



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL FLUJO EN LA CAVIDAD FORZADA Y ALGUNOS
METODOS DE SOLUCION

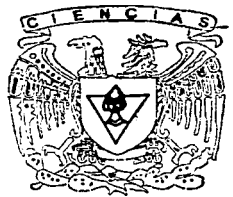
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

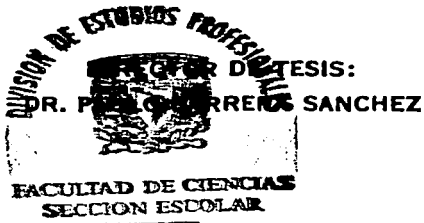
FISICO

PRESENTA

CARLOS ALBERTO LOPEZ COLLIER DE LA MARLIERE



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

**El Flujo En La Cavidad Forzada Y Algunos
Métodos De Solución**

por

Carlos Alberto López Collier De La Marliere

Director de Tesis
DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ



REPUBLICA ARGENTINA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
Y CULTURA

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente**

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El flujo en la cavidad forzada y algunos métodos de solución"

realizado por CARLOS ALBERTO LOPEZ COLLIER DE LA MARLIERE

con número de cuenta 9653394-1 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. PABLO BARRERA SANCHEZ

Propietario

DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO

Propietario

DR. RAMON PERALTA Y FABI

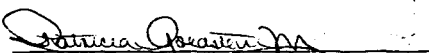
Suplente

DR. LUIS ANTONIO DAVALOS OROZCO

Suplente

DR. GERARDO RUIZ CHAVARRIA

Consejo Departamental de Física


DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

Agradecimientos

Me gustaría extender mi gratitud a los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM por el apoyo, dedicación y tiempo brindado durante mis estudios de licenciatura. En especial deseo agradecer a mi director de Tesis: Dr. Pablo Barrera Sánchez, por sus consejos y motivación que me mantuvo trabajando en este proyecto.

Quisiera agradecer en especial a los doctores: Carlos Arturo Vargas y Antonmaria Minzoni, pues fueron ellos quienes me dieron las bases que me permiten ahora finalizar con éxito mi carrera.

El manuscrito completo de esta tesis fue cuidadosamente leído por los doctores: Luis Antonio Dávalos Orozco, Gerardo Rufz Chavarría y Ramón Peralta Y Fabi. Les Agradezco por el tiempo que le dedicaron a ésta tarea y por sus críticas que mejoraron ésta tesis.

Mi más profundo agradecimiento a mis mamás, Mariette y Eva, quienes han sido mi soporte y apoyo a lo largo de mi vida. También deseo agradecer a mi tío Cristián por el apoyo brindado a lo largo de mis estudios. Gracias a toda mi familia por su cariño y respaldo incondicional.

Índice general

1. Descripción de los fluidos	1
1.1. Introducción	1
1.2. ¿Qué es un fluido?	3
1.3. Las ecuaciones de los fluidos	3
1.4. Algunos resultados interesantes	18
2. Solución de las ecuaciones de Poisson y Convección Difusión	25
2.1. Introducción	25
2.2. Discretización de las ecuaciones	25
2.3. Métodos iterativos estacionarios	32
2.4. Multigrid	37
2.5. Ejemplos numéricos	48
3. Solución del problema de la cavidad forzada	52
3.1. Ecuaciones del problema y método de solución	52
3.2. Resultados	58
3.3. Discusión de los resultados	72
3.4. Conclusiones	72
A. Código del programa de la cavidad	74
A.1. Programa principal: cvt.f	74
A.2. Subrutina : ascend.f	79
A.3. Subrutina : cdrhs.f	80
A.4. Subrutina : condiff.f	83
A.5. Subrutina : descend.f	85
A.6. Subrutina : idx.f	86
A.7. Subrutina : loadsol.f	87
A.8. Subrutina : mgvcycle.f	87
A.9. Subrutina : smooth.f	89
A.10. Subrutina : streamrhs.f	91
A.11. Subrutina : systemsolve.f	93
A.12. Subrutina : transferencia.f	95
A.13. Subrutina : update.f	97
A.14. Parametros: inputs.dat	98

A.15. Makefile Para Linux	98
Bibliografia	100

Índice de figuras

1.1.	Máquina para la aplicación de capas.	1
1.2.	Experimentos de flujos de Stokes en cavidades rectangulares. (Taneda 1979)	2
1.3.	Flujo dentro de un tubo. La cantidad de fluido que sale es proporcional a $u \cdot \hat{n} dA$	5
1.4.	Fuerzas sobre un elemento de volumen con forma de tetraedro	7
1.5.	Fuerzas sobre un pequeño cubo del fluido	8
1.6.	Fluido entre 2 placas y la distorsión de un elemento rectangular en el flujo.	11
1.7.	Relación entre esfuerzo y deformación para diferentes fluidos	12
1.8.	Deformación de un elemento rectangular en un flujo arbitrario.	13
1.9.	Interpretación de la vorticidad en 2 dimensiones.	17
1.10.	Flujo en una esquina debido al deslizamiento del plano inferior.	20
1.11.	Flujo cerca de una esquina con una frontera en movimiento.	21
1.12.	Gráfica de $\sin(x)/x$	22
1.13.	Un vértice obtenido de la solución para el caso $\alpha = \pi/4$. El área sombreada muestra la posición de las paredes.	23
1.14.	Zona de vorticidad constante en el flujo.	24
2.1.	La región del problema y su malla.	26
2.2.	Molécula de cálculo o estencil.	26
2.3.	Solución exacta para el problema (2.5) para el valor de $P = 20$	28
2.4.	Cuando $R > 2$ aparecen oscilaciones que no son parte de la solución. Se muestran los casos para R igual a: 1) 5, 2) 2.5, 3) 1.	29
2.5.	Las soluciones ya no presentan oscilaciones. Se muestran los casos para R igual a: 1) 5, 2) 2.5, 3) 1.	30
2.6.	Magnitud de los valores propios en la línea $m = n$	35
2.7.	Aproximación inicial y resultado después de 40 iteraciones	36
2.8.	Disminución del error con las iteraciones	36
2.9.	Resultado de la iteración de Jacobi aplicado a una función de prueba que tiene todos los modos posibles para el tamaño de malla. El color muestra la intensidad de cada modo después de una iteración.	37
2.10.	Cuando el error es suave, la interpolación lineal lo aproxima bastante bien, no siendo el caso si éste oscila rápidamente.	39
2.11.	Método de corrección de malla gruesa.	40
2.12.	Gráfica del Ciclo V	41

2.13. Transformación de los modos de alta frecuencia al pasar de una malla fina a una malla gruesa.	43
2.14. Intensidades de los coeficientes de los modos complementarios en (2.31) sobre la línea $m = n$	44
2.15. Intensidades de los coeficientes de los modos resultantes al aplicar <i>CGM</i> a un vector propio $w_{m,n}^h$, se muestra el valor sobre la línea $m = n$	45
2.16. Aplicación de un ciclo <i>V</i> a una función de prueba que contiene todos los modos posibles del error.	46
2.17. Error inicial y su distribución de modos de Fourier.	48
2.18. Historia de la iteración de Jacobi para el problema de prueba.	48
2.19. Error final y su distribución de modos de Fourier.	49
2.20. Convergencia para los ciclos <i>V</i>	49
2.21. Error final y su distribución de modos de Fourier para los ciclos <i>V</i>	49
2.22. Error inicial y su distribución de modos de Fourier para el problema (2.34).	50
2.23. Disminución del residuo para diferentes valores del parámetro <i>P</i>	50
2.24. Disminución del error para diferentes valores del parámetro <i>P</i>	51
3.1. Esquema del problema y numeración de los vórtices en las diferentes regiones.	52
3.2. Marco de referencia para calcular la vorticidad, en este caso sobre la línea $x = 0$	54
3.3. Función de Corriente para el flujo de Stokes.	58
3.4. Segundo vórtice izquierdo para flujo de Stokes.	59
3.5. Tercer vórtice izquierdo para flujo de Stokes.	59
3.6. Velocidades a través del centro geométrico para el flujo de Stokes	59
3.7. Vorticidad para el flujo de Stokes	60
3.8. Función de corriente, $Re = 100$	60
3.9. Vórtices secundarios, $Re = 100$	60
3.10. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 100$	61
3.11. Vorticidad $Re = 100$	61
3.12. Función de corriente, $Re = 400$	61
3.13. Vórtices secundarios, $Re = 400$	62
3.14. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 400$	62
3.15. Vorticidad, $Re = 400$	62
3.16. Función de corriente, $Re = 2000$	63
3.17. Vórtices secundarios, $Re = 2000$	63
3.18. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 2000$	63
3.19. Vorticidad, $Re = 2000$	64
3.20. Función de corriente, $Re = 3200$	64
3.21. Vórtices secundarios, $Re = 3200$	64
3.22. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 3200$	65
3.23. Vorticidad, $Re = 3200$	65
3.24. Función de corriente, $Re = 5000$	65
3.25. Vórtices secundarios, $Re = 5000$	66
3.26. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 5000$	66
3.27. Vorticidad, $Re = 5000$	66

3.28. Función de corriente, $Re = 6000$.	67
3.29. Vórtice superior izquierdo, $Re = 6000$.	67
3.30. Vórtices secundarios, $Re = 6000$.	67
3.31. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 6000$.	68
3.32. Vorticidad, $Re = 6000$.	68
3.33. Función de corriente, $Re = 7500$.	68
3.34. Vórtices secundarios, $Re = 7500$.	69
3.35. Vórtices Terciarios, $Re = 7500$.	69
3.36. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 7500$.	69
3.37. Vorticidad, $Re = 7500$.	70
3.38. Función de corriente, $Re = 8000$.	70
3.39. Vórtices secundarios, $Re = 8000$.	70
3.40. Vórtices Terciarios, $Re = 8000$.	71
3.41. Velocidades a través del centro geométrico, $Re = 8000$.	71
3.42. Vorticidad, $Re = 8000$.	71

Capítulo 1

Descripción de los fluidos

1.1. Introducción

El problema que descamos enfrentar consiste en resolver las ecuaciones que describen el flujo de un fluido Newtoniano, incompresible y viscoso contenido en una región rectangular cuyo movimiento es generado por el desplazamiento de una de las fronteras. A este problema se le conoce como el flujo en la cavidad forzada.

Un lugar en donde esta clase de flujos juega un papel importante se muestra en la figura (1.1). Ésta es una máquina para la aplicación de capas que se utiliza en la producción de papel de alta calidad y de películas fotográficas. La estructura del flujo influye en la calidad de la capa aplicada y consecuentemente en la calidad del producto [1].

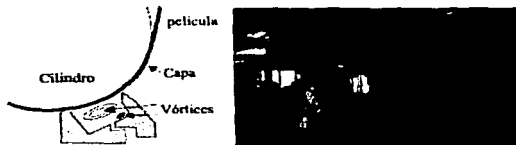


Figura 1.1: Máquina para la aplicación de capas.

Las ecuaciones de Navier-Stokes serán utilizadas para modelar el flujo en la cavidad. En variables adimensionales, el sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

en donde \mathbf{u} representa la velocidad del flujo, p es la presión y $Re = UL/\nu$ es el parámetro conocido como el número de Reynolds formado por: la longitud de la caja L , la velocidad de la tapa U y la viscosidad cinemática del fluido ν . El número de Reynolds es el único parámetro que aparece

en las ecuaciones pero otros influyen en el flujo, como los que se originan por la geometría de las fronteras.

Hay varias razones por las cuales este problema es importante. En primera instancia existen varios problemas industriales en donde esta clase de flujos y las estructuras que muestran juegan un papel. Las máquinas aplicadoras de capas delgadas de fluido son un ejemplo, pero también aparecen en otras aplicaciones como: celdas para la producción de cristales, cavidades mezcladoras que se utilizan para sintetizar compuestos de polímeros y hasta en el diseño de superficies que reducen la fricción y la turbulencia [2].

Sin embargo, las razones más fuertes se encuentran en el estudio de la mecánica de fluidos. Este es un problema que permite hacer comparaciones precisas entre la teoría, los experimentos y los cálculos numéricos. De hecho, el problema de la cavidad es estándar para probar los nuevos esquemas numéricos. Otra ventaja de este modelo es que la región del flujo no cambia al variar el número de Reynolds, lo que permite investigar su comportamiento sobre todo el intervalo $0 < Re < \infty$.

Los estudios del problema de la cavidad demuestran que en ella ocurren muchos fenómenos del flujo incompresible como son : vórtices, patrones tridimensionales complejos, movimientos de partículas caóticos y turbulencia [3].

Nosotros estudiaremos el problema bidimensional en una cavidad cuadrada. Este es de interés porque muestra características importantes del flujo a pesar de ser una simplificación considerable con respecto al caso tridimensional. La figura (1.2) muestra como se observa el flujo en una cavidad rectangular. En las fotos se aprecian los vórtices principales en el centro y los vórtices en las esquinas.



Figura 1.2 Experimentos de flujos de Stokes en cavidades rectangulares. (Taneda 1979)

El problema donde el término inercial de la ecuación de Navier-Stokes es despreciable se le llama flujo de Stokes. En ese caso la ecuación es lineal y es posible obtener soluciones analíticas como veremos más adelante. Una de las predicciones del flujo de Stokes más interesantes es la existencia de una infinidad de vórtices [4], cada vez más pequeños en las esquinas de la cavidad. Se han hecho experimentos de flujo lento en donde se busca encontrar estos vórtices pero no se ha detectado más allá del tercero (fig. 1.2). Para el flujo de Stokes se han detectado numéricamente 25 vórtices.

Para un número de Reynolds arbitrario, la única opción es la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes. Los valores de la solución con los que compararemos nuestros resultados

también fueron obtenidos de manera computacional. Los cálculos numéricos son complicados aún para el flujo de Stokes y su dificultad aumenta ya que aparecen los términos no lineales al incrementar el número de Reynolds.

1.2. ¿Qué es un fluido?

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es un fluido. En primera instancia los reconocemos al diferenciarlos de los sólidos. Los sólidos tienen una forma definida y los fluidos toman la forma de su contenedor, los fluidos se escurren bajo una fuerza de cuerpo y los sólidos se quedan en su lugar si la fuerza de cuerpo es pequeña.

Físicamente, la propiedad central en que se basa la distinción es la manera en la cual el material responde a los esfuerzos cortantes; un sólido al sentir un esfuerzo cortante sufre una deformación finita, el fluido se sigue deformando mientras se aplique el esfuerzo.

Los fluidos que nos son más familiares son el agua y el aire. Un líquido y un gas nos pudieran parecer muy diferentes; en los líquidos hay cohesión y poseen una superficie libre que los separa de su ambiente, los gases se expanden y ocupan todo el espacio de su contenedor, pero ambos comparten esa facilidad de deformación haciendo su comportamiento dinámico similar. Claro que el agua y el aire son diferentes, los valores de su densidad, compresibilidad y viscosidad son muestra de ello. En condiciones normales de presión y temperatura el agua es más densa que el aire en un factor de 900, el aire es más compresible que el agua por un factor de 16000, y la viscosidad del agua es mayor que la del aire por un factor de 55; aunque estas diferencias parezcan considerables, sólo harán que la magnitud de la fuerza necesaria para producir la misma deformación sea diferente.

La forma en la que se relacionan los esfuerzos con la rapidez de deformación nos lleva a una clasificación de los fluidos. Cuando la relación es lineal se les denomina *Newtonianos* ya que Newton fue el primero en postularla. Cuando la relación es cualquier otra (no lineal, diferencial, etc.) el fluido es no Newtoniano. El aire y el agua pertenecen a la primera clase; la sangre, la leche, algunas soluciones proteínicas, la miel, las grasas y los jabones son ejemplos de la segunda clase. Los fluidos no Newtonianos se subdividen en muchas más categorías. Por ejemplo: la salsa de tomate es un fluido pseudoplástico, al agitarla un poco no sale pero al agitarla vigorosamente la viscosidad se reduce y fluye. La arena movediza es un fluido tixotrópico, su viscosidad aparente decrece y se recupera al quitar el esfuerzo, ésta cambia en función de su pasado inmediato.

1.3. Las ecuaciones de los fluidos

Ideas preliminares

Conocer el flujo significa determinar el valor de la velocidad, la densidad, la presión o la temperatura, entre otras, en cada momento y en cada punto del fluido; aquí se supone que estas propiedades varían de manera continua en toda la región de interés.

Hay dos sistemas coordenados. El primero se conoce como sistema Euleriano. Este sistema está fijo y las variables del flujo dependen de la posición y del tiempo. En cierto sentido, la visión Euleriana nos proporciona una foto de las variables del flujo en cada instante.

El otro sistema coordinado es el Lagrangiano. En él, al igual que en mecánica de partículas, se sigue la evolución temporal de un elemento de volumen que depende de una posición y tiempo fijos dados. La descripción que usaremos aquí será la Euleriana aunque la derivación de las ecuaciones de movimiento se hará en la descripción Lagrangiana.

En general, tanto el campo de velocidades, como las demás variables son funciones de la posición y del tiempo; cuando sólo son funciones de la posición, se dice que el flujo es estacionario. Un flujo estacionario no se encuentra en reposo, sino que su velocidad no depende del tiempo pero puede variar en la posición.

Una línea cuya tangente es paralela a la velocidad en cada instante se le llama línea de flujo o línea de corriente. Si la línea de corriente tiene como parametrización $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ entonces $d\mathbf{x}/ds$ es un vector proporcional a $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. De aquí se obtiene que la familia de líneas de corriente satisfacen

$$\frac{dx/ds}{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy/ds}{v(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz/ds}{w(\mathbf{x}, t)} = cte., \quad (1.2)$$

siendo u, v, w las componentes cartesianas del vector \mathbf{u} . Cuando un flujo es estacionario, las trayectorias de los elementos de fluido y las líneas de corriente coinciden.

Un flujo es bidimensional si el campo de velocidades es de la forma $\mathbf{u} = (u, v, 0)$. El flujo bidimensional es una buena aproximación cuando una tercera componente no influye de manera importante en el flujo.

Los fluidos están sujetos a las leyes de la Física y por tanto satisfacen los principios de balance de masa y de movimiento. Esto nos permitirá encontrar las ecuaciones que describen su movimiento.

Conservación de la masa

La conservación de la masa es probablemente la idea más sencilla; la materia no se crea ni se destruye espontáneamente. Por tanto, la cantidad total de masa es constante salvo cuando se agregue o se retire. Es posible entonces saber siempre cuanta hay dentro de una región en un instante dado. Si conocemos la masa por unidad de volumen dentro de la región de interés, podemos obtener la masa total por medio de la suma en todo el volumen:

$$\text{Masa en el interior} = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

en donde ρ es la densidad del fluido y se esta considerando un volumen fijo en el espacio. La densidad, en general, puede ser función de la posición, el tiempo y la temperatura pero aquí se considera a esta última como constante.

El fluido puede estar entrando y saliendo, así que para saber cuanta masa tenemos en cada instante dentro de nuestro volumen es necesario llevar la contabilidad del flujo. La cantidad de materia que pasa a través de un elemento de área dA por unidad de tiempo es el producto del flujo de masa en dirección perpendicular al elemento por el área como se muestra en la figura (1.3). El flujo de masa es $\rho \mathbf{u}$ y si denotamos a $\hat{\mathbf{n}}$ como el vector normal al elemento de área, entonces la materia que pasa a través de él es $\rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$, tomando en cuenta las contribuciones de toda la superficie obtenemos

$$\text{Masa que atraviesa la frontera por unidad de tiempo} = \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA,$$

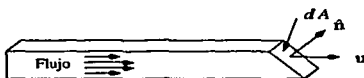


Figura 1.3 Flujo dentro de un tubo. La cantidad de fluido que sale es proporcional a $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$.

Que la masa se conserve implica que la variación de la masa en el tiempo al interior del volumen es igual a la masa que fluye a través de la frontera, es decir

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (1.3)$$

La costumbre es que $\hat{\mathbf{n}}$ sea el vector normal exterior, si el término izquierdo de la ecuación (1.3) es positivo, el fluido está saliendo del volumen y por lo tanto la variación de la masa en el interior es negativa, por ello aparece el signo menos de la ecuación anterior. Nótese que la ecuación (1.3) es sólo función del tiempo.

Podemos reescribir la ecuación (1.3) intercambiando la derivada por la integral y usando el teorema de la divergencia, esto gracias a que V está fijo en el espacio.

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (1.4)$$

Lo importante aquí es que la cantidad que se está integrando también es cero. En principio la ecuación (1.4) es válida para cualquier volumen que escojamos. Supongamos que el integrando es positivo en algún punto, por continuidad es positivo en una región alrededor de ese punto, se toma esa región como V y la integral resulta positiva, pero no es posible porque la integral siempre se anula. La única posibilidad es que el integrando también sea cero, de manera que obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) se conoce como ecuación de continuidad, nombre que se refiere a la continuidad de las funciones densidad y velocidad. Si la velocidad del fluido es menor o igual a la mitad de la velocidad del sonido entonces se puede considerar como incompresible¹. En ese caso su volumen varía muy poco y se supone:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.6)$$

Se puede satisfacer idénticamente la ecuación (1.6) si \mathbf{u} es el rotacional de un vector, como en el campo de inducción magnética, aquí se introduce un potencial vectorial $\vec{\psi}$ de tal manera que

¹Compresibilidad = $-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho}$. La compresibilidad del agua es de $46,4 \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1}$

$$\mathbf{u} = \nabla \times \vec{\psi}. \quad (1.7)$$

En el caso especial de un flujo bidimensional, $\vec{\psi}$ tiene sólo una componente ψ .

$$(\mathbf{u}, v, 0) = \nabla \times (0, 0, \psi) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right). \quad (1.8)$$

Incidentalmente, en este caso, el vector \mathbf{u} es perpendicular al gradiente de ψ , de tal manera que las líneas de corriente corresponden a las líneas equipotenciales de ψ . A ψ se le conoce como función de corriente.

Aceleración de un fluido

Antes de aplicar la 2ª ley de Newton a los fluidos, es necesario hablar de aceleración. En mecánica de partículas, la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo, es decir $dv(t)/dt$. Para el fluido, la velocidad también es función de la posición, lo más natural sería pensar que la aceleración está dada por $\partial \mathbf{u}/\partial t$, por desgracia en un sistema de Euler no es así. $\partial \mathbf{u}/\partial t$ representa la variación de la velocidad de diferentes elementos del fluido que pasan por el mismo punto \mathbf{x} , lo que buscamos es seguir un elemento de fluido y medir las variaciones de velocidad a lo largo de su trayectoria. La derivada total $d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)/dt$ toma en cuenta todos los cambios. Usando la regla de la cadena obtenemos la aceleración completa del fluido en el sistema de Euler. Esta es:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.9)$$

La aceleración completa está dada entonces por 2 términos, el primero representa la aceleración temporal del fluido dada por $\partial \mathbf{u}/\partial t$; el segundo representa la variación de la velocidad con la posición dada por $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ y se le denomina aceleración convectiva.

Esta situación se aplica de igual manera a cualquier otra cantidad relacionada con el fluido, si nos preguntáramos por la variación de la propiedad para un elemento dado, es necesario seguirlo en su trayectoria y eso implica que los términos convectivos deben de estar presentes.

La notación $\frac{Df}{Dt}$ para la derivada Lagrangiana es común en mecánica de fluidos, esta derivada representa la variación de alguna propiedad en un sistema Lagrangiano. La derivada en el sistema Euleriano se da como la ecuación (1.9).

Por ejemplo, si f es alguna variable de flujo y satisface $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ entonces f es constante en un sistema de Lagrange. En un sistema de Euler deberá variar de modo que satisfaga

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0.$$

Si el flujo es estacionario

$$\frac{Df}{Dt} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) f = |\mathbf{u}| \frac{df}{ds} = 0. \quad (1.10)$$

Como el último término es una derivada en la dirección de \mathbf{u} , f es constante en esa dirección.

Fuerzas que actúan sobre un fluido

Ahora hablaremos sobre el segundo elemento de la 2ª ley de Newton: Las fuerzas. Podemos distinguir entre dos grupos de fuerzas que actúan sobre un fluido, las de cuerpo y las de superficie. Dentro del primer grupo se encuentran las fuerzas de largo alcance como la gravedad. Estas fuerzas penetran en el interior del fluido y actúan sobre todos sus elementos. De éste modo, la magnitud de la fuerza es proporcional al volumen. Para cada elemento la fuerza de cuerpo se escribirá como $\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV$, siendo ρdV el elemento de masa. Si la masa está bajo la acción de la gravedad, entonces $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es un vector constante que apunta hacia abajo.

Dentro del segundo grupo se encuentran las fuerzas de corto alcance que tienen un origen molecular y sólo actúan cuando la separación de los elementos es del orden de la separación de las moléculas del fluido. Como éstas decaen rápidamente, sólo actúan en la frontera de los elementos que interactúan. No es conveniente expresar la fuerza total que actúa sobre un volumen porque las fuerzas en la superficie dependen en general de su orientación y ésta puede variar. En su lugar, expresaremos la fuerza sobre un elemento plano de superficie de fluido para luego sumar todas las contribuciones de la superficie. La fuerza la escribiremos como $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$, es decir, un vector proporcional al área, que depende de la orientación y la posición del elemento de área. Aquí vamos a adoptar la convención de que la fuerza actúa sobre el elemento en el cual está $\hat{\mathbf{n}}$ y la ejerce el elemento hacia el cual apunta $\hat{\mathbf{n}}$. Si \mathbf{S} apunta en la misma dirección que $\hat{\mathbf{n}}$ entonces será una fuerza de tensión de lo contrario será una compresión. A \mathbf{S} se le conoce como esfuerzo.

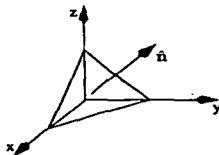


Figura 1.4 Fuerzas sobre un elemento de volumen con forma de tetraedro

Podemos obtener más información sobre los esfuerzos si consideramos la siguiente situación. Imagine las fuerzas sobre un volumen dV con forma de tetraedro como se muestra en la figura (1.4). Las 3 caras ortogonales tienen área dA_1 , dA_2 , dA_3 y vectores normales $-\hat{i}$, $-\hat{j}$, $-\hat{k}$, la cuarta cara tiene área dA y vector normal $\hat{\mathbf{n}}$, las fuerzas de superficie actúan sobre todas las caras del tetraedro y su suma es

$$\text{suma de fuerzas superficiales} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}) dA - (\mathbf{S}(\hat{i}) dA_1 + \mathbf{S}(\hat{j}) dA_2 + \mathbf{S}(\hat{k}) dA_3).$$

Suponemos que el tetraedro es lo suficientemente pequeño para poder evaluar todos los esfuerzos en el mismo punto \mathbf{x} y además usamos la tercera ley de Newton al tomar $\mathbf{S}(-\hat{i}) = -\mathbf{S}(\hat{i})$. Podemos relacionar el área de la cara perpendicular al eje x con el área de la cara inclinada de la siguiente manera

$$dA_1 = \hat{i} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = n_x dA.$$

De igual forma relacionamos las otras dos caras para escribir en componentes los diferentes esfuerzos. El correspondiente a la cara con vector normal i se escribe como $\mathbf{S}(i) = (\mathbf{S}_{xx}, \mathbf{S}_{yx}, \mathbf{S}_{zx})$. Aquí el primer índice se refiere a la dirección de la componente y el segundo a la dirección del vector normal. La contribución total en la dirección x es la suma de las componentes en cada cara

$$f_x = (\mathbf{S}_{xx} - (\mathbf{S}_{xx}n_x + \mathbf{S}_{xy}n_y + \mathbf{S}_{xz}n_z)) dA .$$

Podemos investigar un poco más sobre las fuerzas superficiales si las observamos como parte de la 2ª ley, que escrita de manera muy general es

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \sum \text{Fuerzas de cuerpo} + \sum \text{Fuerzas de superficie} . \quad (1.11)$$

Las fuerzas de cuerpo son proporcionales al volumen, al igual que el producto de la masa por la aceleración, si hacemos que las dimensiones del tetraedro tiendan a cero manteniendo su forma, el miembro izquierdo y el primer miembro derecho de la ecuación (1.11) decrecen como dV mientras que el tercero lo hace como dA lo cual implica que la ecuación sólo se satisface en aproximación si el segundo término de la derecha es idénticamente cero. Obtenemos así el esfuerzo en una dirección arbitraria a partir del conocimiento de los esfuerzos en tres planos perpendiculares.

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_j \mathbf{S}_{ij} n_j = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.12)$$

Ya que la ecuación (1.12) relaciona al vector $\hat{\mathbf{n}}$ con el vector \mathbf{S} , el término \mathbf{S} debe transformarse como un tensor ante una transformación de coordenadas.

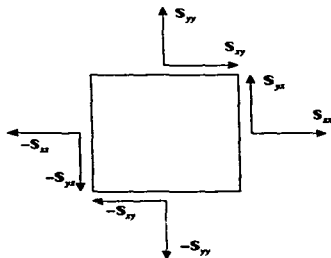


Figura 1.5 Fuerzas sobre un pequeño cubo del fluido

Podemos también mostrar que el tensor \mathbf{S} es simétrico, observando las fuerzas sobre un pequeño cubo como se muestra en la figura (1.5). Si nuestro cubo mide L de lado y L es pequeña, entonces las fuerzas en las caras opuestas son aproximadamente de igual magnitud pero de sentidos opuestos. La torca neta sobre el centro del cubo es $L \times L^2(\mathbf{S}_{yx} - \mathbf{S}_{xy})$ pero el momento de inercia² es

²Momento de inercia = $\int \rho(x^2 + y^2) dV$.

proporcional a L^3 , lo que provocaría una rotación infinita a menos que la torca sea idénticamente cero, por lo que $\mathbf{S}_{yx} = \mathbf{S}_{xy}$. Lo mismo pasa con el resto de las caras.

En un fluido en equilibrio no hay esfuerzos cortantes, es decir, el tensor de esfuerzos es diagonal y lo será para cualquier sistema de ejes que se elijan. Esto implica que los elementos de la diagonal son iguales. Podemos escribir al tensor de la siguiente manera tomando en cuenta que la traza es invariante

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{3}(\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22} + \mathbf{S}_{33})\delta_{ij} = -p\delta_{ij},$$

en donde p es la presión hidrostática y el signo menos aparece por la convención que hemos tomado para los esfuerzos. En general, el tensor de esfuerzos tiene una parte formada por el tensor de presión y otra formada por el tensor de esfuerzos viscosos.

$$\mathbf{S}_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (1.13)$$

Cuando el fluido se encuentra en equilibrio, el tensor de esfuerzos viscosos τ_{ij} desaparece y sólo queda la presión. Ahora bien, esto no significa que la presión que tiene un fluido en movimiento sea la misma que la de un fluido en reposo.

Rapidez de cambio de integrales materiales

A una integral de alguna cantidad física que involucra a las mismas partículas del fluido se le denomina integral material. Como las leyes de la dinámica están formuladas para partículas, es necesario poder calcular las derivadas temporales de estas integrales. A este resultado se le conoce como el teorema de transporte de Reynolds y establece que si $G = G(\mathbf{x}, t)$ es una variable del flujo, entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{DG}{Dt} + G \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV. \quad (1.14)$$

La dificultad reside en que la región de integración depende del tiempo. Ahora bien, suponga que para $t = t_0$ las posiciones de las partículas que encierra el volumen V_0 de integración están dadas por \mathbf{X}_0 y que su evolución temporal esta dada por la regla $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t)$. Entonces podemos hacer una transformación de coordenadas de las posiciones del tiempo t al tiempo t_0 y así realizar la integración en el volumen inicial que está fijo.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G dV = \int_{V_0} \frac{D}{Dt} \left[G(\mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t), t) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X_0, Y_0, Z_0)} \right| \right] dV_0.$$

El integrando del miembro derecho es función únicamente de t y por eso la derivada es total. Lo que necesitamos a continuación es la derivada temporal del jacobiano de la transformación, pareciera algo complicado pero sólo tenemos que recordar que el determinante es una función multilineal de sus renglones, ahora bien, las derivadas de los elementos del jacobiano son de la siguiente forma

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{D x_i}{Dt} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

si denotamos al jacobiano como J tenemos entonces

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} J + \frac{\partial v}{\partial y} J + \frac{\partial w}{\partial z} J = (\nabla \cdot \mathbf{u}) J ,$$

juntando todos los elementos obtenemos

$$\int_{V_0} \frac{D(GJ)}{Dt} dV_0 = \int_{V_0} \left(J \frac{DG}{Dt} + G \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{DG}{Dt} + G \nabla \cdot \mathbf{u} \right) J dV_0 , \quad (1.15)$$

que es el resultado buscado. Escrito en el sistema Euleriano, el teorema de transporte de Reynolds toma la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{S(t)} G \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA .$$

El primer término del miembro derecho capta la variación local de la propiedad en el volumen mientras que el segundo término capta de las variaciones de G sobre la superficie del volumen y muestra la contribución por el movimiento mismo del volumen. De nuevo observamos como las variaciones temporales tienen dos partes, las locales y las provocadas por el movimiento.

El resultado anterior se aplicará para la obtención de las ecuaciones de balance. Tomemos como primer caso $G = \rho$ que es el balance de masa.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0 . \quad (1.16)$$

En este caso, la integral se anula porque el volumen Lagrangiano siempre cuenta con las mismas partículas y por lo tanto la variación de su masa es cero. Para un volumen arbitrario, encontramos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 ,$$

que es la ecuación de continuidad escrita en un sistema Euleriano. Otro caso interesante es cuando $G = \rho F$ en donde F puede ser cualquier propiedad.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho F dV &= \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho F}{Dt} + \rho F \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \frac{DF}{Dt} + F \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \frac{DF}{Dt} dV , \end{aligned} \quad (1.17)$$

en virtud de que el factor entre paréntesis no es más que la ecuación de continuidad.

Ecuación de momento

La segunda ley de Newton en mecánica de fluidos recibe normalmente el nombre de ecuación de balance de momento. Su significado es el mismo, es decir el cambio de momento es igual a la suma de fuerzas o bien

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{S(t)} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA.$$

Por medio del teorema de la divergencia y la ecuación (1.17) podemos escribir lo anterior como

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{S} \right) dV = 0.$$

De nuevo, de la misma manera que para la ecuación de continuidad, como la ecuación es válida para todo volumen y tiempo, el integrando debe de anularse. Obtenemos entonces

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (1.18)$$

La ecuación (1.18) es la ecuación general. Es necesario determinar la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos viscosos τ_{ij} para cada fluido en particular y que fuerzas externas actúan sobre él.

Viscosidad, esfuerzos y el número de Reynolds

A la ecuación que relaciona al tensor de esfuerzos viscosos τ_{ij} con las propiedades físicas del fluido en cuestión se le llama constitutiva y es necesaria para completar nuestra ecuación de balance momento.

En los fluidos como el aire y el agua, los esfuerzos están cuantificados usando una ley empírica conocida como la ley de Newton de la viscosidad. La mejor manera de entenderla es con flujo unidimensional $u(y)$ como el que se muestra en la figura (1.6) llamado flujo de Couette. La imagen corresponde a un fluido entre dos placas horizontales, la placa inferior se mantiene fija y a la placa superior se mueve a una velocidad constante u_0 .

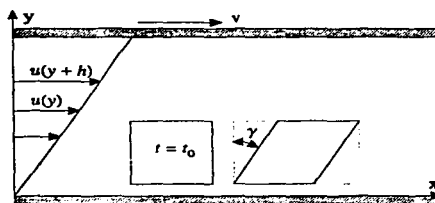


Figura 1.6 Fluido entre 2 placas y la distorsión de un elemento rectangular en el flujo.

La placa superior se desliza y provoca que, por la viscosidad, las capas en el fluido también lo hagan. El fluido que está en contacto con las placas se mueve a la misma velocidad, debido a la condición de frontera de no deslizamiento o adherencia de un fluido viscoso. Esta condición de frontera es un resultado experimental que se ha comprobado para los fluidos.

Una medida de la tasa de deslizamiento entre las capas es la tasa de distorsión angular $d\gamma/dt$ de un elemento inicialmente rectangular. La ley de la viscosidad de Newton establece que un esfuerzo cortante τ_{xy} es necesario para mantener el deslizamiento relativo entre capas del fluido y que este esfuerzo es proporcional a la tasa de distorsión angular, o en otras palabras

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\gamma}{dt}.$$

De la figura (1.6) es posible observar que $d\gamma/dt = \partial u/\partial y$ de manera que la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.19)$$

A la constante μ se le conoce como viscosidad dinámica, primera viscosidad, viscosidad cortante o simplemente viscosidad. Los fluidos para los cuales μ es una constante se les denomina Newtonianos, pero son un caso especial ya que en general μ es una función de los gradientes de la velocidad y la temperatura.

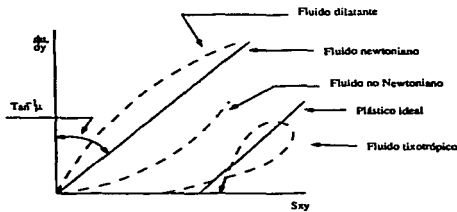


Figura 1.7 Relación entre esfuerzo y deformación para diferentes fluidos

La figura (1.7) muestra la relación del esfuerzo cortante con la rapidez de la deformación para diferentes tipos de fluidos, el comportamiento puede ser bastante complicado y hasta depender de la historia inmediata del movimiento como en el caso de los fluidos tixotrópicos.

La relación (1.19) muestra que si la viscosidad es grande, entonces se necesitan mayores fuerzas para producir los mismos gradientes de velocidad.

La viscosidad tiene su origen en las fuerzas y movimientos de las partículas que conforman el fluido. La cohesión en líquidos y el transporte de momento en gases son las principales causas de ella. Con estas ideas podemos entender la relación de la viscosidad con la temperatura. Para los líquidos, la viscosidad disminuye con la temperatura porque disminuye la cohesión. Con los gases sucede lo opuesto, la viscosidad aumenta con la temperatura ya que las partículas se están

moviendo más. Las unidades de la viscosidad son $N \cdot s/m^2$ en el sistema internacional o el centipoise que corresponde a $cP = g/100 \text{ cm} \cdot s$; El valor de la viscosidad para el agua es de $1,002 \text{ cP}$ a $20^\circ C$, y varía desde $1,79 \text{ cP}$ a $0^\circ C$ hasta $0,27 \text{ cP}$ a $100^\circ C$. La viscosidad del aire a $20^\circ C$ y al nivel del mar es $1,828 \times 10^{-5} \text{ cP}$. A la viscosidad dividida entre la densidad del fluido se le denomina viscosidad cinemática, $\nu = \mu/\rho$, tiene unidades de difusividad y en unidades CGS se le denomina *Stoke* = $1 \text{ cm}^2/s$.

En un flujo bidimensional resulta que γ y por lo tanto dy/dt tiene 2 componentes que provienen de las deformaciones horizontales y verticales, como se muestra en la figura (1.8). Así que en 2 dimensiones, la ley de la viscosidad de Newton toma la forma

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1.20)$$



Figura 1.8 Deformación de un elemento rectangular en un flujo arbitrario.

Para el caso de un flujo laminar unidireccional podemos ver que la fuerza viscosa en dirección x es $f_x = \partial \tau_{xy} / \partial y = \mu \partial^2 u / \partial y^2$. Con esto podemos hacer una estimación de los tamaños de las fuerzas inerciales y viscosas en un fluido. Las fuerzas viscosas tienen la forma de gradientes de los esfuerzos cortantes y como tales tienen un tamaño aproximado de $f_v \approx \rho \nu |u|/l_\perp^2$, en donde l_\perp es una longitud característica perpendicular a las líneas de corriente. Por otro lado, las fuerzas inerciales por unidad de volumen son del orden de $f_m \approx \rho \times (\text{aceleración}) \approx \rho u^2/l$ en donde l es una longitud característica del problema. El cociente de las dos es del orden de

$$Re = \frac{f_m}{f_v} = \frac{u l}{\nu}. \quad (1.21)$$

Éste es el número de Reynolds. Cuando Re es pequeño, las fuerzas viscosas se superponen a las inerciales y cuando Re es grande las fuerzas viscosas son relativamente pequeñas.

Ahora bien, no importa que tan pequeña sea ν , siempre habrá regiones cerca alguna superficie en donde los esfuerzos cortantes sean del orden de las fuerzas inerciales. En estas regiones se produce el arrastre, como en el caso de un ala de avión. El número de Reynolds basado en el tamaño del ala será muy grande. Es por esto que lejos del ala el fluido se puede considerar como invísido. Cerca del ala sucede otra cosa, y esto es una consecuencia de un hecho físico. Los fluidos son viscosos y por lo tanto no hay movimiento relativo entre una superficie sólida y el fluido. Esto se traduce en la condición de frontera de no deslizamiento. En el caso de un ala de avión, significa que debe haber una región de transición donde la velocidad del fluido decrece rápidamente hasta cero. A esta región se le denomina capa límite. Estas capas son usualmente muy delgadas, pero podemos estimar su grosor de la siguiente manera. Dentro de la capa, debe de haber una fuerza

que disminuye la velocidad de su valor en la corriente libre hasta cero, de modo que las fuerzas inerciales y viscosas deben de ser de la misma magnitud, para la fuerza viscosa tomemos como longitud representativa a $l_{\perp} = \delta$, en donde δ es el grosor de la capa límite. Para la fuerza inercial tomemos la longitud del ala l . Si igualamos ambas fuerzas obtenemos

$$\delta/l \approx (u/lv)^{-1/2} \ll 1.$$

Como se ve, no importa que tan pequeña sea v , siempre habrá una delgada capa donde los esfuerzos cortantes son importantes. Esta es la razón por la cual hay arrastre aún cuando v es muy pequeña.

La ecuación de Navier-Stokes.

Hemos encontrado que los esfuerzos cortantes para un fluido Newtoniano se relacionan con los gradientes de velocidad de la siguiente manera:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu \frac{d}{dt} e_{ij}. \quad (1.22)$$

A la cantidad e_{ij} se le conoce como tensor de deformación. Con él regresamos a la definición de un fluido: un fluido sufre una deformación continua mientras se le aplique un esfuerzo, es decir (1.22).

Una relación lineal general del tensor de esfuerzos viscosos con el tensor rapidez de corte se puede escribir como:

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \dot{e}_{kl}.$$

En general no tenemos una manera para determinar los coeficientes que relacionan ambos tensores, sin embargo las ideas de simetría nos ayudan en este caso. En principio tenemos que determinar los 81 coeficientes de la relación lineal; pero ya probamos que el tensor de esfuerzos debe de ser simétrico y el tensor de deformación también lo es, de manera que el número de coeficientes se reduce a 36 elementos. Aún más, si el fluido es isotrópico, la relación debe de ser la misma sin importar la dirección de los ejes, de tal manera que uno debe de ser un múltiplo del otro ó un múltiplo del tensor identidad multiplicado por la traza que también es un invariante [5]; así que la relación más general esta dada por

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu'' \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Al último término se le conoce como la tasa de expansión o compresión del fluido y es la divergencia de la velocidad del mismo.

Excepto en caso de compresiones extremas, el tensor de esfuerzos viscosos no contribuye al promedio de esfuerzos normales, de manera que la traza del tensor

$$\tau_{ii} = (2\mu + 3\mu'') \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

para todos los valores de $\nabla \cdot \mathbf{u}$, lo que implica la llamada relación de Stokes

$$2\mu + 3\mu'' = 0.$$

Tomando a μ como la constante escalar independiente, obtenemos para el tensor de esfuerzos viscosos la siguiente relación:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (1.23)$$

La expresión (1.23) fué obtenida por Saint-Venant (1843) y Stokes (1845) de la manera anterior. También la obtuvieron Navier (1822) y Poisson (1829) con argumentos específicos sobre los mecanismos moleculares de la fricción interna del fluido.

Sustituyendo (1.13) y (1.23) en (1.18) obtenemos la ecuación de movimiento de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \quad (1.24)$$

Para muchos fluidos, la viscosidad μ depende de manera significativa de la temperatura, cuando existen diferencias apreciables de la temperatura en el flujo, es necesario considerar a μ como una función de la posición. Sin embargo, sucede a menudo que las diferencias en temperatura son lo suficientemente pequeñas para considerar a μ como una constante, en cuyo caso la ecuación (1.24) se convierte

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu (\nabla^2 u + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot u)). \quad (1.25)$$

Para el caso especial de un fluido incompresible, en donde la ecuación de balance de masa se reduce a $\nabla \cdot u = 0$, la ecuación (1.25) se simplifica aún más, quedando

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu \nabla^2 u. \quad (1.26)$$

Si la fuerza de cuerpo es conservativa y la densidad del fluido es uniforme, podemos escribir a la presión de la siguiente manera

$$p = p_0 + \rho \phi + P.$$

En donde p_0 es una constante, ϕ es el potencial de la fuerza de cuerpo que satisface $f = -\nabla \phi$ y P es la llamada presión modificada que aparece por efecto del movimiento del fluido. Introduciendo la presión de esta manera en (1.26) encontramos

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 u. \quad (1.27)$$

La presión modificada es útil cuando las condiciones de frontera involucran solamente a la velocidad, como es el caso del problema de la cavidad. En adelante denotaremos a la presión modificada como p .

La ecuación (1.27) puede ser escrita en variables adimensionales por medio del siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} x' &\equiv \frac{x}{L}, & y' &\equiv \frac{y}{L}, & z' &\equiv \frac{z}{L}, & t' &\equiv \frac{t}{L}, \\ \mathbf{u}' &\equiv \frac{\mathbf{u}}{U}, & p' &\equiv \frac{p}{\rho U^2}, & \nabla' &\equiv L \nabla \end{aligned} \quad (1.28)$$

en donde U y L representan una velocidad y longitud característica del problema. Al sustituir (1.28) en (1.27) encontramos

$$\rho \frac{\partial(\mathbf{U}\mathbf{u}')}{\partial(\frac{L}{U}t')} + \rho U \mathbf{u}' \cdot \frac{1}{L} \nabla' (\mathbf{U}\mathbf{u}') = -\frac{1}{L} \nabla' (\rho U^2 p') + \mu \frac{1}{L^2} \nabla'^2 (\mathbf{U}\mathbf{u}').$$

Reagrupando las constantes y dividiendo por $\frac{\rho U^2}{L}$ se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho U L} \nabla'^2 \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{u}'. \quad (1.29)$$

Las ecuaciones contienen solamente de manera explícita al número de Reynolds. Este cambio a variables dimensionales muestra que, una vez obtenida la solución en variables adimensionales para un flujo en particular, una familia de soluciones puede ser formada escogiendo los valores de ρ , U , L y μ de manera que el valor del número de Reynolds no cambie. Todos los flujos que satisfagan las mismas condiciones iniciales y de frontera, expresadas también de manera adimensional, junto con el mismo número de Reynolds son descritos por la misma solución adimensional.

Cuando el número de Reynolds es pequeño, el término inercial de la ecuación de Navier-Stokes puede ser despreciado. Esto se observa si se hace el mismo cambio de variables (1.28) excepto para la presión que se escoje como

$$p' = \frac{L}{U\mu} p. \quad (1.30)$$

Al sustituir en (1.27) obtenemos

$$Re \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' \right) = -\nabla' p' + \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (1.31)$$

que en el límite $Re \rightarrow 0$ se reduce a la siguiente expresión

$$\nabla' p' = \nabla'^2 \mathbf{u}'. \quad (1.32)$$

A la expresión (1.32) se le conoce como ecuación de Stokes.

La Vorticidad

Hasta ahora sólo hemos hablado del campo de velocidades \mathbf{u} . Sin embargo a veces resulta más útil hablar de la vorticidad del fluido definida por

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.33)$$

Existen varias razones por las cuales se toma esta opción. Entre ellas se encuentra que las ecuaciones que gobiernan la evolución de $\boldsymbol{\omega}$ son más sencillas que las que gobiernan a \mathbf{u} . Por ejemplo, los gradientes de presión son una fuente de momento lineal, pero la distribución instantánea de

presión es por sí misma una función de las velocidades. Al tomar la vorticidad, uno se puede olvidar de la presión por completo. Otra razón para estudiar la vorticidad es que muchos flujos se caracterizan por regiones de intensa rotación de sus partículas.

El significado físico de ω se puede entender en el contexto de un flujo bidimensional. En este flujo $\omega = (0, 0, \omega)$

Considere dos elementos lineales AB y AC que son perpendiculares cierto instante como en la figura (1.9). La diferencia entre la velocidad v de los puntos B y A es

$$v(x + \Delta x) - v(x) \approx \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x,$$

así, $\partial v/\partial x$ representa la velocidad angular instantánea de la línea AB. De igual manera, $\partial u/\partial y$ representa la velocidad angular (en dirección contraria) de la línea AC. El promedio de estas cantidades nos dará una medida de la velocidad angular en el punto A.

$$\text{Velocidad angular local} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \omega.$$

Así que la vorticidad es una medida de la velocidad angular local del fluido.

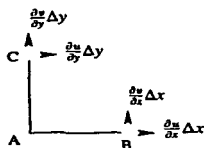


Figura 1.9 Interpretación de la vorticidad en 2 dimensiones.

Podemos utilizar la definición de la vorticidad para reescribir la ecuación de Navier-Stokes de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla(p/\rho + \mathbf{u}^2/2) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.34)$$

Nótese de paso que si el flujo es invíscido, irrotacional y estacionario se tiene que $p/\rho + \mathbf{u}^2/2 = \text{cte.}$ sobre una línea de corriente. Este que es el llamado teorema de Bernoulli.

Si se calcula el rotacional de (1.34), tomando en cuenta que los gradientes de una función no sobreviven tal operación, se obtiene

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{D t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (1.35)$$

La ecuación que satisface la vorticidad es del tipo convección difusión. Cuando el flujo es bidimensional, la ecuación (1.35) se simplifica aún más pues el primer término del miembro derecho desaparece.

1.4. Algunos resultados interesantes

Ahora, obtendremos resultados previos necesarios para el análisis numérico del problema del flujo dentro de una cavidad con una pared en movimiento. Esto es conveniente cuando se resuelve un problema de manera numérica y se desea tener idea de las características que debe de mostrar la solución. Los resultados siguientes hacen justamente eso. El primero muestra cómo la vorticidad se genera sólo de la placa superior que se encuentra en movimiento, y muestra como debe ser el perfil de la misma lejos de las esquinas en el caso que la viscosidad sea grande.

El segundo resultado es una estimación del ángulo mínimo que debe tener una esquina que forme parte de la frontera para que se formen vórtices en ella. Como veremos, un ángulo máximo de 146° es suficiente para su generación.

El tercer resultado se conoce como el teorema de Prandtl-Batchelor y nos dice como se comporta la vorticidad para números de Reynolds grandes en las regiones del fluido lejos de la frontera. Esto nos dará una visión de la solución en la región central de la cavidad para ciertos números de Reynolds.

Difusión de la vorticidad

El siguiente ejemplo es uno de los pocos problemas de fluidos que puede ser resuelto de manera analítica que además esta muy relacionado con nuestro problema original. El problema es el siguiente. Suponga que una placa infinita está inmersa dentro de un fluido en reposo. Al tiempo $t = 0$ la placa adquiere una velocidad constante u_0 . Es de interés calcular el flujo que provoca.

Debido a las condiciones de frontera, el fluido se pega a la placa, creando un gradiente de velocidad en la dirección y , el cual genera vorticidad. La placa se torna en una fuente de vorticidad que se difunde hacia el resto del fluido. Como la placa es infinita, esperamos que la solución no dependa de x . La ecuación de continuidad se hace entonces $dv/dy = 0$ y como $v = 0$ sobre la placa, $v = 0$ en todas partes. La ecuación de vorticidad se transforma entonces en

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Este mismo tipo de ecuación describe como se difunde el calor. Podemos resolverla buscando una solución de la forma

$$\omega = \frac{A}{l} f(y/l), \quad l = (2\nu t)^{1/2}$$

El parámetro l es la llamada longitud de difusión y nos dice cuanto se ha difundido la vorticidad en un tiempo t .

Al sustituir la propuesta para ω en la ecuación parcial obtenemos una ecuación ordinaria

$$f''(\eta) + \eta f(\eta) = 0, \quad \eta = y/l$$

La solución de esta ecuación es

$$\omega = \frac{A}{l} e^{-\eta^2/2}$$

Para determinar la constante A , es necesario integrar y utilizar la condición de frontera para u . Esta condición es que la velocidad del fluido es la misma que la velocidad de la placa, es decir, $u = u_0$ en $y = 0$. También esperamos que suficientemente lejos de la placa, el fluido aún no se entere de lo que sucede, así que vamos a pedir que $u \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$. Escribimos la solución para la velocidad de la siguiente manera

$$u(t, y) = - \int_{\infty}^y \frac{A}{l} e^{-y^2/2l^2} dy + B.$$

La segunda condición implica que $B = 0$. Sólo resta evaluar $u(0, t)$

$$u(0, t) = \sqrt{2A} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = u_0.$$

Obtenemos así la solución para ω

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{u_0}{l} e^{-\eta^2/2}. \quad (1.36)$$

Lo importante de la solución es que muestra que la vorticidad se crea en la superficie de la placa por los esfuerzos cortantes y luego esta vorticidad se difunde hacia el resto del fluido de la misma manera que el calor. No hay generación de vorticidad dentro del fluido y en este caso sólo es redistribuida por el mecanismo de difusión.

Podemos entender los mecanismos de transferencia de vorticidad dentro del fluido escribiendo la ecuación (1.35) de manera integral. Para esto, primero sumamos $\omega \nabla \cdot \mathbf{u}$ en ambos lados de la ecuación y luego integramos en un volumen V . Obtenemos así

$$\int_V \left(\frac{D\omega}{Dt} + \omega \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_V (\omega \nabla \cdot \mathbf{u}) + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega dV.$$

El lado izquierdo lo podemos interpretar como el cambio total de la vorticidad dentro del volumen V en el tiempo. Para interpretar el lado derecho conviene reescribirlo como una integral de superficie. Primero lo escribimos como una divergencia

$$(\omega \nabla \cdot \mathbf{u}) + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega = \nabla \cdot (\omega \mathbf{u} + \nu \nabla \omega).$$

La ecuación queda como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \omega dV = \int_S \omega \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \nu \int_S \nabla \omega \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (1.37)$$

La variación temporal de vorticidad en un volumen esta dada por la proyección del tensor flujo de vorticidad en la dirección normal a la superficie y por la proyección del tensor gradiente de vorticidad en la misma dirección.

Flujo bidimensional en una esquina

Supongamos que un plano rígido se desliza sobre el extremo de otro y que la inclinación entre estos dos planos θ_0 es constante como se muestra en la figura (1.10). El fluido se empieza a mover y nos preguntamos como se desarroyará el flujo cerca de la intersección.

Cerca de la esquina, los gradientes de velocidad se hacen infinitos ya que las paredes tienen velocidades muy diferentes debido a las condiciones de frontera. Más adelante se muestra que el flujo cerca de la esquina se puede describir por medio de la ecuación de Stokes.

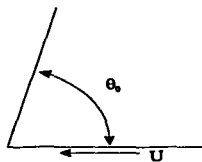


Figura 1.10 Flujo en una esquina debido al deslizamiento del plano inferior.

Vamos a buscar una solución estacionaria para este problema. Si introducimos la función de corriente en la definición de la vorticidad, encontramos que satisface

$$\omega = -\nabla^2 \psi. \quad (1.38)$$

La ecuación para la vorticidad, sin los términos convectivos queda entonces como

$$\nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0, \quad u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.39)$$

A esta ecuación agregamos las condiciones de frontera, que en coordenadas polares quedan como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U \quad \text{en } \theta = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en } \theta = \theta_0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Las condiciones de frontera permiten que ψ sea proporcional a r en todas partes, así que buscaremos una solución de la forma

$$\psi = r f(\theta),$$

que sustituimos en la ecuación para la función de corriente

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} (f + f'') \right) = \frac{1}{r^3} (f + 2f'' + f^{(4)}) = 0, \quad r > 0.$$

Ahora tenemos una ecuación ordinaria para f . Su solución es

$$f(\theta) = A \sin(\theta) + B \cos(\theta) + C \theta \sin(\theta) + D \theta \cos(\theta).$$

Las condiciones de frontera que satisface f son

$$f(0) = 0, \quad f(\theta_0) = 0, \quad f'(0) = -U, \quad f'(\theta_0) = 0. \quad (1.41)$$

A partir de ellas obtenemos un sistema de ecuaciones que nos determinan las constantes A, B, C y D. La solución queda al final

$$\psi(r, \theta) = -\frac{2U r (\theta \sin(\theta - \theta_0) \sin(\theta_0) + \sin(\theta)\theta_0 (-\theta + \theta_0))}{-1 + \cos(2\theta_0) + 2\theta_0^2}. \quad (1.42)$$

Si evaluamos las fuerzas viscosas usando esta solución encontramos que son proporcionales a $\mu U/r^2$, si pedimos que sean mucho mayores que las fuerzas inerciales, equivale a pedir que $\rho r U/\mu \ll 1$. De aquí podemos obtener la vecindad en donde es buena nuestra aproximación.

$$0 < r \ll \nu U. \quad (1.43)$$

La solución para el caso de $\theta_0 = \pi/2$ se muestra en la figura (1.11)

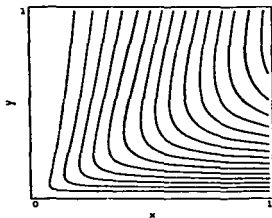


Figura 1.11 Flujo cerca de una esquina con una frontera en movimiento.

Otro caso que podemos analizar es aquel cuando el flujo se genera lejos de la esquina. En este caso las condiciones de frontera (1.41) se hacen homogéneas y la solución $\psi = r f(\theta)$ deja de funcionar. Intentamos entonces una solución de la forma $\psi = r^\lambda f(\theta)$; vamos a colocar las rectas que forman la esquina en los ángulos $\pm\alpha$ por conveniencia (ahora $2\alpha = \theta_0$).

La ecuación diferencial que satisface $f(\theta)$ es

$$(\lambda - 2)^2 \lambda^2 f + 2(2 - 2\lambda + \lambda^2) f'' + f^{(4)} = 0. \quad (1.44)$$

La solución general es

$$f(\theta) = A \sin(\lambda \theta) + B \cos(\lambda \theta) + C \sin((\lambda - 2)\theta) + D \cos((\lambda - 2)\theta).$$

Vamos a pedir que u , cambie de signo cuando θ lo haga, esto es porque esperamos que el fluido entre por una región y salga por otra. Así que hacemos $B=D=0$

Ahora tenemos que ajustar las constantes A y C . Las condiciones de frontera nos llevan a un sistema lineal homogéneo, la única forma de resolverlo es si el determinante se anula. Esto nos lleva a la siguiente condición

$$\frac{\sin(2\alpha(\lambda-1))}{2\alpha(\lambda-1)} = \frac{-\sin(2\alpha)}{2\alpha} \quad (1.45)$$

Dado α tenemos que encontrar los valores de λ que satisfagan la ecuación trascendente (1.45).

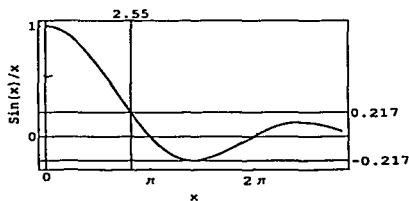


Figura 1.12: Gráfica de $\sin(x)/x$.

Una manera de hacerlo es utilizando la gráfica (1.12). Llamemos β al lado derecho de la ecuación (1.45). β es constante ya que α es un parámetro del problema. Si llamamos $x = 2\alpha(\lambda-1)$, buscamos dónde $\sin(x)/x = -\beta$. Cuando β es negativo siempre podemos encontrar una solución, pero cuando β es positivo, hay un límite y se alcanza cuando $-\beta$ es menor que el primer mínimo de $\sin(x)/x$ que se muestra en la figura, es decir, hay un valor crítico de α en donde la ecuación (1.45) deja de tener soluciones reales. Este valor crítico es:

$$2\alpha_c \approx 2,55 \approx 146,3^\circ \quad (1.46)$$

Para valores mayores a α_c vamos a tener soluciones como las de la figura (1.11), pero para ángulos menores λ tiene valores complejos y las soluciones son diferentes. En la línea $\theta = 0$, u_θ varía básicamente como $r^{\lambda-1}$, si $\lambda = p + iq$ entonces tenemos que

$$u_\theta = c r^{\lambda-1} = c r^{p-1} e^{iq \log(r)}.$$

Como la ecuación en este caso es lineal, tanto la parte real como la imaginaria satisfacen la ecuación, de tal manera que u_θ tendrá la forma

$$u_\theta = A r^{p-1} \cos(q \log(r) + \epsilon). \quad (1.47)$$

Siendo A y ϵ reales. Ahora vemos cómo u_θ cambia de signo conforme $r \rightarrow 0$. Ésto es señal de formación de vórtices. Hay algo más, como $\log(r) \rightarrow -\infty$ cuando $r \rightarrow 0$, la cantidad de vórtices es infinita y de magnitud cada vez menor. La figura (1.13) muestra uno de los vórtices para el caso $\alpha = \pi/4$. Nótese como en el vértice hay un vórtice más pequeño.

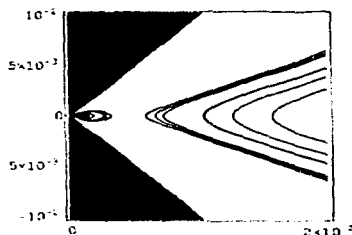


Figura 1.13 Un vórtice obtenido de la solución para el caso $\alpha = \pi/4$. El área sombreada muestra la posición de las paredes.

Teorema de Prandtl-Batchelor

El teorema de Prandtl-Batchelor es un resultado muy interesante para flujos bidimensionales. Establece que un flujo laminar con números de Reynolds grandes y líneas de corriente cerradas debe de tener una vorticidad uniforme.

Empecemos con la ecuación estacionaria para la vorticidad. En 2 dimensiones tenemos que la única componente de la vorticidad satisface

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega.$$

Ahora, suponemos que $\nu \rightarrow 0$ y obtenemos

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0.$$

Al observar la ecuación (1.10) nos damos cuenta que ω es constante sobre las líneas de corriente. Así que $\omega = \omega(\psi)$, pero no tenemos más información de esta ecuación. Lo que deseamos saber es como determinar el valor de ω en cada línea de corriente. Cuando las líneas son abiertas, tenemos el valor de ω corriente arriba y sólo es necesario seguirlo corriente abajo, pero cuando son cerradas, este método no funciona.

Es necesario introducir la viscosidad de nuevo. La ecuación (1.37) en el caso que estamos tratando nos da una condición que debe satisfacer ω para cualquier valor de ν por más pequeño que sea. La condición es

$$\nu \int_V \nabla^2 \omega dV = \nu \oint_S \nabla \omega \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0.$$

Si Re es grande, entonces $\omega = \omega(\psi) + \epsilon$ en donde ϵ es una corrección por la viscosidad. Si despreciamos esta corrección, podemos calcular el gradiente de la vorticidad.

$$\nabla \omega = \omega'(\psi) \nabla \psi,$$

en donde $\omega'(\psi)$ es proporcional al gradiente de vorticidad perpendicular a las líneas de corriente. Ahora insertamos el gradiente en la condición integral para obtener

$$\nu \omega'(\psi) \oint_S \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \nu \omega'(\psi) \int_V \nabla^2 \psi dV = 0.$$

El laplaciano de la función de corriente no es más que la vorticidad, de tal manera que

$$\nu \omega'(\psi) \int_V \nabla^2 \psi dV = -\nu \omega'(\psi) \int_V \omega dV.$$

Como estamos dentro de una región bidimensional, podemos aplicar el teorema de Stokes

$$\nu \omega'(\psi) \int_S \omega dS = \nu \omega'(\psi) \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

En donde C es una línea de corriente. Como la circulación y la viscosidad son diferentes de cero, obtenemos el resultado que estamos buscando

$$\omega'(\psi) = 0. \quad (1.48)$$

En otras palabras, no hay gradiente de vorticidad a través de las líneas de corriente, de tal manera que la vorticidad tiene que ser constante a través del flujo. Esto excluye las capas límite ya que asumimos que la fuerza viscosa era pequeña.

Este resultado es muy interesante y tendremos la oportunidad de observarlo de manera muy clara en las soluciones al problema de la cavidad.



Figura 1.14 Zona de vorticidad constante en el flujo.

Capítulo 2

Solución de las ecuaciones de Poisson y Convección Difusión

2.1. Introducción

La solución al problema de la cavidad depende en su mayor parte de poder resolver la ecuación de Poisson y la ecuación de Convección - difusión. Tomando a la ecuación de Poisson como problema modelo vamos a introducir los métodos iterativos para su solución. Estos métodos también pueden ser utilizados para la solución de la ecuación de convección-difusión.

La solución numérica de estas dos ecuaciones se lleva a cabo en 2 grandes pasos, el primero consiste en representar de manera discreta la ecuación a resolver, lo que arroja un sistema de ecuaciones lineales, el segundo paso es resolver este sistema de ecuaciones.

Para el primer paso existen diferentes métodos, entre los que se encuentran: Elemento finito, Volumen Finito y el más simple de todos que es el de Diferencias Finitas. Cuando la región es simple (como un cuadrado), el método de diferencias finitas es el ideal; para regiones más complicadas, posiblemente funcione mejor alguno de los otros métodos y puede ser que la obtención de una malla adecuada para la discretización en dicha región también sea un problema considerable.

Los métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales se pueden separar en dos grupos: los métodos directos en donde la eliminación gaussiana es el prototipo y los métodos iterativos, que toman una aproximación a la solución y la mejoran. Las *relajaciones de Jacobi*, *Multigrid* y *Generalized Minimal Residual* pertenecen a la segunda clase.

La técnica que desarrollaremos es Multigrid. Esta técnica funciona bastante bien para ecuaciones elípticas y está basada en las técnicas iterativas de relajación como lo son Jacobi y Gauss-Seidel agregando la idea de resolver la ecuación a diferentes escalas y combinarlas para obtener mejores aproximaciones a la solución.

2.2. Discretización de las ecuaciones

El método que se va a utilizar para discretizar las ecuaciones es el de diferencias finitas. Como la región en la que se desea resolver las ecuaciones es un cuadrado, la malla natural para el problema es una cuadrícula en donde cada lado está dividido el mismo número de partes.

La figura (2.1) muestra la región donde cada lado ha sido dividido en N partes, dando como resultado $(N - 1)^2$ puntos interiores; las coordenadas de cada punto están dadas por $(x_i, y_j) = (hi, hj)$ con $h = 1/N$.

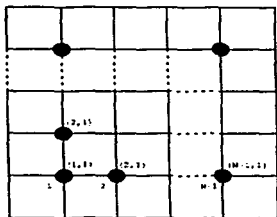


Figura 2.1: La región del problema y su malla.

Normalmente vamos a tomar a $N = 2^n$ y a n le llamaremos el nivel de refinamiento. En la malla tenemos 2 clases de puntos, los interiores y los que están sobre la frontera. Los puntos interiores estarán numerados por renglón, de tal manera que en lugar de referir a un punto por sus coordenadas (i, j) , se puede utilizar un solo índice k . La discretización a las ecuaciones en cada punto utiliza una nomenclatura diferente para hacerla más legibles. Cada punto interior tiene ocho vecinos, denominados como u_j , con $j = 0 \dots 8$ que siguen el orden de la figura (2.2).

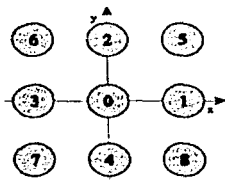


Figura 2.2: Molécula de cálculo o estencil.

Para obtener la discretización de las ecuaciones se usa la serie de Taylor. Con ella podemos relacionar los valores de la función $u(x_i, y_j)$ en los diferentes puntos de la malla con sus derivadas. Las series de Taylor de $u(x \pm h)$ alrededor de x con y constante son

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) + O(h^5) \\ u(x-h) &= u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x) + O(h^5), \end{aligned} \quad (2.1)$$

si eliminamos los términos proporcionales a h^2 en adelante obtenemos una aproximación hacia adelante (o hacia atrás) de primer orden para la primera derivada. Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos la siguiente relación

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + O(h^5). \quad (2.2)$$

Igualmente si sumamos las ecuaciones obtenemos

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + O(h^5). \quad (2.3)$$

Si eliminamos los términos proporcionales a h^3 en adelante de las ecuaciones (2.2) y (2.3) obtenemos aproximaciones para la primera y segunda derivada respectivamente de orden 2.

Armados con estas fórmulas podemos empezar la discretización de las ecuaciones. Como la ecuación de Poisson es un caso particular de la ecuación de convección - difusión, sólo tenemos que trabajar con esta última. La ecuación de convección - difusión es:

$$u_{xx} + u_{yy} + p(x, y) u_x + q(x, y) u_y = f(x, y) \quad (2.4)$$

Podríamos discretizar la ecuación (2.4) sustituyendo las aproximaciones anteriores por las derivadas pero antes de hacer esto, conviene que resolvamos un ejemplo en una dimensión que muestra algunas de las dificultades que esta ecuación presenta.

Convección y difusión en una dimensión

El problema ejemplo esta descrito en el sistema (2.5)

$$\begin{aligned} P u_x - u_{xx} &= 0, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta es la ecuación de Convección - difusión en una dimensión. Como veremos, la solución numérica y la exacta pueden ser muy diferentes si no se toman las precauciones adecuadas. La solución exacta al problema es:

$$u(x) = \frac{-1 + e^{Px}}{-1 + e^P},$$

y se muestra en la figura (2.3). Nótese como la solución es monótona creciente y vale prácticamente cero excepto cerca de 1, en donde varía rápidamente.

Para resolver numéricamente el problema es necesario primero discretizarlo. Si sustituimos las derivadas por las diferencias centrales en la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{hP}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) - (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = 0. \quad (2.6)$$

Lo interesante de este problema es que al igual que para las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, las ecuaciones en diferencias también pueden ser resueltas exactamente;

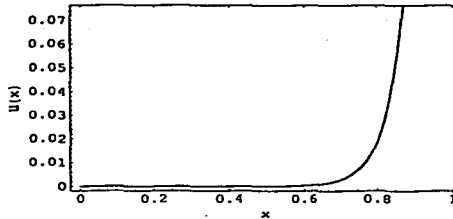


Figura 2.3 Solución exacta para el problema (2.5) para el valor de $P = 20$.

para las ecuaciones diferenciales se propone una solución $u(x) = A e^{kx}$, para las ecuaciones en diferencias también, solo que es $u_j = A e^{kj}$.

Sustituyendo en la ecuación (2.6) obtenemos

$$\frac{R}{2}(e^k - e^{-k}) - (e^{-k} - 2 + e^k) = 0,$$

en donde $hP = R$. Reacomodando términos obtenemos

$$(e^k - 1)(e^k(R/2 - 1) + (R/2 + 1)) = 0,$$

de tal manera que las soluciones para k son

$$k = 0 \text{ y } k = \log\left(\frac{1 + R/2}{1 - R/2}\right),$$

dando como solución general

$$u(j) = A + B\left(\frac{1 + R/2}{1 - R/2}\right)^j. \quad (2.7)$$

A y B se escogen para satisfacer las condiciones de frontera. La figura (2.4) muestra algunas soluciones para $P = 20$ y diferentes tamaños de malla.

Podemos ver a partir de la ecuación (2.7) que la solución va a oscilar cuando $R > 2$. Al parámetro R se le conoce como el número de Peclet o el número de Reynolds de la celda. La desigualdad impone restricciones para el tamaño de la malla en la que se desea trabajar o la aproximación discreta se hace inestable. Dependiendo del tamaño del coeficiente P , la malla debe ser suficientemente pequeña para cumplir con la restricción o el resultado que se obtenga tendrá características que no son parte de la solución.

Este mismo problema se presenta también en la ecuación (2.4) donde el número de Peclet se convierte en

$$R = \max(\sup|p(x, y)|, \sup|q(x, y)|) \frac{h}{2}, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.8)$$

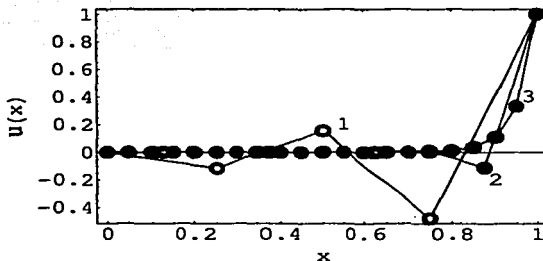


Figura 2.4 Cuando $R > 2$ aparecen oscilaciones que no son parte de la solución. Se muestran los casos para R igual a: 1) 5, 2) 2.5, 3) 1.

Así, para números de Reynolds muy grandes podemos esperar complicaciones para resolver el sistema si es que vamos a utilizar un tamaño de malla razonable.

Existen al menos 2 maneras de evitar que aparezcan estas oscilaciones en la solución. La más antigua es la de reemplazar las diferencias centrales para las primeras derivadas por diferencias hacia adelante (o hacia atrás), con la desventaja de reducir a primer orden la discretización; a este método se le conoce como *upwind*.

Existen discretizaciones *upwind* de ordenes superiores pero dejan de ser compactas, es decir, utilizan puntos a más de $2h$ de distancia, lo que computacionalmente se vuelve complicado porque se necesitan fórmulas especiales para los puntos cerca de las fronteras.

Otra manera es utilizar una discretización de cuarto orden que es incondicionalmente estable aún para números de Peclet grandes; el método para obtenerla es el que describen Spitz y Carey [6]. La ventaja de esta discretización es que es compacta y aparte de su estabilidad y alto orden de aproximación, es fácil de implementar computacionalmente.

El método consiste en utilizar la ecuación diferencial para obtener una aproximación al término del error que se truncó de la serie de Taylor. Siguiendo con nuestro ejemplo, el error para la ecuación (2.6) está dado por

$$\tau_j = -P \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + O(h^5). \quad (2.9)$$

Si derivamos la ecuación (2.5) se pueden obtener expresiones para $u^{(3)}(x)$ y $u^{(4)}(x)$ en términos de su primera y segunda derivada

$$\begin{aligned} u^{(3)}(x) &= P u_{xx}, \\ u^{(4)}(x) &= P u^{(3)}(x) = P^2 u_{xx}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos estos valores en la ecuación (2.9) y junto con las derivadas por las diferencias centrales, así obtenemos

$$6hP(u_{j+1} - u_{j-1}) - (12 + P^2h^2)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = 0. \quad (2.10)$$

Si hacemos el cálculo anterior, la solución a la ecuación (2.10) es

$$u_j = A + B \left(\frac{12 + 6hP + h^2P^2}{12 - 6hP + h^2P^2} \right)^j. \quad (2.11)$$

La parte entre paréntesis es siempre positiva por lo que las oscilaciones desaparecen (fig. 2.5).

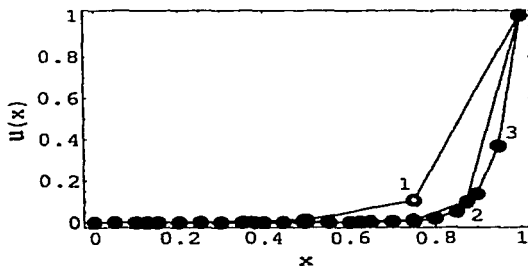


Figura 2.5 Las soluciones ya no presentan oscilaciones. Se muestran los casos para R igual a: 1) 5, 2) 2.5, 3) 1.

El mismo método se aplica a la ecuación (2.4) obteniéndose una discretización de nueve puntos de la forma

$$\sum_{j=0}^8 \alpha_j u_j = F_0, \quad (2.12)$$

y los coeficientes α_j están dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -20 - h^2 (p_0^2 + q_0^2) + h((q_4 - q_2) + (p_3 - p_1)), \\
\alpha_1 &= 4 + \frac{h}{4} (4 p_0 + 3 p_1 + p_2 - p_3 + p_4) \\
&\quad + \frac{h^2}{8} (4 p_0^2 + p_0 (p_1 - p_3) + (p_2 - p_4) q_0), \\
\alpha_2 &= 4 + \frac{h}{4} (4 q_0 + q_1 + 3 q_2 + q_3 - q_4) \\
&\quad + \frac{h^2}{8} (4 q_0^2 + p_0 (q_1 - q_3) + (q_2 - q_4) q_0), \\
\alpha_3 &= 4 - \frac{h}{4} (4 p_0 - p_1 + p_2 + 3 p_3 + p_4) \\
&\quad + \frac{h^2}{8} (4 p_0^2 - p_0 (p_1 - p_3) - (p_2 - p_4) q_0), \\
\alpha_4 &= 4 - \frac{h}{4} (4 q_0 + q_1 - q_2 + q_3 + 3 q_4) \\
&\quad + \frac{h^2}{8} (4 q_0^2 - p_0 (q_1 - q_3) - (q_2 - q_4) q_0), \\
\alpha_5 &= 1 + \frac{h}{2} (p_0 + q_0) + \frac{h}{8} (p_2 - p_4 + q_1 - q_3) + \frac{h^2}{4} p_0 q_0, \\
\alpha_6 &= 1 - \frac{h}{2} (p_0 - q_0) - \frac{h}{8} (p_2 - p_4 + q_1 - q_3) - \frac{h^2}{4} p_0 q_0, \\
\alpha_7 &= 1 - \frac{h}{2} (p_0 + q_0) + \frac{h}{8} (p_2 - p_4 + q_1 - q_3) + \frac{h^2}{4} p_0 q_0, \\
\alpha_8 &= 1 + \frac{h}{2} (p_0 - q_0) - \frac{h}{8} (p_2 - p_4 + q_1 - q_3) - \frac{h^2}{4} p_0 q_0, \\
F_0 &= \frac{h^2}{2} (8f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + \frac{h^3}{4} (p_0(f_1 - f_3) + q_0(f_2 - f_4)).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

La manera fácil de obtener estos coeficientes es siguiendo el artículo de Lixin Ge [7] en donde muestra como hacerlo con un programa de álgebra computacional.

Cuando las funciones $p(x, y)$ y $q(x, y)$ de la ecuación (2.4) son cero, recuperamos la conocida discretización de 9 puntos para la ecuación de Poisson

$$4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 - 20u_0 = \frac{h^2}{2} (8f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4). \tag{2.14}$$

En ambos casos, esta discretización arroja un sistema de ecuaciones con una matriz rala, tri-diagonal por bloques, si se sigue la numeración lexicográfica. La matriz de la ecuación de Poisson es simétrica, positiva definida y de diagonal dominante. En contraste, la matriz resultante para la ecuación de convección no tiene ninguna de las características anteriores, mostrando así la necesidad de un método de solución robusto que funcione con una matriz sin propiedades especiales.

2.3. Métodos iterativos estacionarios

Como resultado de aplicar el método de diferencias finitas a las ecuaciones diferenciales, ahora tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$A u = f. \quad (2.15)$$

La matriz A es de grandes dimensiones, así que un método iterativo es la mejor opción para resolver el sistema. Probablemente el método más simple para resolver (2.15) es utilizando una iteración de la forma

$$v^{(k+1)} = G v^{(k)} + c, \quad (2.16)$$

en donde v es la aproximación a la solución exacta u . La matriz G y el vector c se han escogido de tal manera que un punto fijo de la ecuación $u = G u + c$ sea una solución de $A u = f$

La manera usual de obtener a G es por medio de una separación de la matriz A , es decir, escribimos a A de la siguiente forma

$$A = M - N,$$

con la condición de que M no sea singular, entonces podemos tomar a $G = M^{-1}N$ y a $c = M^{-1}f$ de tal manera que la iteración toma la forma

$$v^{(k+1)} = M^{-1}N v^{(k)} + M^{-1}f,$$

aunque en realidad la inversa de M nunca se calcula, en cada paso se resuelve un sistema lineal.

Podemos escribir esta iteración de una manera más sencilla al introducir el residuo $r = f - A x$. Sumamos y restamos $v^{(k)}$ a la ecuación anterior y agrupamos para encontrar a r

$$\begin{aligned} v^{(k+1)} &= M^{-1}N v^{(k)} + M^{-1}f + v^{(k)} - M^{-1}M v^{(k)} \\ v^{(k+1)} &= v^{(k)} + M^{-1}(f - (M + N)v^{(k)}). \end{aligned}$$

Obtenemos así

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + M^{-1}r^{(k)}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es la que realmente utilizaremos para mejorar nuestra aproximación.

Ahora bien, entre la aproximación v y la solución u existe una diferencia que es el error de la aproximación

$$e = u - v.$$

Resulta que el error y el residuo están relacionados de la misma manera que u y f , ambos satisfacen el mismo sistema lineal

$$A e = r. \quad (2.18)$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten relacionar los errores de la vieja y nueva aproximación. El nuevo error se obtiene a partir del anterior por la relación:

$$e^{(k+1)} = G e^{(k)} = G^n e^{(0)}.$$

Es aquí donde nos preguntamos si la iteración tiene oportunidad de converger. Si escribimos a $e^{(0)}$ como combinación lineal de los vectores propios \hat{w}_i de G tenemos que el error después de $k + 1$ iteraciones estará dado por la expresión

$$e^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^n \hat{w}_i, \quad (2.19)$$

con lo cual es fácil observar que si $\max(|\lambda_i|) < 1$ la iteración será convergente, en otras palabras: si el radio espectral de G es menor que uno, tenemos convergencia.

Método de Jacobi

En el método iterativo, cada paso consiste en resolver un nuevo sistema de ecuaciones; al separar la matriz $A = M - N$ escogemos la dificultad que tendrá este nuevo sistema. El caso más simple es cuando M es la diagonal de A , quedando entonces $N = L + U$, con L y U la parte inferior y superior de la matriz respectivamente.

La iteración para esta selección toma la forma

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}.$$

Este método no funciona muy bien, pero si introducimos una modificación a la iteración, podemos mejorar su desempeño. Como antes calculamos la iteración como

$$v^* = v^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}.$$

Pero ahora tomamos un promedio pesado entre $v^{(0)}$ y v^* para calcular el nuevo valor

$$v^{(k+1)} = (1 - \omega)v^{(k)} + \omega v^* = v^{(k)} + \omega D^{-1}r^{(k)}. \quad (2.20)$$

La matriz de iteración G queda como

$$G = (1 - \omega)I + \omega D^{-1}(L + U). \quad (2.21)$$

Como nuestra matriz proviene de la discretización del problema, es posible escribir la ecuación (2.20) de manera explícita. Para el esquema de diferencias finitas quedaría de la siguiente manera

$$v_0^{(k+1)} = v_0^{(k)} + \frac{\omega}{\alpha_0} \left(f_0 - \sum_{j=0}^8 \alpha_j v_j^{(k)} \right).$$

Para los problemas elípticos el nuevo valor de la solución en un punto es el promedio pesado de sus vecinos. En este sentido, éste método de relajación asemeja la solución de un problema parabólico en donde la solución se difunde hasta encontrar un estado estacionario.

La ecuación de Poisson como problema modelo

Para entender mejor como funciona este método iterativo vamos a estudiar la ecuación de Poisson. El Problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f(x, y) \text{ en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las condiciones de frontera del problema se pueden considerar homogéneas ya que entran de manera natural como parte del lado derecho de las ecuaciones para los puntos que tienen vecinos en la frontera.

Para investigar la convergencia estudiaremos el problema homogéneo $Au = 0$ con una condición inicial arbitraria. En este caso, la solución u es conocida y el error para la aproximación v es simplemente $-v$.

Para entender que es lo que pasa y conocer la tasa de disminución del error necesitamos calcular los valores propios para la matriz de iteración. El problema de valores propios puede escribirse de la siguiente manera

$$DGw = \lambda Dw.$$

Lo que tenemos aquí es un sistema de ecuaciones, una ecuación por cada punto interno de la malla, para un nodo fijo. La ecuación tiene la siguiente forma:

$$(1 - \varpi) w_0 - \varpi (4w_1 + 4w_2 + 4w_3 + 4w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8)/20 = \lambda w_0.$$

El método de solución aquí es el mismo usado para la ecuación (2.6); se propone una solución de la forma

$$w(i, j) = A e^{i(ki + jl)}.$$

Al sustituir la solución propuesta, desaparece $w(i, j)$ y sólo resta despejar λ .

$$\lambda(k, l) = 1 - \frac{\varpi}{5} (5 - 2 \cos(k) - 2 \cos(l) - \cos(k) \cos(l)),$$

podemos ver que para que el método converja, se debe de cumplir que $0 < \varpi \leq 1$.

Al aplicar las condiciones de frontera a $w(i, j)$ obtenemos para los números de onda k y l las siguientes restricciones

$$k = \frac{m\pi}{N}, \quad l = \frac{n\pi}{N}, \quad m, n \text{ enteros}.$$

Los vectores propios son entonces

$$w_{m,n}(i, j) = \sin\left(\frac{m i \pi}{N}\right) \sin\left(\frac{n j \pi}{N}\right), \quad 0 < n, m < N. \quad (2.23)$$

La componente del error que decrece más lento será aquella con el valor propio más cercano a uno. Podemos estimar este valor propio desarrollando a $\lambda(m, n)$ en serie de Taylor como función de $h = 1/N$ alrededor de cero.

$$\lambda(m, n) = 1 - \frac{3\omega}{10} (\pi^2 (m^2 + n^2)) h^2 + O(h^4). \quad (2.24)$$

El valor más grande se obtiene cuando $m = n = 1$, es en esta ecuación donde se ve el gran problema de que comparten ésta clase de métodos iterativos. Las componentes de baja frecuencia van a tener valores propios cercanos a uno, de tal manera que su convergencia será muy lenta. Peor aún, si se disminuye el tamaño de la malla (h), el problema es mayor. Nótese que en el segundo término de la serie encontramos los valores propios del problema continuo.

Ya que no es posible encontrar un valor de ω que disminuya todos los valores propios, buscaremos uno que logre que las grandes frecuencias ($m, n \geq N/2$) sean las que más se reduzcan en cada iteración.

La condición buscada es que $\lambda(N/2, N/2) = -\lambda(N, N)$, de donde obtenemos el valor de $\omega = 10/13$.

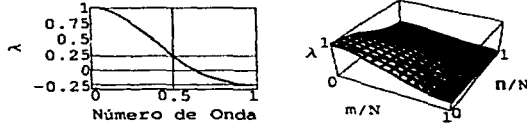


Figura 2.6 Magnitud de los valores propios en la línea $m = n$

La condición anterior también implica que los valores propios de alta frecuencia se encuentren acotados. El ancho de la banda que los acota es independiente del tamaño de la malla. Para nuestro caso tiene el valor de $3/13$. La figura (2.6) muestra la magnitud de los valores propios para el peso anterior. Además se muestra la banda en la que están confinados los valores propios de alta frecuencia.

Es por esto que al aplicar la iteración de Jacobi, el error no necesariamente disminuye su tamaño, pero en cambio, sí desaparecen las componentes de alta frecuencia. La iteración de Jacobi suaviza el error.

Ahora vamos a realizar algunas iteraciones sobre la siguiente función en una malla de 64×64 .

$$v = \sin\left(\frac{i\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{6i\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{6j\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{12i\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{12j\pi}{N}\right).$$

La gráfica inicial y final se ven en la figura (2.7). Como se ve, el error se redujo, pero lo que es más importante, se suavizó. La figura (2.8) muestra como disminuye cada una de las componentes de la función de prueba.

La ecuación (2.19) dice que las componentes del error disminuyen básicamente como una potencia de los valores propios λ .

La figura (2.9) muestra como actúa la iteración de Jacobi sobre una función de prueba que contiene a todos los modos posibles con el mismo tamaño. La gráfica muestra la intensidad de cada modo después de una iteración. En la gráfica se puede ver como las curvas de nivel son

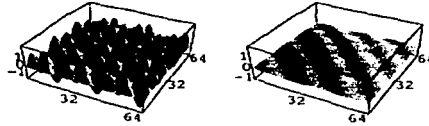


Figura 2.7 Aproximación inicial y resultado después de 40 iteraciones

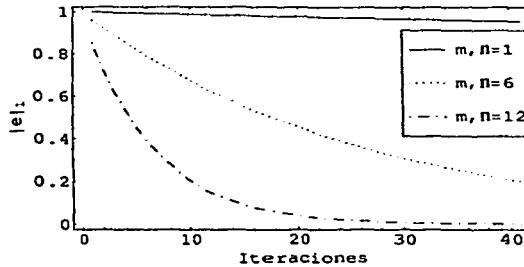


Figura 2.8 Disminución del error con las iteraciones

aproximadamente círculos. También muestra como los modos (k, l) cerca del origen se han visto poco afectados con la iteración.

Método Gauss - Seidel

El método de Jacobi espera que se actualicen los valores en todos los nodos, de manera que se duplica el espacio requerido para almacenar esta información. El método de Gauss-Seidel incorpora un simple cambio: sobrescribir el valor del nodo en el momento que se calcula, evitando así la duplicación de la memoria requerida. Para este nuevo tipo de método, la matriz de iteración se puede escribir como

$$G = (D - L)^{-1}U.$$

Hay algo poco claro en la manera que esta escrito G , y es el orden en que se actualizan los valores. En la iteración de Jacobi, el orden es inmaterial, pero en Gauss-Seidel, éste puede alterar drásticamente las cosas. Aquí el orden que esta implícito en G es el lexicográfico, pero existe otro ordenamiento popular que es el denominado rojinegro, llamado así porque las celdas de la malla se colorean como un tablero de damas chinas. En el orden rojinegro la actualización de los nodos se realiza de manera independiente, introduciendo así la posibilidad de paralelizar el algoritmo.

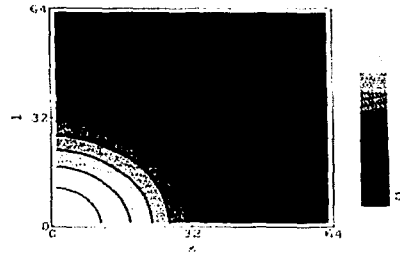


Figura 2.9 Resultado de la iteración de Jacobi aplicado a una función de prueba que tiene todos los modos posibles para el tamaño de malla. El color muestra la intensidad de cada modo después de una iteración.

El método de Gauss-Seidel mejora un poco la convergencia de las iteraciones, pero sufre del mismo problema que el método de Jacobi, no puede disminuir las frecuencias bajas de manera adecuada. Multigrid es una técnica que, aunque basada sobre éstos métodos iterativos, no tiene ésta limitante.

2.4. Multigrid

Los métodos iterativos clásicos como Jacobi y Gauss-Seidel funcionan adecuadamente sólo para un grupo de problemas. Funcionan bien con la parte de alta frecuencia del error, funcionan mal con la parte de baja frecuencia. Ambos métodos empiezan muy bien, pero su convergencia se ve disminuida a medida que desaparecen las frecuencias altas del error y el tiempo que les lleva reducir las bajas frecuencias los hace inaceptables.

El radio espectral es la razón del problema. La ecuación (2.24), aunque obtenida para la ecuación de Poisson, muestra la situación general. Las componentes del error con valores propios cerca de 1 no convergen adecuadamente y el problema se acrecenta al disminuir el tamaño de la malla, ya que el segundo término es proporcional a h^2 .

Multigrid es una técnica que convierte este defecto en herramienta. La idea principal es que se puede resolver el problema a diferentes escalas tomando un poco de cada una de ellas para encontrar una mejor solución.

Una manera de mejorar la convergencia de los métodos iterativos anteriores es utilizar una mejor primera aproximación. Resolver en una malla más gruesa no es tan costoso computacionalmente y el radio espectral es menor, de tal manera que la convergencia es mejor. Una vez obtenida la solución en la malla gruesa, podemos interpolarla a la malla original (la malla fina) y mejorarla iterando unas cuantas veces más. De aquí se ocurre que al tener este mecanismo entre 2 mallas,

podemos utilizarlo para incluir más mallas; nada nos impide empezar con la discretización más gruesa (donde sólo hay una incógnita al problema) y subir hacia la malla más fina.

Otra manera de mejorar la solución es obtener una aproximación al error sobre la malla gruesa y utilizarla para corregir la aproximación en la malla fina.

Estos mecanismos tienen dos elementos clave. El primero consiste en poder definir el problema para cada tamaño de malla. El segundo consiste en trasladar los valores de una función de una malla fina a una gruesa y viceversa.

El primer problema ya está resuelto pues la definición del problema proviene directamente de la discretización de la ecuación diferencial. El problema de transferencia es el que requiere una explicación más amplia.

Transferencia entre mallas

Desde este momento vamos a trabajar con al menos dos mallas, así que tendremos que distinguir una de otra. A la malla fina la denotaremos como Ω^h , en donde h denota el tamaño de la división. La malla gruesa tendrá la mitad de puntos, de tal manera que se duplicará el tamaño de h y por lo tanto la denotaremos como Ω^{2h} . En general cuando hablemos de vectores en una u otra malla, el superíndice denotará en que malla se encuentra.

A la operación de transferir un vector de la malla gruesa a la malla fina se le llama prolongación o interpolación. El más simple de ellos es el de interpolación lineal y es el que usaremos. A esta función la denotaremos como I_h^h . La función toma vectores de Ω^{2h} y produce vectores de Ω^h de acuerdo con la regla $v^h = I_{2h}^h v^{2h}$, o en componentes:

$$\begin{aligned} v^h(2i, 2j) &= v^{2h}(i, j), \\ v^h(2i+1, 2j) &= \frac{1}{2} [v^{2h}(i, j) + v^{2h}(i+1, j)] \quad 0 < i, j < \frac{N}{2} - 1, \\ v^h(2i, 2j+1) &= \frac{1}{2} [v^{2h}(i, j) + v^{2h}(i, j+1)], \\ v^h(2i+1, 2j+1) &= \frac{1}{4} [v^{2h}(i, j) + v^{2h}(i+1, j) + v^{2h}(i, j+1) + v^{2h}(i+1, j+1)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La operación faltante es la de transferir vectores de la malla fina a la malla gruesa. A esta se le denomina restricción y se le denota como I_h^{2h} , la función toma vectores de Ω^h y regresa vectores en Ω^{2h} . Existen dos maneras muy comunes de definir a I_h^{2h} .

A la primera se le denomina inyección y consiste en tomar el valor del vector en la malla gruesa igual al valor que tiene en la malla fina, es decir:

$$v^{2h}(i, j) = v^h(2i, 2j), \quad 0 < i, j < \frac{N}{2} - 1. \quad (2.26)$$

La segunda manera consiste en promediar a los 9 vecinos de la siguiente manera

$$v^{2h}(i, j) = \frac{1}{16} [4v_0^h + 2(v_1^h + v_2^h + v_3^h + v_4^h) + (v_5^h + v_6^h + v_7^h + v_8^h)], \quad (2.27)$$

$$0 < i, j < \frac{N}{2} - 1,$$

en donde los subíndices corresponden a las posiciones de la figura (2.2) y $v_0^h = v^h(2i, 2j)$.

En ambos casos, ¿Qué tan buena será la aproximación sobre la malla gruesa?. Si el vector v^h oscila lentamente entonces ambos métodos funcionan bien. En la práctica depende del problema en particular cual funciona mejor.

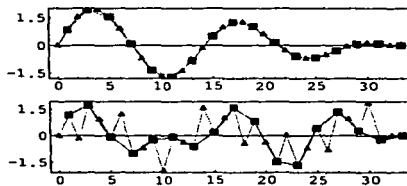


Figura 2.10 Cuando el error es suave, la interpolación lineal lo aproxima bastante bien, no siendo el caso si éste oscila rápidamente.

Método de corrección de malla gruesa y ciclo V

Es aquí donde empiezan a embonar los elementos de Multigríd. Primero, tenemos un método iterativo que suaviza el error. Como el error oscila lentamente puede ser representado sobre una malla más gruesa de una buena manera. Ésto es muy importante si queremos que multigríd funcione. En la malla gruesa el mismo error parece ser más oscilatorio así que el método iterativo funciona mejor. Una vez obtenida una aproximación para el error sobre la malla gruesa, éste puede ser interpolado hacia la malla fina para corregir la aproximación inicial. La combinación de suavizamiento y corrección elimina de manera efectiva todas las componentes del error. A éste método se le conoce con el nombre de corrección de malla gruesa.

El algoritmo es el siguiente:

1. $v^h \leftarrow CMG(v^h, f^h, \alpha_1, \alpha_2)$.
2. Relajar α_1 veces $A^h v^h = f^h$ sobre Ω^h con la aproximación inicial v^h .
3. Calcular $r^h = f^h - A^h v^h$.
4. Calcular $r^{2h} = I_R^{2h} r^h$.
5. Resolver $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ sobre Ω^{2h} .
6. Corregir $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h e^{2h}$.
7. Relajar α_2 veces $A^h v^h = f^h$ sobre Ω^h .

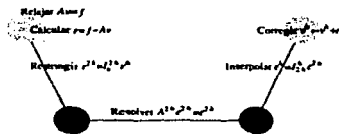


Figura 2.11 Método de corrección de malla gruesa.

Lo interesante del método de corrección de malla gruesa es que puede aplicarse de manera recursiva, utilizando así varias mallas, descendiendo hasta el punto donde la malla más gruesa sólo contiene una incógnita para después subir corrigiendo y suavizando en todos los niveles. Nótese que en la malla más gruesa la iteración de Jacobi da la solución exacta al problema.

Cuando se usa de manera recursiva, al método se le conoce como ciclo V por la manera en que se despliega gráficamente. Ahora bien, al utilizar el ciclo V no es necesario llegar a la malla más gruesa, el ciclo se puede detener en el nivel que se desee, solamente es necesario que en el nivel más bajo se resuelva el problema completamente. En este caso, como el número de incógnitas se reduce a la cuarta parte en cada descenso, hace posible utilizar métodos directos en una etapa temprana. La ventaja de llegar hasta el nivel más bajo es que sólo se utilizan los elementos de multigrad.

El algoritmo para el ciclo V es

1. $v^h \leftarrow MV(v^h, f^h)$.
2. Si Ω^h es la malla más gruesa pasar al paso 9 con $\alpha_2 = 1$.
3. Relajar α_1 veces $A^h v^h = f^h$ sobre Ω^h con la aproximación inicial v^h .
4. Calcular $r^h = f^h - A^h v^h$.
5. Calcular $r^{2h} = I_h^{2h} r^h$.
6. Inicializar $e^{2h} \leftarrow 0$.
7. $e^{2h} \leftarrow MV(e^{2h}, r^{2h})$.
8. Corregir $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h e^{2h}$.
9. Relajar α_2 veces $A^h v^h = f^h$ sobre Ω^h .

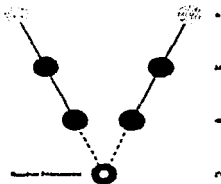


Figura 2.12: Gráfica del Ciclo V

El punto importante dentro del ciclo V es que la ecuación que se resuelve en la malla gruesa es la del error, no la del problema original ya que al obtener una aproximación para el error, ésta se puede interpolar a la malla fina y utilizarse para corregir.

Convergencia

Como el ciclo V es una aplicación recursiva del método de corrección de malla gruesa, sólo veremos este último. La convergencia del primero a partir de la convergencia del segundo no es inmediata, pero si es cierta. Los resultados que se encuentran a continuación están calculados en base al problema modelo, pero son generales como lo muestra Trottenberg [8].

Para ver si el método converge vamos a calcular, al igual que para la iteración de Jacobi, el radio espectral de la matriz de iteración; para esto es necesario ver cual es la matriz. Si juntamos todos los pasos del método de corrección de malla gruesa en uno solo, la iteración toma la siguiente forma

$$v^h \leftarrow G^r v^h + I_{2h}^h (A^{2h})^{-1} I_h^{2h} (f^h - A^h G^r v^h). \quad (2.28)$$

Tenemos también que la solución exacta es un punto fijo de esta iteración

$$u^h \leftarrow G^v u^h + I_{2h}^h (A^{2h})^{-1} I_h^{2h} (f^h - A^h G^v) e^h. \quad (2.29)$$

Si restamos estas dos relaciones podemos obtener la matriz que actúa sobre el error. Encontramos que

$$e^h \leftarrow (I - I_{2h}^h (A^{2h})^{-1} I_h^{2h} A^h) G^v e^h = CGM e^h. \quad (2.30)$$

Para saber como se modifica el error, lo escribimos en términos de los valores propios de la matriz G^h y observamos como se afecta cada componente. Para calcular esto, sólo hace falta saber cómo operan las funciones de transferencia sobre estos vectores.

La primer función de transferencia que vamos a analizar es la de restricción. Como habíamos mencionado antes, hay dos opciones para esta función, la denominada *inyección* y el *peso completo*.

Los vectores propios que encontramos para la iteración de Jacobi son:

$$w_{m,n}^h(i, j) = \sin\left(\frac{m i \pi}{N}\right) \sin\left(\frac{n j \pi}{N}\right).$$

El vector propio (m, n) usando la inyección se ve de la siguiente forma sobre la malla gruesa:

$$w_{m,n}^h(2i, 2j) = \sin\left(\frac{2m i \pi}{N}\right) \sin\left(\frac{2n j \pi}{N}\right).$$

Sobre la malla fina se tiene que $m, n = 1 \dots N - 1$, sobre la malla gruesa $m, n = 1 \dots N/2 - 1$, de tal forma que si $m, n < N/2$, podemos interpretar la expresión anterior de la siguiente forma:

$$w_{m,n}^h(2i, 2j) = \sin\left(\frac{m i \pi}{N/2}\right) \sin\left(\frac{n j \pi}{N/2}\right) = w_{m,n}^{2h}(i, j).$$

El vector propio de baja frecuencia (m, n) visto sobre la malla gruesa mantiene sus números de onda.

¿Qué sucede cuando m ó n son mayores que $N/2$? . En este caso el vector propio sufre una transformación. Considere la siguiente identidad trigonométrica

$$\sin\left(\frac{m i \pi}{N}\right) = -(-1)^i \sin\left(\frac{(N - m) i \pi}{N}\right).$$

Si $m > N/2$ entonces $(N - m) < N/2$ y por lo tanto $(N - m)$ es un modo de la malla gruesa. Es decir, si alguno de los números de onda del vector propio es mayor que $N/2$, ésta componente se representará con un número de onda $m' = N - m$. La malla gruesa interpreta erróneamente las componentes de alta frecuencia como componentes de baja frecuencia. Aquí es donde se nota la importancia de que el error sea suave. Como la función de descenso manda los vectores propios con números de onda complementarios (m, m') en m , tenemos que 3/4 partes de los modos son representados de manera incorrecta en la malla gruesa; la única manera de que esto no suceda es que los modos de alta frecuencia no se encuentren presentes. A este fenómeno se le conoce como *solapamiento* ó *aliasing*. La figura (2.13) muestra éste fenómeno. Se presentan los casos para $m = 1, 2, 8, 13, 14, 15$. Nótese como el modo 8 se anula y el modo 15 aparece como el modo 1. En el ejemplo $N = 16$.

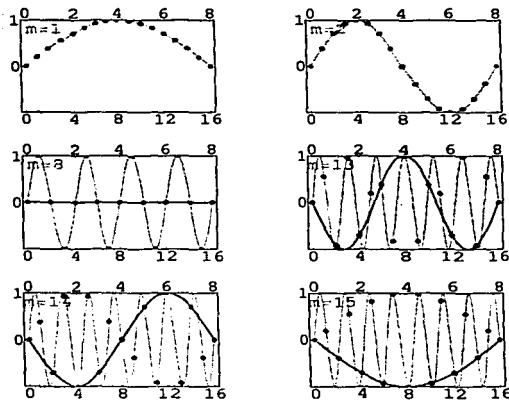


Figura 2.13 Transformación de los modos de alta frecuencia al pasar de una malla fina a una malla gruesa.

Por otro lado, si para la función de descenso utilizamos el peso completo, obtenemos la siguiente expresión

$$I_h^{2h} w_{m,n}^h(i, j) = \cos\left(\frac{m\pi}{2N}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2N}\right)^2 \sin\left(\frac{im\pi}{N/2}\right) \sin\left(\frac{jn\pi}{N/2}\right) = c_m c_n w_{m,n}^{2h}(i, j).$$

Encontramos de nuevo, que cuando el modo original es de baja frecuencia, éste pasa igual, salvo que su amplitud se ve modificada. Si alguno de los modos es mayor que $N/2$, entonces llega a su modo complementario. La Constante c_α también sufre una transformación,

$$c_{\alpha'} = \cos\left(\frac{(N-\alpha)\pi}{2N}\right)^2 = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2N}\right)^2.$$

Para ver como afecta la operación de prolongación a los vectores propios de G es un poco más complicado, pues su definición es una función a trozos y no permite ver el efecto completo fácilmente. Sin embargo es posible hacer el cálculo si observamos la manera en la que lo realizamos computacionalmente. En éste proceso, el primer paso es copiar los valores del vector de la malla gruesa a sus lugares de la malla fina usando la siguiente relación

$$w^h(2i, 2j) = w^{2h}(i, j) \quad 0 < i, j < \frac{N}{2} - 1.$$

En la malla fina, vemos un vector \tilde{w} que tiene, en los puntos con índice par, el valor del vector de la malla gruesa apropiado y en los puntos con algún índice impar vale cero. El vector tiene la

siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{w}^h &= \cos\left(\frac{i\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{im\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{jn\pi}{N}\right), \\ 0 &< i, j < N-1, \quad 0 < m, n < \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Este vector \bar{w} se parece a (2.4), pero en este caso (m, n) es un modo de la malla gruesa y en (2.4) es un modo de la malla fina. Una vez que tenemos este vector, podemos calcular el valor de $I_{2h}^h w^{2h}$ con una única fórmula, que es:

$$\begin{aligned} I_{2h}^h w^{2h}(i, j) &= \frac{1}{4} [4\bar{w}_0^h + 2(\bar{w}_1^h + \bar{w}_2^h + \bar{w}_3^h + \bar{w}_4^h) + (\bar{w}_5^h + \bar{w}_6^h + \bar{w}_7^h + \bar{w}_8^h)] \\ &= c_m c_n w_{m,n}^h - c_m s_n w_{m,n'}^h - s_m c_n w_{m',n}^h + s_m s_n w_{m',n'}^h, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $c_i = \cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right)$, $s_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2N}\right)$ y $m' = (N-m)$, $n' = (N-n)$ denotan los modos complementarios. Si observamos el resultado, al interpolar de la malla gruesa a la malla fina un modo (m, n) , obtenemos dicho modo junto con sus modos complementarios. Lo importante es notar la intensidad con la que pasan. Si el modo original tiene frecuencias bajas, entonces la contaminación de los otros modos es pequeña. En contraste, si la frecuencia es grande, lo que se obtiene es el modo complementario y no el original (ver figura 2.14).

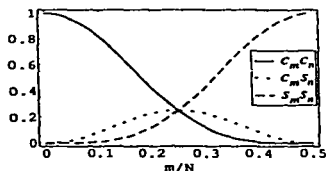


Figura 2.14 Intensidades de los coeficientes de los modos complementarios en (2.31) sobre la línea $m = n$.

Con esto completamos los elementos que necesitamos para calcular como afecta el método de corrección de malla gruesa a las frecuencias del error. Tenemos 3 casos: el primero es para los modos (m, n) con $m, n < \frac{N}{2}$, es decir, las bajas frecuencias; el segundo es para cuando alguno, m o n , es mayor que $N/2$ y el tercero para cuando ambos son mayores a $N/2$. Veamos el caso de las frecuencias bajas. Este es el que nos interesa ya que para estas frecuencias la iteración de Jacobi no funciona adecuadamente. Uniendo todos los elementos encontramos que :

$$CMG w_{m,n}^h = w_{m,n}^h - \lambda^v \lambda^h c_m c_n (\lambda^{2h})^{-1} (c_m c_n w_{m,n}^h - c_m s_n w_{m,n'}^h + s_m c_n w_{m',n}^h + s_m s_n w_{m',n'}^h), \quad (2.32)$$

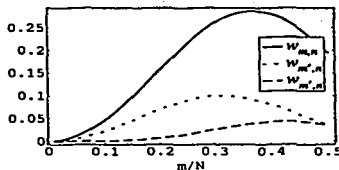


Figura 2.15 Intensidades de los coeficientes de los modos resultantes al aplicar *CGM* a un vector propio $w_{m,n}^h$. se muestra el valor sobre la línea $m = n$.

donde λ^v es el valor propio de la matriz de iteración G aplicado v veces y λ^h representa el valor propio de la matriz A^h . Lo que nos interesa es ver las amplitudes de los distintos coeficientes que acompañan a los vectores propios; estas se encuentran en la gráfica (2.15) donde se tomó $v = 1$

Podemos observar que los modos de baja frecuencia decrecen muy bien; el valor máximo para el coeficiente de $w_{m,n}^h$ es de 0,286, lo que nos da una tasa de convergencia muy buena. En realidad es un poco más grande pues hay contribuciones de los otros modos; sin embargo sigue siendo pequeña. Lo más importante es que estos valores fueron obtenidos sin tomar un valor particular de N , la tasa de convergencia para multigrad es independiente del tamaño de la malla. Unido al número de operaciones que tiene que realizar por incógnita hace A Multigrad el mejor método para ecuaciones elípticas.

Aspectos computacionales del Ciclo V

Computacionalmente queremos saber dos cosas para el ciclo V, el costo en memoria y el costo en operaciones. Para la memoria tenemos que cada malla gruesa tiene una cuarta parte de los puntos de la malla fina. Si en la malla más fina el número de puntos es de N^2 entonces el total de puntos desde la malla más fina hasta la más gruesa es

$$N^2(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \dots + 2^{-2l}) = N^2\left(\frac{4}{3} - \frac{2^{-2L}}{3}\right).$$

De aquí podemos apreciar que el aumento en memoria nunca excede 1/3 del tamaño de la malla más fina.

De la misma manera se puede calcular el trabajo que se realiza en un ciclo V en comparación. Llamemos WU el costo de realizar una iteración de relajación sobre la malla más fina. Consideremos un ciclo V en donde se realiza una relajación de entrada y una de salida. El Costo del ciclo V es

$$WU \times 2(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \dots + 2^{-2l}) = WU \times 2\left(\frac{4}{3} - \frac{2^{-2L}}{3}\right),$$

o en otras palabras, realizar un ciclo V cuesta menos que 3 relajaciones sobre la malla fina y la efectividad de un ciclo V no se compara a la ineffectividad de una relajación. Éstos cálculos

reflejan que Multigrid es una técnica muy económica computacionalmente.

Algunos detalles sobre el error

El propósito de éstos métodos es el de producir una aproximación v^h que concuerde con la solución del problema continuo con cierta tolerancia ϵ

$$\|u - v^h\| < \epsilon.$$

Aquí u es el vector que contiene la solución exacta en los puntos de la malla más fina. La condición anterior la podemos cambiar por una que incorpore información de la solución exacta del problema discreto u^h

$$\|u - v^h\| \leq \|u - u^h\| + \|u^h - v^h\| = \|E^h\| + \|e^h\| < \epsilon.$$

La manera de satisfacer la desigualdad será pidiendo que se cumpla $\|e^h\| < \epsilon/2$ y $\|E^h\| < \epsilon/2$ por separado. El error global $\|E^h\|$ está asociado a la transformación del problema continuo en discreto. En general puede ser acotado de la siguiente manera

$$\|E^h\| \leq K h^p,$$

en nuestro caso, $p = 4$. Si pedimos que $\|E^h\| < \epsilon/2$, encontramos una condición para el tamaño de la malla más fina.

$$h < \left(\frac{\epsilon}{2K}\right)^{1/p}.$$

La segunda condición indica que v^h también debe aproximar a la solución discreta. Si se realizan relajaciones o ciclos V hasta que $\|e^h\| < \epsilon/2$ se cumpla entonces hemos alcanzado la convergencia hasta el nivel de truncado.

Ejemplo

Como ejemplo veamos la manera como afecta las componentes del error un ciclo V para el problema homogéneo de la ecuación de Poisson. La gráfica (2.16) muestra como un ciclo V afecta a cada uno de los modos del error.

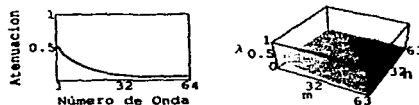


Figura 2.16 Aplicación de un ciclo V a una función de prueba que contiene todos los modos posibles del error.

En la gráfica se observa que la disminución de modos es prácticamente homogénea salvo en modos de baja frecuencia que no es tan buena, pero la reducción es mucho mejor que la iteración

de Jacobi para los mismos modos . El máximo en la figura es de 0.52, compare los resultados con la figura (2.6) donde el máximo es prácticamente 1.

2.5. Ejemplos numéricos

Ahora vamos a aplicar la iteración de Jacobi y Multigrid, a algunos problemas de prueba para las ecuaciones de Poisson y la Ecuación de convección - difusión. Aquí se presentan dos ejemplos que muestran como funcionan estas técnicas.

Para todas las simulaciones se utilizaron una malla de 129×129 , la función de inyección de promedio completo y la interpolación bilineal para la prolongación. Como aproximación inicial se utilizó $v = 0$

Ecuación de Poisson

La función de prueba para el problema de Poisson es

$$u(x, y) = e^{-100((x-1)^2 + (y-1)^2)} \quad (2.33)$$

La gráfica (2.17) muestra en el lado izquierdo el error absoluto al iniciar la iteración y en el lado derecho están graficadas las intensidades de los modos de Fourier mas prominentes del error.

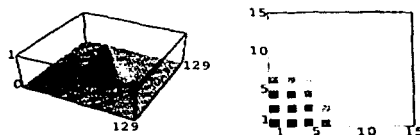


Figura 2.17 Error inicial y su distribución de modos de Fourier.

El resultado de aplicar la iteración de Jacobi 150 veces se encuentra en la gráfica (2.18), que muestra como disminuye la norma uno del error total y del residuo.

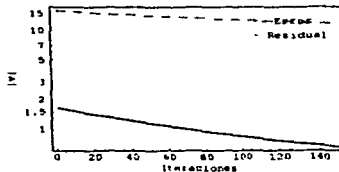


Figura 2.18 Historia de la iteración de Jacobi para el problema de prueba.

Como se puede observar, después de 150 iteraciones, el error global sólo ha disminuido en 5 unidades y se necesitan muchas más iteraciones para llegar a una aproximación aceptable.

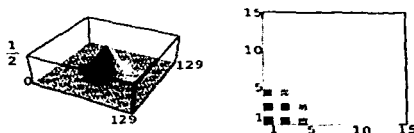


Figura 2.19 Error final y su distribución de modos de Fourier.

En la gráfica (2.19) se confirma que la iteración de Jacobi acaba con los modos de alta frecuencia, pero los de baja frecuencia siguen prácticamente intactos. Si aplicamos Multigríd a el mismo problema obtenemos los siguientes resultados:

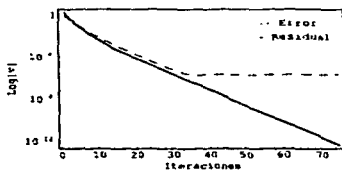


Figura 2.20: Convergencia para los ciclos V

La gráfica (2.20) muestra cómo 33 ciclos V son suficientes para llegar al nivel de truncado de la solución. Aquí es donde podemos apreciar lo bien que funciona esta técnica para la ecuación de Poisson. Al comparar con la iteración de Jacobi, tomese en cuenta que cada ciclo V cuesta lo mismo que 2 iteraciones de Jacobi.

Para terminar con este ejemplo se muestra la gráfica del error final. En ella se ve como todos los modos del error han desaparecido. También muestra que el error global no es cero, pero es pequeño.

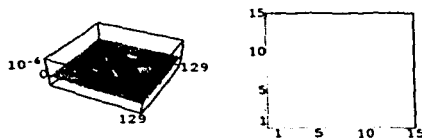


Figura 2.21 Error final y su distribución de modos de Fourier para los ciclos V.

Ecuación de Convección Difusión

El problema de la ecuación de convección difusión surge cuando el número de Peclet aumenta, porque la matriz pierde las propiedad de dominancia diagonal que tenía la ecuación de Poisson. Esto hace más difícil su solución. El siguiente problema de prueba mostrará como éste parámetro afecta a la solución.

El problema de prueba es:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x y (1 - x) (1 - y) \sin(10 \pi (x + y)), \\ p(x, y) &= P \sin(\pi x), \\ q(x, y) &= -P \cos(\pi y). \end{aligned} \quad (2.34)$$

El error y sus modos de Fourier se ven de la siguiente manera

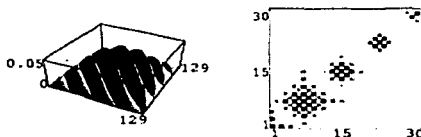


Figura 2.22 Error inicial y su distribución de modos de Fourier para el problema (2.34).

La convergencia para diferentes valores del parámetro P se muestran en las gráficas (2.23) y (2.24).

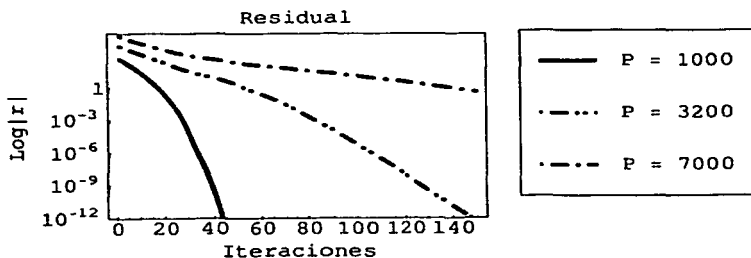


Figura 2.23 Disminución del residuo para diferentes valores del parámetro P .

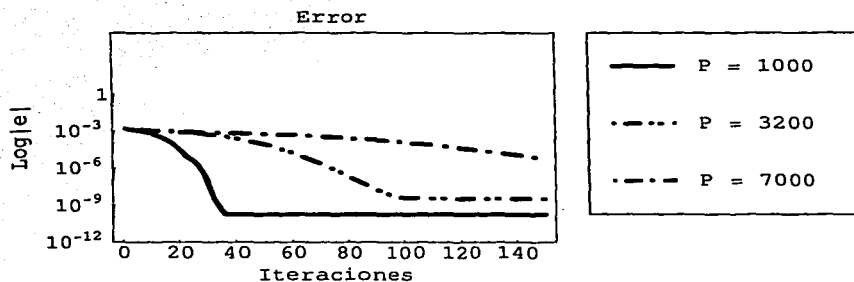


Figura 2.24 Disminución del error para diferentes valores del parámetro P .

Aquí hay dos puntos que debemos apreciar. El primero es que la velocidad de convergencia se reduce conforme P aumenta su tamaño aunque siempre converge. El otro es que el error global aumenta. Para P mayores obtenemos soluciones de menor precisión. El problema es que aunque el residuo es pequeño, el error crece tanto que la solución no sirve de nada. Este problema no es particular de Multigrid, otras técnicas también lo tienen. La razón es que el número de condición de la matriz es muy grande.

Capítulo 3

Solución del problema de la cavidad forzada

3.1. Ecuaciones del problema y método de solución

Las ecuaciones de Navier-Stokes para el problema del flujo en la cavidad bidimensional escritas con las variables de corriente y vorticidad se pueden interpretar como las ecuaciones de Poisson y de convección - difusión. Esto nos permite aplicar las técnicas anteriores para resolver el sistema de ecuaciones.

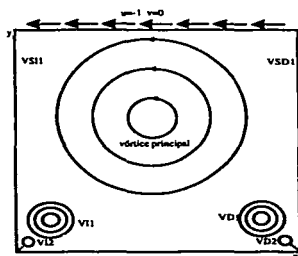


Figura 3.1 Esquema del problema y numeración de los vórtices en las diferentes regiones.

La región en la que deseamos resolver las ecuaciones es el cuadrado unitario. La frontera superior ($y = 1$) se mueve con velocidad constante de derecha a izquierda y por la condición de adherencia, produce el movimiento del fluido en el interior. El esquema del problema se muestra en la figura (3.1).

El sistema de ecuaciones que usaremos para modelar el problema de la cavidad está escrito en (3.1)-(3.4). Usando la velocidad de la tapa y la longitud de la caja se pueden escribir todas las variables de manera adimensional quedando como único parámetro el número de Reynolds.

$$-\nabla^2 \psi = \omega, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \omega = Re (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega \quad (3.4)$$

Con las condiciones: $\psi = 0$ en la frontera de la región, $u = -1$, $v = 0$ para $y = 1$ y $u = 0$, $v = 0$ en el resto de las caras.

La dificultad de éste problema radica en el término convectivo de la ecuación de vorticidad que no es lineal. Una manera posible de linealizar la ecuación de vorticidad es reemplazando las velocidades en el término convectivo por alguna aproximación a ellas, así, lo que tendríamos que resolver es la ecuación de convección - difusión que es más sencilla. El nuevo problema es obtener una aproximación a las velocidades, que es en principio el problema original. Sin embargo, si tuviéramos alguna aproximación a la función de corriente, podríamos obtener la de las velocidades. La función de corriente satisface la ecuación de Poisson que también sabemos resolver, el problema es que el miembro derecho contiene la vorticidad, que es nuestra incógnita inicial.

Gupta [9] propone un esquema, donde se empieza con una aproximación inicial para la vorticidad y la función de corriente para resolver las ecuaciones y obtener así mejores aproximaciones. Cada una de las ecuaciones también se resuelve a su vez de manera iterativa. Gupta repite este proceso iterativo hasta que las aproximaciones son un punto fijo de la iteración con cierta tolerancia.

El algoritmo de solución puede ser descrito como sigue [10]:

1. Igualar todas las variables a cero exceptuando las velocidades conocidas.
2. Resolver la ecuación para la función de corriente.
3. Amortiguar el valor de la función de corriente usando un parámetro w_1 .
4. Calcular las condiciones de frontera para la vorticidad y las velocidades del fluido.
5. Resolver la ecuación de vorticidad reemplazando las velocidades por las aproximaciones obtenidas en el paso anterior.
6. Amortiguar el valor de la vorticidad usando un parámetro w_2 .
7. Verificar la convergencia. Salir o regresar al paso 2.

Condiciones de Frontera y Cálculo de Velocidades

La primera dificultad con la que nos enfrentamos se encuentra en la solución de la ecuación para la vorticidad. Esta la hemos linealizado al cambiar las velocidades (u , v) por aproximaciones que se pueden obtener usando la función de corriente. El problema radica en la obtener las condiciones de frontera para la vorticidad.

En principio sólo tenemos las condiciones de frontera para la velocidad pero no para la vorticidad. Lo que relaciona ambas variables es la definición de vorticidad (3.3). Esta ecuación es válida en toda la cavidad, incluso en la frontera. Con ella podemos relacionar los valores de ω en la frontera con los gradientes de la velocidad.

La manera usual de hacer esto es escribir la serie de Taylor de la función de corriente sobre un punto de la frontera en dirección normal. La primera derivada de la función de corriente es la velocidad en la frontera y la segunda es la vorticidad. Así que se puede trincar la serie y despejar el valor de la vorticidad. Las fórmulas que se obtienen de esta manera se conocen como fórmulas de Jensen.

Las fórmulas de Jensen tienen un error de truncado del orden de h^3 . Utilizando la misma metodología que en la discretización de las ecuaciones es posible obtener una fórmula de cuarto orden que sólo utilice 3 puntos. Para obtenerla empezamos calculando la derivada de la función de corriente en dirección normal a la frontera. Tomemos primero el caso $x = 0$. Para esto vamos a situar el eje de coordenadas sobre el punto en la frontera donde deseamos calcular la vorticidad siguiendo la figura (3.2)

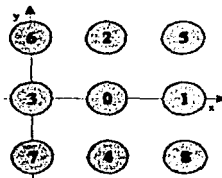


Figura 3.2 Marco de referencia para calcular la vorticidad, en este caso sobre la línea $x = 0$.

La serie de Taylor para el valor de ψ_0 alrededor del punto ψ_3 es

$$\psi_0 = \psi_3 + h \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial n^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial n^4} + O(h^5).$$

La serie para el valor de ψ_1 alrededor de ψ_3 tiene una forma similar, si multiplicamos la segunda por a y sumamos obtenemos la siguiente relación

$$\psi_0 + a \psi_1 = (1+a)\psi_3 + (1+2a)h \frac{\partial \psi}{\partial n} + (1+4a) \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (1+8a) \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial n^3} + (1+16a) \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial n^4} + O(h^5).$$

En cada cara, $\partial \psi / \partial n = V$ es la velocidad ($V = 1$ en la tapa superior) y $\partial^2 \psi / \partial n^2 = -\omega_0$ en la frontera, de modo que sólo nos quedan las derivadas superiores. Las fórmulas de Jensen se obtienen tomando $a = -1/8$ para eliminar el término de h^3 y truncando el resto. La fórmula de cuarto orden se obtiene seleccionando $a = -1/16$ para eliminar el término proporcional a h^4 . Después de truncar se obtiene:

$$16\psi_0 - \psi_1 = 15\psi_3 + 14hV - 6h^2\omega_3 + \frac{4}{3}h^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial n^3}.$$

Ahora necesitamos obtener una aproximación para $\partial^3 \psi / \partial n^3 = -\partial \omega / \partial n$ que puede ser de orden h , tomamos

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{-3\omega_3 + 4\omega_0 - \omega_1}{2h} + O(h^2).$$

Al juntar todos los términos obtenemos

$$\frac{h}{21}(6\omega_3 + 4\omega_0 - \omega_1) + O(h^5) = \frac{1}{14h}(15\psi_3 - 16\psi_0 + \psi_1) + V. \quad (3.5)$$

de donde podemos obtener ω_0 . El cálculo para el resto de las tapas es básicamente el mismo.

Estas fórmulas para la vorticidad no son las únicas. Spatz [11] hace una comparación entre las diferentes fórmulas de diferencias finitas que existen para este problema. Las que tienen un mejor desempeño son las fórmulas de Jensen de alto orden.

Esta manera de calcular las condiciones de frontera para la vorticidad es algo controvertida ya que no todas las personas la aceptan. Existen métodos de solución donde la discretización de la vorticidad no tiene puntos sobre la frontera y por lo tanto no es necesario calcularla. En otros casos, para encontrar la vorticidad se resuelve un sistema lineal que relaciona todos los puntos de la frontera. Esto es posible por el carácter elíptico de la ecuación. Weinan [12] muestra que estos métodos dan los mismos resultados y en particular demuestra que los métodos globales y las fórmulas locales son equivalentes.

Para calcular las velocidades también necesitamos aproximar los gradientes de la función de corriente. Para obtener fórmulas de cuarto orden se sigue el mismo procedimiento que para las discretizaciones anteriores, utilizando de nuevo la ecuación (3.1) para obtener las derivadas superiores. Así, se encuentra las siguientes fórmulas para las velocidades

$$\begin{aligned} u_0 &= (\psi_2 - \psi_4)\sqrt{3h} + (\psi_5 + \psi_6 - \psi_7 - \psi_8)\sqrt{12h} + h(\omega_2 - \omega_4)\sqrt{12}. \\ v_0 &= (\psi_3 - \psi_1)\sqrt{3h} - (\psi_5 - \psi_6 - \psi_7 + \psi_8)\sqrt{12h} + h(\omega_3 - \omega_1)\sqrt{12}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Acoplamiento de las ecuaciones

El método de solución que estamos aplicando resuelve la ecuación para la función de corriente y la ecuación linealizada para la vorticidad de manera consecutiva, pero en nuestro problema, tenemos un sistema de ecuaciones acopladas. La manera de introducir el acoplamiento dentro del algoritmo se encuentra en los pasos de amortiguamiento. Si $\psi^{(n)}$ es la aproximación en la iteración n y ψ^* es la solución a la función de corriente en la iteración $n + 1$ entonces nuestra nueva aproximación $\psi^{(n+1)}$ estará dada por

$$\psi^{(n+1)} = w_r \psi^* + (1 - w_r) \psi^{(n)}, \quad (3.7)$$

en donde $w_r \in (0, 1)$ es el parámetro de amortiguamiento. Esto tiene como finalidad reducir la rapidez de los cambios en las soluciones y prevenir la divergencia del proceso iterativo. Este mismo promedio se aplica a la vorticidad

Como en cada iteración exterior se promedian las nuevas soluciones con las anteriores, no es necesario resolver por completo cada ecuación por separado. Zang [10] propone un algoritmo eficiente en el que los pasos de solución de las ecuaciones consisten en aplicar uno o dos ciclos V a cada ecuación en cada iteración exterior ya que el resto del trabajo se elimina al amortiguar las soluciones.

Método de solución

Con los elementos anteriores podemos escribir el algoritmo final que usaremos para la solución del problema de la cavidad.

La ecuación elíptica que se resolvió en el capítulo 2 es:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + p(x, y) \phi_x + q(x, y) \phi_y = f(x, y). \quad (3.8)$$

Tomando a esta ecuación como modelo, el algoritmo de solución queda como:

1. Aplicamos uno o dos ciclos V a la función de corriente tomando $\phi = \psi$, $p = q = 0$ y $f = -\omega$.
2. Calculamos la nueva aproximación como $\psi^{(n+1)} = w_x \psi^n + (1 - w_x) \psi^{(n)}$.
3. Calculamos la vorticidad en la frontera usando (3.5).
4. Calculamos las velocidades $u^{(n)}$ y $v^{(n)}$ en el interior usando a $\psi^{(n+1)}$ y las relaciones (3.6).
5. Aplicamos uno o dos ciclos V a la vorticidad tomando $\phi = \omega$, $p = -Re u^{(n)}$, $q = -Re v^{(n)}$ y $f = 0$.
6. La iteración se detiene cuando la diferencia entre las aproximaciones es menor que una tolerancia de 10^{-6} y el residuo de las ecuaciones es también menor que la misma tolerancia.

Valores de los parámetros

Antes de mostrar los resultados del problema, discutiremos sobre los valores usados para los distintos parámetros que aparecen. Cada parámetro entra 2 veces pues se usa para la solución a la ecuación de Poisson y otro para la ecuación de convección-difusión.

El primero es el valor para el amortiguamiento de Jacobi. El valor óptimo que calculamos funciona muy bien cuando se esta resolviendo sólo una ecuación, pero al trabajar con el sistema acoplado no fue posible utilizar un valor tan pequeño y se tomó un valor de 0.8 para ambas ecuaciones.

El número de ciclos V que se aplicaron para cada ecuación por iteración exterior fue de 2. Este valor se seleccionó tomando en cuenta el tiempo que tardaba en converger la iteración. Con un ciclo V, cada iteración exterior tarda menos pero necesita un número mayor para converger, con 3 o más converge más rápido pero cada iteración es más lenta.

El parámetro más importante es el de amortiguamiento de las soluciones w_x y w_y , que aparece en (3.7). El valor para la vorticidad se tomó entre 0.6 y 0.8 con resultados aceptables. Valores más pequeños retrasaron la convergencia y valores más grandes, para $Re > 3000$ impidieron la convergencia. El valor para el amortiguamiento de la función de corriente resulto tener un impacto muy fuerte en la rapidez y convergencia de la iteración. Para $0 \leq Re \leq 2000$ aproximadamente, se pueden tomar valores hasta de 0.4, lo que hace rápida la convergencia, conforme aumenta el número de Reynolds, es necesario hacer más y más pequeño este parámetro. Esto permite que converja la solución pero el proceso se hace más y más lento. Parece ser que la ecuación de la vorticidad, el calculo de sus valores en la frontera, así como el cálculo de las velocidades se hacen más y más susceptibles a los cambios. Por eso es necesario frenar los cambios para que todo el proceso se logre sincronizar.

El último parámetro está relacionado con la función de restricción en el ciclo V. En el programa final se utilizó la inyección por ser más barata y al copiar el valor de la malla fina a la gruesa se multiplica por el parámetro de Inyección. Para la función de corriente se usó 3.54 y para la vorticidad se utilizó 0.54. Estos valores se determinaron a partir de la experiencia con el programa.

3.2. Resultados

A continuación se presentan los resultados del flujo de Stokes y de los flujos con números de Reynolds 100, 400, 2000, 3200, 4000, 5000, 6000, 7500 y 8000. Para cada valor se presentan las gráficas del flujo en la cavidad y detalles de los vórtices que aparecen en las esquinas. Para cada vórtice encontrado se calculó la posición del máximo (o mínimo) de la función de corriente y su magnitud. También se gráfica la velocidad u a lo largo de la línea $x = 1/2$, la velocidad v a lo largo de la línea $y = 1/2$ y la vorticidad en la posición del máximo de la función de corriente.

A un costado de cada figura se encuentra una tabla en donde se muestran los valores encontrados en este trabajo así como los reportados por Gustafson [4], Gupta [9] y Ghia et al. [13]. Cuando la figura contiene más de un vórtice, se señala a qué vórtice se refiere siguiendo la numeración de la figura 3.1.

Tanto los cálculos de Ghia como los nuestros se realizaron en una malla de 256×256 , salvo para $Re = 100$ en donde Ghia usa una malla de 128×128 . Las mallas usadas por Gupta son de 41×41 . Estos valores son importantes ya que no se cuenta con una solución analítica para este problema, por lo que la única manera de verificar es comparando con otros autores.

El programa de la cavidad se escribió en Fortran 77 y se corrió en una PC con un procesador Intel PIII de 700 Mhz y 256 Mb de memoria Ram.

Flujo de Stokes

Éste es el único caso en que se tienen algunos resultados analíticos. Sin embargo, los datos con los que se comparan los valores fueron obtenidos numéricamente. Gustafson ha logrado encontrar 26 vórtices de manera numérica en las esquinas, usando también técnicas de Multigríd. En sus resultados muestra que el valor de la función de corriente en cada vórtice es 3 o 4 órdenes de magnitud más pequeño que el anterior. En nuestro caso sólo logramos observar 2 vórtices en cada esquina inferior.

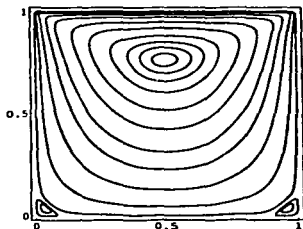


Figura 3.3

Vórtice principal. En este caso la solución es simétrica. Flujo de Stokes.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,100075	(0,50000, 0,76503)
Gustafson	0,0996	—

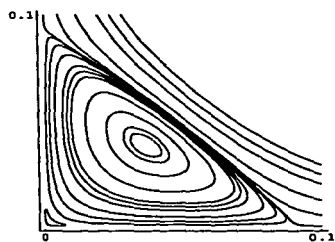


Figura 3.4

Vórtice secundario. Flujo de Stokes.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	-2,22708(-6)	3,76629(-2), 3,81181(-2)
Gustafson	-2,29(-6)	—

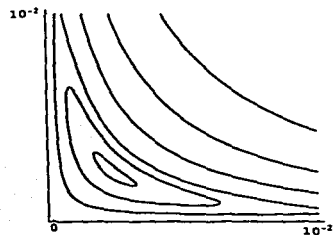


Figura 3.5

Vórtice terciario. Flujo de Stokes.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	1,73456(-10)	2,26691(-3), 2,26956(-3)
Gustafson	6,55(-11)	—

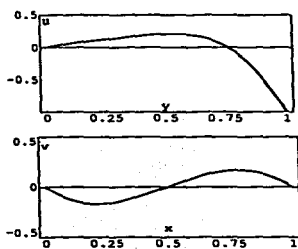


Figura 3.6

Velocidades a través del centro geométrico.

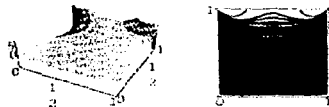


Figura 3.7

Vorticidad. Flujo de Stokes. Podemos apreciar que la gráfica muestra aproximadamente que la solución es singular en las esquinas. También se nota el carácter dominante de la difusión.

Autor	ω_p^a
Actual	2.37966

^avp: vórtice principal

Reynolds = 100

En esta solución, al igual que para el flujo de Stokes, se encontraron 2 vórtices secundarios de cada lado. Esto es, uno más que los encontrados en las referencias. Un resultado particularmente interesante es el que se observa para las velocidades a través del centro geométrico. Sobre la línea $x = 1/2$, los valores reportados por Ghia coinciden muy bien con nuestra solución. Los valores sobre la línea $y = 1/2$ no coinciden de manera tan satisfactoria, pero sí reproducen las características de la curva y resalta el hecho que el punto central cae sobre nuestra solución.

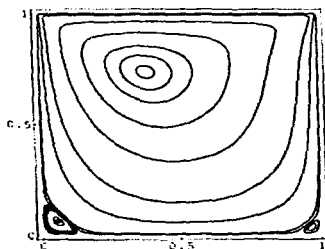


Figura 3.8

Vórtice principal. $Re = 100$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,10352	0,38424, 0,737312
Gupta	0,10346	0,375, 0,75
Ghia	0,10342	0,3838, 0,7344

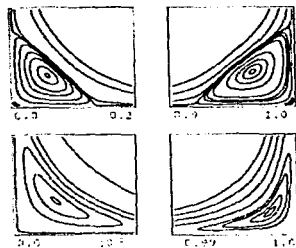


Figura 3.9

Vórtice secundarios y terciarios. $Re = 100$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas
V11	-1,27254(-5)	5,74879(-2), 6,18399(-2)
Gupta	-1,245(-5)	-
Ghia	-1,25374(-5)	5,44(-2), 6,25(-2)
VD1	-1,79994(-6)	9,65631(-1), 3,44449(-2)
Gupta	-1,747(-6)	-
Ghia	-1,74877(-6)	9,6687(-1), 3,91(-2)
V12	-4,17771(-10)	3,33202(-3), 3,32945(-3)
VD2	1,72817(-10)	9,9788317(-1), 3,32945(-3)

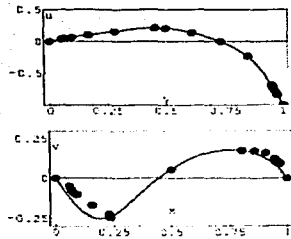


Figura 3.10



Figura 3.11

Reynolds = 400

En esta solución destaca es la diferencia de tamaños entre los vórtices izquierdo y derecho. Para las velocidades ocurre lo mismo que en el caso anterior. Nótese que la parte derecha de la velocidad v coincide mucho mejor que la izquierda.

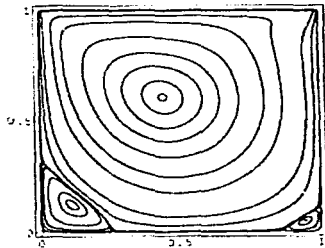


Figura 3.12

Velocidades a través del centro geométrico. $Re = 100$.

• Ghia [13]

Vorticidad. $Re = 100$.

Autor	ω_{cp}
Actual	3,16689
Gupta	3,28572
Ghia	3,16646

Vórtice principal. $Re = 400$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,11398	0,445903, 0,60542
Gupta	0,11281	0,45, 0,60
Ghia	0,11390	0,4445, 0,6055

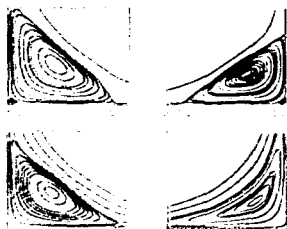


Figura 3.13

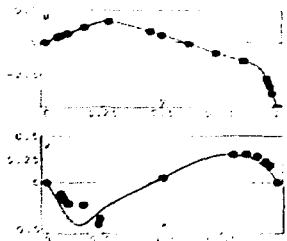


Figura 3.14



Figura 3.15

Reynolds = 2000

Para éste valor del número de Reynolds en la parte superior derecha aparece un nuevo vórtice. Este vórtice no está reportado por las referencias [9] [13]. Llama la atención la gráfica de la vorticidad muestra ya la separación de líneas de corriente constante en la parte central, justo como lo predice el teorema de Prandtl-Batchelor.

Vórtice secundarios y terciarios. $Re = 400$.

AV	ψ Máx	Coordenadas
V11	-6,44437(-4)	1,14544(-1), 1,22296(-1)
Gupta	-6,512(-4)	-
Ghia	6,42352(-4)	1,094(-1), 1,250(-1)
VD1	-1,43329(-5)	9,48862(-1), 4,72439(-2)
Gupta	-1,452(-5)	-
Ghia	-1,41951(-5)	9,492(-1), 4,69(-2)
V12	1,74513(-8)	7,2308(-3), 7,22925(-3)
Ghia	1,66595(-8)	7,8(-3), 7,8(-3)
VD2	6,67479(-10)	9,97103(-1), 4,71942(-3)
Ghia	7,67758(-10)	9,9961(-1), 3,9(-3)

Velocidades a través del centro geométrico. $Re = 400$.

• Ghia [13]

Vorticidad. $Re = 400$.

Autor	ω_{cp}
Actual	2,29535
Gupta	2,30247
Ghia	2,29469

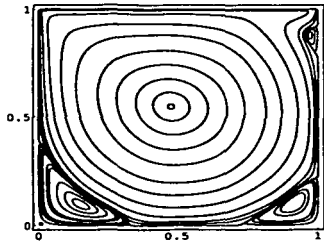


Figura 3.16

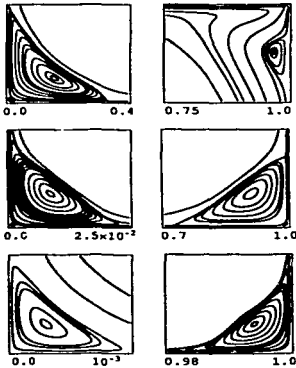


Figura 3.17

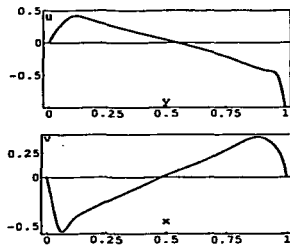


Figura 3.18

Vórtice principal. $Re = 2000$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,12100	0,47822, 0,54788
Gupta	0,09958	-

Vórtice secundarios y terciarios. $Re = 2000$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas
VSD1	-1,08527(-4)	9,7038(-1), 8,78647(-1))
VII	-2,48059(-3)	15,6980(-2), 9,6572(-2)
Gupta	-2,849(-3)	-
VD1	-7,46462(-4)	9,13812(-1), 1,03138(-1)
Gupta	-7,597(-3)	-
VI2	9,14486(-8)	9,04202(-3), 8,10152(-3)
VD2	1,99162(-8)	9,93937(-1), 5,87506(-3)
VI3	-2,70551(-12)	2,96554(-4), 2,88282(-4)

Velocidades a través del centro geométrico. $Re = 2000$.



Figura 3.19

Vorticidad, $Re = 2000$.

Autor	ω_{vp}
Actual	1,99174
Gupta	2,24579

 $Reynolds = 3200$

Para este valor de Re podemos observar ya 3 vórtices bien definidos. La disminución en los órdenes de magnitud es parecida a la que reporta Gustafson [4].

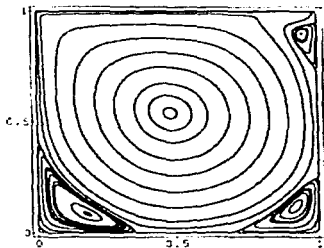


Figura 3.20

Vórtice principal, $Re = 3200$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,121662	0,4482169, 0,540507
Ghia	0,120377	0,4835, 0,5469

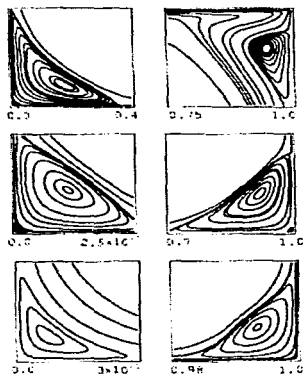
Vórtices secundarios y terciarios, $Re = 3200$.

Figura 3.21

A/V	ψ Max.	Coordenadas
V11	-2,8291(-3)	1,76459(-1), 8,42312(-2)
Ghia	-3,1395(-3)	1,875(-1), 8,59(-2)
VSD1	-7,00766(-4)	9,46634(-1), 8,98453(-1)
Ghia	-7,27682(-4)	9,453(-1), 8,984(-1)
VD1	-1,10856(-3)	9,18978(-1), 1,19718(-1)
Ghia	-9,7823(-4)	9,141(-1), 1,094(-1)
VI2	1,91066(-7)	1,23867(-2), 9,60675(-3)
Ghia	2,51648(-7)	1,56(-2), 7,8(-3)
VD2	3,50395(-8)	9,93442(-1), 6,63621(-3)
Ghia	6,33001(-8)	9,922(-1), 7,8(-3)
VI3	-4,64246(-11)	5,76541(-4), 8,10249(-4)

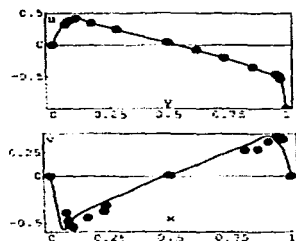


Figura 3.22



Figura 3.23

Reynolds = 5000

La figura con el vórtice principal muestra claramente la presencia de 2 vórtices en la parte inferior izquierda. El vórtice superior derecho ya ha crecido bastante en comparación con su primera aparición. Las gráficas de las velocidades son prácticamente rectas en la parte central de la cavidad y la vorticidad es constante en dicha región.

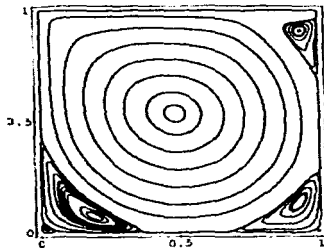


Figura 3.24

Velocidades a través del centro geométrico,
 $Re = 3200$.

• Ghia [13]

En la gráfica de v aunque los puntos no caen sobre la línea de nuestra solución, se puede apreciar el pico que se forma del lado izquierdo y la solución más redonda en la parte derecha.

Vorticidad. $Re = 3200$.

Autor	ω_{cp}
Actual	1,95947
Ghia	1,98860

Vórtice principal. $Re = 5000$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,121784	0,485041, 0,535721
Ghia	0,118966	0,4883, 0,5352)

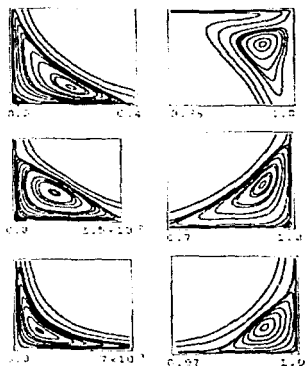


Figura 3.25

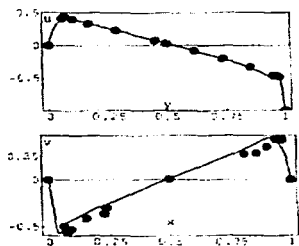


Figura 3.26



Figura 3.27

Reynolds = 6000

En este valor de *Re* encontramos un nuevo vórtice muy delgado y largo en la esquina superior izquierda. Figura (3.29). Este vórtice no aparece mencionado en [9] [13].

Vórtice secundarios y terciarios. *Re* = 5000.

A/V	ψ Max.	Coordenadas	
V11	-3,07169(-3)	1,96298(-1)	7,31049(-2)
Ghia	-3,08358(-3)	1,914(-1)	7,42(-2)
VSD1	-1,4227(-3)	9,36981(-1)	9,08794(-1)
Ghia	1,45641(-3)	9,375(-1)	9,102(-1)
VD1	-1,35355(-3)	9,27001(-1)	1,36448(-1)
Ghia	-1,36119(-3)	9,697(-1)	1,367(-1)
V12	1,40912(-6)	2,28183(-2)	1,77224(-2)
Ghia	1,43226(-6)	1,95(-2)	1,95(-2)
VD2	6,01394(-8)	9,90818(-1)	7,17670(-3)
Ghia	7,08860(-8)	9,883(-1)	7,8(-3)
V13	-3,7658(-10)	1,79131(-3)	1,18660(-3)

Velocidades a través del centro geométrico. *Re* = 5000.

• Ghia [13]

Vorticidad. *Re* = 5000.

Autor	ω_{max}
Actual	1,93580
Ghia	1,86016

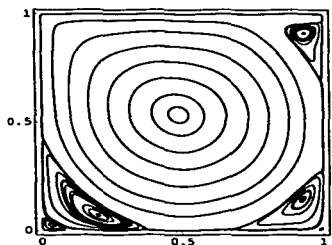


Figura 3.28

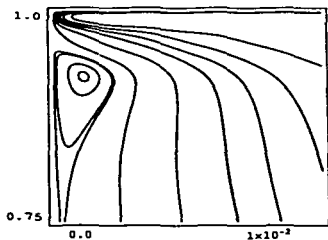


Figura 3.29

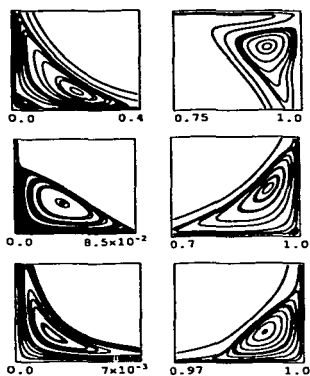


Figura 3.30

Vórtice principal. $Re = 6000$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,121658	0,486071, 0,53430

Vórtice superior izquierdo. $Re = 6000$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	8,72307(-7)	1,1014(-4), 9,23418(-1)

Vórtice secundarios y terciarios. $Re = 6000$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas
VII	-3,15569(-3)	2,03637(-1), 6,94362(-2)
VSD1	-1,7139(-3)	9,35553(-1), 9,10517(-1)
VD1	-1,41888(-3)	9,30739(-1), 1,43316(-1)
VI2	5,88326(-6)	3,28786(-2), 2,67149(-2)
VD2	8,38924(-8)	9,89453(-1), 7,54576(-2)
VI3	-7,62024(-10)	2,49280(-3), 1,40355(-3)

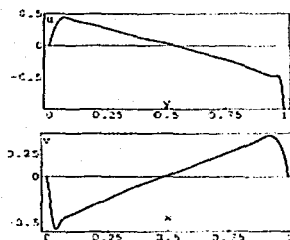


Figura 3.31



Figura 3.32

Velocidades a través del centro geométrico.
 $Re = 6000$.

Vorticidad. $Re = 6000$.

Autor	ω_{cp}
Actual	1,93580

$Reynolds = 7500$

Para este valor de Re es para el cual hay más valores reportados por Ghia. Esto nos permite hacer una muy buena comparación. Los resultados obtenidos y los reportados coinciden muy bien en la mayoría de los casos. Aún en las velocidades encontramos muy buena aproximación. La gráfica de la vorticidad muestra que sus curvas de nivel son muy parecidas a las que tiene la función de corriente. Recordemos que para números de Reynolds altos, por el teorema de Prandtl-Batchelor, la vorticidad es constante sobre las curvas de nivel de la función de corriente lejos de la frontera y por lo tanto coinciden dichas curvas.

Vórtice principal. $Re = 7500$.

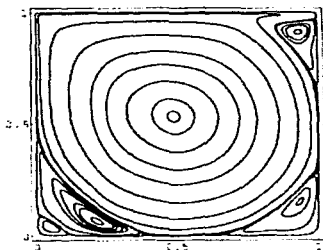


Figura 3.33

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,121323	0,487298, 0,532995
Ghia	0,119976	0,4883, 0,5322

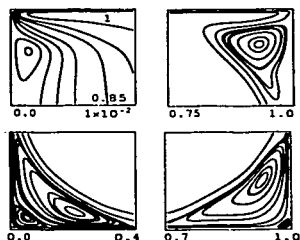


Figura 3.34

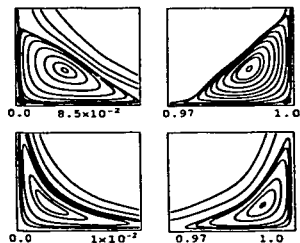


Figura 3.35

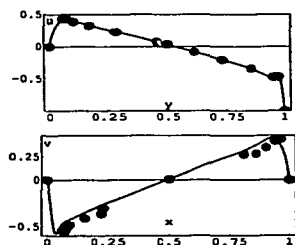


Figura 3.36

Vórtice secundarios. $Re = 7500$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas	
VSI1	-1,21093(-6)	1,32082(-4)	9,21006(-1)
VSD1	-2,06692(-3)	9,3401(-1)	9,10513(-1)
Ghia	-2,04620(-3)	9,336(-1)	9,141(-1)
VII	-3,22279(-3)	2,13075(-1)	6,67845(-2)
Ghia	-3,28484(-3)	2,187(-1)	6,25(-2)
VD1	-1,46896(-3)	9,35302(-1)	1,51109(-1)
Ghia	-1,46709(-3)	9,355(-1)	1,504(-1)

Vórtice terciarios. $Re = 7500$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas	
VI2	3,24615(-5)	4,89860(-2)	4,24817(-2)
Ghia	3,28148(-5)	5,08(-2)	4,30(-2)
VD2	1,52354(-7)	9,87158(-1)	8,77013(-3)
Ghia	1,83167(-7)	9,882(-1)	1,17(-2)
VI3	-1,64872(-9)	3,67602(-3)	1,74389(-3)
Ghia	-1,58111(-9)	3,9(-3)	3,9(-3)
VD3	-3,89437(-11)	9,99062(-1)	5,52683(-4)

Velocidades a través del centro geométrico.

 $Re = 7500$.

• Ghia [13]



Figura 3.37

Vorticidad. $Re = 7500$.

Autor	ω_{cp}
Actual	1,93580
Ghia	1,87987

 $Reynolds = 8000$

Éste es el último número de Reynolds para el que encontramos solución numérica. La razón es que aparece el fenómeno que observamos para la ecuación de convección - difusión. Al dominar la convección, al método ya no le es posible mejorar la solución.

En la figura del vórtice principal es posible observar 5 vórtices secundarios. Siendo ésta la figura más poblada. En total logramos encontrar hasta 8 vórtices.

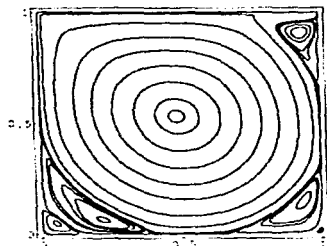


Figura 3.38

Vórtice principal. $Re = 8000$.

Autor	ψ Max.	Coordenadas
Actual	0,121175	0,487656, 0,532714

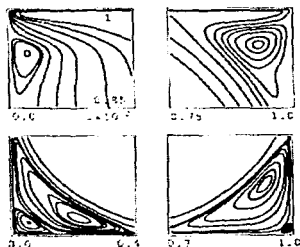


Figura 3.39

Vórtices secundarios. $Re = 8000$.

ΔV	ψ Max.	Coordenadas
VSI1	-1,30785(-6)	1,36514(-4), 9,20566(-1)
VSD1	-2,16709(-3)	9,33408(-1), 9,10206(-1)
VD1	-1,47657(-3)	9,36562(-1), 1,53115(-1)
VII	-3,2273(-3)	2,16574(-1), 6,46634(-2)

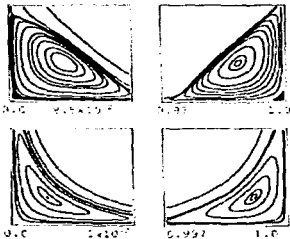


Figura 3.40

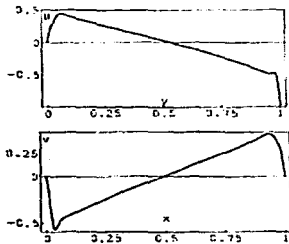


Figura 3.41

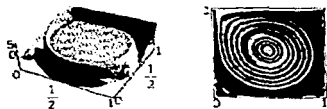


Figura 3.42

Vórtice terciarios. $Re = 8000$.

A/V	ψ Max.	Coordenadas
VD2	2,11906(-7)	9,878334(-1), 1,18466(-2)
VI2	-4,86949(-5)	5,33758(-2), 4,8331(-2)
VD3	-5,96942(-11)	9,98871(-1), 5,80376(-4)
VI3	-1,99145(-9)	4,19262(-3), 1,79304(-3)

Velocidades a través del centro geométrico.
 $Re = 8000$.Vorticidad. $Re = 8000$.

Autor	ω_{cp}
Actual	1,91249

3.3. Discusión de los resultados

Los resultados anteriores muestran que se ha logrado reproducir los resultados para el flujo en la cavidad obtenidos por otros autores. En general se encuentra un gran parecido entre los valores de las diferentes cantidades. Esto puede deberse a que se usó una fórmula diferente para aproximar la vorticidad en la frontera. Al comparar de las velocidades a través del centro geométrico resulta interesante que la velocidad en la vertical coincida muy bien con los valores de Gupta y los puntos en la línea horizontal no lo hagan. Sin embargo, todos los puntos en el segundo caso se encuentran muy cerca de nuestros valores.

Los valores de la función de corriente para los diferentes vórtices así como sus posiciones también difieren poco de los resultados reportados. Aunque se utilizó el mismo tamaño de malla que Gupta, se logró encontrar más vórtices que los que ellos reportan. Para $Re = 3200$, nosotros mostramos 2 vórtices más que en la referencia y para $Re = 6000$ en adelante mostramos el vórtice superior izquierdo que no se encuentra en la referencia.

La vorticidad es la última cantidad que se muestra para cada solución. En sus gráficas es donde se puede realmente apreciar el porque del nombre de la ecuación de convección-difusión. Cuando Re es pequeño, domina la difusión, y lo que muestra la gráfica (3.7) es cómo se difunde la vorticidad de la placa superior hacia la región interna. Conforme aumenta Re la vorticidad se ve arrastrada por el flujo hasta lograr que las curvas de nivel de la vorticidad casi coincidan con las de la función de corriente.

Para los números de Re pequeños, las soluciones muestran las características que habíamos encontrado en los problemas lineales que resolvimos al principio. Ellos son: los vórtices en las esquinas inferiores y la difusión de la vorticidad. Conforme aumentó Re fueron apareciendo otros vórtices en la parte superior que no se esperaban. De modo que éstos deben ser producidos por los términos no lineales debido a la discontinuidad de la vorticidad en las esquinas superiores.

Para los números de Re grandes, el teorema de Prandtl - Batchelor rige en la solución. Las gráficas de la vorticidad presentan una región plana al centro mostrando que efectivamente la vorticidad se hace constante al alejarse de las fronteras. Cerca de las fronteras la vorticidad tiene grandes variaciones mostrando la región de la capa límite donde la difusión es muy fuerte.

3.4. Conclusiones

El problema de la cavidad tiene más de 50 años de haber aparecido y sigue siendo un problema interesante; Probablemente esto se debe a que se pueden estudiar fenómenos que interesan a diferentes áreas. En éste trabajo se tocaron las áreas de física, matemáticas y la computación.

Para la parte física se habló del origen de las ecuaciones con las que se modeló el problema. Se explicó el significado de los términos que forman las ecuaciones así como el número de Reynolds. Finalmente se pudieron obtener, a partir de las ecuaciones, algunos resultados analíticos que después se comprobaron numéricamente.

La parte numérica se formó de dos partes. En la primera, mediante una discusión matemática, se obtuvieron aproximaciones discretas de las ecuaciones diferenciales. En la segunda se analizó matemáticamente técnica de Multigrad que se empleó en la solución de las ecuaciones. Se analizó con detalle la ecuación de Poisson lo que permitió entender los mecanismos que generan la

solución. Al aplicar la técnica de Multigrid a la ecuación de convección - difusión se observó que cuando el término convectivo domina, el error en la solución es mayor.

La parte computacional concreta todas las ideas anteriores. Para desarrollar el programa que calcula la solución, fue necesario unir todos los métodos analizados. No bastó tener la idea general. Se necesitó saber como opera cada elemento del algoritmo.

Al final se compararon los resultados obtenidos con los resultados de otros autores. La mayor parte de los valores concuerdan muy bien lo que nos da la confianza de que las soluciones encontradas son correctas y que el algoritmo numérico funciona razonablemente bien hasta $Re = 8000$.

Apéndice A

Código del programa de la cavidad

A continuación se encuentra el listado del programa que se desarrolló para este trabajo. No se da una descripción detallada, pero se espera que el trabajo y los comentarios sean suficientes para usarlo y/o modificarlo.

El programa consta de aproximadamente 2000 líneas de código escrito en **FORTRAN 77** lo que permite que funcione en Linux y Windows por igual.

A.1. Programa principal: cvt.f

```

program cvt
-----
c      Programa principal para la cavidad.
c      Lee el archivo de datos inputs.dat con todos los parametros
c
c      $id: cvt.f,v 1.3 2001/10/17 19:06:44 carlos Exp carlos $
-----

implicit none

c---- Common Parameters

integer
$   level,           ! Nivel maximo
$   nm,              ! numero de puntos en todas las mallas
$   nxf,             ! puntos por linea en la malla mas fina
$   idx              ! funcion de indice

c---- tamanos de mallas

c      parameter ( level=4, nm = 284 , nxf = 15 )
c      parameter ( level=5, nm = 1245 , nxf = 31 )
c      parameter ( level=6, nm = 5214 , nxf = 63 )
c      parameter ( level=7, nm = 21343, nxf = 127 )
c      parameter ( level=8, nm = 86368, nxf = 255 )
c      parameter ( level=9, nm = 347489, nxf = 511 )

c---- Variables de Multigrid -----
c---- funcion de corriente

integer
$   inject1,         ! inyectar s/n? (1,0)
$   njs1,            ! numero de suavizamientos de jacobi
$   maxit1           ! numero de ciclos V

```



```

reyEntero = Rey
write(numero,'(I4.4)') ReyEntero
historia = 'convergence.'//numero//'.dat'
open(36,file=historia)
c---- Condiciones de borde para la velocidad
  Do I = 0, nxf+1
    P(I,nxf+1) = - Rey * (-1.0)
c Velocidad en la tapa inferior
c P(I,0) = - Rey * (1)
  End Do
c-----
c Inicio de iteraciones exteriores
c-----
  Kter = 1
  Jter = 1
  Pter = PterMax
98 Continue
c-----
c Funcion de Corriente
c-----
c---- Calculamos el lado derecho para la funcion de corriente
call streamrhs(level, nm, nxf, S, W, al, rhs1) !rhs stream
c---- Resolver para la corriente
Do I = 1, maxit1
  call mgvcycle(vs1,rhs1,level,nm,nxf, al, WKS,
  $ damp1over1,inject1,jdamp1, residual1,njs1) ! solve stream
  End Do
c---- actualizamos los valores de stream en el interior
deltal=0.0
  if (Pter .eq. PterMax ) then
    mpter = 1
  else
    mpter = 0
  end if
  call update(level,nm,nxf, mpter,vs1,damp1,S,deltal)
c-----
c Transferencia de informacion
c-----
call transferencia(nxf,nxf, S,W, P,Q, Rey)
c-----
c Vorticidad
c-----
c---- calcular matriz y lado derecho para la vorticidad
call convdiff(level, nm, nxf, P, Q, a2) !matriz para vort
call cdrhs(level, nm, nxf, W, P, Q, WKS, a2, rhs2) !rhs vort
c---- Resolver para la vorticidad
Do I=1, maxit2
  call mgvcycle(vs2,rhs2,level,nm,nxf, a2, WKS,
  $ damp1over2,inject2,jdamp2, residual2,njs2) ! solve vort
  End Do
c---- actualizamos los valores de la vorticidad en el interior

```

```

delta2=0.0
call update(level,nm,nxf,mpter,vs2,damp2,W,delta2)
c-----
c Salida...
c-----
c---- Pantalla e historia.dat
      If (Pter.eq.PterMax) then
            write(nout,*)
            Write(nout,103) Kter, residual1,residual2
            Write(nout,104) delta1,delta2

            If(nout.ne.6) then
                  write(6,*)
                  Write(6,103) Kter, residual1,residual2
                  Write(6,104) delta1,delta2
            End If
c---- Escribir el estado de stream y vort (tranSave = 1)
      Pter = 0

      End If

c---- Archivo convergencia.dat
      write(36,*) Kter,residual1,residual2

c---- Ya terminamos una iteracion exterior mas...
      Jter = Jter + 1
      Kter = Kter + 1
      Pter = Pter + 1

c---- Revisamos la convergencia ...
      If(residual1.LE.tol1 .AND. residual2.LE.tol2 .AND.
      $   delta1.le.tol1 .AND. delta2.le.tol2) then

            write(nout,*) 'Convergencia', Rey

            go to 99

      End If

      go to 98
c-----
c Fin de iteraciones exteriores
c-----
99 Continue
c-----
c Escribir Stream y vorticidad
c-----
      reyEntero = Rey
      write(numero,'(I4.4)') ReyEntero
      nombre = 'stream.'//numero//'.dat'
      write(6,*) 'escribiendo archivo: ', nombre

      open(sout,file=nombre)
      Do J=0,nxf+1
            Do I=0,nxf+1
                  write(sout,*) S(I,J)
            End Do
      End Do
      close(sout)

      nombre = 'vort.'//numero//'.dat'

      open(sout,file=nombre)
      Do J=0,nxf+1
            Do I=0,nxf+1

```



```

        write (sout,") W(I,J)
      End Do
    End Do
  close(sout)

  If( Rey.gt.MaxRey ) goto 101

  Rey = Rey + lambda

  close(36)           ! convergence.dat
  goto 20
101 Continue
  close(77)
  close(78)
  close(79)
-----
c   Formatos
-----
103 Format ("It:",i6,"Stream:",D10.5," , Vort:",D10.5)
104 Format ("      Delta:",D10.5,"      ",D10.5)
105 Format (I4.4)
106 Format ("      Resp:",D10.5,"      ",D10.5)
107 Format (D6.2)
200 Format (E22.16)
300 Format (I3.3,I3.3,E22.16)
      Stop
      End
-----
c   End
-----

```

A.2. Subrutina : ascend.f

```

subroutine ascend(vs,curlevel,nm,nxf,a,WKS)
----->
c   Interpolax el error de la malla gruesa a la fina y corregir >
c   >
c   $Id: ascend.f,v 1.1 2001/10/17 19:04:37 carlos Exp carlos $ >
----->

  implicit none
  integer
  $   curlevel,           ! nivel Actual
  $   nm,                 ! total de puntos en todas las mallas
  $   nxf,                ! puntos en la malla fina
  $   idx,                ! funcion de indice

  double precision
  $   vs(nm),            ! vector solucion
  $   a(0:nm),           ! Coefs de la matriz en todas las mallas
  $   WKS(0:nxf+1,0:nxf+1) ! espacio de trabajo

c--- Local Variables

  integer
  $   nx,                 ! numero de puntos por linea en el nivel actual
  $   I,J,                ! indices para ciclos FOR
  $   lowlevel,
  $   First, pos

-----
c   Programa
-----
  lowlevel = curlevel - 1

```

ESTA TESIS NO SALI
DE LA BIBLIOTECA

```

c----- Recorremos el nivel inferior e inyectamos los valores a
c----- el espacio de trabajo
nx = (2**lowlevel) - 1

First = ((8- 3* 2**(lowlevel+1)+ 4**lowlevel+ 3*lowlevel) /3) -1

Do J = 1, nx
  Do I = 1, nx
    pos = (J-1)*nx+I+First
    WKS(2*I,2*J) = vs(pos)
  End Do
End Do

c----- recorremos el nivel actual y corregimos
nx = (2**curlevel) - 1

First = ((8- 3* 2**(curlevel+1)+ 4**curlevel+ 3*curlevel) /3) -1

Do I = 1, nx
  Do J = 1, nx
    pos = (J-1)*nx+I+First
    vs(pos) = vs(pos) +
$      (4*WKS(I,J)
$      +2*WKS(I+1,J)
$      +2*WKS(I-1,J)
$      +2*WKS(I,J+1)
$      +2*WKS(I,J-1)
$      +WKS(I+1,J+1)
$      +WKS(I-1,J-1)
$      +WKS(I+1,J-1)
$      +WKS(I-1,J+1)
$      +WKS(I-1,J+1) )/4.0d0
  End Do
End Do

c----- borramos el espacio de trabajo y el nivel inferior
nx= (2**lowlevel) - 1

Do J = 1, nx
  Do I = 1, nx
    WKS(2*I,2*J) = 0.0d0
    vs(idx(I,J,lowlevel)) = 0.0d0
  End Do
End Do

return
End
c-----
c-----
c-----

```

A.3. Subrutina : cdrhs.f

```

subroutine cdrhs(level, nm, nx, U, P, Q, F, a, zhs)
c-----

```

```

c   Calculamos el lado derecho de la eq. de conveccion difusion
c   solo para la malla mas gruesa.
c
c   $Id: cdrhs.f,v 1.2 2001/10/04 19:42:30 carlos Exp $
-----
implicit none
integer
$   level,           ! nivel de la malla mas fina
$   nm,              ! total de puntos en todas las mallas
$   nx               ! puntos por linea en la malla fina

double precision
$   U(0:nx+1,0:nx+1), ! condiciones de borde en la malla fina
$   P(0:nx+1,0:nx+1), ! coeficientes de conveccion
$   Q(0:nx+1,0:nx+1), !
$   F(0:nx+1,0:nx+1), ! Lado derecho en la malla fina
$   a(0:8,nm),        ! coeficientes de la matriz
$   rhs(nm)           ! lado derecho con cond. borde

c----- Local variables

integer
$   idx,             ! funcion de indice
$   I,J,             ! variables de ciclos FOR
$   pos              ! indice sobre la malla

double precision
$   H                ! tamano de paso en la malla mas fina
-----
c   Programa
-----
H=1.0d0/(2**level)

Do J = 1 , nx
  Do I = 1 , nx

    rhs(idx(I,J,level)) =
$     0.5D0*H*H*(0.0D0*F(I,J)
$     + F((I+1),J) + F(I,(J+1))
$     + F((I-1),J) + F(I,(J-1)))
$     + 0.25D0*H*H*H*(
$     P(I,J)*F((I+1),J)
$     - F((I-1),J))
$     + Q(I,J)*F(I,(J+1))
$     - F(I,(J-1)))

    End Do
  End Do
-----
c   Condiciones de borde
-----
c----- Primer punto (1,1)
pos = idx(1,1,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$   - (a(5,pos)*U(0,2)
$   + a(3,pos)*U( 0,1)
$   + a(7,pos)*U( 0,0)
$   + a(4,pos)*U( 1,0)
$   + a(8,pos)*U( 2,0) )

c----- Línea (2...nx-1,1)
Do I=2,nx-1

  pos = idx(I,1,level)

  rhs(pos)=rhs(pos)
$   - (a(7,pos)*U((I-1),0)

```

```

$      + a(4,pos)*U( I ,0)
$      + a(8,pos)*U( (I+1),0 )

End Do

C---- Punto (nx,1)
pos = idx(nx,1,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(5,pos)*U((nx+1),2)
$      + a(1,pos)*U( (nx+1),1)
$      + a(7,pos)*U( (nx-1),0)
$      + a(4,pos)*U( nx ,0)
$      + a(8,pos)*U( (nx+1),0 )

C---- La Línea (1,2...nx-1)
Do J=2,nx-1

pos = idx(1,J,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U(0, (J+1))
$      + a(3,pos)*U( 0, J )
$      + a(7,pos)*U( 0, (J-1) )

End Do

C---- La Línea (nx,2...nx-1)
Do J=2,nx-1

pos = idx(nx,J,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(5,pos)*U((nx+1), (J+1))
$      + a(1,pos)*U( (nx+1), J )
$      + a(8,pos)*U( (nx+1), (J-1) )

End Do

C---- El Punto (1,nx)
pos = idx(1,nx,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(7,pos)*U(0, (nx-1))
$      + a(3,pos)*U( 0, nx )
$      + a(6,pos)*U( 0, (nx+1))
$      + a(2,pos)*U( 1, (nx+1))
$      + a(5,pos)*U( 2, (nx+1) )

C---- La Línea (2...nx-1,nx)
Do I=2,nx-1

pos = idx(I,nx,level)
rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U((I-1), (nx+1))
$      + a(2,pos)*U( I , (nx+1))
$      + a(5,pos)*U( (I+1), (nx+1) )

End Do

C---- El punto (nx,nx)
pos = idx(nx,nx,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U((nx-1), (nx+1))
$      + a(2,pos)*U( nx , (nx+1))
$      + a(5,pos)*U( (nx+1), (nx+1))

```

```

$ + a(1,pos)*U( (nx+1), nx )
$ + a(8,pos)*U( (nx+1), (nx-1) )
c---- Fin de condiciones de borde
return
end
c-----
c End
c-----

```

A.4. Subrutina : convdiff.f

```

subroutine convdiff(level, nm, nxf, P, Q, a)
c-----
c Calcula los coeficientes para la matriz de conveccion difusion
c
c $Id: convdiff.f,v 1.2 2001/10/17 19:06:22 carlos Exp $
c-----
implicit none
integer
$ level, ! Nivel de la malla mas fina
$ nm, ! total de puntos en todas las mallas
$ nxf ! puntos por linea en la malla fina

double precision
$ P(0:nxf+1,0:nxf+1), ! coeficientes de conveccion
$ Q(0:nxf+1,0:nxf+1), !
$ a(0:8,nm) ! matriz de coeficientes

c---- variables locales
integer
$ idx, ! funcion de indice
$ I,J, ! loop indexes
$ curlevel, ! nivel actual
$ nx ! no. incognitas del nivel actual

double precision
$ stl(0:8) ! estencil
c-----
c Programa
c-----
Do curlevel = 1, level
  nx = (2**curlevel-1)
  Do J = 1, nx
    Do I = 1, nx

      call coef9(curlevel, nxf, I,J , P,Q, stl)

      a(1,idx(I,J,curlevel)) = stl(1)
      a(2,idx(I,J,curlevel)) = stl(2)
      a(3,idx(I,J,curlevel)) = stl(3)
      a(4,idx(I,J,curlevel)) = stl(4)
      a(5,idx(I,J,curlevel)) = stl(5)
      a(6,idx(I,J,curlevel)) = stl(6)
      a(7,idx(I,J,curlevel)) = stl(7)
      a(8,idx(I,J,curlevel)) = stl(8)
      a(0,idx(I,J,curlevel)) = stl(0)

    End Do
  End Do
End Do

```

```

return
end
-----
c End
-----
c subroutine coef9(curlevel, nxf, I, J, P, Q ,stl)
-----
c Calcular el stencil par los puntos I,J en el nivel actual
c Tomada de Zhang [9]
-----
implicit none
integer nxf, I, J, curlevel

double precision P(0:nxf+1,0:nxf+1), Q(0:nxf+1,0:nxf+1),
$ stl(0:8)

c----- Local Variables
integer
$ K ! factor de escala para los indices

double precision
$ H, ! tamano de malla para el nivel actual
$ p0, p1, p2, p3, p4,
$ q0, q1, q2, q3, q4, ! coeficientes del stencil
$ r4

K = (nxf+1)/(2**curlevel)

c
c leemos los coeficientes para el nivel actual
c
p0 = P( K* I , K* J )
p1 = P( K* (I+1) , K* J )
p2 = P( K* I , K* (J+1) )
p3 = P( K* (I-1) , K* J )
p4 = P( K* I , K* (J-1) )
q0 = Q( K* I , K* J )
q1 = Q( K* (I+1) , K* J )
q2 = Q( K* I , K* (J+1) )
q3 = Q( K* (I-1) , K* J )
q4 = Q( K* I , K* (J-1) )

H = 1.0d0/(2**curlevel)

stl(1) = (4.0D0+0.25D0*H*(4.0D0*p0+3.0D0*p1-p3+p2+p4)
$ + 0.125D0*H*H*(4.0D0*p0*p0+p0*(p1-p3)+q0*(p2-p4)) )

stl(2) = (4.0D0+0.25D0*H*(4.0D0*q0+3.0D0*q2-q4+q1+q3)
$ + 0.125D0*H*H*(4.0D0*q0*q0+p0*(q1-q3)+q0*(q2-q4)) )

stl(3) = (4.0D0-0.25D0*H*(4.0D0*p0-p1+3.0D0*p3+p2+p4)
$ + 0.125D0*H*H*(4.0D0*p0*p0-p0*(p1-p3)-q0*(p2-p4)) )

stl(4) = (4.0D0-0.25D0*H*(4.0D0*q0-q2+3.0D0*q4+q1+q3)
$ + 0.125D0*H*H*(4.0D0*q0*q0-p0*(q1-q3)-q0*(q2-q4)) )

r4 = 0.125D0*H*(q1-q3+p2-p4) + 0.25D0*H*H*p0*q0

stl(5) = (1.0D0 + 0.5D0*H*(p0+q0) + r4)
stl(6) = (1.0D0 - 0.5D0*H*(p0-q0) - r4)
stl(7) = (1.0D0 - 0.5D0*H*(p0+q0) + r4)
stl(8) = (1.0D0 + 0.5D0*H*(p0-q0) - r4)

c
stl(0) = -(20.0D0+H*H*(p0*p0+q0*q0)+H*(p1-p3)+H*(q2-q4))

c
return
end
-----

```

c FIN

A.5. Subrutina : descend.f

```

subroutine descend(vs, rhs, curlevel, nm, a, dampower, inject)
-----
c Baja el residual del nivel actual al nivel inferior
c
c $Id: descend.f,v 1.3 2001/10/17 19:07:05 carlos Exp $
-----
implicit none
integer
$ curlevel,          ! nivel actual
$ nm,                ! total de puntos en las mallas
$ idx,              ! funcion de indice
$ inject

double precision
$ vs(nm),           ! vector con la solucion
$ rhs(nm),         ! lado derecho y residuales
$ a(0:8,nm),       ! coeficientes de la matriz
$ dampower

c---- Variables locales
integer
$ nx,              ! numero de puntos por linea en el nivel inferior
$ nxl,            ! igual que nx pero para el nivel actual
$ I,J,U,I,U,J,   ! variables FOR de los niveles
$ pos,           ! variable de posicion
$ lowlevel,      ! el nivel inferior
$ First         ! indice del primer punto de la malla
! actual
double precision
$ res           ! residual puntual para actualizar
-----
c Programa
-----
lowlevel = curlevel - 1
nx = (2**lowlevel) - 1

First = ((8 - 3 * 2**(curlevel+1) + 4**curlevel + 3*curlevel) / 3) - 1
nxl = (2**curlevel) - 1
-----
c Recorremos el nivel inferior, duplicamos las coordenadas y
c obtenemos el residual de arriba, lo escribimos en el lado
c derecho (rhs) para el nivel inferior.
c Todos los residuales provienen de puntos que no tocan la
c frontera
-----
Do J = 1, nx
Do I = 1, nx

    uI = 2*I
    uJ = 2*J

    pos = (uJ-1)*nxl+uI+First

    res = -(a(0,pos) * vs((uJ-1)*nxl+uI )+First)
$      +a(1,pos) * vs( (uJ-1)*nxl+(uI+1)+First)
$      +a(2,pos) * vs( (uJ )*nxl+(uI )+First)
$      +a(3,pos) * vs( (uJ-1)*nxl+(uI-1)+First)
$      +a(4,pos) * vs( (uJ-2)*nxl+(uI )+First)

```

```

$      +a(5,pos) * vs( (uJ )*nx1+(uI+1)+First)
$      +a(6,pos) * vs( (uJ )*nx1+(uI-1)+First)
$      +a(7,pos) * vs( (uJ-2)*nx1+(uI-1)+First)
$      +a(8,pos) * vs( (uJ-2)*nx1+(uI+1)+First) )
$      + rhs(pos)

```

```

      rhs(idx(I,J,lowlevel))= dampower * res

```

```

      End Do
End Do

```

```

return
End

```

```

-----
c      End
-----

```

A.6. Subrutina : idx.f

```

integer function idx(I,J,n)

```

```

-----
c
c      Funcion de indice
c      Los vectores con la solucion o los lados derechos tienen la
c      siguiente estructura. los puntos se numeran
c      lexicograficamente, y las mallas se ordenan de menor a
c      mayor, el indice es la posición en el vector a partir
c      del nivel en que se encuentra (n) y sus coordenadas (I,J)
c
c      $Id: idx.f,v 1.2 2001/10/17 19:07:20 carlos Exp $
-----
      integer I,J, First, nx ,n

      integer last

      First = (8 - 3 * 2**(n+1) + 4**n + 3*n)/3

      last = ( 4 * ( 2 - 3 * 2**n + 4**n) + 3 * n)/3

      nx= (2**n -1 )

      if ( I .lt. 1 .or. I .gt. nx .or. J .lt. 1 .or. J .gt.nx ) then
c      write(*,*) 'indice fuera de lugar'
c      end if

      idx = (J-1)*nx+I+First-1

c      if ( idx .lt. first .or. idx .gt. last ) then
c      write(*,*) 'indice fuera de lugar'
c      end if

      end

```

```

-----
c      End
-----

```

```

-----
subroutine zeros( n, a)

```

```

-----
c      Inicializa a cero los arreglos

```

```

-----
integer n
double precision a(n)

```



```

double precision zero
parameter( zero = 0.0d0 )
integer nn

c
do 10 nn = 1, n
  a(nn)= zero
10 continue
return
end

c-----
c      End
c-----

```

A.7. Subrutina : loadsol.f

```

subroutine loadsol( filenumber, nm, nxf, level, S, vs)

```

```

c-----
c      Lee datos del filehandle filenumber y los escribe en
c      el arreglo S y el vector vs
c-----
integer
$   filenumber,      ! numero de archivo abierto
$   nm,              ! tamaño de s
$   nxf,             ! S(nxf,nxf)
$   level            ! nivel máximo

Double precision
$   S(0:nxf+1,0:nxf+1), ! arreglo con la solución (w or s)
$   vs(nm)

c-----Local -----
integer
$ i, j, pos ! índices

c----- Subroutine -----
Do J=0,nxf+1
  Do I=0,nxf+1
    read(filenumber,*) S(I,J)
  End Do
End Do

Do J=1,nxf
  Do I=1,nxf
    pos = idx(I,J,level)
    vs(pos) = S(I,J)
  End Do
End Do

return
end

```

A.8. Subrutina : mgvcycle.f

```

subroutine mgvcycle( vs, rha, level, nm, nxf, a, NKS,
$   damplower, inject, jdamp, residual, njs)

```

```

c-----
c      Ciclo V de Multigrid
c
c      $id: mgvcycle.f.v 1.4 2001/10/21 04:25:36 carlos Exp carlos $

```

```

-----
implicit none

integer
$   level,           ! Nivel de la malla fina
$   nm,              ! total de puntos en las mallas
$   nxf,             ! puntos en la malla fina
$   inject,          !
$   njs,             ! suavizamientos de Jacobi
$   idx              ! Funcion de indice

Double precision
$   vs(nm),          ! vector con la solucion
$   rhs(nm),         ! Lado derecho con cb's
$   a(0:8,nm),      ! coeficientes del sistema
$   damplover,       ! atenuacion en el descenso
$   jdamp,           ! atenuacion de Jacobi
$   residual,        ! residual maximo despues del suavizamiento
$   WKS(0:nxf+1,0:nxf+1) ! Espacio de trabajo

c---- Local variables
integer
$   curlevel,
$   getres,
$   I

-----
c
Programa
-----
residual = 0.0d0
getres = 0

c---- Going Down .... Bajar hasta el penultimo nivel
Do curlevel = level, 2, -1

    Do I = 1, njs
        call smooth(vs, rhs, curlevel, nm, a, jdamp, residual, getres)
    End Do

    call descend(vs, rhs, curlevel, nm, a, damplover, inject)

End Do

c---- Bottomline. llamar con el valor del nivel mas bajo
call systemsolve(vs, rhs, I, nm, a)

c---- Going Up .... desde el penultimo nivel hasta level
Do curlevel = 2, level, 1

    if( curlevel .eq. level ) then
        getres = 1
    End If

    call ascend(vs, curlevel, nm, nxf, a, WKS)

    Do I = 1, njs
        call smooth(vs, rhs, curlevel, nm, a, jdamp, residual, getres)
    End Do

End Do

return
End
-----
c
End

```

A.9. Subrutina : smooth.f

```

-----
subroutine smooth(vs,rhs,curlevel,nm,a,jdamp,residual,getres)
c-----
c   Suavizamiento Gauss-Seidel lexicografico para el nivel actual
c   $Id: smooth.f,v 1.2 2001/10/17 19:08:29 carlos Exp carlos $
c-----
implicit none

integer
$   curlevel,          ! nivel a suavizar
$   nm,                ! total de puntos en la mallas
$   idx,               ! el indice
$   getres              ! calcular el residuo?
double precision
$   vs(nm),            ! vector solucion
$   rhs(nm),           ! lado derecho y residuales
$   a(0:8,nm),         ! Coeficientes de la matriz
$   jdamp,              ! Atenuacion
$   residual            ! residual maximo

c---- Local Variables

integer
$   nx,                 ! puntos del nivel actual
$   I,J,                !
$   posl , pos,         ! dummy var for index
$   First                ! primer punto del nivel en el vector

double precision
$   res ! residual puntual para actualizar

c-----
c   Programa
c-----
nx = (2**curlevel-1)

residual = 0.0d0

First = ((8- 3* 2**(curlevel+1) + 4**curlevel+ 3*curlevel) /3) -1

c---- puntos lejos de las fronteras
Do J = 2, nx-1
  posl=(J-1)*nx+First

  Do I = 2, nx-1

    pos = posl + I

    res = -(a(0,pos) * vs( pos      )
$         +a(1,pos) * vs( pos +1   )
$         +a(2,pos) * vs( pos +nx  )
$         +a(3,pos) * vs( pos -1   )
$         +a(4,pos) * vs( pos -nx  )
$         +a(5,pos) * vs( pos +1 +nx )
$         +a(6,pos) * vs( pos -1 +nx )
$         +a(7,pos) * vs( pos -1 -nx )
$         +a(8,pos) * vs( pos +1 -nx ) )
$         + rhs(pos)

    vs(pos) = vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
  
```

```

      If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
    End Do
  End Do
-----
c   Linea frontera
-----
c---- Punto (1,1)
      pos = idx(1,1,curlevel)
      res = -(a(0,pos) * vs(idx(1,1,curlevel))
$      +a(1,pos) * vs(idx( 2,1,curlevel))
$      +a(2,pos) * vs(idx( 1,2,curlevel))
$      +a(5,pos) * vs(idx( 2,2,curlevel)) )
$      + rhs(pos)
      vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
      If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
c---- Linea (2...nx-1,1)
      Do I=2,nx-1
        pos = idx(I,1,curlevel)
        res = -(a(0,pos) * vs(idx(I,1,curlevel))
$        +a(1,pos) * vs(idx(I+1,1,curlevel))
$        +a(2,pos) * vs(idx(I, 2,curlevel))
$        +a(3,pos) * vs(idx(I-1,1,curlevel))
$        +a(5,pos) * vs(idx(I+1,2,curlevel))
$        +a(6,pos) * vs(idx(I-1,2,curlevel)) )
$        + rhs(pos)
        vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
        If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
      End Do
c---- Punto (nx,1)
      pos = idx(nx,1,curlevel)
      res = -(a(0,pos) * vs(idx(nx,1,curlevel))
$      +a(2,pos) * vs(idx(nx, 2,curlevel))
$      +a(3,pos) * vs(idx(nx-1,1,curlevel))
$      +a(6,pos) * vs(idx(nx-1,2,curlevel)) )
$      + rhs(pos)
      vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
      If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
c---- Linea (1,2...nx-1)
      Do J=2,nx-1
        pos = idx(1,J,curlevel)
        res = -(a(0,pos) * vs(idx(1, J,curlevel))
$        +a(1,pos) * vs(idx( 2, J,curlevel))
$        +a(2,pos) * vs(idx( 1, J+1,curlevel))
$        +a(4,pos) * vs(idx( 1, J-1,curlevel))
$        +a(5,pos) * vs(idx( 2, J+1,curlevel))
$        +a(8,pos) * vs(idx( 2, J-1,curlevel)) )
$        + rhs(pos)
        vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
        If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
      End Do
c---- Linea (nx,2...nx-1)
      Do J=2,nx-1
        pos = idx(nx,J,curlevel)
        res = -(a(0,pos) * vs(idx(nx,J,curlevel))
$        +a(2,pos) * vs(idx(nx, J+1,curlevel))
$        +a(3,pos) * vs(idx(nx-1,J,curlevel))

```

```

$      +a(4,pos) * vs(idx(nx) ,J-1,curlevel))
$      +a(6,pos) * vs(idx(nx-1,J+1,curlevel))
$      +a(7,pos) * vs(idx(nx-1,J-1,curlevel)) )
$      + rhs(pos)

vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
End Do

c---- Punto (1,nx)
pos = idx(1,nx,curlevel)
res = -(a(0,pos) * vs(idx(1,nx) ,curlevel))
$      +a(1,pos) * vs(idx( 2,nx) ,curlevel))
$      +a(4,pos) * vs(idx( 1,nx-1,curlevel))
$      +a(8,pos) * vs(idx( 2,nx-1,curlevel)) )
$      + rhs(pos)

vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)

c---- The Line (2...nx-1,nx)
Do I=2,nx-1
  pos = idx(I,nx,curlevel)
  res = -(a(0,pos) * vs(idx(I,nx) ,curlevel))
  $      +a(1,pos) * vs(idx(I+1,nx) ,curlevel))
  $      +a(3,pos) * vs(idx(I-1,nx) ,curlevel))
  $      +a(4,pos) * vs(idx(I) ,nx-1,curlevel))
  $      +a(7,pos) * vs(idx(I-1,nx-1,curlevel))
  $      +a(8,pos) * vs(idx(I+1,nx-1,curlevel)) )
  $      + rhs(pos)

  vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
  If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)
End Do

c---- el punto (nx,nx)
pos = idx(nx,nx,curlevel)
res = -(a(0,pos) * vs(idx(I,J) ,curlevel))
$      +a(3,pos) * vs(idx(I-1,J) ,curlevel))
$      +a(4,pos) * vs(idx(I) ,J-1,curlevel))
$      +a(7,pos) * vs(idx(I-1,J-1,curlevel)) )
$      + rhs(pos)

vs(pos)= vs(pos) + jdamp * res/a(0,pos)
If(getres.eq.1 .AND. abs(res).gt.residual) residual = abs(res)

return
End

c-----
c      End
c-----

```

A.10. Subrutina : streamrhs.f

```

subroutine streamrhs(level, nm, nx, U, F, a, rhs)
c-----
c      calcula el lado derecho para la funcion de corriente
c      en la malla mas fina
c      $Id: streamrhs.f,v 1.1 2001/10/17 19:08:44 carlos Exp carlos $
c-----
implicit none

integer

```

```

$ level,          ! Nivel de la malla mas fina
$ nm,            ! total de puntos en las mallas
$ nx            ! puntos por linea en la malla fina

double precision
$ U(0:nx+1,0:nx+1), ! condicion de borde en la malla fina
$ F(0:nx+1,0:nx+1), ! lado derecho en la malla fina
$ a(0:8,nm),      ! elementos de la matriz
$ rhs(nm)        ! lado derecho con cb's

c---- Local variables
integer
$ idx,          ! index function
$ I,J,         ! loop indexes
$ pos          ! dummy var for the index (cursor)

double precision
$ H            ! tamano division en la malla fina

-----
c Programa
-----
H=1.0d0/(2**level)

Do J = 1, nx
  Do I = 1, nx
    rhs(idx(I,J,level)) =
$      -0.5D0*H*(8.0D0*F(I,J)
$      + F((I+1),J) + F(I,(J+1))
$      + F((I-1),J) + F(I,(J-1)))
  End Do
End Do

-----
c Condiciones de borde
-----
c---- First Point (1,1)
pos = idx(1,1,level)
rhs(pos)=rhs(pos)
$ - (a(6,pos)*U(0,2)
$ + a(3,pos)*U(0,1)
$ + a(7,pos)*U(0,0)
$ + a(4,pos)*U(1,0)
$ + a(8,pos)*U(2,0) )

c---- Line (2...nx-1,1)
Do I=2,nx-1
  pos = idx(I,1,level)
  rhs(pos)=rhs(pos)
$ - (a(7,pos)*U((I-1),0)
$ + a(4,pos)*U(I,0)
$ + a(8,pos)*U((I+1),0) )

End Do

c---- The point (nx,1)
pos = idx(nx,1,level)

rhs(pos)=rhs(pos)
$ - (a(5,pos)*U((nx+1),2)
$ + a(1,pos)*U((nx+1),1)
$ + a(7,pos)*U((nx-1),0)
$ + a(4,pos)*U(nx,0)
$ + a(8,pos)*U((nx+1),0) )

c---- The Line (1,2...nx-1)
Do J=2,nx-1

```

```

        pos = idx(1,J,level)
        rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U(0,(J+1))
$      + a(3,pos)*U(0,J)
$      + a(7,pos)*U(0,(J-1))
    End Do

c---- The Line (nx,2...nx-1)
    Do J=2,nx-1
        pos = idx(nx,J,level)
        rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(5,pos)*U((nx+1),(J+1))
$      + a(1,pos)*U((nx+1),J)
$      + a(8,pos)*U((nx+1),(J-1))
    End Do

c---- The Point (1,nx)
    pos = idx(1,nx,level)
    rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(7,pos)*U(0,(nx-1))
$      + a(3,pos)*U(0,nx)
$      + a(6,pos)*U(0,(nx+1))
$      + a(2,pos)*U(1,(nx+1))
$      + a(5,pos)*U(2,(nx+1))

c---- The Line (2...nx-1,nx)
    Do I=2,nx-1
        pos = idx(I,nx,level)
        rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U((I-1),(nx+1))
$      + a(2,pos)*U(I,(nx+1))
$      + a(5,pos)*U((I+1),(nx+1))
    End Do

c el punto (nx,nx)
    pos = idx(nx,nx,level)
    rhs(pos)=rhs(pos)
$      - (a(6,pos)*U((nx-1),(nx+1))
$      + a(2,pos)*U(nx,(nx+1))
$      + a(5,pos)*U((nx+1),(nx+1))
$      + a(1,pos)*U((nx+1),nx)
$      + a(8,pos)*U((nx+1),(nx-1))
    return
end

-----
c      End
-----

```

A.11. Subrutina : systemsolve.f

```

subroutine systemsolve(vs, rhs, curlevel, nm, a)
-----
c      Solve the system on grid *curlevel*
c
c      Resuelve el sistema en el nivel curlevel, puede hacerlo en el
c      nivel 1 o en el 3. Para el 3 es necesario vincular con
c      la biblioteca de lapack DGEV y modificar mgvcycle.f acorde
c      a la situacion
c
c      $Id: systemsolve.f,v 1.2 2001/10/17 19:09:37 carlos Exp carlos $
-----
implicit none

```



```

cc---- Construcción de La Matriz - 9 diagonales
c
c      Do K =1,nx-1
c
c          Do I = (K-1)*nx+1,K*nx-1
c              LA(I,I) = a(0, Fp+I ) ! Diagonal principal
c              LA(I+1,I) = a(3, Fp+I+1 )
c              LA(I,I+1) = a(1, Fp+I )
c
c              LA(I,I+nx) = a(2, Fp+I ) ! Bloque derecho
c              LA(I,I+nx+1) = a(5, Fp+I )
c              LA(I+1,I+nx) = a(6, Fp+I+1 )
c
c              LA(I+nx,I) = a(4, Fp+I+nx) ! Bloque inferior
c              LA(I+nx,I+1) = a(8, Fp+I+nx)
c              LA(I+nx+1,I) = a(7, Fp+I+nx+1)
c
c          End Do
c
c          LA(K*nx,K*nx) = a(0, Fp+K*nx)
c          LA(K*nx,(K+1)*nx) = a(2,Fp+ K*nx)
c          LA((K+1)*nx,K*nx) = a(4,Fp+ (K+1)*nx)
c      End Do
c
c      Do I = (nx-1)*nx + 1,nx*nx-1
c
c          LA(I,I) = a(0, Fp+I ) ! Diagonal principal, ultimo bloque
c          LA(I+1,I) = a(3, Fp+I+1)
c          LA(I,I+1) = a(1, Fp+I )
c
c      End Do
c
c      LA(nx*nx,nx*nx)=a(0,Fp+nx*nx)
c
c      Do I=1,N
c          LB(I) = rhs(Fp+I)
c      End Do
c
c      Call DGESV(N, NRHS, LA, LDA, IPIV, LB, LDB, INFO)
c
c      IF(INFO.ne.0) then
c          Write(6,*) 'Error in systemsolve: Lapack Solver',Info
c      End If
c
c      Do I=1,N
c          vs(Fp+I) = LB(I)
c      End Do
c      End If
c
c      return
c      End

```

```

-----
c      End
-----

```

A.12. Subrutina : transferencia.f

```

subroutine transferencia(nxf,nyf, S, W, P, Q, Rey)

```

```

c      Calcula las condiciones de borde para W a partir de W y S
c      y los nuevos coeficientes P y Q de la eq. de convecc-diff
c      $Id: transferencia.f,v 1.1 2001/10/17 19:09:48 carlos Exp carlos $

```

```

-----
implicit none

integer
$   nxf,nyf,      ! Tamano de la malla
$   I,J           ! los indices

Double Precision
$   h,h2,hs,      ! h, 2*h y h**2
$   Rey,          ! numero de Reynolds
$   S(0:nxf+1,0:nyf+1), ! StreamFunction con su frontera
$   W(0:nxf+1,0:nyf+1), ! Vorticidad con frontera
$   P(0:nxf+1,0:nyf+1), ! Velocidad en x ( -rey*U )
$   Q(0:nxf+1,0:nyf+1) ! Velocidad en y ( -rey*V )

c---- mesh size
h = 1.0d0/(nxf+1)
h2 = 2.0*h
hs = h**2

-----
c Calcular la vorticidad en los puntos de la frontera
c usando las condiciones de borde de la velocidad
c
c las formulas comentadas son de Altas y Burrage
c las actuales son las de Jensen que funcionan mejor :)
-----
c---- pared superior e inferior

Do I=1,nxf

! bottom, y=0
c---- Formulas de Altas
c   W(I,0) = ( - 6 * hs * W(I,1) + hs * W(I,2)
c   &      - 2 * S(I+1,1) - 2 * S(I-1,1) - 20 * S(I,1) )/(7*hs)

c---- Formulas de Jensen
c   W(I,0) = ( - 8 * hs * W(I,1) + 2 * hs * W(I,2)
c   &      + 45 * S(I,0) - 48 * S(I,1) + 3 * S(I,2) )/(12*hs)

! top, y=1
c---- Formulas de Altas
c   W(I,nyf+1) = ( 24 * h - 6 * hs * W(I,nyf) + hs * W(I,nyf-1)
c   &      - 2 * S(I+1,nyf) - 2 * S(I-1,nyf) - 20 * S(I,nyf) )/(7*hs)

c---- Formulas de Jensen
c   W(I,nyf+1) = ( 42*h - 8 * hs * W(I,nyf) + 2 * hs * W(I,nyf-1)
c   &      + 45 * S(I,nyf+1) - 48 * S(I,nyf) + 3 * S(I,nyf-1) )/(12*hs)

End Do

c---- pared izquierda y derecha
Do J=1,nyf

! Left, x=0
c
c   W(0,J) = ( - 6 * hs * W(1,J) + hs * W(2,J)
c   &      - 2 * S(1,J+1) - 2 * S(1,J-1) - 20 * S(1,J) )/(7*hs)

c   W(0,J) = ( - 8 * hs * W(1,J) + 2 * hs * W(2,J)
c   &      + 45 * S(0,J) - 48 * S(1,J) + 3 * S(2,J) )/(12*hs)

! right, x=1
c
c   W(nxf+1,J) = ( - 6 * hs * W(nxf,J) + hs * W(nxf-1,J)

```

```

c      &          - 2 * S(nxf,J+1) - 2 * S(nxf,J-1) - 20 * S(nxf,J) ) / (7*hs)
      W(nxf+1,J) = ( - 8 * hs * W(nxf,J) + 2 * hs * W(nxf-1,J)
      + 45 * S(nxf+1,J) - 48 * S(nxf,J) + 3 * S(nxf-1,J) ) / (12*hs)
      End Do
-----
c calcular la velocidad en los puntos interiores
c P y Q son -Re*U y -Re*V
-----
      Do J=1,nyf
      Do I=1,nxf
      P(I,J) = -Rey * (
      & ( S(I,J+1) - S(I,J-1) ) / (3*h) +
      & ( S(I+1,J+1) + S(I-1,J+1) - S(I-1,J-1) - S(I+1,J-1) ) / (12*h) +
      & h * ( W(I,J+1) - W(I,J-1) ) / 12 )
      Q(I,J) = -Rey * (
      & ( S(I-1,J) - S(I+1,J) ) / (3*h) -
      & ( S(I+1,J+1) - S(I-1,J+1) - S(I-1,J-1) + S(I+1,J-1) ) / (12*h) +
      & h * ( W(I-1,J) - W(I+1,J) ) / 12 )
      End Do
      End Do
      return
      end
-----
c      END
-----

```

A.13. Subrutina : update.f

```

      subroutine update(level,nm,nxf, Pter, vs, damp, S, delta)
----->
c      Actualiza los valores de la malla fina S con los de la >
c      solucion vs. Si Pter = 1 se regresa el residual mas grande >
----->
      Integer
      $ level,
      $ nm,
      $ nxf,
      $ Pter

      Double precision
      $ vs(nm),
      $ damp,
      $ S(0:nxf+1,0:nxf+1),
      $ delta

c---- Local
      Integer
      $ pos,
      $ I,J,
      $ First

      Double Precision
      $ errp
-----
c      Programa

```

```

-----
First = ((8- 3* 2**(level+1)+ 4**level+ 3*level) /3) -1
Do J=1,nxf
  Do I=1,nxf
    pos = (J-1)*nxf+I+First
    If(Ptr.eq.1) then
      errp =damp*abs( vs(pos)- S(I,J) )
      If( errp.gt.delta ) delta = errp
    End If
    S(I,J)=(1.0d0-damp)*S(I,J)+damp* vs(pos)
    val(pos)= S(I,J)
  End Do
End Do
Return
End
-----
c      End
-----

```

A.14. Parametros: inputs.dat

```

0.      | Reynolds
3000.  | Max Reynolds
500.0  | delta reynolds
10000  | iteraciones exteriores
.000001| tolerancia stream(S) -----
2      | iteraciones stream(S)
1      | iteraciones para jacobi(S)
.7     | atenuacion para jacobi(S)
3.54   | lowering injection value(s)
.1     | atenuacion S
.000001| tolerancia vorticidad(W) -----
2      | iteraciones vorticidad(W)
1      | iteraciones para jacobi(W)
.7     | atenuacion para jacobi(W)
.54    | lowering injection value(W)
.1     | atenuacion W
1      | nivel de salida de stream y vort
10     | iteraciones sin impresion
0      | guardar los estados intermedios de stream y vort
0      | continuar (lee archivos stream.nxt y vort.nxt)

```

A.15. Makefile Para Linux

```

all: cvt

FLAGS=-funroll-all-loops -fno-f2c -O3 -c
FC=f77
.f.o:
f77 $(FLAGS) $<

src: cdrhs.o \
convdiff.o \
descend.o \
idx.o \

```

```
mgvcycle.o \  
smooth.o \  
systemsolve.o \  
ascend.o \  
cvt.o \  
transferencia.o \  
streamrhs.o \  
loadsol.o \  
update.o
```

```
cvt: src  
$(FC) *.o -O -g -o cvt  
clean:  
rm -f *.o *~ cvt
```

Bibliografía

- [1] BLOHM, CH.; KUHLMANN, H. C. "*The two-sided lid-driven cavity: experiments on stationary and time dependent flows.*"
J. Fluid Mech. **450**, 67-95, 2002.
- [2] MOIN,P.; KIM,J. : "*Tackling turbulence with supercomputers.*"
Scientific American **197**, January 1997.
<http://www.sciam.com/0197issuc/0197moin.html>
- [3] KUHLMANN,H.; WANSCHURA,M.; RATH,H. "*Flow in two-sided lid-driven cavities: non-uniqueness, instabilities, and cellular structures.*"
J. Fluid Mech. **336**, 267-299, 1997.
- [4] GUSTAFSON,K. : *Lectures on Computational Fluid Dynamics,Mathematical Physics and Linear Algebra.*
World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1997.
- [5] FEYNMAN, R.; LEIGHTON,R. ; SANDS,M.: *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II.*
Addison Wesley, 1964.
- [6] SPOTZ,W.; CAREY,G. : "*High-order compact finite difference methods with applications to viscous flows.*"
TICAM, February 17, 1994 .
- [7] GE,L.; ZHANG,J. : "*Symbolic computation of high order compact difference schemes for three dimensional linear elliptic partial differential equations with variable coefficients.*"
Technical Report 299-00, Department of Computer Science, University of Kentucky,Lexington,KY, 2000.
- [8] TROTTEBERG,U.; CORNELIS,O.; ANTON,S.: *Multigrid.*
Academic Press,2001.
- [9] GUPTA,M. : "*High accuracy solutions of incompressible Navier-Stokes equations.*"
J. Comp. Phys. **97**,343-359, 1991.

- [10] ZHANG, J. : *Multigrid Acceleration Techniques and Applications to the Numerical Solutions of Partial Differential Equations*.
Ph.D. Thesis, G. Washington University, Mayo 18, 1997.
- [11] SPOTZ, W. : "Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2D, incompressible stream-function vorticity equations."
Int. J. Numer. Meth. Fluids, **98**, 737-759, 1998.
- [12] WEINAN, E.; JIAN-GUO, L. : "Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes."
J. Comput. Phys. **124**, 368-382, 1996.
- [13] GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, T. : "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method."
J. Comput. Phys **48**, 387-411, 1982.
- [14] DENNIS, S. : "Compact h^4 finite-difference approximations to operators of Navier-Stokes Type."
J. Comput. Phys. **85**, 390-416, 1989.
- [15] M. GUPTA, RAM P. MANOHAR, J.W. STEPHENSON "A forth order, cost effective and stable finite difference scheme for the convection diffusion equation."
Numer. Properties & Methodologies in Heat Transfer. Proc. 2nd national Symp. Hemisphere Pub. Co., Washington, DC. pp. 201-209. (1983)
- [16] WEINAN, E.; JIAN-GUO, L. : "Essentially Compact Schemes for Unsteady Viscous Incompressible Flow."
Preprint.
- [17] ALTAS, I; BURRAGE, K. : "A high accuracy defect-correction multigrid method for incompressible Navier-Stokes equations."
J. Comput. Phys. **114**, 227-233, 1994.
- [18] FLETCHER, C.A.J.; ORSZAG, S. A.; HOLT, M.; GLOWINSKI, R. : **Computational Techniques for fluid dynamics: Fundamental and General Techniques** (*Springer Series in Computational Physics*).
Volumen 1, 2nd edition, Springer Verlag, 1991
- [19] C.A.J. FLETCHER: **Computational Techniques for fluid dynamics: Specific Techniques for Differential Flow Categories**.
Volumen 2, 2nd edition Springer Verlag, 1991
- [20] ACHESON, D. : **Elementary Fluid Dynamics** (*Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*).
Oxford Univ Press, 1990

-
- [21] ANDERSON, J.; DEGREZ, G.; DICK E.; GRUNDMANN, R.: **Computational Fluid Dynamics: An introduction.**
Springer Verlag, 1992
- [22] BATCHELOR, G. : **An Introduction To Fluid Dynamics.**
Cambridge University Press, 1967
- [23] FAEBER, T.: **Fluid Dynamics For Physicists.**
Cambridge University Press, 1995
- [24] PEYRET, R.; TAYLOR, T. : **Computational Methods for Fluid Flow.**
Springer Verlag, 1990
- [25] BRIGGS, W.: *A Multigrid Tutorial.*
SIAM, Philadelphia, 1987.
- [26] ISERLES, A.: *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations.*
Cambridge, 1996.
- [27] COURANT, R.: *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. II.*
Limusa, 1978.
- [28] HEATH, M.: *Scientific Computing: An introductory Survey.*
McGraw - Hill, 1997.
- [29] LANCZOS, C.: *Applied Analysis.*
Dover, 1988.
- [30] WEINBERGER, H.: *Ecuaciones en Derivadas Parciales.*
Reverté, 1996.