO

Sea A una matriz diferente de cero de rango r , hemos visto ya la cercana conexión entre el problema de cuadrados mínimos de minimizar $\|b - Ax\|_2^2$ y las componentes de b del espacio nulo y del espacio rango. En esta sección describiremos como obtener explícitamente bases para los cuatro subespacios fundamentalmente asociados con A : $\text{rango}(A)$, el $\text{nulo}(A)$, el $\text{rango}(A^t)$ y el $\text{nulo}(A^t)$. Bases para estos subespacios son de gran interés, en muchas otras circunstancias,

particularmente en optimización con restricciones.

5.9.6.1 FACTORIZACIONES QUE RETIENEN EL RANGO

El ingrediente clave en encontrar bases adecuadas para estos subespacios es una factorización que retiene el rango $A=GH$, donde G es de $m \times r$, H es de $r \times n$ y ambas G y H tienen rango r . El espacio rango de A es un espacio r -dimensional de \mathbb{R}^m . Una base obvia para el espacio rango de A es dada por las r columnas linealmente independientes de G (Para ver porque, note que cualquier vector de la forma Av puede también ser escrito como GHv).

Un argumento de dimensionalidad muestra que una base para el espacio nulo de A es dada por cualquier matriz K de $m \times (m-r)$ con dos propiedades: 1) sus columnas son linealmente independientes y 2) $G^t K = 0$ (por decir que una cierta matriz forma una base para un subespacio siempre significa que sus columnas así son).

Ahora veamos el espacio nulo de A , vemos que H y A tiene el mismo espacio nulo, de este resultado se sigue que cualquier vector z en el espacio nulo de A debe satisfacer $Az = GHZ = 0$. Ya que, G tiene columnas linealmente independientes GHZ puede ser cero sólo si $HZ = 0$, lo cual muestra que z está en el espacio nulo de H . Similarmente $HZ = 0$ implica que $Az = 0$.

El espacio nulo de A es un subespacio de dimensión $(n-r)$ de \mathbb{R}^n . En efecto, cualquier matriz Z con columnas linealmente independientes tales que $HZ = 0$ debe ser una base para el subespacio nulo de A . Siempre que sea posible, denotaremos una base para el espacio nulo por Z . Finalmente, dada una matriz Z que forma una base para el espacio nulo

de A cualquier matriz Y de $n-r$ con columnas linealmente independientes tales que $Y^t Z = 0$ debe ser una base para el espacio rango r -dimensional de A^t

La siguiente tabla resume como deducir bases para los cuatro subespacios fundamentales desde una factorización que retiene el rango $A=GH$

Subespacio	Base	Dimensión	Especificación
rango(A)	G	$m \times r$	G
nulo(A^t)	K	$m \times (m-r)$	$G^t K = 0$ 5.9.6.1
rango(A^t)	Y	$n \times r$	$Y^t Z = 0$
nulo(A)	Z	$n \times (n-r)$	$HZ = 0$

Ahora procederemos a extraer matrices específicas G, K y Z desde las transformaciones que retienen el rango.

5.9.6.2 LA DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES

Los factores que retienen el rango cuando usamos SVD son $G=U$ y $H=ZV_r^t$ de la tabla 5.9.6.1 veremos que la matriz U_r forman una base ortogonal para el espacio rango de A y las últimas $m-r$ columnas de U deben formar una base ortogonal para el espacio nulo de A^t .

La ortogonalidad de V implica que $V_r^t V_{n-r} = 0$, ya que, $H=ZV_r^t$ se sigue $HV_{n-r} = 0$ y V_{n-r} sirve como la matriz Z la cual es en este caso una base ortonormal para el espacio nulo de A. Además las r columnas de V_r sirven como Y una base ortonormal para el espacio de A^t .

5.9.6.3 LA FACTORIZACION ORTOGONAL COMPLETA Y LA FACTORIZACION QR

La factorización que retiene el rango de la factorización QR es

$$A=GH \text{ con } G=Q_r \quad \& \quad H=RP^t$$

Donde Q_r denota las primeras r columnas de Q . Vemos de la tabla 5.9.6.1 que las columnas de Q_r forman una base ortogonal para el rango de A . La matriz Q_{m-r} , forma una base ortonormal para el espacio nulo de A^t

La factorización ortogonal completa corresponde a los factores que retienen el rango

$$A=GH \text{ con } G=Q_r \quad \& \quad H=(\bar{R} \ 0)V^tP^t$$

usando las especificaciones dadas en 5.9.6.1 buscamos una matriz Z de rango completo de $n \times (n-r)$ tal que $HZ=0$. Denotemos por \bar{V} de $n \times n$ la matriz PV , la cual es ortogonal y satisface

$$H\bar{V}=(\bar{R} \ 0)\bar{V}^t\bar{V}=(\bar{R} \ 0)$$

lo cual muestra que las últimas $n-r$ columnas de \bar{V} denotadas por Z son ortogonales a H y así formamos una base ortonormal para el nulo(A), las primeras columnas de \bar{V} denotadas por Y son linealmente independientes y ortogonales a las columnas de Z , lo cual significa que Y es una base ortonormal para el rango(A^t).

5.10 PROYECCIONES ASOCIADAS CON LOS SUBESPACIOS DE UNA MATRIZ A

Ahora nos moveremos desde un subespacio general s a los cuatro subespacios familiares asociados con una matriz A de $m \times n$ diferente de cero. El resultado estandar que establece que: cada m -vector b puede estar escrito como $b = b_R + b_N$ donde b_R está en el rango(A) y b_N está en el nulo(A^t), puede ser expresado en términos de las proyecciones por decir b_R es la proyección de b en el rango(A) y b_N es su proyección en el espacio nulo(A^t) (hemos previamente llamado b_R la componente del espacio rango de b y b_N la componente del espacio nulo) Como hemos visto en el capítulo tres, para un espacio general la única matriz de proyección $P_{R(A)}$ (el proyector en el rango(A)) tiene la propiedad de que

$$P_{R(A)} b = b_R \quad \text{para todo } m \text{ vector } b \quad 5.10.1$$

la solución de longitud mínima de cuadrados mínimos x_+ de $\min \|b - Ax\|_2^2$ está dada por $x_+ = A^+ b$ y satisface $b_R = Ax_+$, multiplicando x_+ por A vemos que

$$Ax_+ = AA^+ b = b_R$$

la cual corresponde a la proyección en el rango de A , como hemos visto en el capítulo tres, esto es,

$$P_{R(A)} = AA^+ \quad \text{y}$$

$$P_{N(A^t)} = I - AA^+$$

y también vimos que

$$P_{R(A^t)} = A^+ A \quad \text{y}$$

$$P_{N(A)} = I - A^+ A$$

5.10.1 CALCULO DE LA PROYECCION

La representación formal es una deducción útil como resultado matemático, pero es raramente apropiada para cálculos, debido a que ella contienen un número explícito de inversas y pseudoinversas. El cálculo de la proyección deberá siempre sugerir un problema de cuadrados mínimos asociado, que involucre A y A^t .

5.10.2 PROYECCIONES DE UN VECTOR

Dado un m -vector b , supongase que deseamos calcular b_R , la proyección de b en el rango de AC o equivalentemente, la componente del espacio rango de b usando cualquier factorización que retiene el rango $A=GH$, hemos mostrado que

$$P_{R(A)}(b) = b_R = G(G^t G)^{-1} G^t b$$

esta expresión se simplifica cuando G tiene columnas ortonormales, como cuando los factores que retienen el rango surgen de la factorización QR o de la descomposición de los valores singulares. Para la factorización QR, G es Q_r , las primeras r columnas de Q ; para la SVD, G es U_r las primeras r columnas de U , en ambos ejemplos $G^t G$ es la identidad r -dimensional y tenemos

$$b_R = P_{R(A)}(b) = Q_r Q_r^t b \quad (\text{Factorización QR})$$

$$b_R = P_{R(A)}(b) = U_r U_r^t b \quad (\text{Descomposición de valores singulares})$$

cuando una base ortonormal es disponible, la proyección de un vector en el apropiado subespacio puede ser calculado directamente.

El vector b_N , la proyección de b en el espacio nulo(A^t), puede convenientemente encontrarse por resolver el problema de de cuadrados

minimos $\min \|b - Ax\|_2$ ya que el residual óptimo es siempre b_N .

5.10.3 PROYECCIONES ORTONORMALES OBTENIDAS DE BASES ORTONORMALES

Las matrices de proyección tienen una forma "agradable" si es disponible una base ortonormal para el subespacio relevante (o su complemento ortogonal).

Denotemos por M una base ortonormal para el rango de A y por K una base ortonormal para el nulo(A^t). Ya que $M^t = M^t$ y $K^t = K^t$ se sigue que

$$P_{R(A)} = MM^t = I - KK^t \quad \text{y} \quad P_{N(A)} = KK^t = I - MM^t$$

y si Y y Z denotan bases ortonormales para $\text{rango}(A^t)$ y $N(A)$ es fácil ver que

$$P_{R(A^t)} = YY^t = I - ZZ^t \quad \text{y} \quad P_{N(A^t)} = ZZ^t = I - YY^t$$

Por ejemplo, si la descomposición de valores singulares de A ha sido calculada M puede ser tomada como U_r (las primeras r columnas de U) entonces tenemos

$$\begin{aligned} P_{R(A)} &= U_r U_r^t & \text{y} & & P_{N(A)} &= I - U_r U_r^t \\ P_{R(A^t)} &= V_r V_r^t & \text{y} & & P_{N(A^t)} &= V_{n-r} V_{n-r}^t \end{aligned}$$

similarmente. Si la factorización QR de A es disponible denotemos Q_r las primeras r columnas de Q por lo que tenemos

$$\begin{aligned} P_{R(A)} &= Q_r Q_r^t & \text{y} & & P_{N(A)} &= I - Q_r Q_r^t \\ P_{R(A^t)} &= \bar{V}_r \bar{V}_r^t & \text{y} & & P_{N(A^t)} &= \bar{V}_{n-r} \bar{V}_{n-r}^t \end{aligned}$$

Gill, E. P.; Murray Walter and Wright H. Margaret(1991)*Numerical Linear Algebra and Optimization*, Volumen I, Addison Wesley.

Hager W. William(1989) *Applied Numerical Linear Algebra*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

Lawson, C. L. and Hanson, R. J. (1974) *Solving Least Square Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

Stewart, G. W. (1973) *Introduction to matrix computations*, Academic Press, London and New York.