UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD Y ATRACTORES EN SISTEMAS DINAMICOS. UNA INTRODUCCION

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A

ERNESTO OLVERA SOTRES

MEXICO, D. F. 1 9 7 8.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A la Facultad de Ciencias,
de la que he recibido más
de lo que puede ser expresado con palabras.

A Martha Elba

PROLOGO

El objetivo fundamental de este trabajo es dar una introducción a la Teoría de Sistemas Dinámicos. Esta aproximación a dicha teoría la hemos llevado a cabo motivándola a partir del análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, lo cual fue, por cierto, el proceso que históricamente siguió en ~~un~~ su surgimiento la Teoría de Sistemas Dinámicos.

Consecuentemente con este carácter introductorio, nos hemos propuesto establecer de la manera más natural las definiciones necesarias y llegar a los teoremas motivando adecuadamente los resultados, al mismo tiempo que hemos tratado de justificar el por qué de las hipótesis. Por ello es que este trabajo contiene una gran cantidad de ejemplos concretos que, al menos es nuestro deseo, van llevando al lector paso a paso, a la comprensión de los conceptos y resultados de la Teoría.

El Capítulo I tiene por objeto establecer la definición abstracta más usual de Sistema Dinámico en un espacio métrico localmente compacto.

Los conceptos de atracción y estabilidad son tratados muy ampliamente, en particular en los capítulos II y III. En el Capítulo II hacemos una clasificación de los atractores compactos, y en el Capítulo III se enuncia y se demuestra un importante teorema que caracteriza a los conjuntos compactos estables a través de la primera prolongación positiva.

En el Capítulo IV se estudia el concepto de estabilidad asintótica junto con los conceptos de atracción, mostrando sus relaciones.

Además, se mencionan los teoremas que caracterizan a los conjuntos compactos asintóticamente estables a través de las importantes funciones de Liapunov. En este capítulo demostramos un resultado nuevo acerca de el primer conjunto límite prolongacional positivo de un atractor uniforme compacto.

Hemos dejado para los apéndices los enunciados precisos de algunos resultados que son utilizados por nosotros al igual que algunas demostraciones, con el objeto de no desviar la atención del lector de lo central de las cuestiones tratadas.

Finalmente, queremos agradecer al Dr. Pablo Barrera, amigo y maestro, el interés y ayuda prestados a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo, sin los cuales éste no hubiera sido posible.

Agosto de 1978.

I N D I C E

CAPÍTULO I

SISTEMAS DINÁMICOS

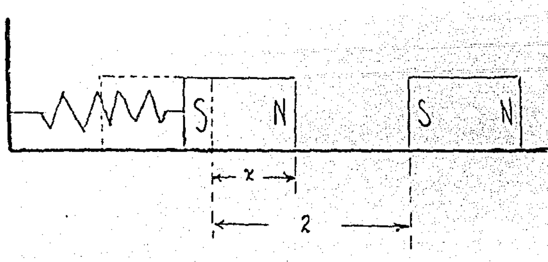
INTRODUCCIÓN

En un análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales, lo que nos interesa es describir de una manera general el comportamiento del sistema descrito por esas ecuaciones. En ese análisis se hace necesario contestar a preguntas tales como ¿qué le ocurre al sistema cuando el tiempo corre? ¿Qué tanto se diferencia el comportamiento de una solución del comportamiento de una solución dada, si la primera solución parte de unas condiciones iniciales parecidas a las de la segunda? ¿Existen órbitas cerradas? ¿Son éstas estables o inestables? ¿Cómo son las trayectorias alrededor de un punto crítico? ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones? Y otras de naturaleza semejante.

Cuando decimos que el tiempo corre, podemos pensar que corre hacia adelante o que corre hacia atrás.

Esto es, inquirimos ya sea sobre el comportamiento futuro, cuando el tiempo tiende a $+\infty$, o sobre el origen en el pasado del sistema, cuando el tiempo tiende a $-\infty$.

Para ilustrar lo que decimos, quizás lo mejor sea mostrar un ejemplo. Consideremos el problema de describir el comportamiento del sistema de dos imanes, uno fijo y el otro sujeto a un resorte, como se muestra en la siguiente figura



Podemos suponer que las unidades son tales que la ecuación diferencial para el desplazamiento x del imán movible desde su posición cuando el resorte no está ni contraído ni alargado es

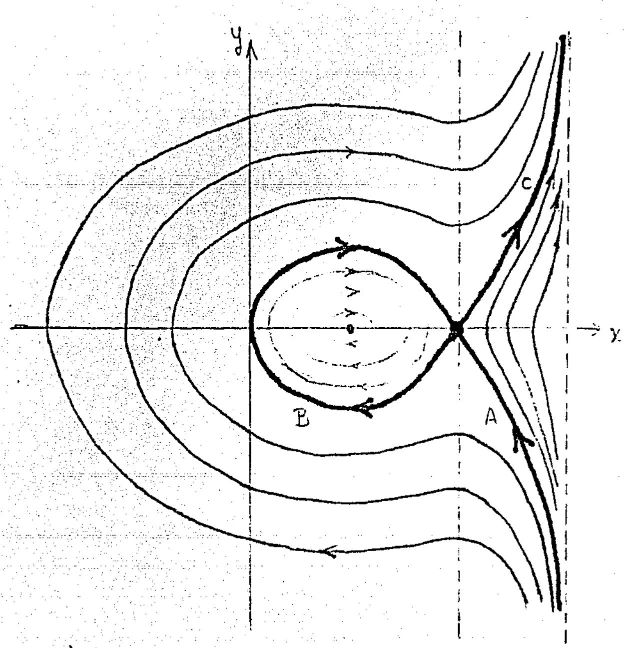
$$\ddot{x} + x - (x-2)^{-2} = 0 .$$

Esta ecuación es equivalente al siguiente sistema

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + (x-2)^{-2}$$

Las soluciones de este sistema son parejas de funciones $x(t)$, $y(t)$. Podemos considerar a estas funciones como la parametrización (con parámetro t) de curvas en $\mathbb{R}^2$. Estas curvas son las trayectorias del sistema y el plano xy es el plano fase. Un retrato fase para el sistema, o su equivalente, la ecuación diferencial, es una descripción completa, cualitativa, de todas sus trayectorias.

Para nuestro ejemplo, es posible hacer ver (sin embargo, no lo haremos nosotros aquí), que el retrato fase correspondiente es el que se muestra en la siguiente figura



Las flechas indican el sentido en que es recorrida la curva cuando el tiempo aumenta.

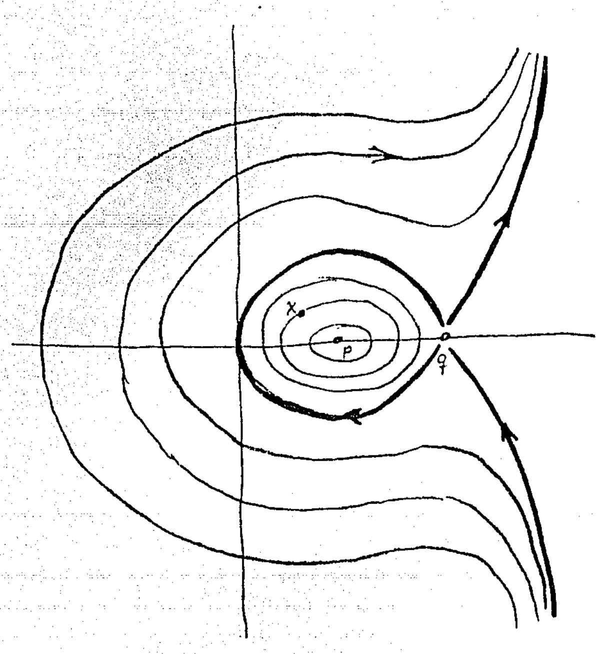
Al examinar la figura, obtenemos una descripción muy clara y exacta del comportamiento global de las soluciones del sistema, ¡y sin haber obtenido las soluciones analíticamente!

Antes que nada, es claro, por el contenido físico del problema, que el espacio fase es el semiplano a la izquierda de la recta $x = 2$. Ahora bien, una característica que sobresale al observar la figura, es que la curva formada por las trayectorias A, B y C (mostrada con rasgo más fuerte) divide (separa) al plano fase en regiones dentro de las cuales las trayectorias tienen un comportamiento cualitativamente distinto. Por esta razón, a una curva como ésta se la llama <u>separatriz</u>. Cualquier trayectoria dentro de la región acotada limitada por B es una curva cerrada. Fuera de esta región, ninguna trayectoria es una curva cerrada.

Con el objeto de motivar algunos conceptos fundamentales, en un primer intento, y hablando vagamente, diremos que

Una solución es estable si al tomar otra solución cercana y al hacer transcurrir el tiempo a $+\infty$, la segunda solución no se aleja de la primera.

Así, en el ejemplo anterior



el conjunto formado por el punto p, es decir, la solución que pasa por p, que no es otra cosa que el mismo punto p, es estable. Mientras que, por otra parte, el punto q es inestable. También podemos considerar una trayectoria como la que pasa por el punto x de la figura anterior, siendo ésta estable.

En la siguiente primera sección de este capítulo seguiremos mostrando ejemplos, destacando paulatinamente diferentes conceptos que serán estudiados a lo largo de este trabajo haciendo énfasis en el aspecto geométrico. Todo esto lo haremos, fundamentalmente, utilizando ejemplos concretos proporcionados por ecuaciones diferenciales del tipo autónomo

$$\dot{x} = f(x),$$

donde x es un vector en $\mathbb{R}^2$ y f una función tal que es posible asegurar la existencia y unicidad de las soluciones a la anterior ecuación diferencial. (Ver Apéndice).

§ 1. EJEMPLOS.

EJEMPLO 1. Como un primer ejemplo tomemos las bien conocidas, como importantes, ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del péndulo sin fricción:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x, \qquad (l > 0).$$

De ellas podemos obtener

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x},$$

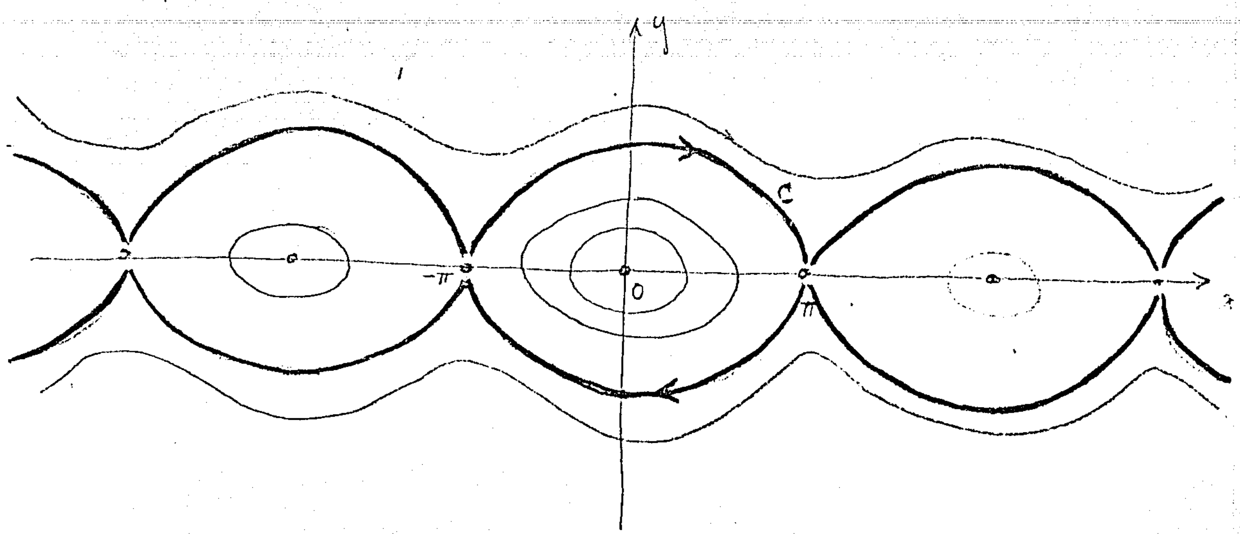
$$\text{sen}\,x\,dx = -\frac{l}{g}\,y\,dy$$

$$\text{sen}\,x\,dx + \frac{l}{g}\,y\,dy = 0$$

que es exacta. Esto significa que las trayectorias del sistema son las curvas de nivel de una función, en este caso

$$F(x,y) = -\cos x + \frac{l}{2g}\,y^2\ ;$$

curvas de nivel que al graficarlas nos dan la siguiente figura

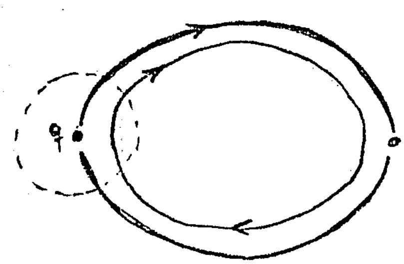


Se puede observar, en primer lugar, que hay curvas C que pasan por los puntos $(n\pi, 0)$, con n un entero impar, y que separan a las trayectorias cerradas de las que no lo son. Estas curvas C son las separatrices.

Los puntos de equilibrio son los puntos $(n\pi, 0)$, n un entero, y físicamente corresponden a los dos estados de equilibrio del sistema. Los puntos de equilibrio cuando n es un entero par, corresponden a la posición más baja del péndulo. Estos puntos de equilibrio son estables, ya que si se deja el péndulo en una posición cercana a la posición más baja y con una velocidad en magnitud pequeña o incluso cero, el péndulo se va a poner a oscilar alrededor de la posición más baja pero sin alejarse del equilibrio ni acercarse a él. Esto último se refleja en la figura anterior, en que al tomar la trayectoria que pasa por un punto en el interior de la región limitada por la curva C, dicha trayectoria es una curva cerrada alrededor del punto de equilibrio.

Por otro lado, para n impar, los puntos críticos corresponden a la posición más alta del péndulo inmóvil. Son soluciones de equilibrio inestables, ya que:

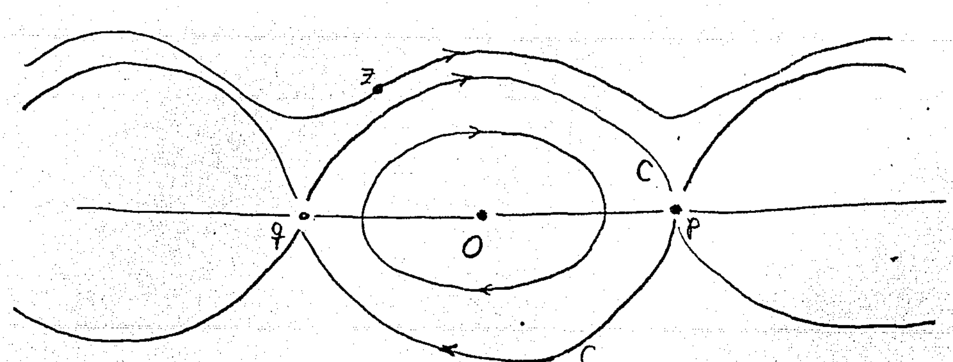
(i) existen oscilaciones de amplitud muy grande que pasan muy cerca de estos puntos



ii) hay trayectorias que salen muy cerca del punto y nunca regresan, alejándose siempre.

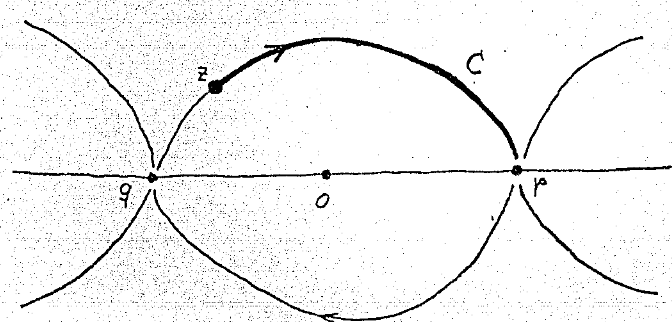
Si las condiciones iniciales del sistema se encuentran muy cerca del origen, dentro de la región limitada por las separatrices C, la trayectoria correspondiente es una órbita cerrada que no se aleja del punto de equilibrio. Esto, como ya dijimos, significa estabilidad para el origen, aún cuando las trayectorias no tienden hacia el equilibrio.

Si una trayectoria se inicia en un punto z fuera de la región acotada por C,



entonces la trayectoria ya no es cerrada. Esto equivale a un péndulo que no oscila, sino que parece rehilete dando vueltas en una sola dirección.

Cuando tomamos un punto z sobre la curva C,



la trayectoria que se inicia en z va a recorrer una parte de la curva C tendiendo al punto p (un punto de la forma $(n\pi, 0)$ cuando t tiende a $+\infty$. Dicho con otras palabras, p es "el destino final (en el futuro)" de x, cuando z recorre su trayectoria para tiempos cada vez más y más grandes que crecen sin cota.

Algo más, ¿qué ocurre si la trayectoria es recorrida para tiempos negativos cada vez más a la izquierda y dejamos que t tienda a $-\infty$? Ocurre que la trayectoria que empezó en z ahora se aproxima sin límite al punto q. Podríamos decir que q es "el destino final (en el pasado)" de z.

Antes de resumir las conclusiones obtenidas en este ejemplo, queremos introducir unas definiciones y algo respecto a la notación.

Si la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^2$, que en el tiempo $t=0$ pasa por el punto p, y que está definida en el intervalo maximal (a,b), donde $-\infty\le a<0<b\le+\infty$, la designamos por $\varphi(p,t)$, la curva en el espacio fase correspondiente a tal solución, es la <u>trayectoria</u> de p, y la denotaremos por el símbolo $\gamma(p)$. Es decir

$$\gamma(p)=\{q\in\mathbb{R}^2 : q=\varphi(p,t),\ t\in(a,b)\}$$

La <u>semitrayectoria positiva</u> y la <u>semitrayectoria negativa</u> de p, se definen reemplazando (a,b) por $(0,b)$ y $(a,0)$, respectivamente, en la igualdad anterior, y se denotan con $\gamma^+(p)$ y $\gamma^-(p)$.

Sintetizando ahora todo lo anterior, concluimos que:

(i.) El origen, y en general un punto de la forma $(n\pi,0)$ con n par, es estable. Un punto de la forma $(n\pi,0)$ con n impar, es inestable.

(ii) Si un punto x está dentro de la región acotada por las separatrices C, entonces por x pasa una trayectoria cerrada, $\gamma(x)$, y el destino final del punto x es toda su trayectoria.

(iii) Si x está sobre las separatrices C, entonces su trayectoria es un pedazo de C, está acotada y su destino final es alguno de los puntos críticos $(n\pi, 0)$, con n impar.

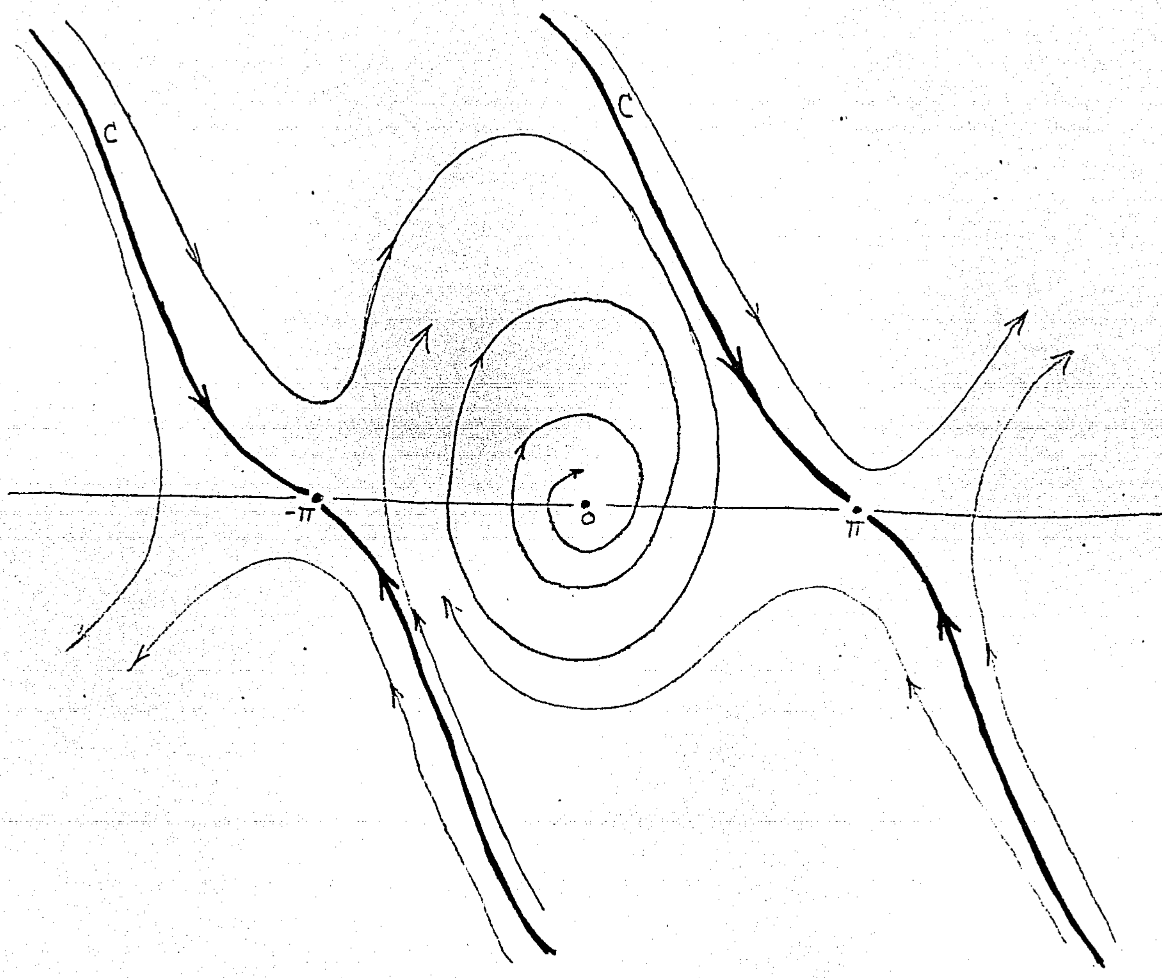
(iv) Si x está fuera de la región acotada por las separatrices C, entonces la trayectoria $\gamma(x)$ que pasa por x es no acotada y no tiene destino final.

EJEMPLO 2.

Tomemos ahora como segundo ejemplo el del péndulo con fricción proporcional a la velocidad, el comportamiento del cual está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2ky - g \operatorname{sen} x, \qquad k > 0, \; g > 0.$$

Puede demostrarse (ver, por ejemplo, [6]), que las trayectorias del sistema son como las de la figura siguiente


C
C
$-\pi$
0
π

Los puntos críticos son los mismos que en el ejemplo anterior, pero ahora el origen tiene la siguiente notable propiedad: toda trayectoria que empieza en algún punto en la región entre las trayectorias C es, como se puede ver en la figura, una trayectoria que se acerca al origen "espiraleando" (*), es decir, podemos pensar que es atraída cuando t crece sin límite. Esto es, el origen es un atractor.

Sin embargo, no todas las trayectorias son atraídas por el punto crítico 0. Si consideramos una trayectoria C, ésta es atraída por un punto crítico $(n\pi, 0)$ con n impar.

(*) Aquí hemos introducido el verbo "espiralear", quizás violando las reglas de la Real Academia, porque es la mejor palabra que encontramos nosotros para, con el sentido dinámico que tiene, expresar la idea de que la trayectoria de que se habla, cuando el tiempo transcurre, recorre los puntos que están sobre una espiral.

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, los puntos críticos $(n\pi, 0)$ con n impar son inestables, en tanto que los puntos $(n\pi, 0)$ con n par son estables. Esto es, si tomamos una trayectoria que se inicie en cualquier punto en el interior de la región limitada por C, esa trayectoria no se va a alejar del origen, lo cual significa estabilidad. Pero ocurre algo más: las trayectorias siempre se acercan al origen.

Resumiendo:

(i) Si $p \neq (0,0)$ está dentro de la región entre las trayectorias C, entonces $\gamma^+(p)$ no es cerrada pero es acotada y tiende hacia el origen. Es decir, su destino final es el origen.

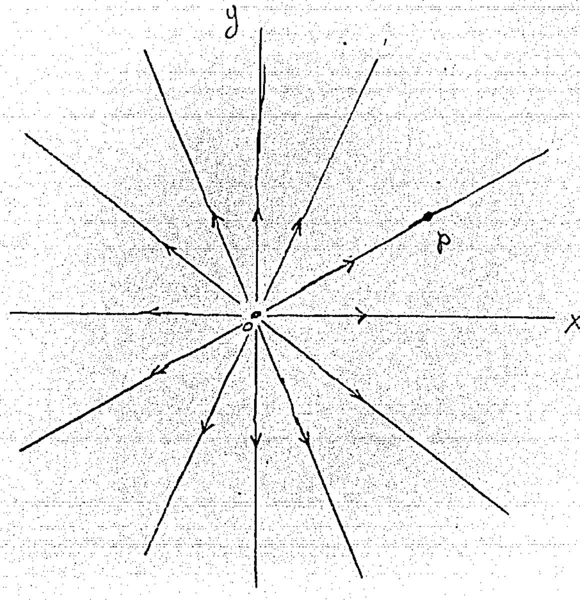
(ii) Si p está sobre C, entonces su semi-trayectoria positiva es una parte de C, está acotada y su destino final es el punto de equilibrio inestable $(\pi, 0)$.

EJEMPLO 3.

Consideremos el sistema diferencial dado por las ecuaciones

$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = y,$$

cuyas trayectorias se muestran en la siguiente figura



El origen es un punto de equilibrio inestable. Ninguna trayectoria es atraída por él, ni por ningún otro punto. Más aún, todas las trayectorias se alejan del origen; en este sentido el origen es un "repulsor."

Sin embargo, notemos que todas las trayectorias "nacen" del origen. Esto es, si tomamos un punto p y la trayectoria $\gamma(p)$, y hacemos tender t a $-\infty$, entonces $\gamma(p)$ tiene al origen como punto límite.

Resumiendo, podemos decir lo siguiente:

Todas las trayectorias son no acotadas, no tienen destino final cuando $t \to +\infty$, pero sí tienen un origen cuando $t \to -\infty$, es decir, existe $\lim_{t \to -\infty} \varphi(p,t)$ y este límite es el origen.

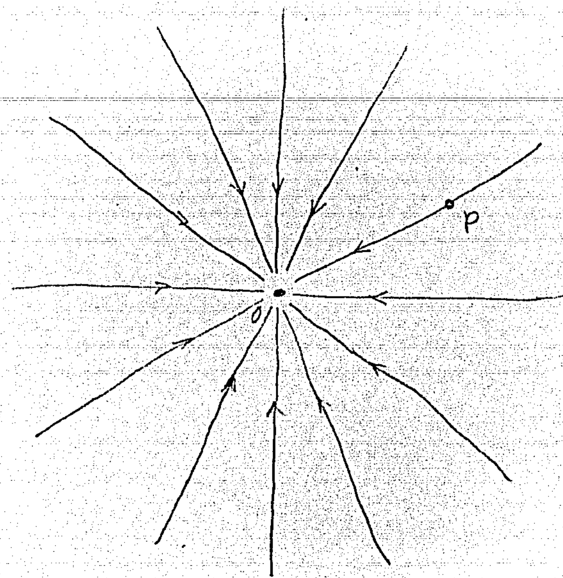
EJEMPLO 4.

En el ejemplo 2 mostramos que aún cuando el punto crítico constituido por el origen es un atractor, no atrae a todas las trayectorias; el ejemplo 3 mostró un punto crítico que no atrae a ninguna trayectoria. He aquí un ejemplo en el que un punto crítico atrae a todas las trayectorias.

Sea el sistema dado por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -y.$$

Sus trayectorias se muestran en la siguiente figura



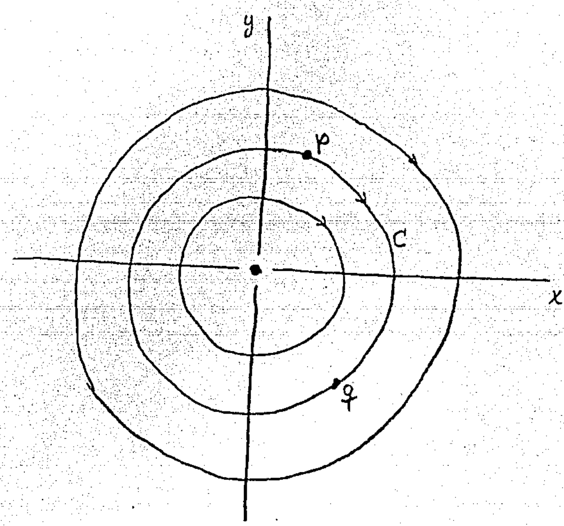
Evidentemente, el origen atrae a todas las trayectorias del sistema. Esto es, si tomamos un punto arbitrario del plano, tal como el punto p, entonces la trayectoria que pasa por p tiene al origen como punto límite, cuando $t \to +\infty$. Sin embargo, cuando $t \to -\infty$ no hay punto límite y la semitrayectoria negativa es no acotada.

EJEMPLO 5.

Este ejemplo muestra que aún existiendo puntos críticos para un sistema, puede darse la situación de que ninguna trayectoria sea atraída o repelida. Efectivamente, consideremos el sistema dado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x.$$

Sus trayectorias son círculos y el origen es el único punto crítico.



Para cualquier punto p del plano, vemos que al considerar su movimiento a lo largo de la trayectoria que pasa por él, el punto p no se aleja del origen. Esto, como sabemos, significa estabilidad para el origen.

Podemos, enseguida, preguntarnos lo siguiente: ¿cuál es el destino final de p, un punto arbitrario del plano? Sabemos que la semitrayectoria positiva $\gamma^+(p)$ es el círculo C que pasa por p y tiene su centro en el origen.

Esto quiere decir que, al tomar t continuamente y en forma creciente valores en $\mathbb{R}^+$, el punto p va a recorrer una y otra vez el círculo C.

Recordemos la pregunta planteada: ¿cuál es el destino final (en el futuro, precisamos) del punto p? Lo que acabamos de observar es que para ciertos tiempos cada vez mayores la semitrayectoria $\gamma^+(p)$ pasa por un punto arbitrario de C. Dicho en otras palabras: si $q \in C$, entonces existe una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ con $t_n \to +\infty$ y tal que

$$\varphi(p, t_n) = q.$$

Esto es lo que necesitábamos saber, pues nos dice que el punto q forma parte del destino final de p.

Ahora ya es fácil ver que todo el círculo C forma parte del destino final de p. Además, es claro que fuera de C no hay ningún punto al cual se aproxime la trayectoria de p para algún t. Esto es, C es el destino final, en el futuro, de p.

En forma enteramente análoga, utilizando $\gamma^-(p)$ y sucesiones $\{t_n\}$ con $t_n \to -\infty$, puede verse que la misma curva cerrada C es el destino final en el pasado, o el origen, del punto p.

Aquí resumimos lo ya visto en este ejemplo:

(i) El destino final en el futuro de un punto p en el plano es un conjunto, el conjunto de todos los puntos que están sobre el círculo que pasa por p y tiene su centro en el origen. Es decir, el destino final de p es la trayectoria $\gamma(p)$.

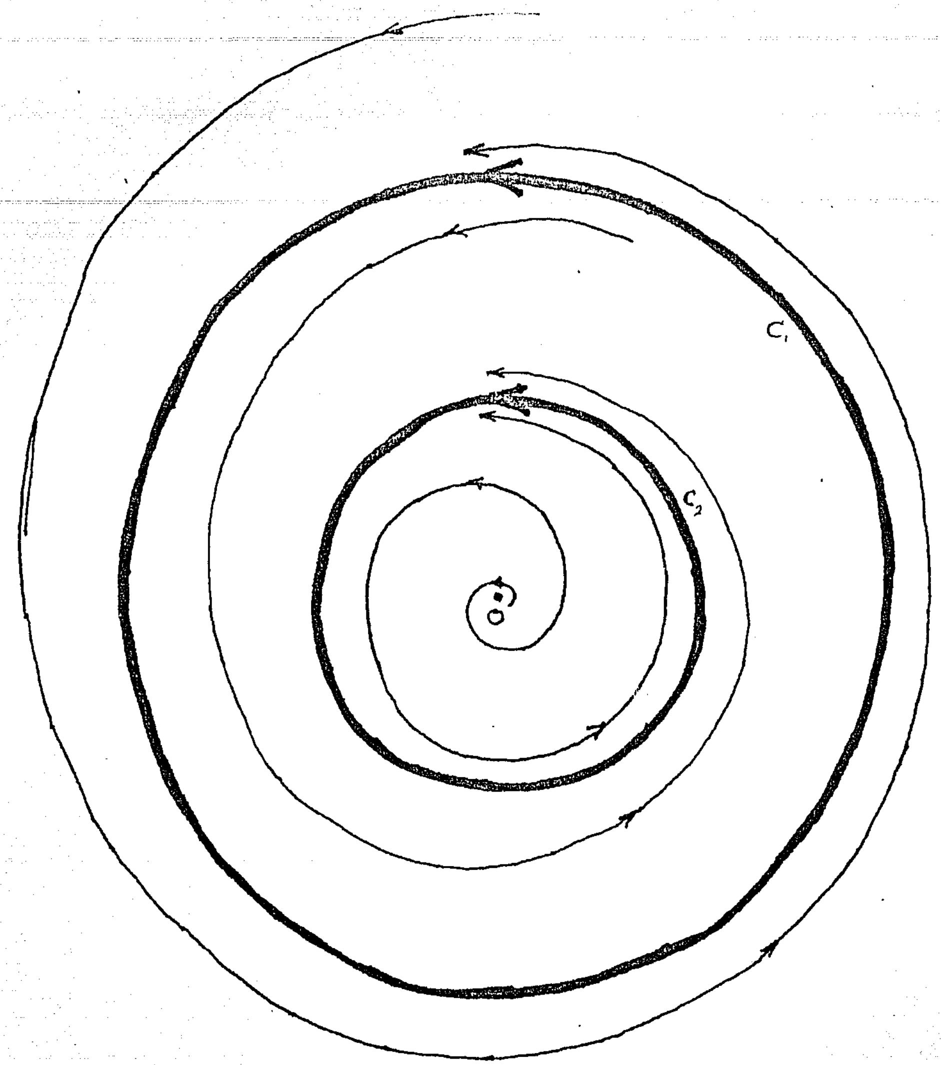
(ii) El origen en el pasado de un punto p en el plano es el mismo conjunto anterior.

(iii) El punto crítico O es una solución estable.

Para finalizar, observemos que cualquier trayectoria es un conjunto estable, ya que al iniciar otra trayectoria en cualquier otro punto, esta última no se va a alejar de la primera.

EJEMPLO 6.

Consideremos, sin escribir las ecuaciones diferenciales correspondientes, el sistema cuyas trayectorias se muestran en la siguiente figura

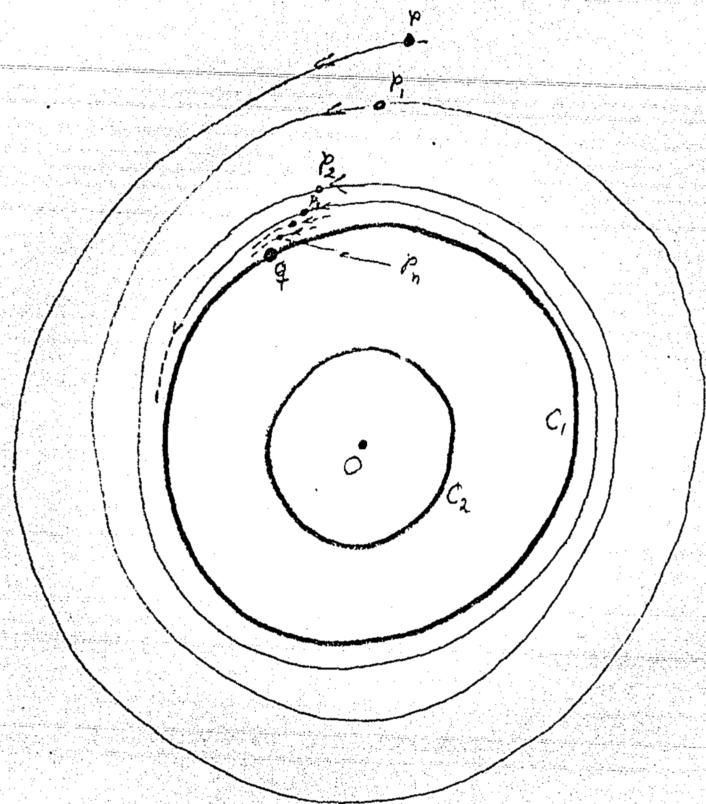


El sistema consta de un único punto crítico, que es el origen O; dos órbitas cerradas C_1 y C_2; las demás trayectorias son espirales que giran alrededor de las órbitas C_1 y C_2, como se muestra en la figura. Si una trayectoria se inicia, digamos en el instante cero, en un punto que está contenido en la región exterior a la órbita C_1, entonces, cuando el tiempo corra por tiempos positivos cada vez mayores, su trayectoria va a espiralear alrededor de la órbita C_1, acercándose cada vez más a ella, pero sin llegar a tocarla. Si el punto en el que se inicie una trayectoria, está en la región entre C_1 y C_2, entonces tal trayectoria va a estar siempre en esa región, y cuando el tiempo crezca sin límite, dicha trayectoria se va a acercar y tenderá a la órbita C_2. Si el punto inicial de una trayectoria está en el interior de la región acotada por C_2, entonces, con la excepción del origen, la trayectoria correspondiente se va a poner a espiralear alejándose del origen y tendiendo a la órbita C_2.

Ahora bien, ¿cuál es el destino final de un punto p que está en la región exterior a C_1? Queremos hacer ver que es toda la curva C_1.

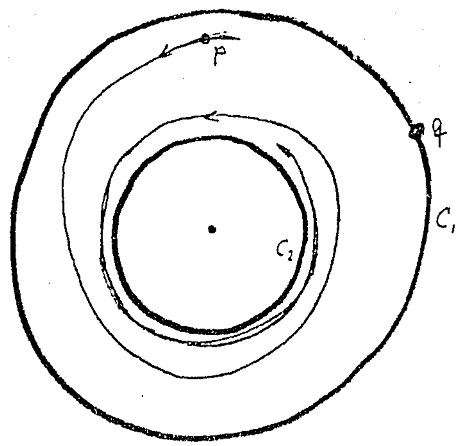
Sea p fuera de C_1, y sea q cualquier punto de C_1. Supongamos que $\varphi(p,t)$ es la solución de la ecuación diferencial tal que $\varphi(p,0)=p$. La trayectoria correspondiente es la que se muestra en la figura de abajo.

Pues bien, como lo hemos estado haciendo, decimos que un punto q es destino final de p, si la semitrayectoria $\gamma^+(p)$ se aproxima a q para una sucesión creciente de tiempos que tiende a ∞. Observando la figura nos convencemos de que esto es así. Es decir, que se puede encontrar una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ con $t_n \to +\infty$ y tal que la



sucesión correspondiente de puntos $\varphi(p, t_n) = p_n$ tiene por límite precisamente el punto q. Como q era un punto arbitrario de C_1, la curva C_1 es el conjunto de todos los puntos que son destino final de p.

Ahora ya es claro, pues se puede hacer un razonamiento semejante, que si p está entre C_1 y C_2, su destino final, cuando t crece sin límite es la curva C_2.



Pero, en este caso, es decir para p un punto en la región entre C_1 y C_2, podemos ver además lo siguiente: para cada punto $q \in C_1$, existe una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^-$ con $t_n \to -\infty$, tal que

$$\lim_{t_n \to -\infty} \varphi(p, t_n) = q .$$

Esto quiere decir que para aquel punto p en la región entre C_1 y C_2, cada punto sobre C_1 es punto final en el pasado, o punto origen, de p.

Tomando de nuevo un punto p en el exterior de C_1, vemos que no tiene punto final en el pasado, es decir cuando $t \to -\infty$.

Finalmente, si tomamos un punto $p \neq 0$ en el interior de C_2, entonces su destino final en el futuro es el conjunto C_2; mientras que su destino final en el pasado es el punto 0.

Vamos a resumir:

(i) El destino final en el futuro de un punto situado en el exterior de C_2 es la curva C_2. Ese mismo punto no tiene origen en el pasado.

(ii) Para un punto p entre C_1 y C_2 su trayectoria $\gamma(p)$ es acotada y tiene tanto destino final en el futuro, como en el pasado. Son los conjuntos C_2 y C_1 respectivamente.

(iii) La trayectoria γ de un punto en el interior de C_2 es acotada y si el punto es distinto del punto 0, su destino final en el futuro es la órbita C_2, y su destino final en el pasado es el punto crítico 0.

(iv) Para la trayectoria que pasa por el punto crítico 0, el mismo punto 0 es tanto su destino final en el futuro, como su origen en el pasado.

Ahora bien, con lo que hemos dicho en los ejemplos anteriores acerca de los puntos que son el destino final de un punto, cuando éste se mueve a lo largo de su trayectoria, se ha hecho evidente de manera palpable la importancia de estos "puntos destino final" en el futuro o en el pasado. Sin embargo, este no es el nombre que reciben. Usualmente, a un punto que es el destino final en el futuro se le llama "punto límite-positivo", y a un punto que es el origen final en el pasado se le llama "punto límite-negativo", y también, desde que Birkhoff así los llamó, se les conoce con el significativo nombre de puntos ω-límite y α-límite, respectivamente. (Recuérdese que ω es la última letra del alfabeto griego y α es la primera).

Además, para nosotros ha quedado ya bien claro cuál es el criterio para determinar cuándo un punto es ω-límite o α-límite de un punto p en el sistema definido por la ecuación $\dot{x}=f(x)$. Usaremos, entonces, ese criterio como definición formal. Hela aquí:

<u>DEFINICIÓN</u>. Un punto q se llama <u>punto límite-positivo</u> u <u>ω-límite</u> de p si existe una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \to +\infty$ tal que $\varphi(p, t_n) \to q$.

Un punto q se llama <u>punto límite-negativo</u> o <u>α-límite</u> de p si existe una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \to -\infty$ tal que $\varphi(p, t_n) \to q$.

Recordemos, ahora, que un punto p puede tener a todo un conjunto de puntos como "destino final". De manera natural podemos ahora definir los conjuntos ω-límite y α-límite de un punto p. Antes de escribir la definición, diremos que tradicionalmente estos conjuntos se denotan con los símbolos $\Lambda^+(p)$ y $\Lambda^-(p)$, respectivamente.

<u>DEFINICIÓN</u>.

$$\Lambda^+(p) = \{q : q \text{ es punto } \omega\text{-límite de } p\};$$

$$\Lambda^-(p) = \{q : q \text{ es punto } \alpha\text{-límite de } p\}.$$

$\Lambda^+(p)$ y $\Lambda^-(p)$ se llaman, respectivamente, el <u>conjunto ω-límite</u> (o <u>límite positivo</u>) y <u>conjunto α-límite</u> (ó <u>límite-negativo</u>) de p.

NOTA. Obsérvese que Λ^+ y Λ^- son funciones que asocian a cada punto p en el dominio de f un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Pues bien, ya hemos descubierto los conjuntos límite, y hemos visto que ellos desempeñan un papel preponderante al analizar el comportamiento global de un sistema. En particular, cuando el tiempo corre a $+\infty$, los conjuntos ω-límite tienen una propiedad de la que ahora hablaremos: son fuente de "atracción". Esto es, las trayectorias son atraídas por el conjunto ω-límite, ya que para los puntos p, existen puntos sobre su trayectoria que son cada vez más y más cercanos a tal conjunto ω-límite. Efectivamente, según la definición existe una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \to +\infty$ tal que

$$\lim d(\varphi(p, t_n), \Lambda^+(p)) = 0, \qquad \text{si} \quad \Lambda^+(p) \neq \phi.$$

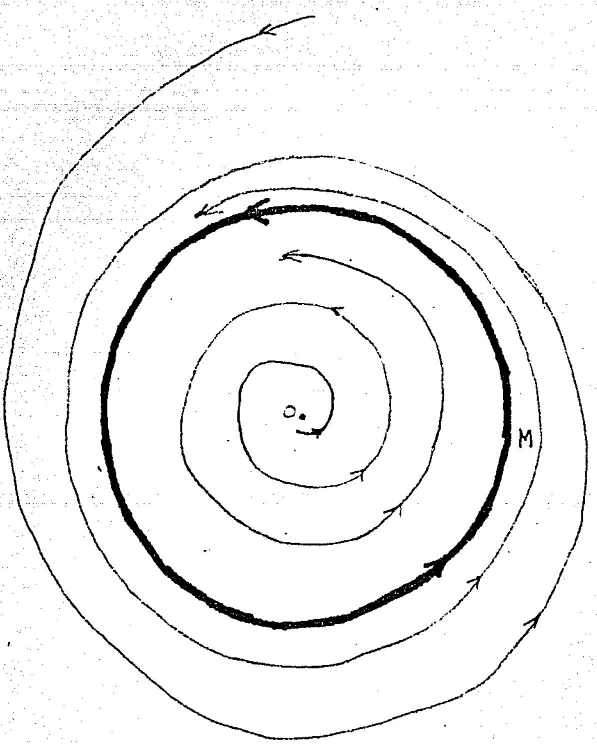
En otras palabras, podemos decir que nuestro proveedor de atractores es la familia de conjuntos ω-límite. Pasemos ahora a ver de qué maneras las trayectorias pueden ser atraídas, viendo algunos ejemplos.

EJEMPLO 7.

Tomemos el sistema diferencial dado por las siguientes ecuaciones (en coordenadas polares):

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$



El origen es el único punto crítico. El círculo unitario es una órbita cerrada que no contiene a ningún punto crítico. Cualquier otra trayectoria (con excepción de la que pasa por el origen), se aproxima más y más a la órbita cerrada, espiraleando alrededor de ella, cuando el tiempo crece sin límite. Es claro, entonces, que el círculo unitario es el conjunto ω- límite de cualquier punto p del plano distinto del origen.

Esto es así porque para cada punto $q \in M$, puede encontrarse una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ con $t_n \to +\infty$ y tal que $\varphi(p, t_n) \to q$.

Así que

$$\Lambda^+(p) = M .$$

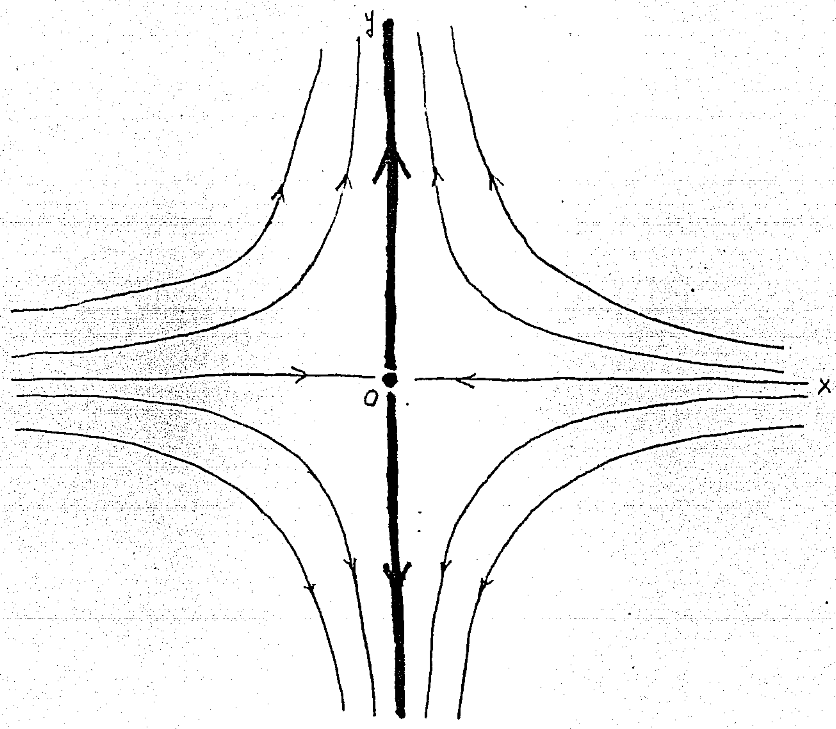
Esto significa que $d(\Lambda^+(p), M) = 0$, y así el círculo unitario M atrae a la trayectoria de p.

A continuación, consideremos un ejemplo muy clásico e ilustrativo, que ya fue utilizado y estudiado por Poincaré.

EJEMPLO 8.

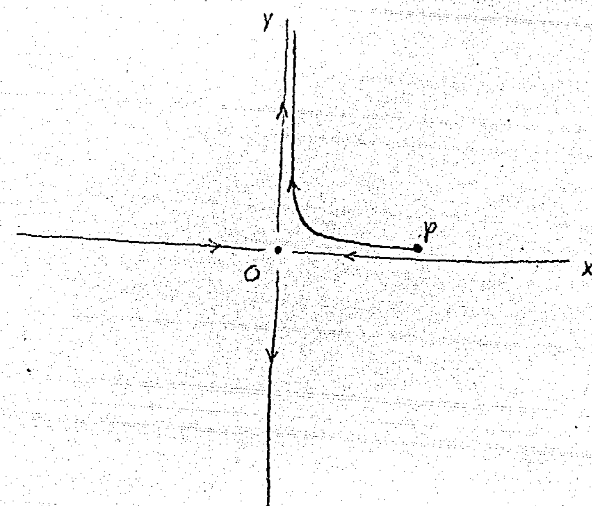
Observemos el siguiente diagrama que representa las trayectorias correspondientes al sistema diferencial

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y$$



El origen es un punto crítico, un punto de equilibrio. Es un punto de equilibrio inestable. Es, como suele decirse, un punto silla, o un puerto.

Para un punto sobre el eje x, es decir, para un punto $p = (x, 0)$, el conjunto $\Lambda^+(p)$ es el conjunto $\{0\}$. En otras palabras, ese punto p es atraído por el origen. Pero si el punto p no está sobre el eje x, entonces, aún cuando durante algún tiempo se acerque al origen, finalmente se alejará de éste cuando el tiempo crezca.



Para ese punto, es decir, un punto p fuera del eje x, el conjunto ω - límite, $\Lambda^+(p)$, es vacío. A pesar de ello, toda la recta contenida en el eje y "atrae" a todas las trayectorias sin excepción. Lo que queremos decir, y que se hace evidente al observar la figura, es que para cualquier punto p del plano, al tomar la semi-trayectoria positiva $\gamma^+(p)$, después de un tiempo suficientemente grande, se encontrará arbitrariamente cerca de ese eje. Esto es, si designamos con M al eje y:

$$\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(p,t), M) = 0.$$

Todo esto último nos muestra un fenómeno de atracción, el cual se presenta a pesar de que $\Lambda^+(p)$ es vacío. Posteriormente habremos de tomar esto muy en cuenta para una definición precisa de atractores en un sistema dinámico (ver capítulo II).

§ 2. DEFINICIÓN DE SISTEMA DINÁMICO.

Recordemos que al principio de este capítulo se hizo mención del siguiente hecho, que ahora hacemos más explícito:

Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde f satisface algunas condiciones para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones y definida en un dominio $\Omega = \operatorname{Dom} f \subset \mathbb{R}^n$, si designamos con $\varphi(p, t)$ la solución que en el instante $t = 0$ empieza su trayectoria en el punto $p \in \Omega$, y con $I(p)$ designamos el intervalo en el cual está definida, entonces la aplicación

$$(p, t) \mapsto \varphi(p, t), \quad t \in I(p)$$

es una función

$$\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega.$$

En la sección anterior se mostraron algunos ejemplos, al mismo tiempo que se destacaron ciertos conceptos, como el de estabilidad, conjuntos ω-límite, α-límite y atractor, que serán el motivo de nuestro estudio en las páginas siguientes. Para ello necesitamos un lenguaje adecuado. Nuestro primer objetivo será el llegar a una definición suficientemente general de SISTEMA DINÁMICO. Pero antes de formularla, es necesario observar ciertas dificultades y ver la manera de resolverlas.

2.1 INTERVALO DE DEFINICIÓN. Para empezar, recordemos el siguiente bien conocido hecho de la teoría de las ecuaciones diferenciales, (ver [3]), el cual es una fácil consecuencia de la unicidad de las soluciones, la cual estamos suponiendo:

Sea la ecuación

$$\dot{x} = f(x)$$

definida en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f una función de clase C^1 en Ω.

Para cada $p \in \Omega$ existe una solución única $\varphi(p,t)$ con $\varphi(p,0) = p$ definida en un intervalo maximal abierto $I(p) \subset \mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{X} \subset \Omega \times \mathbb{R}$ definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{X} = \{(p,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : t \in I(p)\}.$$

La función $(p,t) \mapsto \varphi(p,t)$ es entonces una transformación

$$\varphi : \mathbb{X} \to \Omega.$$

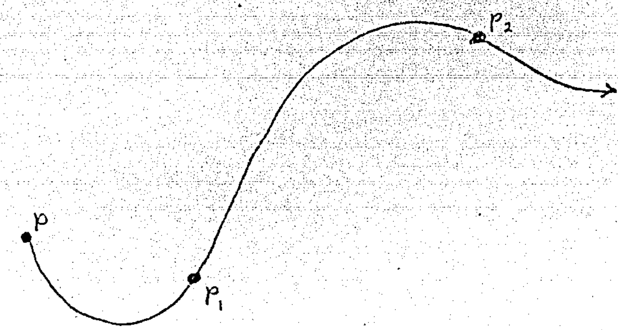
El hecho mencionado es el siguiente

Teorema. Con las hipótesis y notación anteriores, la función φ tiene la siguiente propiedad:

$$\varphi(\varphi(p,t), s) = \varphi(p, t+s)$$

en el sentido de que si uno de los miembros está definido, el otro también, y son iguales.

Geométricamente, esto tiene la siguiente interpretación



Si un punto parte en el instante cero de la posición p, bajo la transformación dada por φ, al cabo de un tiempo t se encontrará en la posición $p_1 = \varphi(p, t)$; si ahora dejamos que se desplace durante un tiempo s, al cabo de este tiempo se encontrará en la posición $p_2 = \varphi(p_1, s)$. Pues bien, el teorema nos dice que al mismo resultado se llega si a partir de la posición p, se deja correr un tiempo $t+s$.

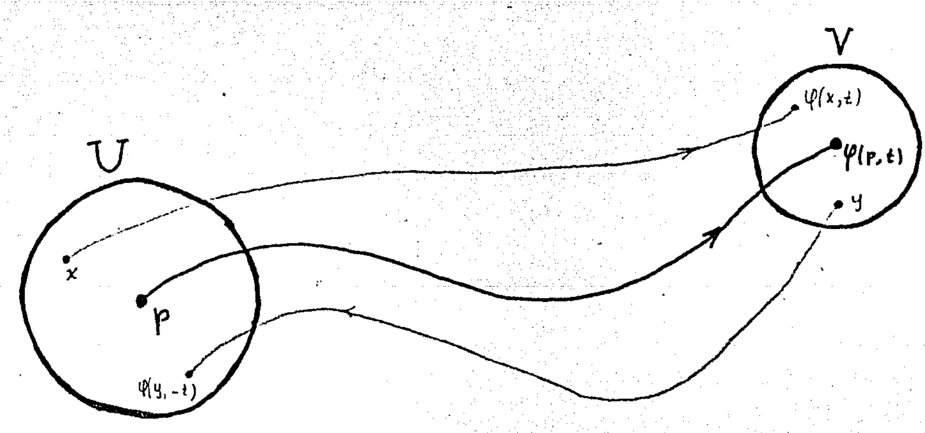
Recordemos, ahora, otro hecho de las ecuaciones diferenciales (ver [3]):

Supongamos que $p \in \Omega$, $t \in I(p)$. Sabemos que p tiene una vecindad $U \subset \Omega$ con $\varphi(x, t)$ definido para todo $x \in U$.

Teorema. Con las hipótesis del teorema anterior, para cada $t \in I(p)$, la función

$$x \longmapsto \varphi(x,t)$$

define una función de U sobre un conjunto abierto V, (U la vecindad de p que se acaba de mencionar). Además, $\varphi(y,-t)$ está definida en V y transforma V sobre U. La composición $\varphi(\varphi(x,t),-t)$ es la identidad en U, y $\varphi(\varphi(y,-t),t)$ es la identidad en V.



Ahora, introduzcamos la siguiente notación: para t fijo, la función

$$(p,t) \longmapsto \varphi(p,t)$$

la designaremos con φ_t. Entonces tendremos, en el caso en que todas las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ estén definidas en toda la recta real y en base a los teoremas que acabamos de mencionar, un conjunto de transformaciones φ_t con las siguientes propiedades:

(i) una operación (la composición) definida para cada par de ellas,

(ii) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$,

(iii) $\varphi_t \circ (\varphi_s \circ \varphi_r) = (\varphi_t \circ \varphi_s) \circ \varphi_r$,

(iv) $\varphi_0 \equiv$ Idéntica,

(v) $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t =$ Idéntica.

Esto es un grupo de transformaciones con parámetro t. De ser esto así para todos los casos, tendríamos de este modo una herramienta muy conocida y poderosa, como es la estructura de grupo, que nos permitiría conocer una serie de propiedades importantes de las transformaciones que estamos considerando.

A pesar de lo conveniente que sería que se diese en todos los casos la situación anterior, no estamos en condiciores para afirmar que esto es así. La razón de ello es que, por ejemplo, no sería posible en todos los casos sumar los tiempos t y s, para t y s arbitrarios, pues, para algún p podría no estar definida una de las expresiones $\varphi(p,t)$ o $\varphi(\varphi(p,t), s)$.

Esto nos sugiere que la situación conveniente y deseable para nosotros, es cuando las soluciones a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, estén todas definidas en toda la recta real. Sin embargo, esto no ocurre siempre así, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

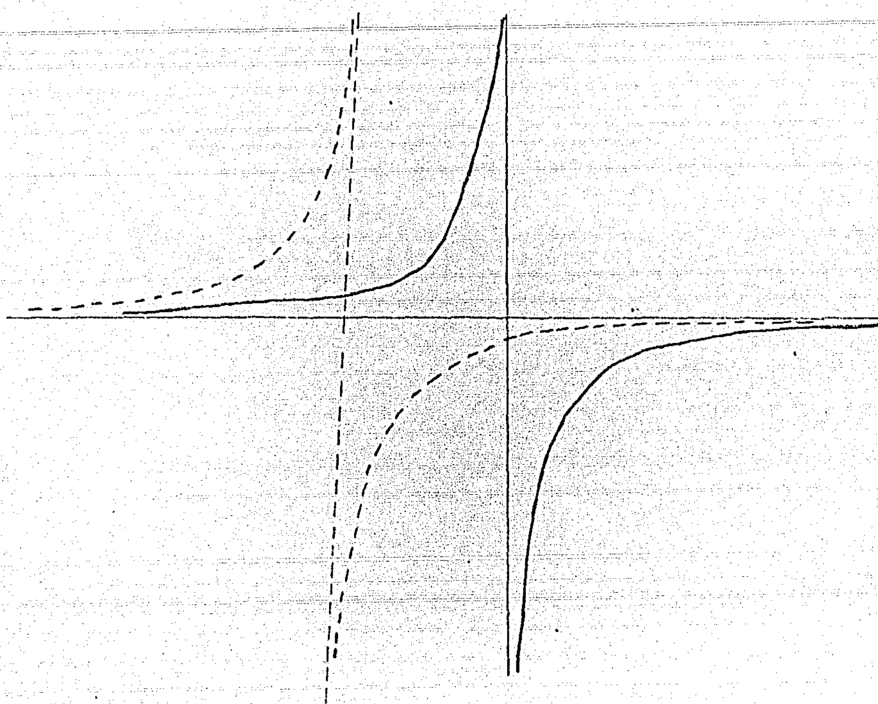
EJEMPLO 9.

Consideremos el sistema dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= y^2 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

cuyas soluciones son, si la condición inicial es $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$,

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x_0 \\ y(t) &= -\frac{1}{t - \frac{1}{y_0}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



La solución general de la ecuación diferencial es el vector en $\mathbb{R}^2$, $(x(t), y(t))$ donde $x(t)$, $y(t)$ están dadas por (2). Como se ve fácilmente, no está definida para todo t en $(-\infty, +\infty)$. En realidad, el dominio de definición de la solución será del tipo $(-\infty, \frac{1}{y_0})$, o bien, $(\frac{1}{y_0}, +\infty)$, dependiendo de las condiciones iniciales.

Pues bien, este ejemplo podría sugerir que la causa de que las soluciones, en general, no estén definidas para todo t, es que la función del segundo miembro no sea acotada. Sin embargo, rápidamente nos convencemos de lo contrario, examinando la ecuación del ejemplo 4

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -y,$$

cuyas soluciones están definidas para todo t en la recta real, a pesar de que la función en el segundo miembro de la ecuación no es acotada.

A pesar de ello, esta comparación sugiere una condición suficiente, más amplia, para que las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ estén definidas para todo $t \in (-\infty, +\infty)$, y es que la velocidad, en valor absoluto, esté por debajo de la función $\|x\|$. De hecho, probaremos el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>. Si existen reales A y B, positivos, tales que

$$\|f(x)\| \leq A\|x\| + B$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces las soluciones de la ecuación

$$\dot{x} = f(x),$$

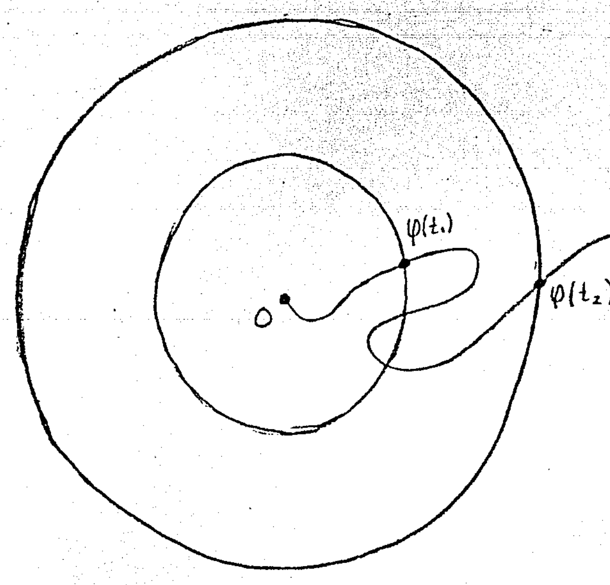
donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, están definidas en toda la recta real.

Demostración. Designemos con $\varphi(t)$ una solución a la ecuación diferencial. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\varphi(0) = 0$.

Supongamos que $\varphi(t) \to \infty$ en un tiempo finito T. Veremos que esto no es posible bajo la condición de que

$$\|f(x)\| \leq A\|x\| + B .$$

Tomemos una sucesión de esferas con centro en el origen y radios $1, 2, 3, \ldots$.



En el espacio fase, la trayectoria que pasa por el origen es la curva en $\mathbb{R}^n$ dada por la función $\varphi(t)$, con parámetro t. Por la hipótesis hecha al principio de la demostración, esa curva, una curva continua, tiene que cruzar todos estos círculos en el tiempo finito T.

Supongamos ahora que la trayectoria invierte un tiempo t_1 en cruzar por primera vez el primer círculo.

Se tiene lo siguiente: una curva, $\varphi(t)$ que en $t=0$ pasa por el origen, y en $t=t_1$ pasa por el punto $\varphi(t_1)$.

Del cálculo elemental se sabe que la longitud de esta curva está dada por la fórmula

$$l_1 = \int_0^{t_1} \left\| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\| dt .$$

Ahora bien, como $\varphi(t)$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, se cumple que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \qquad \forall \ t \in [0, t_1].$$

Por lo tanto

$$l_1 = \int_0^{t_1} \| f(\varphi(t)) \| \, dt \le \int_0^{t_1} (A \|\varphi(t)\| + B) \, dt \quad \forall \ t \in [0, t_1].$$

En razón de que para t en el intervalo $[0, t_1]$, $\|\varphi(t)\| \le 1$, se tendrá lo siguiente

$$l_1 \le \int_0^{t_1} (A + B) \, dt = t_1 (A + B).$$

Pero además

$$1 \leq l_1 .$$

Llegamos entonces a que

$$1 \leq t_1 (A+B) .$$

Es decir

$$t_1 \geq \frac{1}{A+B} .$$

Ahora, sea t_2 el instante en que la trayectoria cruza por primera vez el círculo de radio 2, y sea l_2 la longitud de la curva entre los puntos $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$. En consecuencia, el tiempo invertido en hacer el recorrido desde $\varphi(t_1)$ a $\varphi(t_2)$ será $t_2 - t_1$, y se tendrá lo siguiente:

$$l_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \| f(\varphi(t)) \| \, dt$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} (A \|\varphi(t)\| + B) \, dt$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} (2A + B) \, dt = (t_2 - t_1)(2A + B) .$$

Lo que nos da

$$t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2A+B} .$$

Análogamente

$$t_3 - t_2 \geq \frac{1}{3A+B},$$

y así sucesivamente.

Pero, para cada n,

$$T > t_n.$$

Es claro que podemos escribir

$$t_n = t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - t_{n-2} + \cdots - t_1 + t_1;$$

lo que nos dará

$$T > t_n = t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \cdots + (t_n - t_{n-1}).$$

Haciendo crecer n indefinidamente, y utilizando las desigualdades obtenidas arriba, se tendrá la siguiente desigualdad con un número infinito de términos en el segundo miembro:

$$T > \frac{1}{A+B} + \frac{1}{2A+B} + \frac{1}{3A+B} + \cdots$$

$$T > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nA+B}.$$

Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nA+B}$ es divergente, y además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nA+B} = +\infty$, por lo siguiente: primero escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nA+B} = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{B}{A}} .$$

Sea ahora $N \geq \frac{B}{A}$, entonces

$$\frac{1}{A}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{B}{A}} \geq \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+N} = \frac{1}{A} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty .$$

Se tiene, entonces, una contradicción, ya que habíamos supuesto que T era finito. //

Ya con este hecho, puede demostrarse fácilmente el siguiente teorema, cuya motivación e importancia se ve del teorema de existencia y unicidad que se da en el apéndice. (Ver también [6], pág. 130).

Teorema. Si la función $f(x)$ satisface una condición de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, entonces las soluciones a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ están definidas en toda la recta real.

Demostración. La demostración se sigue de la siguiente observación

$$\begin{aligned} \|f(x)\| - \|f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| &\leq K\|x-y\| \\ &\leq K(\|x\| + \|y\|) \\ &= K\|x\| + K\|y\|, \end{aligned}$$

que se cumple para cualesquiera x, y. (K es la constante de Lipschitz para f). Fijando un punto $y_1 \neq 0$, se tiene, para cualquier x, lo siguiente

$$\|f(x)\| \leq K\|x\| + B$$

donde $K > 0$, $B = K\|y_1\| + \|f(y_1)\| > 0$. Por el teorema anterior la afirmación es válida. //

2.2 <u>INTERVALO DE DEFINICIÓN</u>. (CONTINUACIÓN). Sin embargo, debemos tomar en cuenta que la situación tan favorable de que las soluciones de la ecuación diferencial estén definidas en toda la recta real, no siempre se da. Incluso para ecuaciones tan sencillas como la del ejemplo 9, ocurre que, como ya vimos, las soluciones, en general, no están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Debemos, entonces, resolver esta dificultad, si queremos ampliar la clase de ecuaciones diferenciales que podremos considerar que definen un sistema dinámico. En consecuencia, en el caso en que la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ tenga soluciones que no están definidas en toda la recta, quisiéramos encontrar un sistema, en cierto sentido equivalente, es decir que tenga exactamente las mismas trayectorias, pero que sus soluciones estén definidas para toda la recta real.

La idea para resolver dicho problema, la encontramos en una observación hecha antes de enunciar el teorema anterior, y es que si la función en el segundo miembro de la ecuación es acotada, entonces las soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observemos primero que el sistema $\dot{x} = \lambda f(x)$, con λ un escalar constante, tiene las mismas trayectorias que el sistema original $\dot{x} = f(x)$; esto es así porque lo único que se ha modificado es la velocidad con que son recorridas. Lo mismo es cierto, incluso, cuando λ no es constante. Es decir, el sistema autónomo

$$\dot{x} = \lambda(x)\, f(x), \qquad \lambda(x) \text{ una función escalar,}$$

tiene las mismas trayectorias que $\dot{x} = f(x)$, recorridas con una velocidad distinta.

Por lo tanto, podremos asociar a la ecuación original $\dot{x} = f(x)$, la ecuación

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|},$$

que tendrá las propiedades requeridas, es decir, tiene las mismas trayectorias que aquella, (puesto que el segundo miembro ha sido multiplicado por una función escalar) y ahora las soluciones están definidas para todo $\mathbb{R}$.. Esta última afirmación es cierta por la observación hecha anteriormente, que ahora enunciamos como teorema y cuya demostración puede hacerse en exactamente la misma forma que la demostración del teorema de la página 46.

<u>Teorema</u>. La ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función acotada y localmente de Lipschitz, tiene todas sus soluciones definidas en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

<u>Observación</u>. Para garantizar la unicidad de las soluciones de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es suficiente que f sea localmente de Lipschitz, (ver [3]).

Si f satisface una condición de Lipschitz en un abierto y conexo entonces $g(x) = \frac{1}{1 + \|f(x)\|}$ satisface también una condición de Lipschitz. (Ver Apéndice).

Esto da sentido a la elaboración anterior, pues amplía la clase de las funciones que podemos considerar.

Como resumen de todo lo anterior, podemos expresar el principal resultado obtenido en el siguiente teorema

<u>Teorema</u>. Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$, entonces la ecuación

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \qquad \dots\dots\dots \quad (2)$$

tiene exactamente las mismas trayectorias que la ecuación (1), y todas las soluciones de la ecuación (2) están definidas en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Debemos ahora abordar el caso en que la función f sólo está definida en un dominio Ω contenido propiamente en $\mathbb{R}^n$. Suponemos a f continua y que satisface la propiedad de Lipschitz localmente en Ω. Hay dos posibilidades:
(i) que al acercarse la trayectoria a la frontera de Ω, la velocidad crezca vertiginosamente tendiendo a ∞; (ii) que aún cuando la velocidad sea acotada, la trayectoria alcanza la frontera en un tiempo finito.

Tomando en cuenta estas posibilidades, además del factor propuesto anteriormente, necesitamos un factor que haga que la velocidad disminuya al acercarse la trayectoria a la frontera. Proponemos entonces asociar con $\dot{x} = f(x)$ la ecuación

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|} \frac{d(x, \partial\Omega)}{1 + d(x, \partial\Omega)},$$

donde $\partial\Omega$ designa a la frontera de Ω.

Lo que tenemos que demostrar es que sus soluciones están definidas en toda la recta real.

<u>Demostración.</u> Observemos primeramente que

$$\left\| \frac{f(x)}{1+\|f(x)\|} \frac{d(x,\partial\Omega)}{1+d(x,\partial\Omega)} \right\| < d(x,\partial\Omega).$$

Tendremos, entonces, generalizando un poco, la ecuación diferencial

$$\dot{x} = g(x)$$

con la condición $\|g(x)\| < d(x,\partial\Omega)$.

Sea $x_0 \in \Omega$. Queremos demostrar que si $\varphi(t)$ es la solución tal que $\varphi(0)=x_0$, y si $\varphi(t)$ tiende a la frontera de Ω cuando $t \to T$, entonces T es mayor que cualquier número positivo.

Hagamos

$$t_n = \inf\{t \in [0,T) : d(\varphi(t),\partial\Omega) = \frac{1}{2^n}\}.$$

Es claro que para n suficientemente grande, t_n está definido. Sea n_0 el primer natural para el cual t_n está definido. Tenemos, entonces, una sucesión

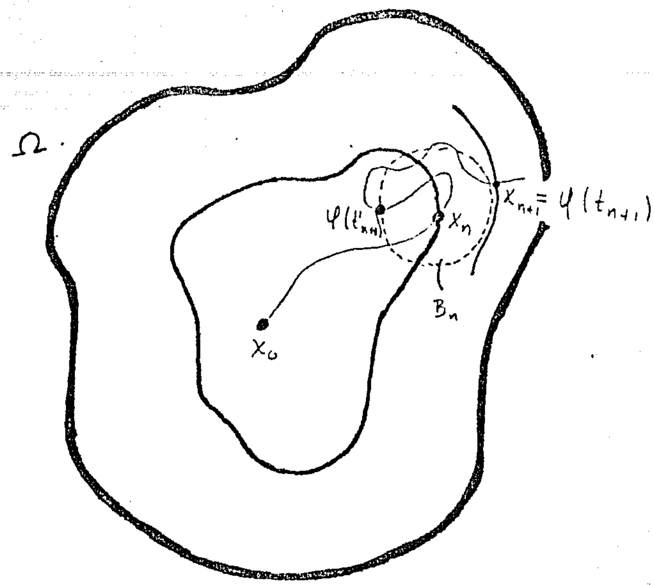
$$t_{n_0}, t_{n_0+1}, \ldots$$

para la cual $t_{n+1} > t_n$.

Hagamos ahora $x_n = \varphi(t_n)$, $n \geq n_0$, y sea

$$B_n = B(x_n, \frac{1}{2^{n+1}}), \quad n > n_0.$$

Sea $t'_{n+1} = \inf\{t > t_n : \varphi(t) \in \partial B_n\}$.



Se tiene que

$$x \in B_n \implies \frac{1}{2^{n+1}} \leq d(x, \partial\Omega) \leq \frac{3}{2^{n+1}} \ ;$$

$$x \in \dot{B}_n \implies \frac{1}{2^{n+1}} < d(x, \partial\Omega) < \frac{3}{2^{n+1}} .$$

Y esto implica que

$$t'_{n+1} \leq t_{n+1} .$$

Entonces, si t es tal que $t_n \leq t \leq t'_{n+1}$,

$$\| \varphi'(t) \| = \| g(\varphi(t)) \| < d(\varphi(t), \partial\Omega) \leq \frac{3}{2^{n+1}} .$$

De donde obtenemos

$$\|\varphi(t'_{n+1}) - \varphi(t_n)\| < (t'_{n+1} - t_n)\frac{3}{2^{n+1}}, \cdot\cdot [\text{ver nota } (*)]$$

Es decir:

$$\|\varphi(t'_{n+1}) - \varphi(t_n)\| = \frac{1}{2^{n+1}} < (t'_{n+1} - t_n)\frac{3}{2^{n+1}},$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{3} < t'_{n+1} - t_n \leq t_{n+1} - t_n.$$

Por lo tanto:

$$T > t_{n_0} + \frac{N}{3},$$

y como N puede hacerse tan grande como se desee, queda demostrado lo que se quería. //

(*) Para esta desigualdad se hizo uso del siguiente hecho: Sean $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $a < b \in \mathbb{R}$. Si $\|\sigma'(t)\| < K$ para $t \in [a, b]$, entonces

$$\|\sigma(b) - \sigma(a)\| < (b-a)K;$$

cuya demostración se obtiene recordando la fórmula

$$l(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt,$$

para la longitud de una curva.

El resultado obtenido se expresa en el siguiente teorema.

Teorema. Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, es localmente de Lipschitz en Ω, entonces la ecuación

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1+\|f(x)\|} \frac{d(x, \partial\Omega)}{1+d(x,\partial\Omega)} \quad \ldots . (2)$$

tiene exactamente las mismas trayectorias que la ecuación (1), y todas las soluciones de la ecuación (2) están definidas en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

NOTA. Obsérvese que de hecho hemos demostrado algo más fuerte:

Teorema. Si la función $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente de Lipschitz en Ω y satisface

$$\|g(x)\| \leq d(x, \partial\Omega),$$

entonces las soluciones a la ecuación

$$\dot{x} = g(x)$$

están definidas en toda la recta real.

Un resumen de las últimas dos secciones (2.1 y 2.2) sería el siguiente: Dada la ecuación $\dot{x} = f(x)$, con f definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y con soluciones $\varphi(p,t)$ que satisfacen $\varphi(p,0) = p$ para cada $p \in \Omega$, podemos considerar las funciones

$$(p,t) \mapsto \varphi(p,t) \quad , \quad t \in I(p),$$

de manera que

$$\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$$

es una función continua de las dos variables, (de hecho es diferenciable en t), y que hemos designado con φ_t. Además

(i) en el caso que las soluciones a la ecuación diferencial no estén definidas para toda la recta real, podemos siempre considerar un sistema equivalente, en el sentido de que tiene exactamente las mismas trayectorias, pero tal que sus soluciones están definidas en toda la recta real;

(ii) para cada t, podemos también considerar la función φ_t que a cada punto $p \in \Omega$ lo lleva al punto sobre su trayectoria durante un tiempo t. Podemos suponer que estas funciones están definidas para todo t, y que ellas forman un grupo de transformaciones de Ω sobre sí mismo, bajo el parámetro t; además cada una de ellas es un homeomorfismo, y se tiene

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \;;$$

finalmente, la función φ_t tiene inversa, y su inversa es φ_{-t}.

Es necesario insistir en el punto (i) anterior, puesto que este hecho nos resuelve una de las dificultades que habíamos observado anteriormente y que, dijimos, nos impedía considerar como dada una estructura de grupo. Repitiendo el resultado alcanzado, diremos que hemos demostrado que, siempre que se tiene un sistema diferencial autónomo $\dot{x} = f(x)$, a pesar de que las soluciones puedan no estar todas definidas en toda la recta real, es posible definir un nuevo sistema, que tenga exactamente las mismas trayectorias que el primero, pero para el cual todas las soluciones están definidas en toda la recta. Dijimos que estos dos sistemas eran equivalentes.

Por otro lado, esto nos lleva a pensar que podremos considerar simultáneamente a todos los sistemas que son equivalentes; equivalentes en el sentido ya mencionado, es decir, que tienen las mismas trayectorias, y fijar nuestra atención, tal vez, en un representante de ellos.

La siguiente sección tiene por objetivo establecer esto con precisión. El camino que seguiremos será el siguiente:

(i) Definiremos, primeramente, una relación de equivalencia en el dominio Ω_f en el que está definida la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Estas clases de equivalencia no serán otra cosa que las trayectorias mismas.

(ii) Un sistema será equivalente a otro, cuando tenga las mismas trayectorias que el primero.

(iii) Y, finalmente, de este modo quedará inducida una partición en clases de equivalencia en la familia de todos los sistemas diferenciales autónomos.

Este es, en resumen, el contenido de la sección siguiente.

2.3 CLASES DE EQUIVALENCIA. Supongamos que tenemos dada la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

y que $f(x)$ está definida en un dominio $\Omega_f \subset \mathbb{R}^n$.

Bajo hipótesis adecuadas de existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial (F), podemos establecer la siguiente relación de equivalencia en Ω_f:

$x \sim y$ si $\exists\ \varphi$, solución de (F), t_x, $t_y \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ tales que $\varphi(t_x) = x$, $\varphi(t_y) = y$.

Ciertamente, esta es una relación de equivalencia:

(i) Sea $\varphi(x,t)$ la solución que en t_x está en x. Entonces $\varphi(x, t_x) = x$, y esto implica que $x \sim x$.

(ii) Si $x \sim y$, quiere decir que $\exists\ \varphi$, t_x, t_y tales que $\varphi(t_x) = x$, $\varphi(t_y) = y$, y obviamente se sigue que $y \sim x$.

(iii) Si $x \sim y$, $y \sim z$:

$\exists\ \varphi$, t'_x, t'_y tales que $\varphi(t'_x) = x$, $\varphi(t'_y) = y$;

$\exists\ \varphi_1$, t''_y, t''_z tales que $\varphi_1(t''_y) = y$, $\varphi_1(t''_z) = z$.

La unicidad implica que

$$z = \varphi_1(t_z'') = \varphi(t_y' - t_y'' + t_z'').$$

Esto significa que con $t_x = t_x'$, $t_z = t_y' - t_y'' + t_z''$,

$$\varphi(t_x) = x, \quad \varphi(t_z) = z;$$

lo que quiere decir que $x \sim z$. //

En consecuencia, Ω_f ha quedado dividido en clases de equivalencia por la relación anterior, la cual depende, como es obvio, del segundo miembro de la ecuación $\dot{x} = f(x)$.

Denotemos por $\mathfrak{F}$ al conjunto de dichas clases de equivalencia, que genéricamente se denotarán como Γ_f, es decir

$$\mathfrak{F} = \{\Gamma_f : \Gamma_f \text{ clases de equivalencia}\}.$$

Ahora, supongamos que se tiene otra ecuación

$$\dot{z} = g(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

donde g tiene dominio de definición Ω_g. Sea $\mathfrak{G}$ la colección de clases de equivalencia que corresponden a (G),

$$\mathfrak{G} = \{\Gamma_g : \Gamma_g \text{ clases de equivalencia}\}.$$

<u>Definición</u>. Diremos que los sistemas (F) y (G) son <u>equivalentes</u> si existe un homeomorfismo $h : \Omega_f \to \Omega_g$ que manda clases de equivalencia de (F) en clases de equivalencia de (G), esto es

$h(\Gamma_f) \in \mathcal{G}$

Uno de los objetivos que nos habíamos fijado, lo podemos ahora alcanzar con facilidad. Debido a su importancia, lo enunciamos en forma de teorema.

<u>Teorema.</u> Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface una condición de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$. Entonces, los sistemas

$$\dot{x} = f(x)$$

y

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}$$

son equivalentes.

<u>Demostración.</u> Primeramente, escribiremos los sistemas de una forma ligeramente diferente:

$$\dot{x} = f(x)$$
$$\dot{y} = \lambda(y) f(y)$$

donde $\lambda(y)$ es una función escalar continua que no se anula.

En esencia, lo que queremos demostrar es, que toda solución de uno de los dos sistemas es una reparametrización de una solución del otro. Es decir, si φ es solución de $\dot{x} = f(x)$ y ψ es solución de $\dot{y} = \lambda(y) f(y)$, queremos que

$$\psi(\alpha(t)) = \varphi(t),$$

para una función α adecuada.

De aquí obtenemos, derivando con respecto a t

$$\psi'(\alpha(t))\,\dot\alpha(t) = \dot\varphi(t)$$

es decir

$$\lambda(\psi(\alpha(t)))\,f(\psi(\alpha(t)))\,\dot\alpha(t) = f(\varphi(t))$$

$$\lambda(\varphi(t))\,f(\varphi(t))\,\dot\alpha(t) = f(\varphi(t)),$$

de donde resulta que

$$\lambda(\varphi(t))\,\dot\alpha(t) = 1$$

$$\dot\alpha(t) = \frac{1}{\lambda(\varphi(t))}$$

o sea

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\lambda(\varphi(s))}\,ds.$$

Con esta α podemos entonces escribir

$$\tau = \alpha(t).$$

O sea

$$t = \alpha^{-1}(\tau).$$

Y tendremos

$$\psi(\tau) = \varphi(\alpha^{-1}(\tau)).$$

Derivando

$$\dot\psi = \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \varphi'(\alpha^{-1}(\tau))\,\frac{d\alpha^{-1}(\tau)}{d\tau} = \varphi'(\alpha^{-1}(\tau))\,\frac{1}{\frac{d\alpha(t)}{dt}}$$

$$= f(\varphi(\alpha^{-1}(\tau)))\,\frac{1}{\dot\alpha(t)} = f(\varphi(\alpha^{-1}(\tau)))\,\frac{1}{\frac{1}{\lambda(\varphi(t))}}$$

$$= \lambda(\varphi(\alpha^{-1}(\tau)))\,f(\varphi(\alpha^{-1}(\tau)))$$

$$= \lambda(\psi(\tau))\,f(\psi(\tau)).$$

Esto es
$$\dot{\psi} = \lambda(\psi) f(\psi).$$
Ahora, con lo ya demostrado, queda únicamente por señalar que el homeomorfismo de la definición de sistemas equivalentes, es en este caso la función identidad, ya que las dos ecuaciones están definidas en la misma región, y las trayectorias son las mismas curvas con parametrizaciones diferentes. //

Ha quedado entonces establecido que la familia
$$\mathcal{E} = \{(f, \Omega_f) : f : \Omega_f \to \mathbb{R}^n\}$$
donde $\Omega_f \subset \mathbb{R}^n$ y f es una función continua y Lipschitz en Ω_f, ha quedado dividida en clases de equivalencia, y por lo tanto queda inducida una partición en clases ajenas,
$$\mathcal{E}/\sim = \{\overline{(f, \Omega_f)} : (f, \Omega_f) \in \mathcal{E}\}.$$

Estamos ahora ya casi listos. Nuestro objetivo actual está a punto de ser alcanzado. Tenemos nuestras clases de equivalencia; tenemos un elemento en cada una de ellas cuyas soluciones están definidas en toda la recta real; tenemos en consecuencia una estructura de grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$. Sólo nos falta precisar cuál va a ser nuestro espacio, para tener todos los elementos necesarios para nuestra definición de Sistema Dinámico.

2.4 NUESTRO ESPACIO. Para continuar, observemos ahora que una ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, no siempre está definida en todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Ya nuestro primer ejemplo (pág 2), un ejemplo en $\mathbb{R}^2$, mostró esto. Efectivamente, la ecuación diferencial correspondiente, que por cierto es el modelo matemático para un fenómeno físico real, está definida en el semi-plano a la izquierda de la recta $x = 2$, como se recordará.

¿Qué hacer, entonces, cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ no está definido en todo $\mathbb{R}^n$, sino como es usual, en un cierto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

En lo que debemos fijarnos es en la función $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$, ya estudiada arriba, puesto que lo que nos interesa estudiar son las trayectorias del sistema.

Para cada t, esta φ es una función de Ω en sí mismo. Éste es el hecho interesante, porque nos dice que al tomar un punto cualquiera en Ω, a lo largo de su trayectoria, éste va a permanecer siempre en Ω. Podemos entonces tomar a Ω como subespacio de $\mathbb{R}^n$ y quedarnos con las propiedades topológicas que hereda.

Las características sobresalientes, cuando Ω es una región, serán entonces las siguientes

(i) Ω es conexo;

(ii) la norma de $\mathbb{R}^n$ nos induce una métrica en Ω. Esto es, Ω es un espacio métrico;

(iii) como $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, en consecuencia Ω es también localmente compacto.

Por lo tanto, consideraremos a Ω como un espacio métrico, localmente compacto y conexo.

2.5 LA DEFINICIÓN. Nuestro objetivo es ahora el siguiente: Queremos abarcar en un solo concepto todo lo que es común y esencial a todos los casos posibles de sistemas que son dados por una ecuación diferencial autónoma.

Para empezar, tomemos el representante (f, Ω_f), ya mencionado, en la clase $\overline{(f, \Omega_f)}$, y la solución $\varphi(x_0, t)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, solución que, como se recordará, podemos considerar como definida desde $-\infty$ hasta $+\infty$, y tal que en $t = 0$ satisface $\varphi(x_0, 0) = x_0$.

Pues bien, con esta función φ podemos considerar una transformación del producto de espacios $\Omega_f \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$(x, t) \longrightarrow \varphi(x, t).$$

Esta transformación tiene las siguientes dos propiedades:

(1) $\varphi(x, 0) = x, \quad \forall\, x \in \Omega_f$;

(2) $\varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2)$ para cualesquiera $x \in \Omega_f$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Y podemos hacer la siguiente observación: si tomamos $t = 0$, la función φ es la identidad en Ω_f. La propiedad (2) completa los requerimientos para que el conjunto de las φ sea un grupo conmutativo respecto al parámetro t.

Para cada valor de $t \in \mathbb{R}$ ha quedado definida en $\Omega_f \subset \mathbb{R}^n$ una función $\varphi(t)$ que a cada punto $x \in \Omega_f$ asocia un punto en Ω_f. Llamémosle ahora π a esta función de las dos variables x, t, y llamémosle $\mathbb{X}$ al dominio Ω_f, que, como se recordará, habíamos convenido en adoptarlo como nuestro espacio.

En resumen, tenemos una función π que va de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio métrico localmente compacto

$$\pi : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{X},$$

y que cumple las siguientes propiedades:

(1) $\pi(x, 0) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{X}$, (axioma de identidad),

(2) $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2) \quad \forall\, x \in \mathbb{X},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, (axioma de grupo),

(3) π es continua con respecto a las dos variables.

<u>DEFINICIÓN</u>. Le llamaremos <u>SISTEMA DINÁMICO</u> a la terna $(\mathbb{X}, \mathbb{R}, \pi)$, donde $\mathbb{R}$ son los reales, $\pi : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ es una función que satisface las propiedades (1), (2), (3) anteriores y $\mathbb{X}$ es un espacio métrico localmente compacto.

Finalmente, formularemos las siguientes definiciones, suponiendo dado un sistema dinámico $(\mathbb{X}, \mathbb{R}, \pi)$:

<u>Definición</u>. Dado un punto $p \in \mathbb{X}$, los conjuntos siguientes

$$\gamma(p) = \{q : q = \pi(p,t), \ t \in \mathbb{R}\},$$

$$\gamma^+(p) = \{q : q = \pi(p,t), \ t \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\gamma^-(p) = \{q : q = \pi(p,t), \ t \in \mathbb{R}^-\},$$

se llaman, respectivamente, la <u>trayectoria</u>, <u>semitrayectoria positiva</u> y <u>semitrayectoria negativa</u> de p, (o que pasa por p, o que se inicia en p).

APÉNDICE AL CAPÍTULO I.

En los libros de Teoría de las Ecuaciones Diferenciales, (ver, por ejemplo, [2], [3], [4], [5], [6]), se demuestran los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones a una ecuación diferencial ordinaria. El siguiente puede ser considerado el teorema fundamental:

Teorema. Sea Ω un dominio contenido en $\mathbb{R}^n$, sea $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 (continuamente diferenciable) y sea $x_0 \in \Omega$. Entonces existe un número real $\alpha > 0$ y una única solución

$$\varphi(t): (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}^n$$

de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

que satisface la condición inicial

$$\varphi(0) = x_0.$$

Nota. Que una función $\varphi(t): (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}^n$ sea solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, significa que

(i) $\varphi(t)$ es diferenciable;

(ii) $\varphi(t) \in \Omega$

(iii) $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$

$\forall\ t \in (-\alpha, \alpha)$.

En ocasiones es conveniente considerar la siguiente versión del teorema de existencia y unicidad, la cual es un poco más fuerte, ya que existen funciones que satisfacen la hipótesis de esta nueva versión, pero que no son de clase C^1.

Teorema. Sea Ω un dominio contenido en $\mathbb{R}^n$, sea $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz en Ω, (ver nota abajo), y sea $x_0 \in \Omega$. Entonces existe un número real $\alpha > 0$ y una única solución

$$\varphi(t) : (-\alpha, \alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

que satisface la condición

$$\varphi(0) = x_0 .$$

NOTA. Una función $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente de Lipschitz en Ω, si cada punto de Ω tiene una vecindad Ω_0 tal que existe una constante K tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq K \| x - y \|$$

para cualesquiera x, y en Ω_0.

<u>Proposición.</u> Sea Ω un abierto y conexo contenido en $\mathbb{R}^n$. Si $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface una condición de Lipschitz con constante K en Ω, esto es, $\|f(x)-f(y)\| \leq K\|x-y\|$ para cualesquiera x, y en Ω, entonces

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+\|f(x)\|}$$

satisface una condición de Lipschitz en Ω (con constante $M = 2K$).

<u>Demostración.</u> Sean $x, y \in \Omega$.

$$\|g(x)-g(y)\| = \left\| \frac{f(x)}{1+\|f(x)\|} - \frac{f(y)}{1+\|f(y)\|} \right\| =$$

$$= \frac{\| f(x) - f(y) + f(x)\,\|f(y)\| - f(y)\,\|f(x)\| \|}{[1+\|f(x)\|]\;[1+\|f(y)\|]}$$

$$\frac{\| f(x)-f(y) + f(x)\,\|f(y)\| - f(y)\,\|f(y)\| + f(y)\,\|f(y)\| - f(y)\,\|f(x)\| \|}{[1+\|f(x)\|]\;[1+\|f(y)\|]}$$

aplicando la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\|g(x)-g(y)\| \leq$$

$$\leq \frac{\|f(x)-f(y)\| \cdot [1+\|f(y)\|] + \|f(y)\| \cdot \big| \|f(y)\| - \|f(x)\| \big|}{[1+\|f(x)\|]\;[1+\|f(y)\|]}$$

$$\leq \|f(x)-f(y)\| + \big| \|f(y)\| - \|f(x)\| \big|$$

$$\leq \|f(x)-f(y)\| + \|f(y)-f(x)\| \leq 2K\|x-y\|.$$

CAPITULO II

ATRACTORES

INTRODUCCIÓN

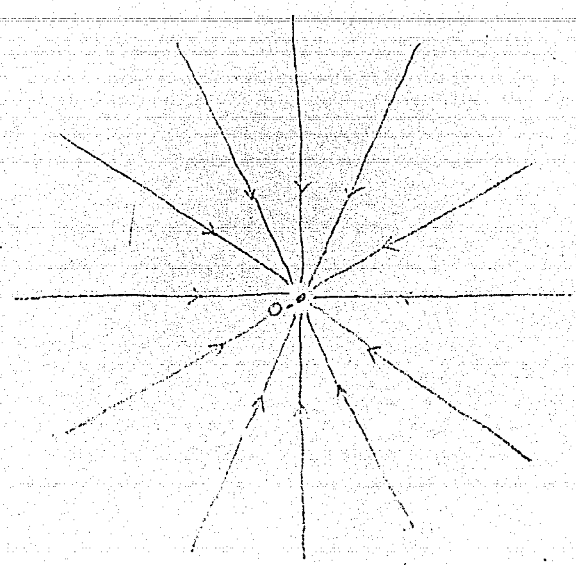
En el capítulo I, cuando hablamos de los conjuntos ω-límite (ver I. 1.), mencionamos que estos conjuntos son fuente de atracción. La palabra atracción o atractor, es usada aquí con el sentido de "algo que atrae". Sin embargo, como con todos los conceptos usados en las matemáticas, es necesario ponernos de acuerdo en qué es lo que esto significa exactamente. Lo haremos; pero antes examinemos algunos ejemplos.

§ 1. ATRACTOR

EJEMPLO 1. Veamos primero un ejemplo sencillo, en el que resaltan muy claramente las cualidades que queremos destacar. Nos referimos al ejemplo 4 del capítulo anterior

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = -y$$



Sabemos que, para cualquier punto p del plano, ocurre lo siguiente:

$$\Lambda^+(p) = \{0\}.$$

Es decir, el conjunto ω-límite de un punto arbitrario del plano, es el origen. Y ya sabemos que lo que esto significa es que, para cada punto del plano, el origen es "el destino final"; lo cual lo podemos expresar de la siguiente manera: para cualquier sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, con $t_n \to +\infty$, se cumple que

$$\pi(p, t_n) \to 0.$$

Claramente, esta es una situación en la que podemos decir que las trayectorias son atraídas. Están, para tiempos cada vez mayores, cada vez más y más cerca del origen.

Otra manera de describir la situación anterior es como sigue:

Si llamamos M al conjunto $\{0\}$, esto es, el conjunto cuyo único elemento es el punto crítico 0, entonces se cumple que

(i) para cada punto p del plano

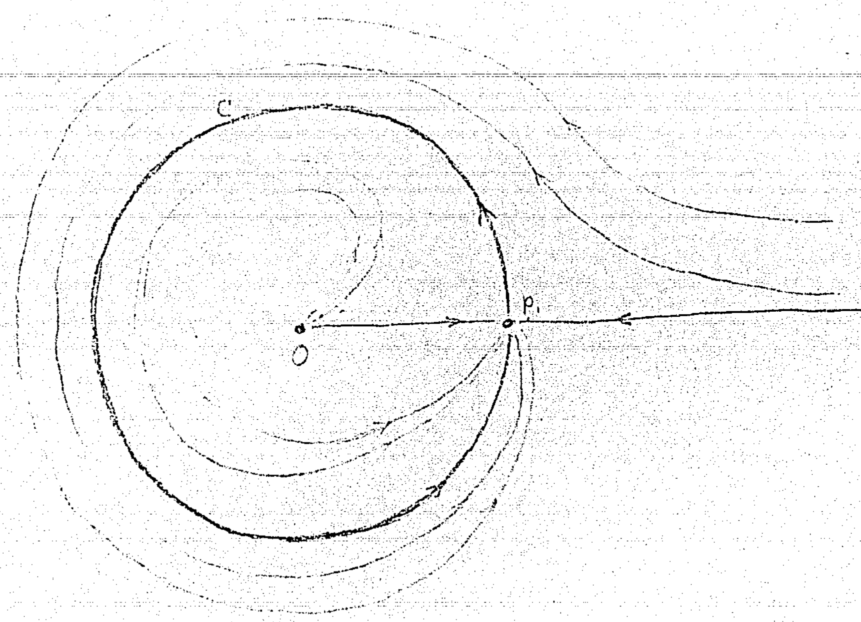
$$\Lambda^+(p) = M.$$

<u>Nota</u>. Esta relación se cumple para todos los puntos en una vecindad de M, (todo el plano).

<u>EJEMPLO 2</u>. Consideremos ahora el sistema dinámico plano definido por las ecuaciones diferenciales en coordenadas polares

$$\dot{r} = r(1-r)$$
$$\dot{\theta} = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Puede demostrarse que el retrato fase es como lo muestra la figura siguiente



Existen dos puntos críticos, que son el origen $(0,0)$ y el punto $p_1 = (1,0)$. Hay una trayectoria, C, que recorre el círculo unitario menos el punto p_1. Para cualquier punto sobre esta trayectoria, el punto p_1 es el conjunto ω-límite. Esto es, si $p \in C$, entonces, $\Lambda^+(p) = p_1$.

Además, para cualquier otro punto p del plano, distinto del origen, se tiene también

$$\Lambda^+(p) = p_1 .$$

Es decir, todas las trayectorias, con excepción de la que pasa por el origen, son atraídas por el punto crítico p_1, lo cual significa que el conjunto $M = \{p_1\}$ es un atractor.

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, se cumple que, denotando por M al conjunto $\{p_1\}$:

(i) para cada punto p del plano $(\neq (0,0))$

$$\Lambda^+(p) = M.$$

Nota. Esta relación se cumple para todos los puntos en una vecindad de M, (todo el plano menos el origen).

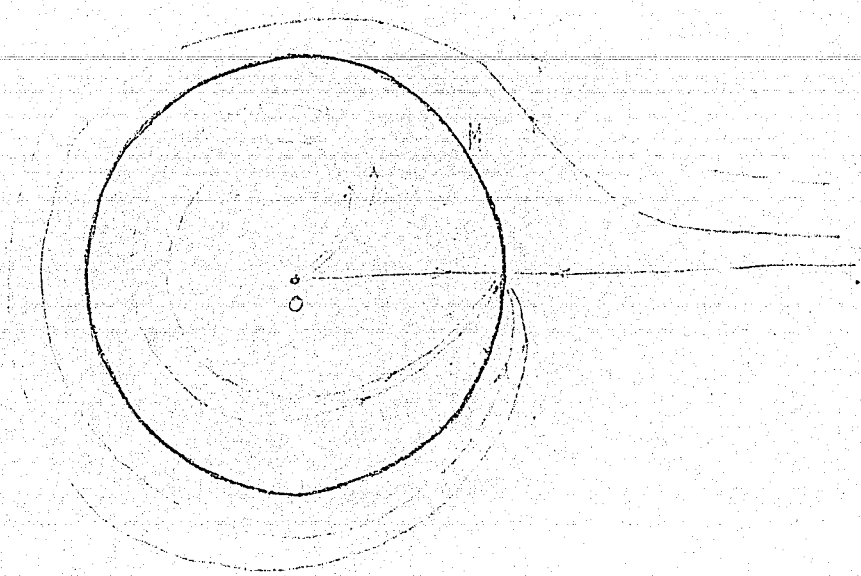
EJEMPLO 3. Ahora, observando el mismo diagrama del ejemplo anterior, no resulta forzado, antes bien, bastante natural, considerar el siguiente conjunto: el conjunto formado por la unión de la trayectoria C y la solución singular formada por el punto p_1; esto nos da el círculo unitario completo. Dicho de otro modo, M está formado por la unión de dos de las trayectorias destacadas del sistema:

$$M = C \cup \{p_1\}.$$

Así que, como se sabe, para cada punto p del plano $(\neq (0,0))$,

$$\Lambda^+(p) = \{p_1\},$$

lo cual quiere decir que el conjunto ω-límite de cada punto del plano distinto del origen, es parte del conjunto M.



Por lo tanto, este conjunto M tiene la propiedad de ser un atractor; efectivamente, las trayectorias son por él atraídas, pues sabemos que para cada punto p del plano distinto del origen

$$d(\Lambda^+(p), M) = 0.$$

Esto es, para ese punto p, si lo movemos sobre su trayectoria, para tiempos cada vez más y más grandes, está más y más cerca de M. La trayectoria está más y más cerca de M. Todas las trayectorias, excepto la del origen, son atraídas por el conjunto M.

La mejor manera de expresar esto de manera precisa es observando que,

(i) para cada punto p del plano $(\neq (0,0))$
$$\Lambda^+(p) \subset M.$$

<u>Nota</u> Esta relación se cumple para todos los puntos en una vecindad de M, (todo el plano menos el origen).

<u>Observación</u>. Antes de mostrar otro ejemplo, es conveniente observar que de las relaciones que han aparecido en los ejemplos anteriores, evidentemente, la que hace de M un atractor es

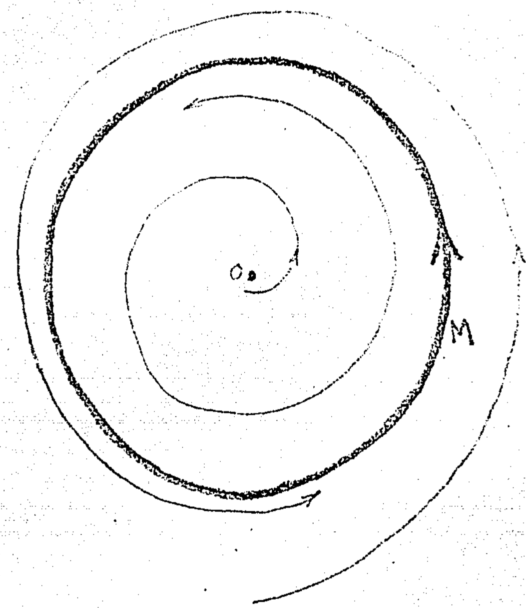
$$\Lambda^+(p) \subset M,$$

si esto se cumple para los puntos p en una vecindad de M. La igualdad no es necesaria, como se ve en el ejemplo 3.

<u>EJEMPLO 4</u>. Vamos a considerar el sistema dinámico definido por las siguientes ecuaciones diferenciales, y cuyas trayectorias se muestran a continuación

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$



Como se vio ya en el ejemplo 7 del capítulo I, el círculo unitario es una solución del sistema, y es una órbita cerrada. Será entonces de interés considerar ese conjunto e investigar sus propiedades de atracción.

Se vio también en aquel ejemplo que el círculo unitario es el conjunto ω-límite de cualquier punto del plano distinto del origen. Es decir, si $p \neq (0,0)$, entonces

$$\Lambda^+(p) = M.$$

En consecuencia, lo anterior muestra que si M es el círculo unitario, el conjunto M es un atractor, ya que se cumple que

$$(i) \quad \Lambda^+(p) \subset M, \quad \text{si} \quad p \neq (0,0).$$

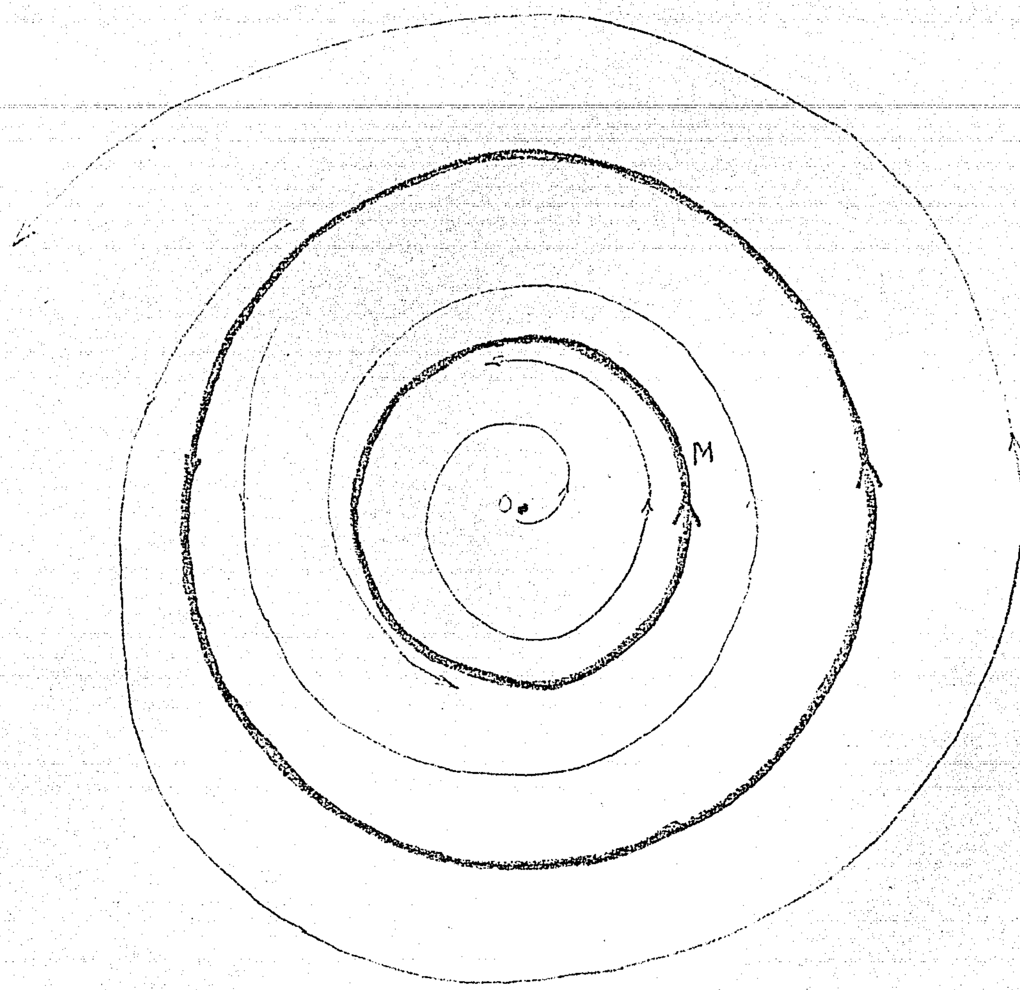
Tenemos, en consecuencia, un atractor que no contiene a ningún punto crítico.

A continuación queremos mostrar, con el siguiente ejemplo, que cuando estamos en presencia de un atractor, el conjunto de puntos que son atraídos no necesita siempre ser tan "grande" como en los ejemplos anteriores.

<u>EJEMPLO 5</u>. Sea el sistema dinámico definido por

$$\dot{r} = r(r-1)(r-2)$$
$$\dot{\theta} = 1.$$

Es fácil convencerse de que las trayectorias son como las de la siguiente figura



Si denotamos con M al círculo con centro en el origen y radio igual a la unidad, entonces, como se ve claramente en la figura, todas las trayectorias que se inician en puntos situados en el interior de la región contenida en el círculo de radio 2, son atraídas por M, con la única excepción de la trayectoria que pasa por el origen. Efectivamente, si p está en la región mencionada, entonces $\Lambda^+(p)$ es el círculo de radio 1, y en consecuencia, podemos escribir

$$(1) \quad \Lambda^+(p) \subset M \quad si \quad 0 < \|p\| < 2.$$

Obsérvese que el conjunto de puntos para los que vale $\Lambda^+(p) \subset M$, forma una vecindad de M.

Finalmente, ningún punto con radio mayor o igual que 2 es atraído por M.

Algunas de las observaciones anteriores debemos establecerlas explícitamente de la siguiente manera: cuando estamos en presencia de un atractor M, aparece siempre una región que es el conjunto de puntos que son atraídos por dicho atractor y tal región es una vecindad de M. Un punto p de esta región tiene entonces la siguiente propiedad

$$\Lambda^+(p) \subset M.$$

Ese conjunto de puntos, es decir, el conjunto de puntos que son atraídos por M, aparece así de manera natural. Le llamaremos la región de atracción de M. Como resumen, establecemos las siguientes definiciones.

<u>DEFINICIÓN</u>. Sea $(\underline{X}, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico. Sea $M \subset \underline{X}$ no vacío. El conjunto

$$A(M) = \{ p \in \underline{X} : \Lambda^+(p) \neq \phi \text{ y } \Lambda^+(p) \subset M \},$$

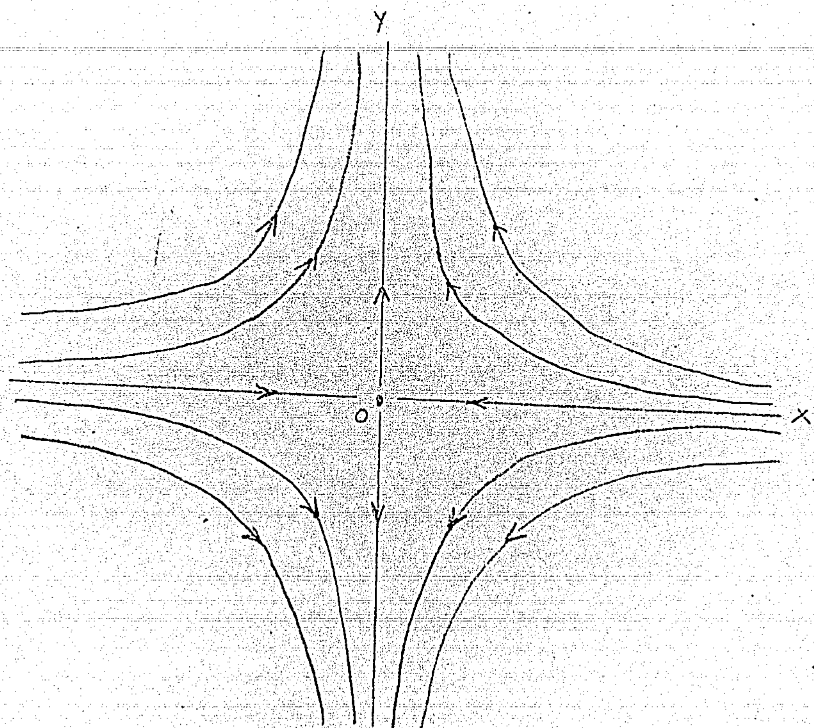
se llama la <u>región de atracción de M</u>.

Y ahora resulta muy claro el contenido y el por qué de la siguiente definición, pues refleja las propiedades que intuitivamente habíamos pedido para que un <u>conjunto</u> sea un atractor.

<u>DEFINICIÓN</u>. Se dice que un conjunto M es un <u>atractor</u> si A(M) es una vecindad de M.

A continuación vamos a mostrar que hay otros tipos de atracción. Pero antes es necesario mostrar un ejemplo en el que se hace claro por qué A(M) debe ser una vecindad de M, para que M sea llamado un atractor.

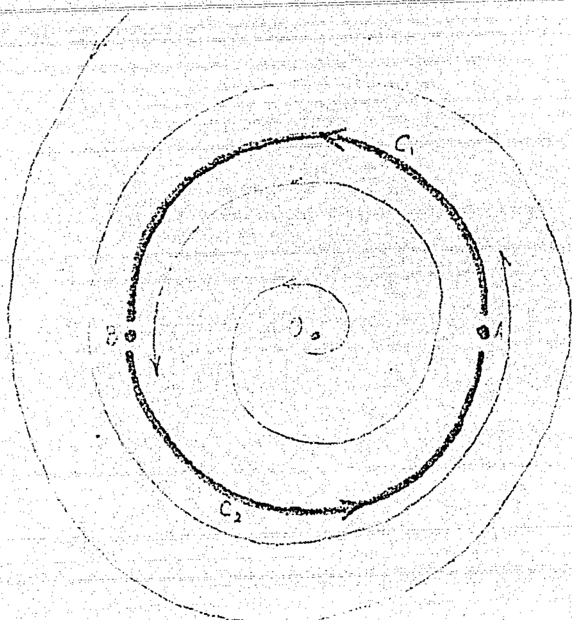
En la siguiente figura



el conjunto $\{0\}$ atrae a algunas trayectorias, pero $A(\{0\})$ no es una vecindad de $\{0\}$. De hecho $A(\{0\})=$ el eje x.
Claramente, en cualquier vecindad de $\{0\}$ existen puntos cuya trayectoria, una vez iniciada, se aleja para siempre de $\{0\}$.
En resumen, $A(\{0\})$ no es una vecindad de $\{0\}$, y $\{0\}$ no puede ser llamado un atractor.

§2. ATRACTOR DÉBIL.

EJEMPLO 6. Consideremos, sin escribir las ecuaciones diferenciales que lo definen (ver [1], página 20), el sistema cuyas trayectorias son las de la siguiente figura"



Consta de tres puntos críticos: el origen 0, y los puntos A y B sobre el círculo unitario; además de las trayectorias C_1 y C_2 también sobre el círculo unitario, y las trayectorias que espiralean como se ve en la figura.

Fácilmente se ve que si un punto, digamos p, está sobre C_1, entonces, $\Lambda^+(p) = \{B\}$. Y si el punto p está sobre C_2, entonces, $\Lambda^+(p) = \{A\}$.

Pues bien, se ve interesante considerar las propiedades de atracción de estos conjuntos ω-límite, es decir, los conjuntos $\{A\}$ y $\{B\}$. Llamemos M a la unión de ellos, es decir $M = \{A, B\}$.

Acabamos de decir que $\{A\}$ es el conjunto ω-límite de un punto cualquiera sobre C_2, y $\{B\}$ es el conjunto ω-límite de un punto cualquiera sobre C_1. Esto quiere decir que el conjunto M atrae a las trayectorias C_1 y C_2. Ahora preguntamos, ¿qué pasa con otros puntos que no están sobre $C_1 \cup C_2$? Tomemos p distinto del origen y tal que no está sobre el círculo unitario (al que designamos con C). Es fácil ver que para tal punto p

$$\Lambda^+(p) = C.$$

Esto significa que la trayectoria que pasa por p está, para tiempos cada vez mayores, más y más cerca del círculo unitario C.

Pero entonces, como el conjunto M está sobre C, quiere decir que tanto el punto A, como el punto B, son puntos ω-límite de p, y esto significa que existe una sucesión de tiempos positivos $\{t_n\}$ con $t_n \to +\infty$, tal que para esos tiempos la trayectoria que pasa por p está cada vez más cerca de M. Esto es

$$\lim_{n\to\infty} [d(\varphi(p, t_n), M)] = 0.$$

En este sentido es que podemos afirmar que la trayectoria que pasa por p es atraída por M. Sin embargo es un tipo de atracción diferente al que habíamos visto en las páginas anteriores, pues no ocurre, como antes, que para los puntos p en una vecindad del conjunto M, $\Lambda^+(p)$ esté contenido en M.

Lo que está ocurriendo es que la trayectoria de p se acerca, pero luego se aleja, vuelve a acercarse pero para nuevamente alejarse. Es decir, el conjunto M no es un atractor según la definición dada arriba, pero al fin y al cabo, atrae. Atrae, pero de un modo más débil. Con el conjunto ω-límite de p, si no se tiene la contención mencionada antes, lo que ocurre es que los dos conjuntos, el conjunto M en cuestión y el conjunto ω-límite de p no son ajenos. Es decir

$$\Lambda^+(p) \cap M \neq \phi.$$

En general, a un atractor de este tipo le llamaremos <u>atractor débil</u>. Inspirados en la forma como procedimos para definir <u>atractor</u> anteriormente y en el ejemplo anterior, formularemos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN. Sea $(X, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico. Sea $M \subset X$ no vacío. El conjunto

$$A_\omega(M) = \{ p \in X : \Lambda^+(p) \cap M \neq \phi \},$$

se llama la región de atracción débil de M.

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto M es un atractor débil si $A_\omega(M)$ es una vecindad de M.

EJEMPLO 7. En el mismo sistema dinámico del ejemplo 4 anterior, sea M el conjunto formado por un punto sobre el círculo unitario. Entonces M es un atractor débil, y

$$A_\omega(M) = \{ p : p \neq (0,0) \}.$$

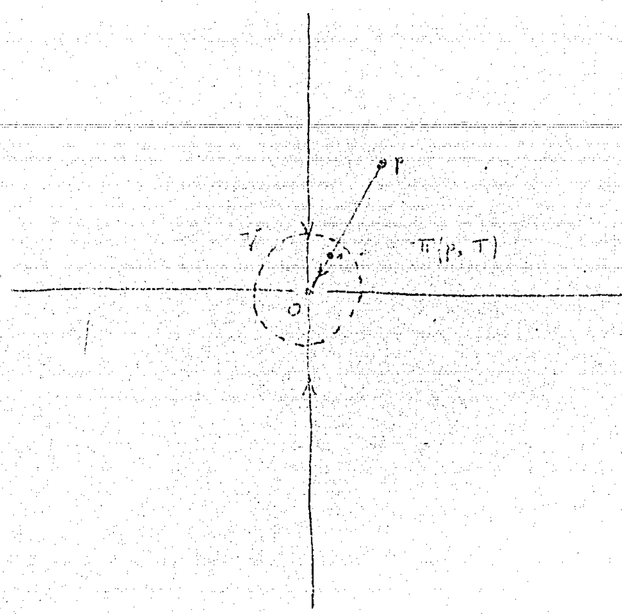
Nota. Se ve claramente de las definiciones que todo atractor es un atractor débil.

§3. ATRACTOR UNIFORME

Ahora, recordemos los ejemplos 1 y 2 de este capítulo. Si designamos con M_1 al conjunto formado por el origen en el primer ejemplo, y con M_2 al conjunto formado por $\{P_i\}$ en el segundo ejemplo, sabemos que M_1 y M_2 son atractores. Sin embargo, existe una diferencia esencial entre ellos. Para detectarla fijémonos no sólo en un punto que es atraído, sino también en los que le son vecinos.

La propiedad a la que nos referimos y que distingue a los dos atractores, la podríamos expresar, primero vagamente, de la siguiente manera: Si el punto p es atraído por M_1, entonces existe un T a partir del cual p va a estar cerca de M_1 y además lo mismo ocurre para todos los puntos suficientemente cercanos a p. Lo interesante aquí es: "y además lo mismo ocurre para todos los puntos suficientemente cercanos a p". Esta propiedad la tiene el atractor M_1, pero no la tiene el atractor M_2.

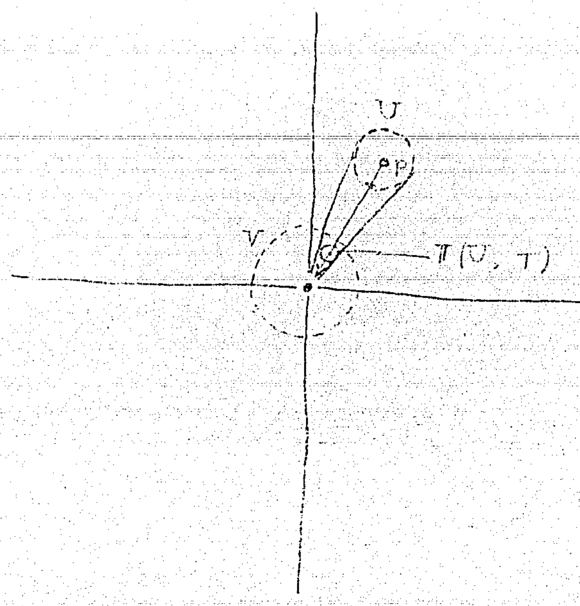
Efectivamente, tomemos un punto cualquiera p de los que son atraídos por M_1, el origen, en el ejemplo 1. Para cualquier vecindad V, por pequeña que sea, de M_1, existe T para el cual $\pi(p,T) \in V$ y a partir del tal T la trayectoria de p ya no se sale de V.



Matemáticamente esto lo expresamos de la manera que es usual, es decir: dada una vecindad arbitraria V de M, existe un T tal que

$$\pi(p, t) \in V \quad \forall\, t \geq T.$$

El "y además lo mismo ocurre para todos los puntos suficientemente cercanos a p", significa que todos los puntos cercanos a p, bajo la transformación π estarán dentro de V a partir de T, como se ve en la siguiente figura

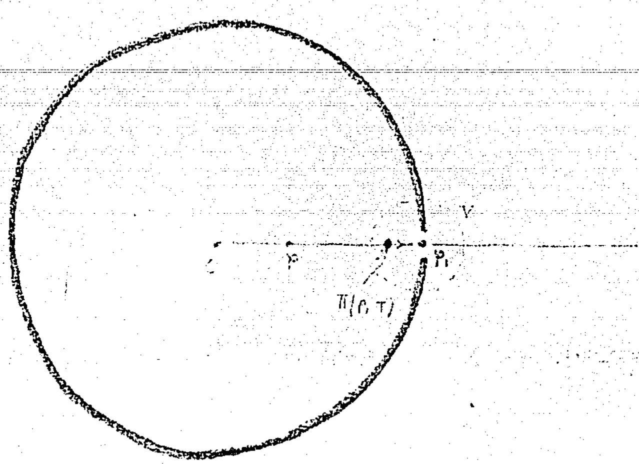


es decir, que existe una vecindad U de p tal que

$$\pi(U, t) \subset V \quad \forall\ t \geq T.$$

Para mostrar que esta propiedad no la tiene el atractor M_2, bastará tomar un punto $p = (r, 0)$, con $r > 0$. Dada una vecindad V de $M_2 = \{p_1\}$, sí es posible encontrar T tal que

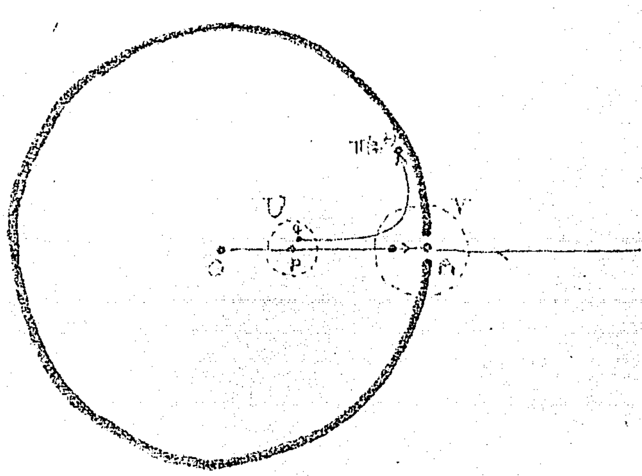
$$\pi(p, t) \in V \quad \forall\ t \geq T$$



pero no es posible encontrar U, vecindad de p tal que

$$\pi(U, t) \subset V \qquad \forall\ t \geq T,$$

ya que siempre es posible encontrar algún punto q en cualquier vecindad U de p tal que $\pi(q, t) \notin V$ para algún $t > T$, (y esto también para cualquier T fijo), como se ilustra en la figura siguiente



Pues bien, lo que hemos descubierto, al comparar estos dos ejemplos en la forma que lo hemos hecho y establecer su diferencia, es un nuevo tipo de atractor. A un atractor como $M_1 = \{0\}$ del primer ejemplo, lo llamaremos atractor uniforme. He aquí la definición formal

DEFINICIÓN. Al conjunto

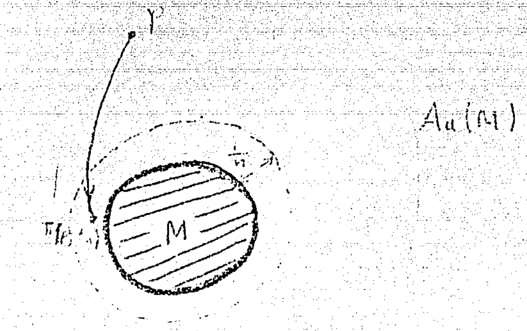
$$A_u(M) = \{p \in X : \text{para cualquier vecindad } V \text{ de } M \ \exists \text{ una vecindad } U \text{ de } p \text{ y un } T > 0 \text{ tales que } \pi(U, t) \subset V \ \forall t \geq T\},$$

se le llama la región de atracción uniforme de M.

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto M es un atractor uniforme si $A_u(M)$ es una vecindad de M.

EJEMPLO 8. El círculo unitario en el ejemplo 4 anterior es un atractor uniforme.

Ahora bien, mucho quisiéramos nosotros poder escribir una nota que dijera: "todo atractor uniforme es un atractor", como lo hicimos para atractores y atractores débiles anteriormente. Sin embargo la afirmación no es válida, al menos al nivel en que estamos en este momento.- Para hacerlo ver, imaginemos cómo sería la demostración:



Para cada punto $p \in Au(M)$ [recuérdese que el conjunto $Au(M)$ es una vecindad de M ya que por hipótesis M es un atractor uniforme], tomaríamos una sucesión de abiertos de la siguiente forma

$$B_{\frac{1}{n}}(M) = \{ q : d(q, M) < \tfrac{1}{n} \},$$

y correspondiendo a cada uno de estos abiertos un $t_n \in \mathbb{R}^+$ de tal manera que $t_n < t_{n+1}$, $t_n > n$, y además

$$\pi(p, t_n) \in B_{\frac{1}{n}}(M),$$

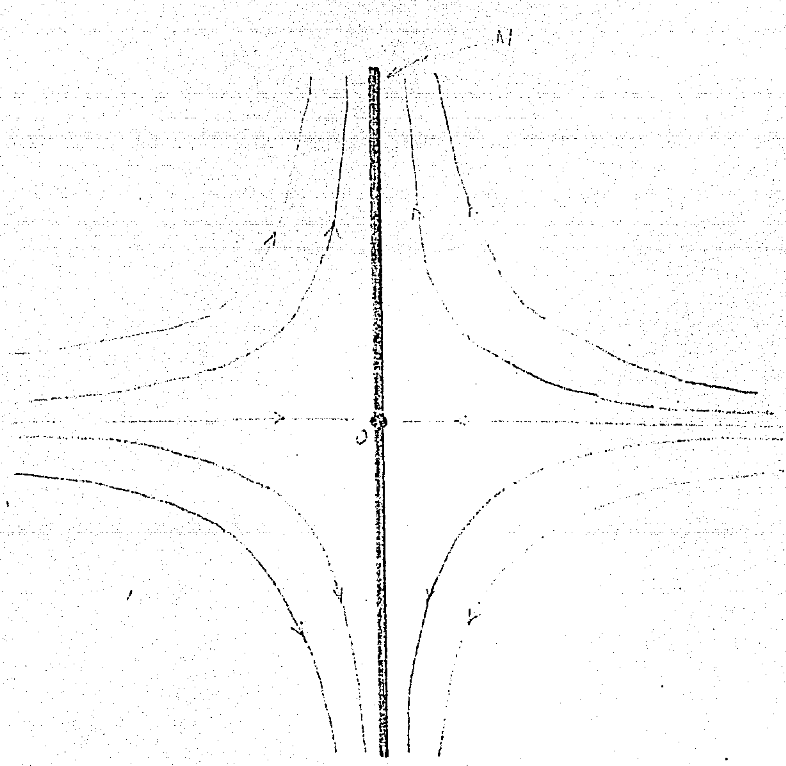
lo cual es posible porque M es un atractor uniforme. Esto nos daría una sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ con $t_n \to +\infty$, y lo que quisiéramos es que existiese $\lim_{n \to \infty} \pi(p, t_n)$ y además que este límite estuviese en M, es decir, quisiéramos poder asegurar

$$\Lambda^+(p) \subset M.$$

claramente se ve que se necesita que M sea compacto. Si no lo es, puede no ser cierta la afirmación. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 9. Es el mismo importante ejemplo que ya hemos mostrado anteriormente (ver I. Ej. 8):

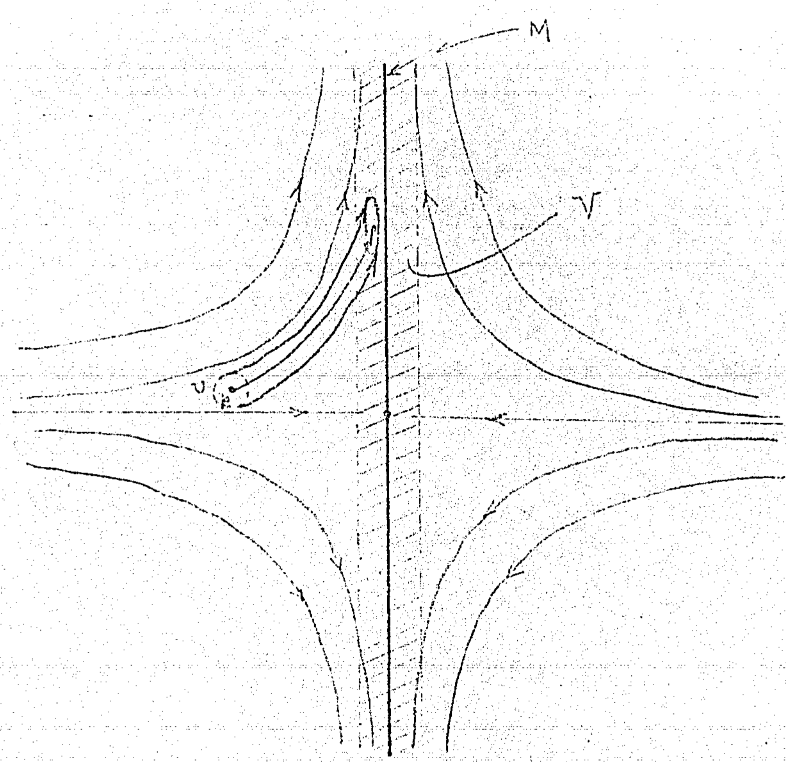
$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y$$



Habíamos dicho, en el ejemplo citado, que si llamamos M a toda la recta contenida en el eje "y", entonces este conjunto M "atrae" a todas las trayectorias, en el siguiente sentido: para cualquier punto p del plano, al tomar la semitrayectoria positiva $\gamma^+(p)$, después de un tiempo suficientemente grande, se encontrará arbitrariamente cerca de ese eje. Esto es, si designamos con M al eje "y"

$$\lim_{t \to +\infty} [d(\gamma^+(p), M)] = 0.$$

Ahora bien, si tratamos de checar la definición de atractor uniforme, vemos que sí se cumple



pues está claro que, si p es cualquier punto del plano

(i) para cualquier vecindad V de M existe una vecindad U de p y un $T>0$ tales que

$$\pi(U,t) \subset V \quad \forall\, t \geq T.$$

(ii) el conjunto de puntos p que satisfacen (i) es una vecindad de M (todo el plano).

De modo que, repetimos, M es un atractor uniforme. Sin embargo, M no es un atractor, pues no es cierto que el conjunto de puntos p para los cuales

$$\Lambda^+(p) \neq \phi \quad \text{y} \quad \Lambda^+(p) \subset M,$$

sea una vecindad de M, pues únicamente los puntos para los cuales vale lo anterior son aquellos de la forma $p=(x,0)$, pues entonces

$$\Lambda^+(p) = \{0\} \subset M,$$

pero la recta $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ no es una vecindad de M.

¿Qué es lo que falla aquí? ¿Por qué este atractor uniforme no es un atractor?

Ya lo habíamos dicho: porque M no es compacto.

Sin embargo, si M es compacto, entonces atractor será un concepto más amplio que el de atractor uniforme, y la idea de la demostración es la esbozada anteriormente.

PROPOSICIÓN Si M es un conjunto compacto que es un atractor uniforme, entonces es un atractor.

Todo esto nos invita a pensar, para evitar casos indeseables como el del ejemplo anterior, en que, al menos por el momento, debemos restringir nuestra atención a atractores M compactos. Así pues, en las definiciones para los diferentes tipos de atractores, dadas anteriormente, debemos agregar, M es un subconjunto compacto.

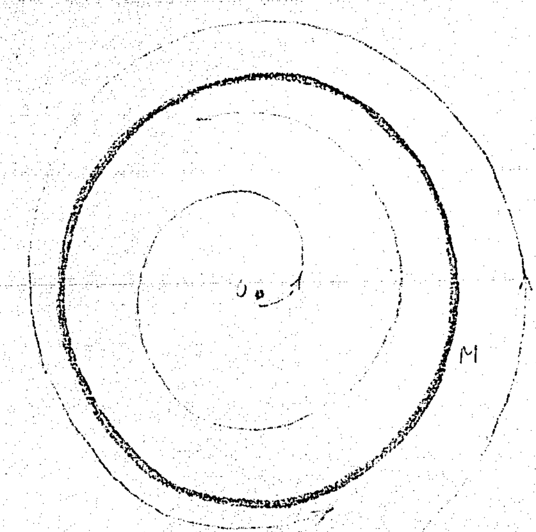
CAPÍTULO III

ESTABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Las propiedades de atracción que hemos estudiado en el capítulo anterior nos llevan a pensar que algunos conjuntos poseen ciertas otras propiedades, propiedades que ahora vamos a estudiar.

Tomemos, para ejemplificar, el sistema dinámico siguiente y que ya nos había aparecido en el capítulo II (Ej. 4)



Sabemos que el círculo unitario es un atractor, (de hecho es un atractor uniforme). Su región de atracción es

$$A(M) = \{ p : p \neq (0,0) \}.$$

Esto quiere decir que; la trayectoria que empieza en cualquier punto, con la sola excepción del origen, es atraída por este conjunto. En consecuencia, este conjunto tiene la siguiente propiedad: todas las trayectorias excepto la trayectoria que pasa por el origen, tienden a acercarse a él cuando el tiempo tiende a $+\infty$.

Ahora bien, como sabemos, (ver ejemplo 5, Cap. II), la región de atracción de un atractor no siempre es tan grande. Pero lo que sí es cierto es que si un conjunto M es un atractor, entonces su región de atracción es una vecindad de M. Esto significa que las trayectorias que se inician en esa vecindad se acercan al conjunto cuando el tiempo tiende a $+\infty$.

Ahora bien, esto lo podemos ver de una forma un poco diferente. Pensemos en que nos alejamos ligeramente del conjunto, pero nos alejamos sólo lo suficiente para permanecer dentro de la vecindad de M que es su región de atracción. Entonces, al tomar la trayectoria que se inicia en un punto "ligeramente alejado del conjunto", dicha trayectoria estará, después de un tiempo suficientemente grande, cerca del conjunto. Es ahora sencillo dar un paso adelante y decir simplemente, que "la trayectoria no se aleja" del conjunto M. Estaremos en presencia, aunque por ahora hablamos de ello vagamente, de un concepto extraordinariamente importante en toda la teoría de los sistemas dinámicos: el concepto de <u>estabilidad de un conjunto.</u>

Lo que nos proponemos en este capítulo es formular claramente este concepto y mostrar sus relaciones con los conceptos anteriores.

El problema de la estabilidad aparece en la práctica vinculado a una gran cantidad de problemas de electrónica, de ingeniería, de física, de teoría de control, de química, etc., que a su vez aparecen descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales. Estos sistemas tienen siempre una infinidad de soluciones. Para determinar una de ellas es necesario fijar unas condiciones iniciales. Cada solución describirá un comportamiento del sistema físico en estudio.

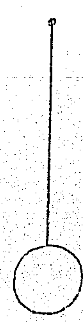
Si queremos que el sistema físico marche, cuando el tiempo corre, de acuerdo a una cierta solución, bastará colocarlo inicialmente, bajo las condiciones adecuadas. Sin embargo, en la práctica, esto no es posible, ya sea por errores inevitables en las mediciones, o porque los factores a tomarse en cuenta son tantos, que no es posible en la práctica considerarlos a todos.

Muy conveniente será, por lo tanto, saber que si partimos de condiciones iniciales cercanas a las adecuadas, el sistema físico marchará con un comportamiento cercano al que a nosotros nos interesa, y más conveniente aún, si se acerca a éste; si tiende a estabilizarse.

§1. EJEMPLOS.

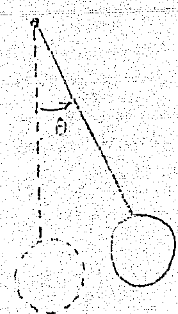
Ilustremos lo que queremos decir con unos ejemplos.

Primero consideremos el péndulo simple sin fricción. Y consideremos de él su posición más baja



Esta es una posición de equilibrio, porque si dejamos el péndulo en esa posición sin velocidad alguna, es decir, con velocidad cero, entonces va a quedarse ahí para siempre.

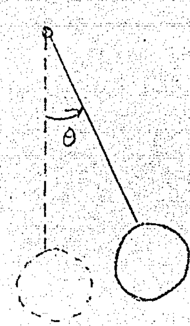
Ahora bien, si desplazamos el péndulo de esa posición un ángulo θ y lo soltamos ahí



entonces el péndulo va a ponerse a oscilar alrededor de la posición original siempre con la misma amplitud. Es decir va a moverse el péndulo, pero sin alejarse nunca de la posición más baja en más del ángulo θ. Un equilibrio de este tipo, se dice que es <u>estable</u>.

Consideremos ahora el péndulo simple con fricción. Este sistema físico, igual que el anterior, tiene las mismas dos posiciones de equilibrio. Una ya la mencionamos, es la posición más baja. La otra es la posición más alta del péndulo

Supongamos ahora, que de su posición más baja, el péndulo con fricción es desplazado un ángulo θ y soltado ahí



Al correr el tiempo sucederá que el péndulo se va a poner a oscilar alrededor de su posición más baja, pero, debido a la fuerza de fricción, la amplitud de esas oscilaciones va a hacerse cada vez más pequeña, de manera que cuando el tiempo se hace cada vez más y más grande las oscilaciones se hacen cada vez más y más pequeñas tendiendo a la posición más baja del péndulo. Por ello, un equilibrio de este tipo se llama <u>asintóticamente estable</u>.

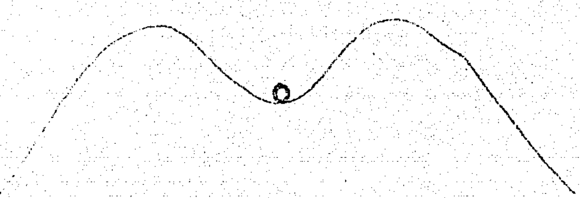
Finalmente, consideremos que de su posición más alta, el péndulo es desplazado un cierto ángulo θ.

Por pequeño que sea ese desplazamiento ocurre que cuando el tiempo transcurre el péndulo no se acercará en forma definitiva, es decir para todo tiempo mayor que un cierto tiempo τ, a la posición original de equilibrio, es decir, a la posición más alta del péndulo; más bien lo que ocurre es que, debido a la fricción, el péndulo se va a aproximar a la posición más baja del péndulo o sea que se va a alejar definitivamente de la posición original, la posición más alta.

Con el péndulo simple sin fricción, ocurre que al desplazarse el péndulo de su posición más alta, por pequeño que sea ese desplazamiento, el péndulo va a oscilar siempre con la misma amplitud, y esto quiere decir que siempre es posible encontrar una amplitud θ_1 y un tiempo t_1 de tal manera que en ese tiempo el péndulo va a estar alejado en más de θ_1 de la posición más alta.

A un equilibrio del tipo ejemplificado en cualquiera de los dos últimos casos mencionados, es decir, el caso de la posición más alta del péndulo ya sea con fricción o sin fricción, se le llama <u>equilibrio inestable</u>.

Una observación importante que debe hacerse ~~es~~ en el sentido siguiente: los conceptos anteriores son propiedades "locales". Lo que queremos decir queda claramente ejemplificado en la siguiente figura:

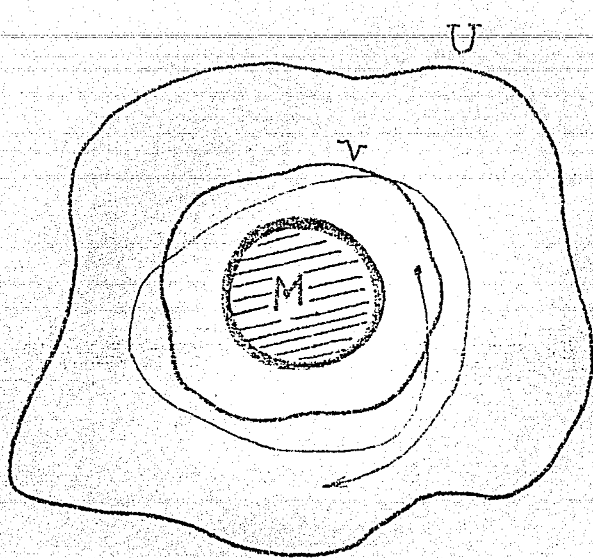


La figura representa una masa esférica sobre una superficie. En la posición indicada de la masa, el equilibrio es estable, y aún más, si tomamos en cuenta la ficción, es asintóticamente estable. Sin embargo, no a cualquier desviación del equilibrio, la esfera retornará al equilibrio; es necesario que la desviación sea adecuadamente pequeña, porque si es demasiado grande, se alejará del equilibrio.

§2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS. Las ideas anteriores queremos ahora expresarlas en nuestro lenguaje de sistemas dinámicos, al mismo tiempo que ser más formales matemáticamente. Consideremos, pues, un sistema dinámico $(\mathbb{X}, \mathbb{R}, \pi)$. Ya habíamos mostrado que al estudiar los subconjuntos de $\mathbb{X}$ que son atractores, esto nos conducía al problema de la estabilidad de subconjuntos de $\mathbb{X}$.

DEFINICIÓN. Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es estable, si dada una vecindad arbitraria U de M, existe una vecindad V de M tal que la trayectoria que parte de cualquier punto de V, no se sale nunca de U.

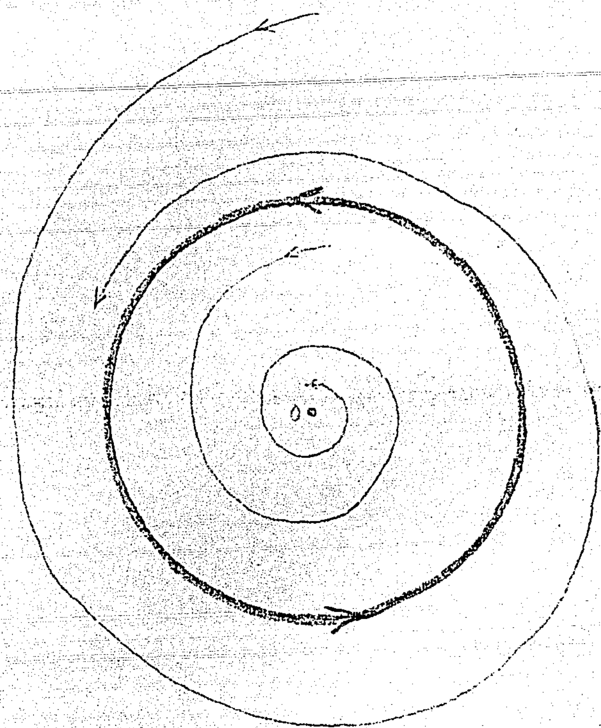
Gráficamente, esta definición puede ilustrarse con el siguiente esquema



Esto mismo, con otras palabras, podría expresarse de la siguiente manera:

M es <u>estable</u> si dada una vecindad arbitraria U de M, existe una vecindad V de M tal que si $p \in V$, entonces $\pi(p,t) \in U \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

<u>EJEMPLO 1</u> Para ejemplificar, tomemos el sistema dinámico cuyas trayectorias se muestran en la siguiente figura

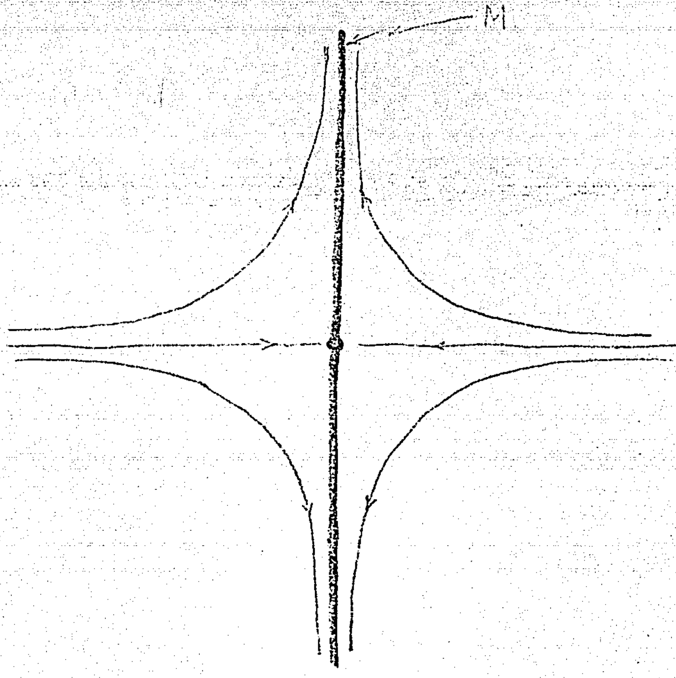


Tomemos a M como el conjunto cuyo único elemento es el origen

$$M = \{0\}.$$

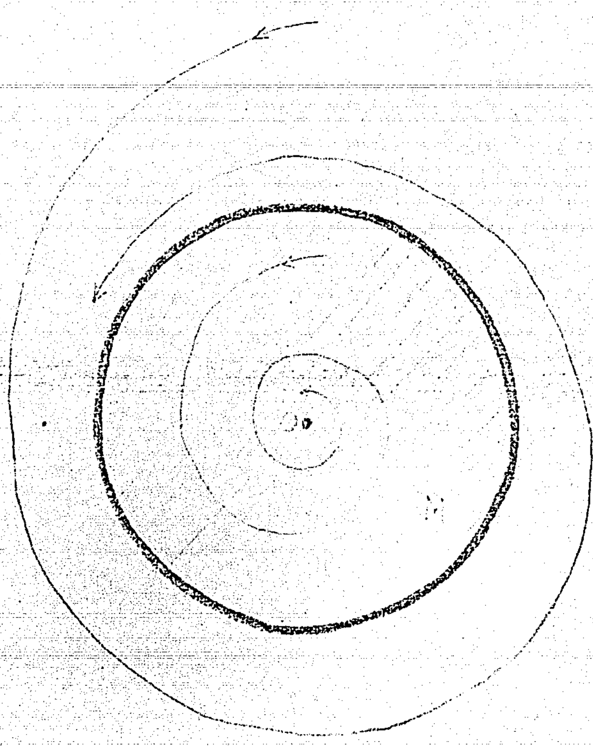
Evidentemente es estable, ya que para cualquier vecindad U de M, siempre podemos encontrar una vecindad $V \subset U$ (por ejemplo, una bola con centro en el origen y radio suficientemente pequeño) de manera que la trayectoria que empiece en cualquier punto de V no se salga nunca de U.

EJEMPLO 2. Un interesante ejemplo de un conjunto estable que no es acotado es el proporcionado por la recta M de la siguiente figura



Estos dos últimos ejemplos han mostrado casos de conjuntos estables que son conjuntos cerrados, el siguiente ejemplo hace ver que un conjunto abierto puede también ser estable.

EJEMPLO 3. Tomemos a M como el interior del círculo unitario en el sistema dinámico del anterior ejemplo 1



Claramente este conjunto abierto, (el interior del círculo unitario) es estable, pues dada una vecindad arbitraria U de M, existe una vecindad V de M tal que si $p \in V$, entonces $\pi(p,t) \in U \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$.

Hasta aquí, por ahora, los ejemplos. Lo que a continuación vamos a mostrar es cómo podemos llegar a una definición alternativa de estabilidad.

§3. ESTABILIDAD Y CONJUNTOS INVARIANTES. Supongamos que un conjunto M es estable. Sean U y V las vecindades de M de la definición, y consideremos el conjunto

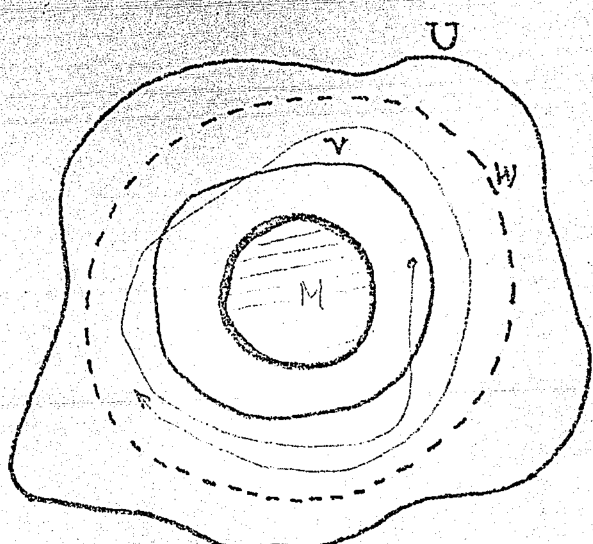
$$W = \{ q \in X : q = \pi(p,t) \text{ con } p \in V,\ t \in \mathbb{R}^+ \}$$

Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

(1) $W \subset U$

(2) Si $p \in W$, entonces $\pi(p,t) \in W \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$

(3) W es una vecindad de M.



Dos cosas son las que queremos aquí destacar:

Primera. Si para un conjunto $M \subset X$ ocurre que, dada cualquier vecindad U de M existe un conjunto W con las propiedades (1), (2), (3) anteriores, entonces M es estable. Para demostrarlo bastaría tomar V (de la definición) = W.

Segunda En general, conjuntos con la propiedad (2) son extraordinariamente importantes en la teoría de los sistemas dinámicos. Lo podemos decir de la siguiente manera: Un conjunto arbitrario $U \subset X$ tiene la propiedad (2) si para cualquier $p \in U$ y $t \in \mathbb{R}^+$, $\pi(p,t) \in U$; es decir, la semitrayectoria positiva de x está contenida en U mismo. Un conjunto con esta propiedad lo llamaremos positivamente invariante.

Podemos entonces dar la siguiente definición alternativa de estabilidad:

Un conjunto M es estable si cualquier vecindad U de M contiene una vecindad V de M positivamente invariante.

Continuemos ahora con la digresión en nuestra segunda observación anterior, ya que ha sido motivada en forma tan natural, y además es importante.

DEFINICIÓN. Diremos que un conjunto $U \subset X$ es invariante, si para cualesquier $p \in U$, $t \in \mathbb{R}$, $\pi(p,t) \in U$;

negativamente invariante si vale lo anterior con $\mathbb{R}$ reemplazado por $\mathbb{R}^-$;

<u>positivamente invariante</u> si vale lo anterior con $\mathbb{R}$ reemplazado por $\mathbb{R}^+$.

§4. <u>PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS INVARIANTES</u>. Mencionemos algunas propiedades importantes acerca de la invariancia de los conjuntos:

1. Sea $\{U_i\}$ una colección de subconjuntos invariantes de X. Entonces la unión y la intersección son invariantes.

2. Si $U \subset X$ es invariante, entonces su cerradura $\overline{U}$ es también invariante.

3. Un conjunto $U \subset X$ es positivamente invariante si y sólo si el conjunto $X - U$ es negativamente invariante. Un conjunto U es invariante si y sólo si $X - U$ es invariante.

<u>DEMOSTRACIÓN DE 3.</u> Sea U positivamente invariante. Si $p \in X - U$ y $t \in \mathbb{R}^-$, entonces debemos demostrar que $\pi(p, t) \in X - U$. Supongamos que no. Entonces $\pi(p, t) \in U$ y puesto que $-t \in \mathbb{R}^+$ tendremos $\pi(\pi(p, t), -t) = \pi(p, t - t) = \pi(p, 0) = p \in U$, por la invariancia positiva de U. Esta contradicción muestra que $X - U$ es negativamente invariante. El recíproco se prueba de manera enteramente similar. Supongamos ahora que U es invariante. Queremos demostrar que su complemento es tambien

invariante. Si no lo fuera existirían $p \in X - U$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $\pi(p,t) \in U$. Ahora, $-t \in \mathbb{R}$ y, por la invariancia de U: $\pi(\pi(p,t),-t) = p \in U$. Esta contradicción demuestra completamente 3. //

4. Un conjunto U es invariante si y sólo si es tanto positiva como negativamente invariante.

Terminamos esta sección mencionando las propiedades de invariancia de los conjuntos $\gamma(p)$, $\gamma^+(p)$ y $\gamma^-(p)$.

Los conjuntos $\gamma(p)$, $\gamma^+(p)$, $\gamma^-(p)$ son, respectivamente, invariante, positivamente invariante y negativamente invariante. Lo mismo vale para $\gamma(M)$, $\gamma^+(M)$ y $\gamma^-(M)$, donde M es un conjunto contenido en X. De aquí surge de inmediato la siguiente caracterización de invariancia:

Un conjunto $M \subset X$ es invariante, positivamente invariante o negativamente invariante si y sólo si, respectivamente, $\gamma(M) = M$, $\gamma^+(M) = M$, $\gamma^-(M) = M$.

§ 5. CARACTERIZACIÓN DE LA ESTABILIDAD.

5.1 LA PRIMERA PROLONGACION POSITIVA. La forma tan natural en que nos surgió el problema de la invariancia casi nos haría pensar que fue un accidente y que el abordarlo nos haría desviar el camino o nos apartaría del tema que estábamos tratando, el de la estabilidad. Sin embargo, agarramos el toro por los cuernos, abordamos el tema de la invariancia y obtuvimos algunas conclusiones útiles. Pero no sólo eso, sino que ahora resulta que la caracterización que se hizo para que M sea invariante es altamente sugestiva al volver a abordar el tema de la estabilidad.

Recordemos, en primer lugar, que al hablar de estabilidad, lo hacemos considerando no intervalos de tiempo finitos, sino intervalos de tiempo infinitamente grandes. Por ello nos conviene destacar la caracterización para que un conjunto $M \subset X$ sea positivamente invariante:

$$\gamma^+(M) = M.$$

Esto, dicho en otras palabras, nos dice que para todo punto $p \in M$ y cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ ocurre que $\pi(p,t) \in M$.

Así que M es positivamente invariante si y sólo si, la semitrayectoria positiva que empieza en un punto de M está totalmente contenida en M. Osea que la imagen de M bajo la transformación γ^+, es M mismo

$$\gamma^+(M) = M.$$

Observemos que si un conjunto positivamente invariante M es compacto, entonces, como para todo $p \in M$, $\gamma^+(p) \subset M$, se sigue que el conjunto ω-límite de p va a estar contenido en M.

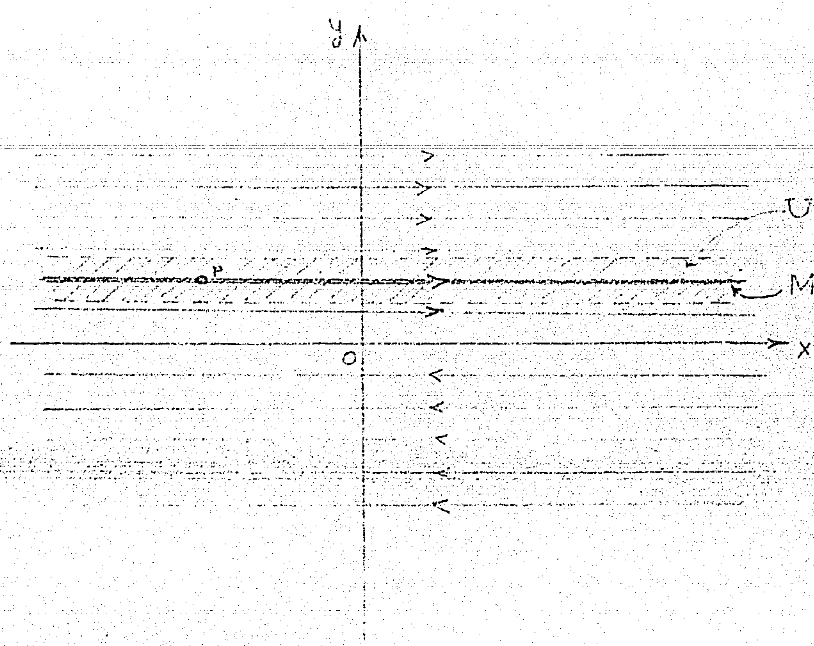
Quizás sea conveniente en este momento dar algún ejemplo.

EJEMPLO 4. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 0$$

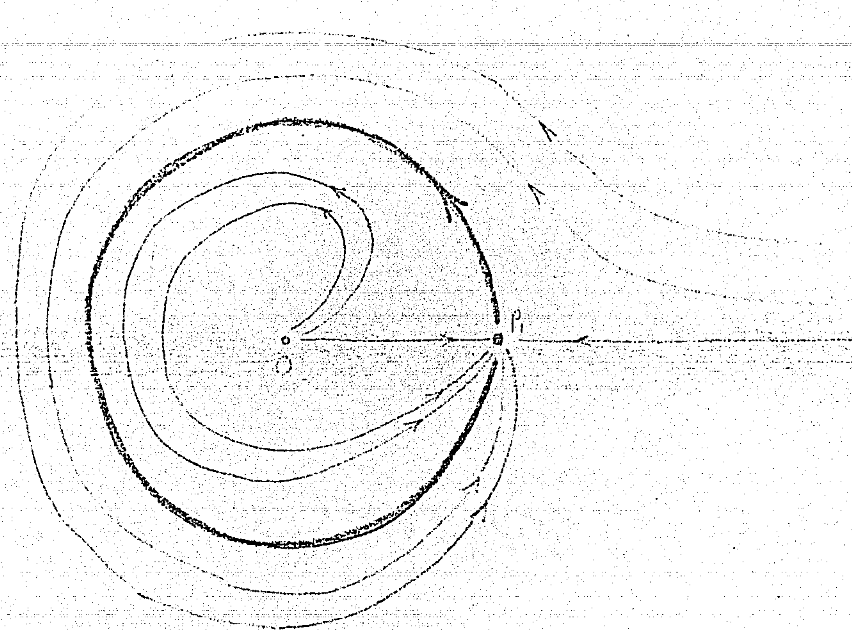
cuyas trayectorias son rectas como se muestra en la siguiente figura



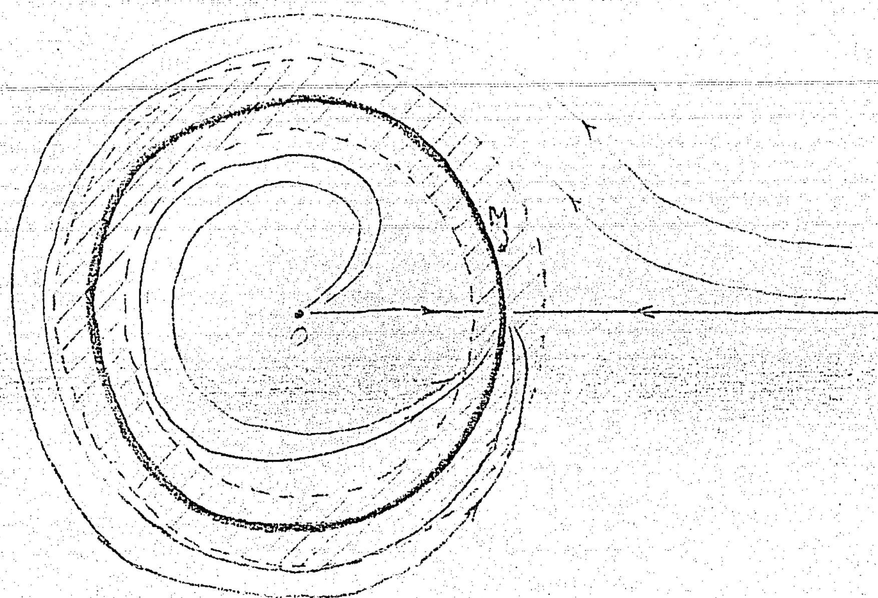
Sea M el conjunto de puntos que está formado por la trayectoria que pasa por p, es decir $M = \gamma(p)$. Entonces, este conjunto es invariante. Además es estable, porque siempre podemos encontrar una vecindad de M positivamente invariante.

EJEMPLO 5. Sea el sistema dinámico plano dado en coordenadas polares por las ecuaciones

$$\dot{r} = r(1-r)$$
$$\dot{\theta} = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

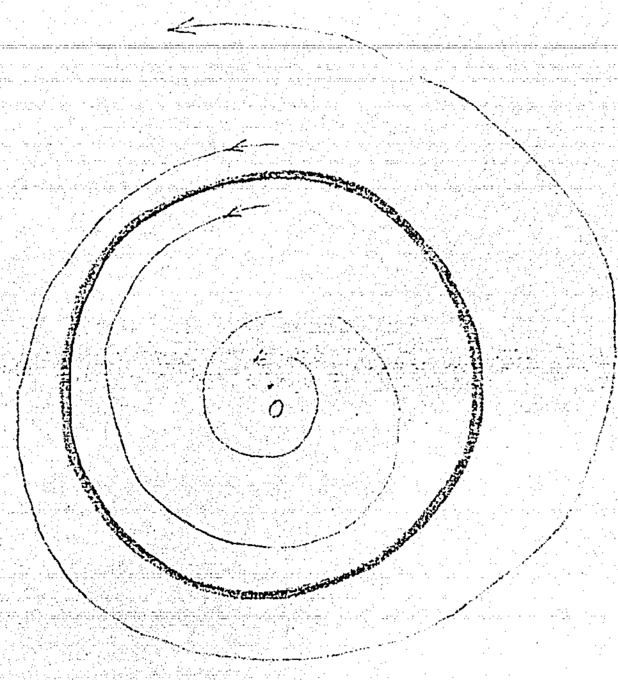


Sea ahora M el conjunto formado por el círculo unitario. Obviamente, si $p \in M$ y $t \in \mathbb{R}^+$, entonces $\pi(p,t) \in M$. Es decir, M es positivamente invariante, (de hecho es invariante). Otra manera de ver la invariancia positiva de M, es comprobar que efectivamente $\gamma^+(M) = M$. Se ve fácilmente, además, que si $p \in M$, entonces $\Lambda^+(p) \in M$; ($\Lambda^+(p) = p_1$ para cualquier $p \in M$). Por último, M es estable: cualquier vecindad de M es positivamente invariante, como se deja ver claramente en la siguiente figura



EJEMPLO 6 Tomemos ahora el sistema dinámico dado por el sistema diferencial

$$\dot{r} = r(r-1)$$
$$\dot{\theta} = 1 .$$



Sea otra vez M el círculo unitario. Se ve fácilmente que $\gamma^+(M) = M$. Lo cual, como se sabe, es condición necesaria y suficiente para que M sea positivamente invariante. También se puede ver fácilmente que $\Lambda^+(p) = M$, para cualquier $p \in M$.

Sin embargo M no es estable. Basta alejarse aunque sea un poquito de M, para que al seguir por la trayectoria correspondiente, nos alejemos cada vez más de M.

¿Qué es lo que falla aquí que hace que M no sea estable? Pues que puntos cercanos a M, siguiendo por su trayectoria correspondiente se alejan de M cuando el tiempo crece. Es decir, utilizando un lenguaje que ya habíamos usado anteriormente, el destino de puntos cercanos a M es distinto al destino de los puntos de M.

Esto quiere decir que para investigar estabilidad de un conjunto M, debemos no sólo investigar el destino de los puntos de M, sino además el destino final de los puntos que le son vecinos.

Esto no es nuevo para nosotros; ya lo habíamos hecho anteriormente, y es precisamente lo que nos sirve ahora, porque estabilidad significa que el empezar cerca implica quedar a la larga y para siempre cerca; es decir que los puntos que se encuentran cerca de un conjunto que es estable, al seguir por su trayectoria van a permanecer cerca del conjunto para todo tiempo t mayor que un cierto instante inicial t_0.

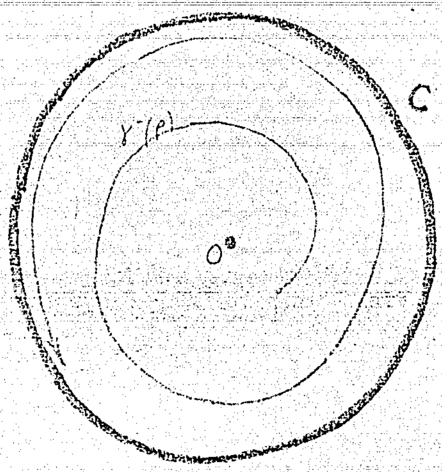
A pesar de lo insistentes, diremos una vez más que, para hablar de estabilidad debemos hablar no sólo del destino a lo largo de sus trayectorias de los puntos en consideración, sino que, junto con ellos es necesario tomar en cuenta el destino de los puntos que les son vecinos.

Ahora bien, hablar del destino (a tiempos finitos, positivos) de un punto p es hablar de su semitrayectoria positiva $\gamma^+(p)$, como ya lo hemos hecho anteriormente. El destino final, o sea el límite cuando el tiempo tiende a $+\infty$, es el conjunto ω-límite $\Lambda^+(p)$, que ya también hemos considerado. Considerar ambos conceptos simultáneamente no es otra cosa que la cerradura de la semitrayectoria positiva. En otras palabras, estamos afirmando que

$$\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \Lambda^+(p),$$

lo que, obviamente, nos da una descripción completa del destino del punto p.

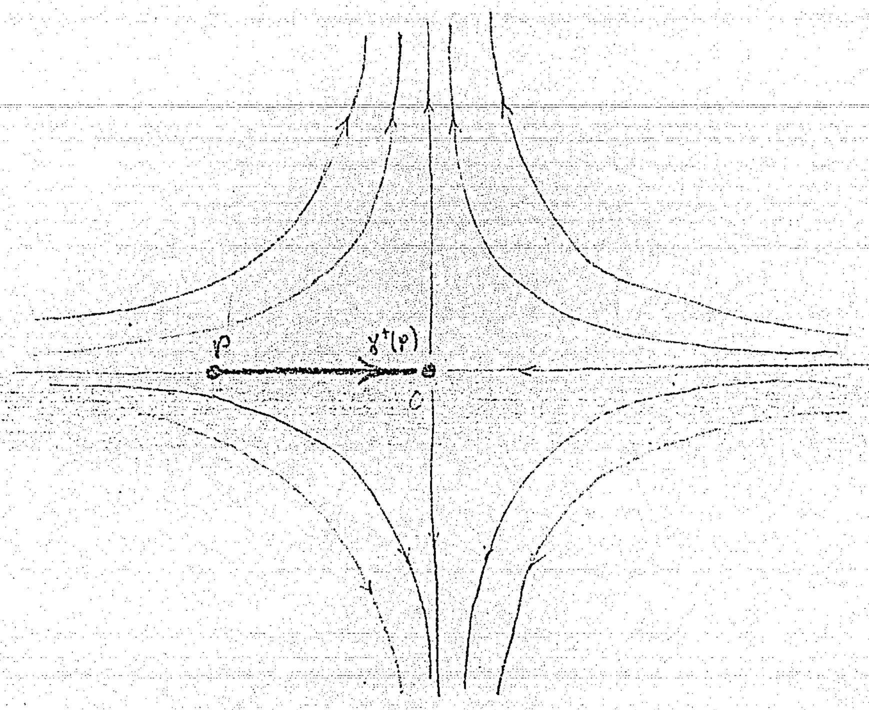
En el ejemplo de la siguiente figura, si tomamos un punto p dentro del círculo, (y p distinto del origen), entonces $\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \Lambda^+(p)$ es la semitrayectoria positiva de p, la cual se pega cada vez más y más al círculo unitario C, unión el propio círculo unitario,



o sea la semitrayectoria positiva de p unión el conjunto límite positivo de p

$$\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup C .$$

En el siguiente ejemplo, la cerradura de $\gamma^+(p)$ cuando p es un punto de la forma $p = (x, 0)$, se obtiene agregándole a la trayectoria $\gamma^+(p)$ el origen, ya que este último punto es el conjunto límite positivo de p



$$\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \{0\}.$$

Ahora bien, como estábamos diciendo, en relación a la estabilidad queremos considerar simultáneamente al destino de un punto p, el destino de los puntos que le son vecinos. Esto es, de puntos cercanos a p. Esto nos invita a pensar, en primer lugar, en las bolas con centro en p y con radio α (un real positivo)

$$S(p, \alpha) = \{q : d(p, q) < \alpha\}.$$

En segundo lugar, en el destino de estas bolas; es decir, de manera análoga a como consideramos el conjunto $\overline{\gamma^+(p)}$, podemos considerar el conjunto $\overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$, para un $\alpha > 0$. Esto nos describirá, junto con el comportamiento de p, el de todos los puntos que están en la bola de radio α y con centro en p. Pero lo que nos interesa es el comportamiento de los puntos que son verdaderamente cercanos a p. Para ello consideraremos el comportamiento de todas estas bolas para radios arbitrarios α, y fijaremos nuestra atención en lo que es común a todos esos comportamientos, es decir, consideraremos la intersección siguiente

$$\bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$$

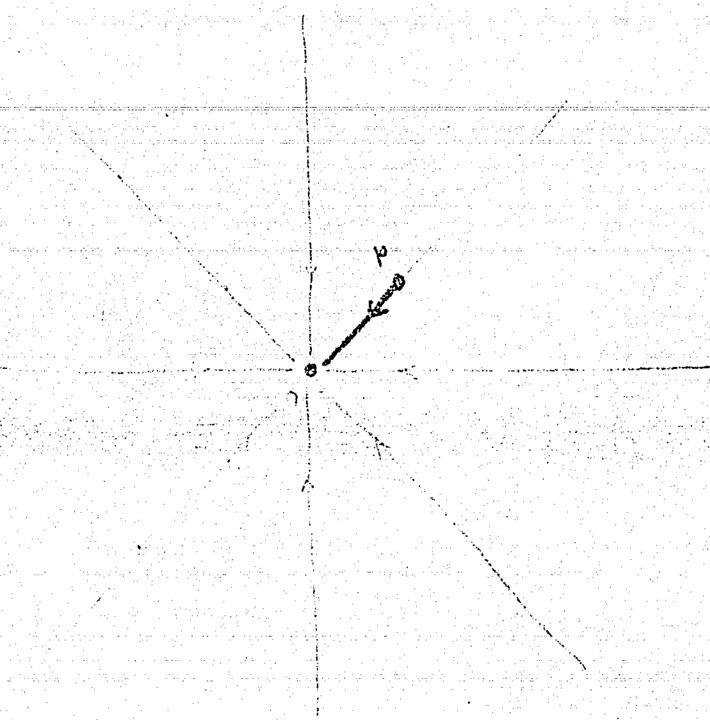
Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 7.

En el diagrama de la figura anterior

$$\bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = \gamma^+(p).$$

EJEMPLO 8. Invirtiendo las trayectorias:

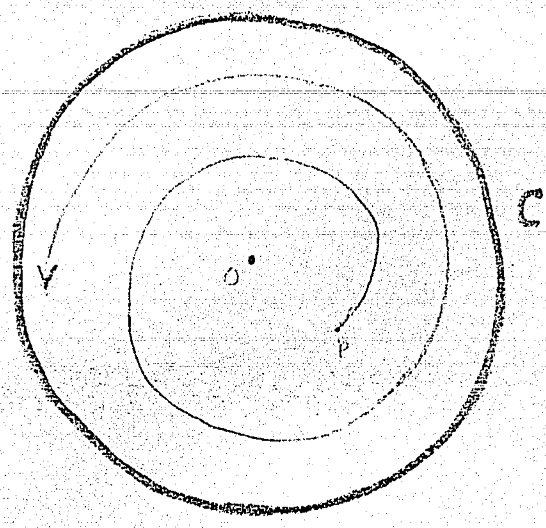


$$\bigcap_{a>0} \overline{\gamma^{+}(S(p,a))} = \overline{\gamma^{+}(p)} = \gamma^{+}(p) \cup \Lambda^{+}(p) = \gamma^{+}(p) \cup \{0\}.$$

EJEMPLO 9. En el sistema representado por el diagrama del ejemplo 8, tomando p como el origen:

$$\bigcap_{a>0} \overline{\gamma^{+}(S(0,a))} = \{0\}.$$

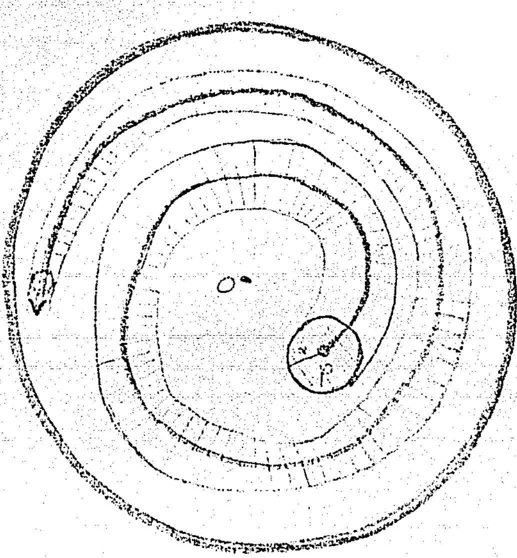
EJEMPLO 10. Tomemos otra vez el sistema dinámico considerado más arriba, y cuyo retrato fase se representa nuevamente en la siguiente figura



Para el punto p de la figura se tiene, en primer lugar, que:

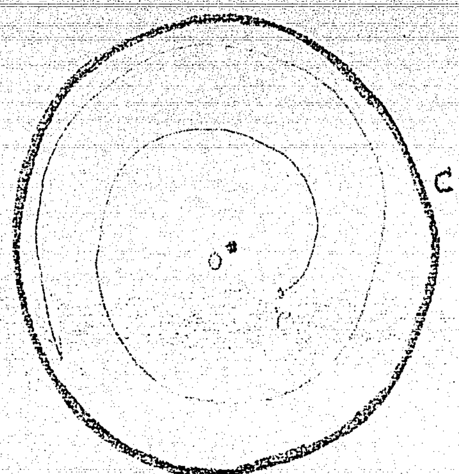
$$\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \Lambda^+(p) = \gamma^+(p) \cup C.$$

En seguida, lo que debemos considerar son las bolas con centro en p y radio α, y de esas bolas, $\overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$
su cerradura



Se ve que $\overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = \gamma^+(S(p,\alpha)) \cup C$.

Y finalmente, tomando la intersección sobre todas



las $\alpha > 0$, lo que queda para el punto p de la figura es

$$\bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = \gamma^+(p) \cup C ,$$

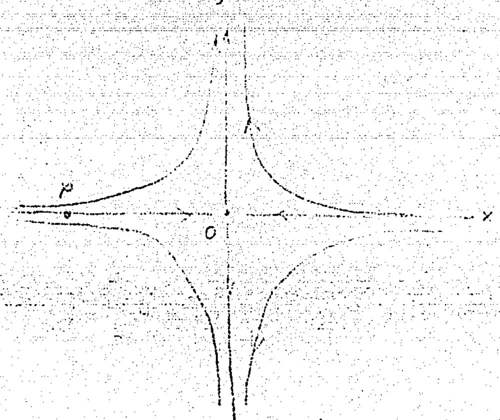
donde C es el círculo unitario, que, como ya habíamos señalado anteriormente, es el conjunto límite positivo $\Lambda^+(p)$ del punto p.

<u>EJEMPLO II.</u> Un ejemplo no trivial de este importante concepto que estamos estudiando, es el analizado por Poincaré y que queremos mostrar en forma detallada más bien geométricamente que analíticamente.

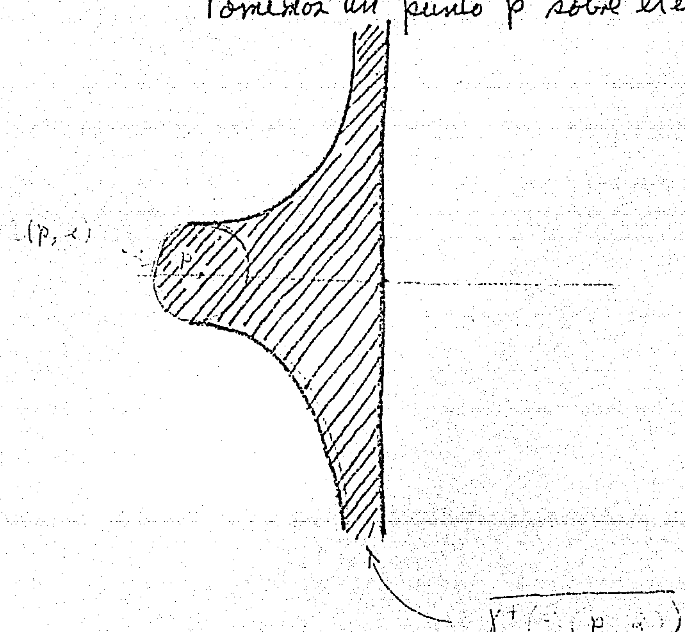
Sea el sistema dado por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = y$$

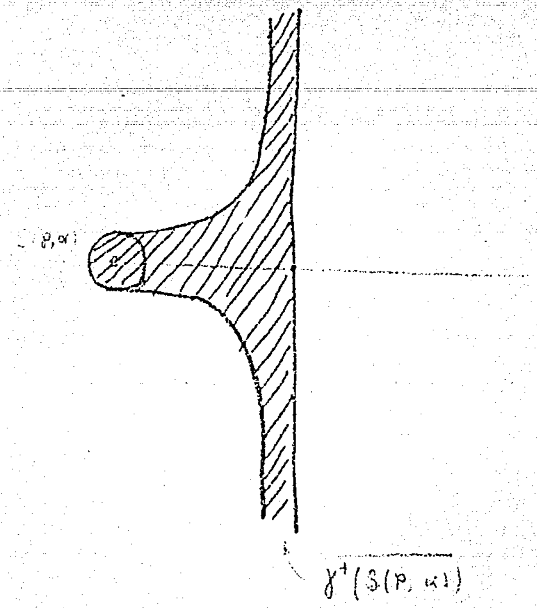
cuyo retrato fase es el siguiente

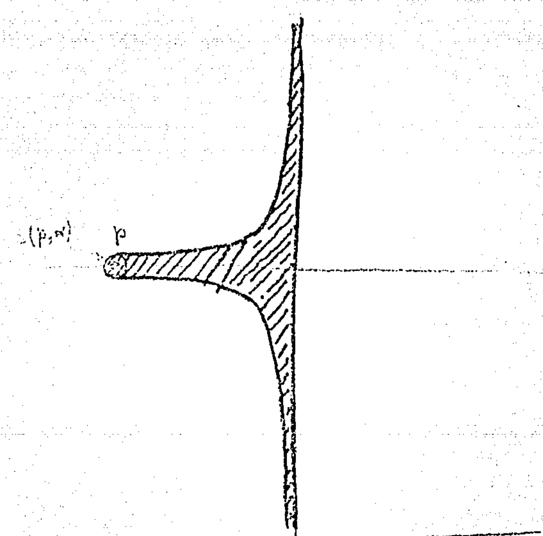


Tomemos un punto p sobre el eje "x", una vecindad de radio α, y, dejando correr el tiempo, observemos el destino de esta vecindad $S(p,\alpha)$:

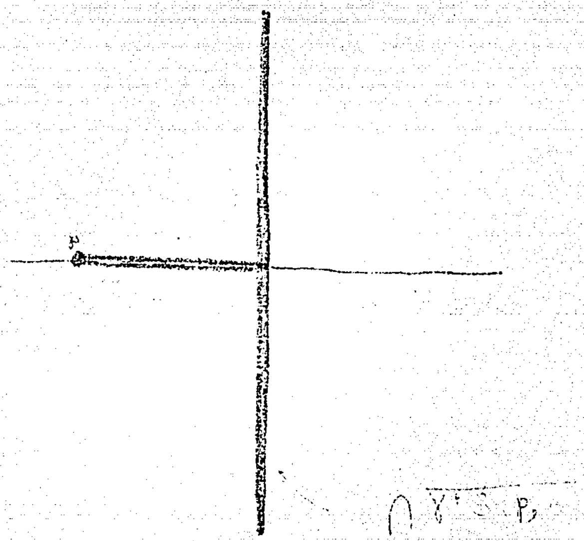


Considerando otros radios α, podremos tener las siguientes figuras





Y al tomar la intersección sobre todas las $\alpha > 0$:



La importancia de este conjunto $\bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$ para un punto p en un sistema dinámico arbitrario, ha quedado ya completamente evidente: es un conjunto que nos describe en forma completa no sólo el destino de p, sino también el destino de los puntos que le son vecinos. Y esto, como se recordará, es fundamental para la investigación de la estabilidad. Merece, en razón de ello, que se le ponga un nombre. Tradicionalmente se le llama la "primera prolongación positiva de p" y se le designa con el símbolo $D^+(p)$. Tenemos entonces la siguiente

<u>DEFINICIÓN.</u> Sean $(X, \mathbb{R}, \pi)$, un sistema dinámico, y un punto $p \in X$. Se llama la <u>primera prolongación positiva de p</u> al conjunto

$$D^+(p) = \bigcap_{a>0} \overline{\gamma^+(S(p,a))}.$$

La primera prolongación positiva es entonces una función que a cada punto $p \in X$ le asocia un subconjunto de X.

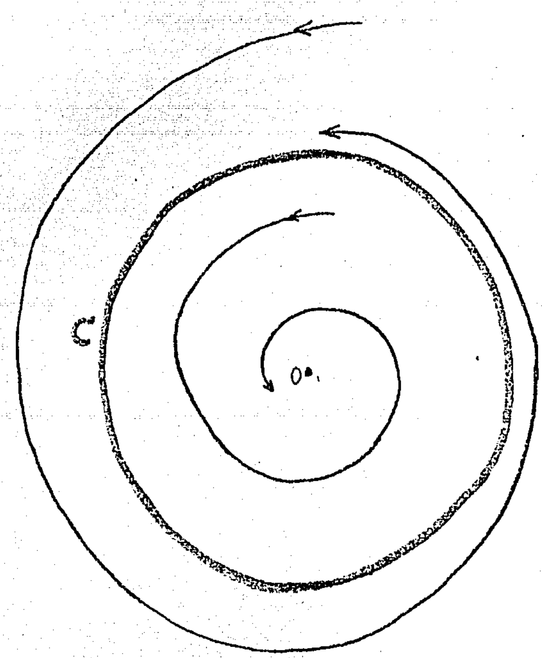
Y ahora, para un conjunto $M \subset X$, podemos definir su primera prolongación positiva de la siguiente manera

<u>DEFINICIÓN.</u> Sean $(X, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico y $M \subset X$. Se llama la <u>primera prolongación positiva de M</u> al conjunto

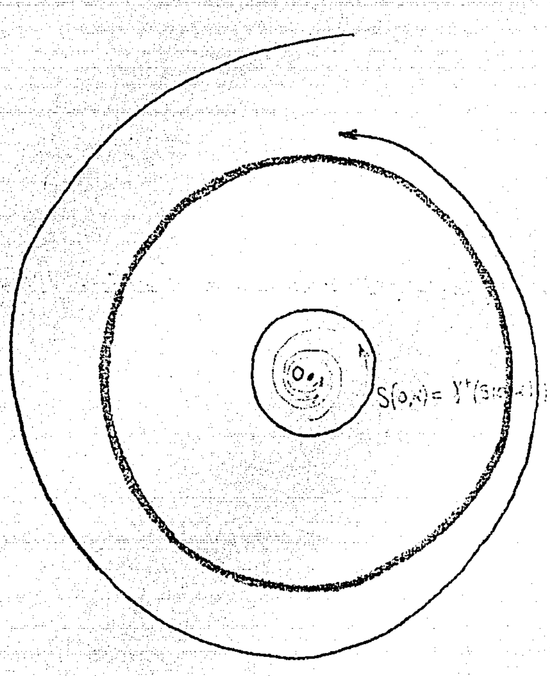
$$D^+(M) = \bigcup_{p \in M} D^+(p).$$

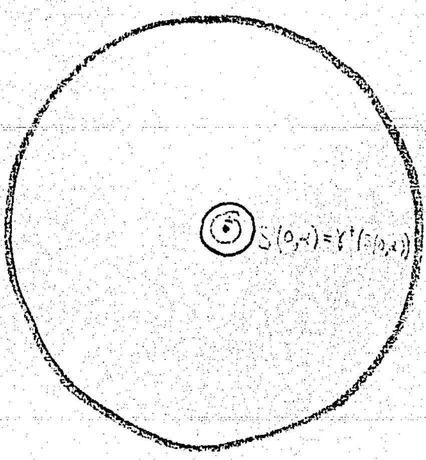
5.2 EJEMPLOS. De este importante concepto que acabamos de definir, veamos enseguida algunos ejemplos, sin olvidar que nuestro objetivo fundamental es el de la caracterización de la estabilidad de subconjuntos del espacio X. Trataremos, en consecuencia, de descubrir la relación entre $D^+(M)$ y la estabilidad o inestabilidad de M.

EJEMPLO 12. Consideremos el sistema dinámico cuyas trayectorias se describen en la siguiente figura



y tomemos al origen O, para investigar $D^+(O)$. Una bola de radio α alrededor de O se transforma en sí misma bajo la transformación γ^+ y la cerradura $\overline{\gamma^+(S(O,\alpha))}$ es la cerradura de la bola



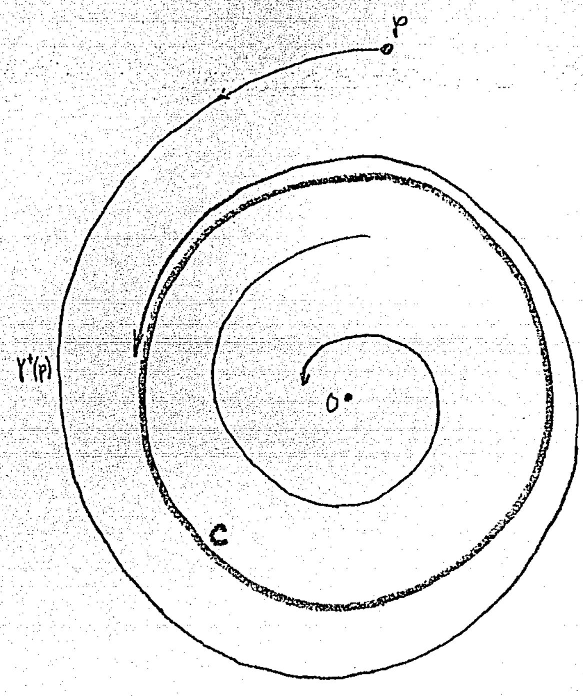


y al tomar la intersección sobre todas las $\alpha > 0$, lo que queda es únicamente el origen, es decir

$$D^+(0) = \bigcap_{\alpha > 0} \overline{\gamma^+(S(0,\alpha))} = \{0\}.$$

EJEMPLO 13. En el mismo sistema del ejemplo anterior sea p cualquier punto fuera del círculo unitario C, entonces, observemos, en primer lugar que

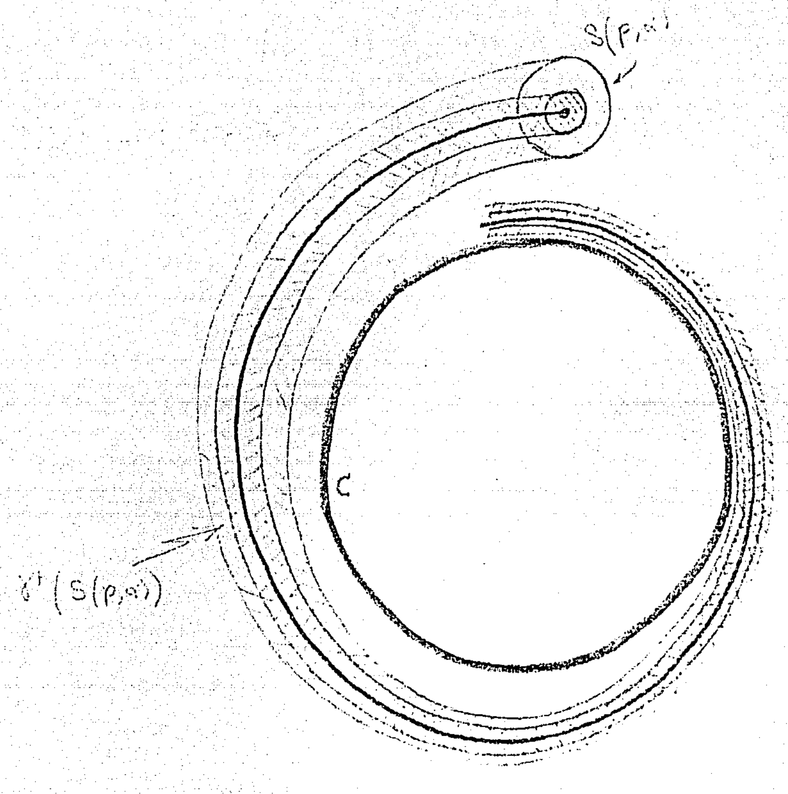
$$\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup C$$



entonces, claramente si tomamos una bola con centro en p y radio α, se tendrá para esa bola

$$\overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = \gamma^+(S(p,\alpha)) \cup C$$

como se ve en la siguiente figura



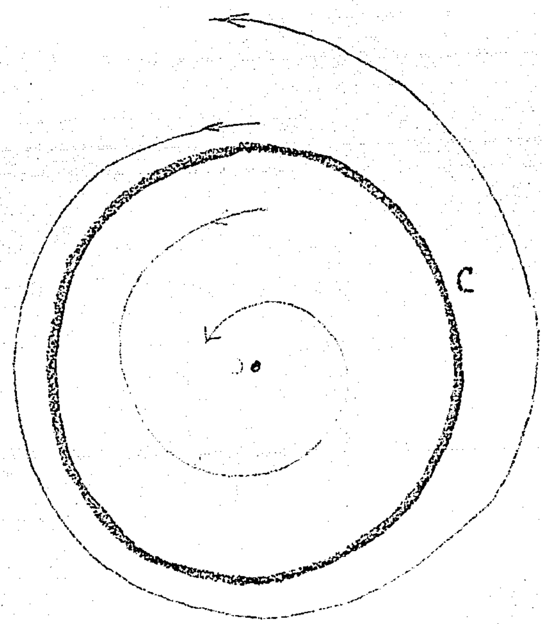
y al tomar la intersección lo que queda es $\gamma^+(p) \cup C$, es decir

$$D^+(p) = \bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = \gamma^+(p) \cup C.$$

EJEMPLO 14. Si ahora p está dentro del círculo unitario en el mismo sistema dinámico del ejemplo 12, entonces

$$D^+(p) = \gamma^+(p) \cup \{0\}.$$

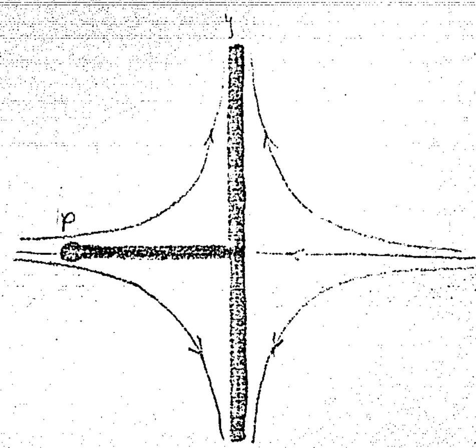
EJEMPLO 15. Consideremos el sistema dinámico dado en la siguiente figura



Si p es un punto fuera del círculo unitario, entonces

$$D^+(p) = \gamma^+(p).$$

EJEMPLO 16. En el ejemplo 11 anterior



se tiene para el punto p de la figura

$$D^+(p) = \gamma^+(p) \cup \{\text{el eje } y\}$$

La razón por la que hemos repetido aquí este ejemplo es para hacer el siguiente comentario:

De los ejemplos anteriores podría sospecharse que

$$D^+(p) = \overline{\gamma^+(p)},$$

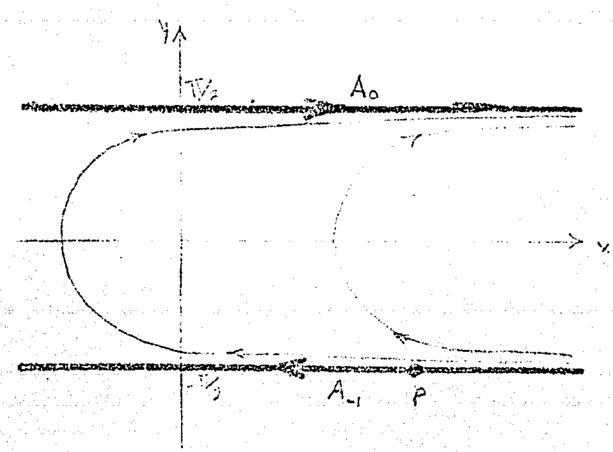
sin embargo aquí se ve que no vale la igualdad, aunque la siguiente contención es siempre correcta

$$\overline{\gamma^+(p)} \subset D^+(p).$$

EJEMPLO 17. En todos los ejemplos anteriores $D^+(p)$ es siempre un conjunto conexo. Queremos mostrar ahora que esto no es siempre el caso. Consideremos el sistema dinámico dado por el sistema diferencial

$$\dot{x} = \operatorname{sen} y$$
$$\dot{y} = \cos^2 y .$$

En la figura siguiente se muestran sus trayectorias. Estas consisten, en particular, de trayectorias A_k dadas por $A_k = \{(x,y) : y = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que son rectas paralelas al eje x. Entre dos de estas trayectorias consecutivas las trayectorias están dadas por $C = \{(x,y) : x + c = \sec y\}$, donde c es una constante que depende de la trayectoria

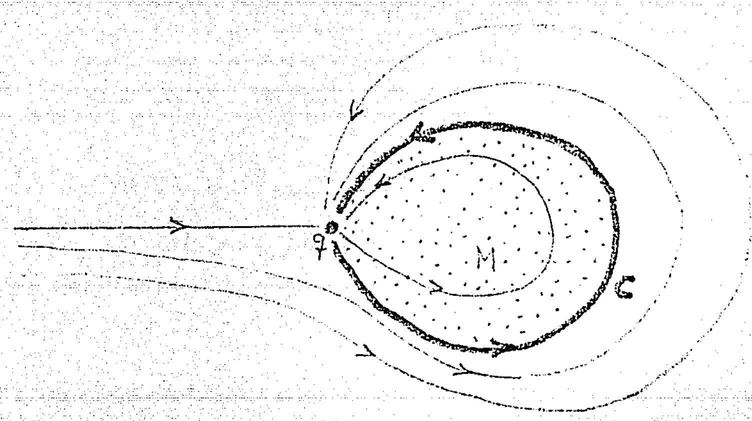


Entonces, para cualquier punto $p \in A_{-1}$,

$$D^+(p) = \gamma^+(p) \cup A_0 \cup A_{-2}.$$

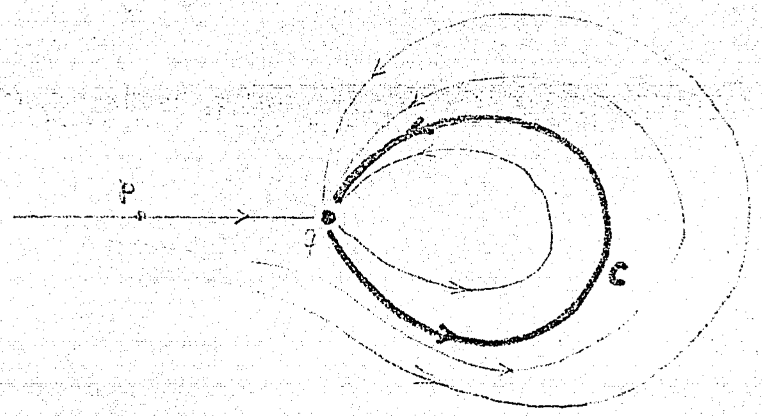
Aquí $D^+(p)$ no es conexo. Nótese también que $\Lambda^+(p) = \phi$, para cualquier p en el plano.

EJEMPLO 18. Un ejemplo muy interesante es el que queda descrito en la siguiente figura

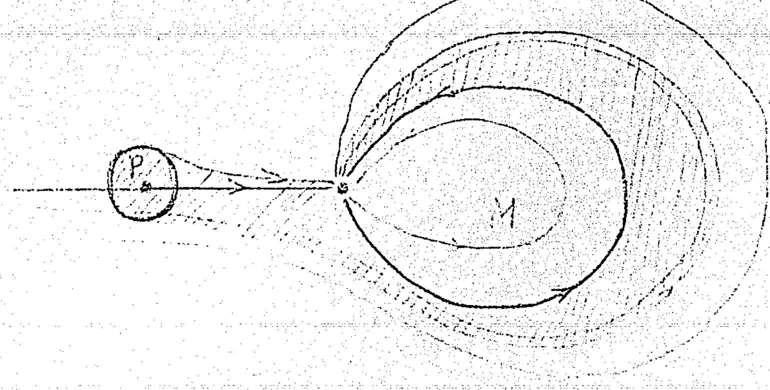


en la que M es el abierto contenido en la trayectoria C. El punto q es un punto de equilibrio que tiene la propiedad de que para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$, $\Lambda^+(p) = q$. Pero el comportamiento de las trayectorias es diferente en el conjunto $\bar{M}$ que fuera de él. Si p está en el complemento de $\bar{M}$, entonces $\Lambda^-(p) = \phi$, mientras que si $p \in \bar{M}$, $\Lambda^-(p) = q$.

Tomemos un punto p como el que se indica en la figura e investiguemos quién es su primera prolongación positiva $D^+(p)$

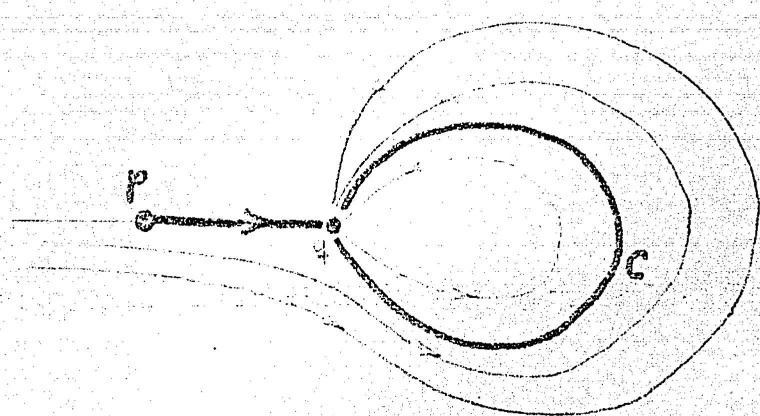


Está claro que $\overline{\gamma^+(p)} = \gamma^+(p) \cup \{q\}$. Tomemos ahora $\overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$; lo que queda ilustrado en la figura



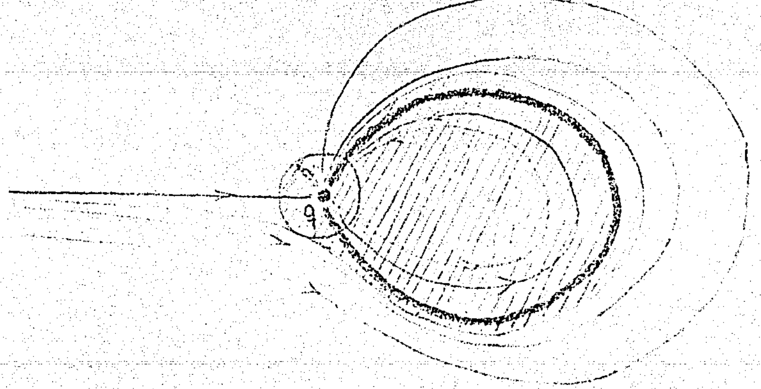
y al tomar la intersección sobre todos esos $\alpha > 0$

nos queda



$$D^+(p) = \gamma^+(p) \cup \{q\} \cup C.$$

EJEMPLO 19. Por último, tomemos al punto q para investigar $D^+(q)$. Observemos que q es inestable.



Con el método de las bolas $S(q,\alpha)$ y la semitrayectoria $\gamma^+(S(q,\alpha))$, y tomando la intersección $\bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(q,\alpha))}$

se ve, entonces que

$$D^+(q) = \overline{M}.$$

5.3 <u>CARACTERIZACIÓN DE LA ESTABILIDAD PARA UN CONJUNTO COMPACTO.</u> Volvamos ahora a nuestro problema de la caracterización de la estabilidad de un conjunto.

Habíamos convenido ya en que un conjunto $M \subset X$ es estable si y sólo si cualquier vecindad de M contiene una vecindad de M positivamente invariante. Esto equivale a que a pequeñas alteraciones, o a pequeña variación en las condiciones iniciales, la trayectoria correspondiente no se va a alejar, aún a tiempos arbitrariamente grandes, de M. Algo así como que el destino de M y de los puntos que le son vecinos, es el mismo.

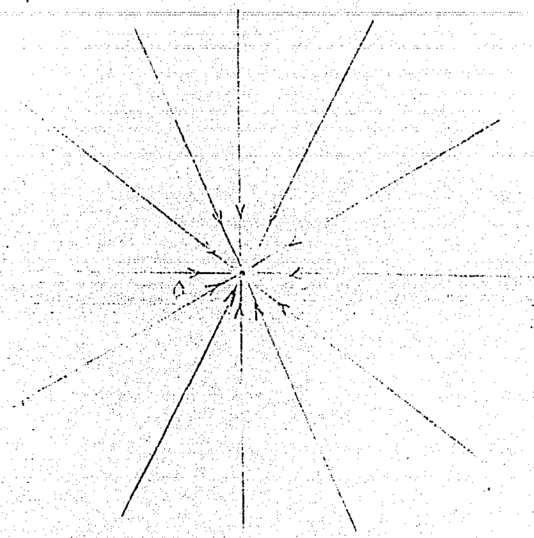
Es decir, repetimos, que para caracterizar estabilidad de un conjunto M debemos no sólo investigar el destino final de los puntos de M, sino además el destino final de los puntos que le son vecinos.

Esto fue precisamente lo que nos motivó para la introducción de la transformación D^+, ya que ella nos da información no sólo acerca de la trayectoria y el destino final de un punto, sino simultáneamente, de los puntos vecinos. Y si lo que estamos buscando es información acerca no sólo del comportamiento de M, sino simultáneamente del comportamiento de los puntos que le son vecinos, entonces D^+ será un instrumento sumamente útil para nuestros propósitos.

Nos preguntamos entonces, ¿qué deberá ser $D^+(M)$ para que el conjunto M sea estable?

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 20. Sea el sistema dinámico representado en la siguiente figura

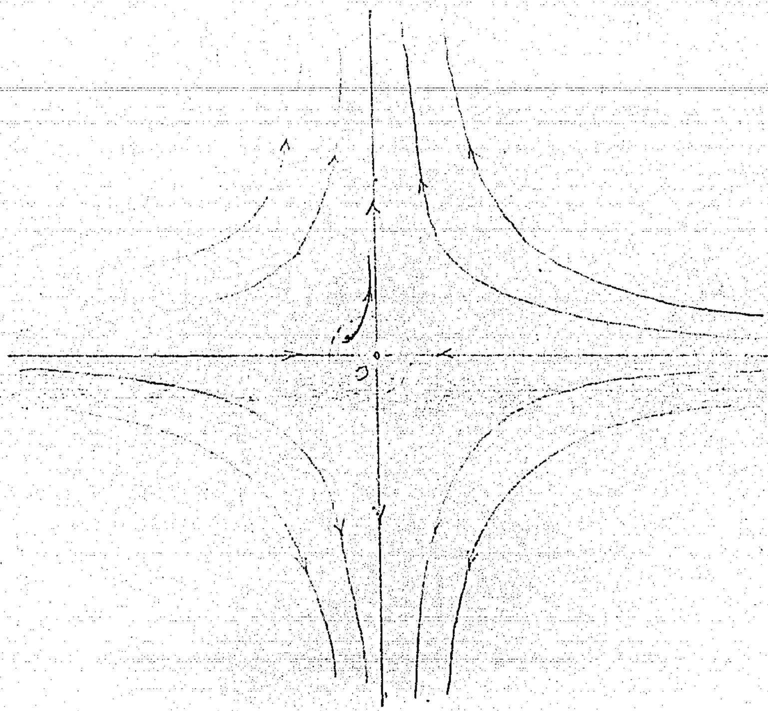


Sea M el origen. Sabemos que M es estable. ¿Qué es $D^+(M)$?

$$D^+(M) = M.$$

EJEMPLO 21.

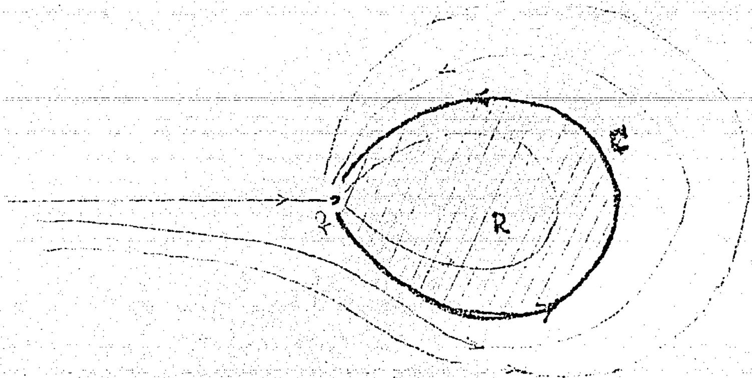
En el sistema cuyas trayectorias se representan en el siguiente diagrama



tomemos otra vez a M como el origen. Es inestable. ¿Es otra vez $D^+(M) = M$? No. Porque, aún cuando tomemos puntos muy cercanos al origen, después de un cierto tiempo estarán arbitrariamente alejados de O. En realidad

$$D^+(M) = \{\text{el eje } y\}.$$

<u>EJEMPLO 22.</u> Tomemos otra vez el sistema dinámico cuyas trayectorias se muestran en la figura siguiente (R es el abierto contenido en la trayectoria C)



Supongamos primero que tomamos al conjunto cuyo único elemento es el punto q. Como ya se vió (ejemplo 19), es inestable, y también se vio que

$$D^+(\{q\}) = \bar{R}. \qquad [D^+(\{q\}) \neq \{q\}.]$$

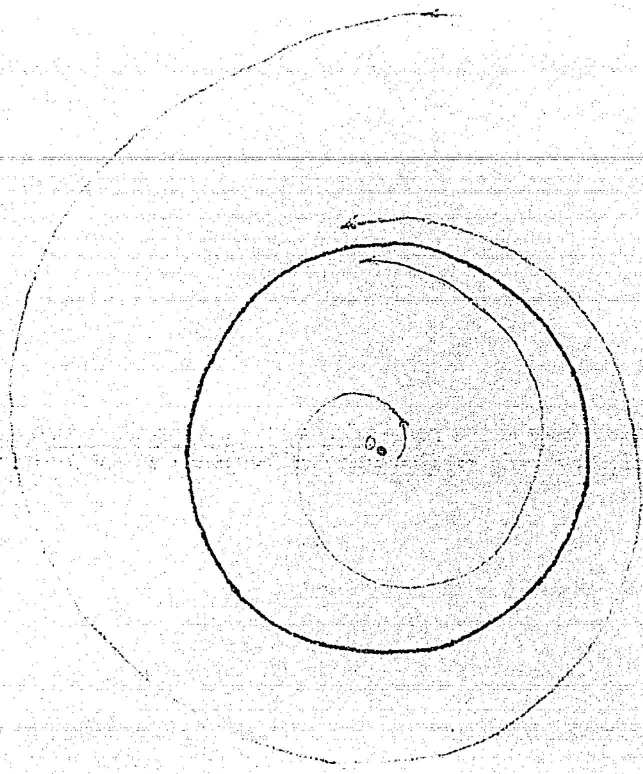
EJEMPLO 23. Hagamos $M = \bar{R}$ en la figura del ejemplo anterior. Entonces M es estable y se cumple la igualdad

$$D^+(M) = M.$$

EJEMPLO 24. Consideremos el sistema dinámico dado por las ecuaciones (en coordenadas polares)

$$\dot{r} = r(1-r)$$
$$\dot{\theta} = 1,$$

y cuyas trayectorias están dadas en la siguiente figura



Tomemos ahora como M al círculo unitario. Es estable. Y nuevamente

$$D^+(M) = M.$$

Nos preguntamos, entonces, lo siguiente: ¿será cierto, en general, que $D^+(M) = M$, si y sólo si, M es estable?

Los ejemplos parecen decirnos a gritos que así es. Sin embargo, veamos un poco más detenidamente la cuestión. Si un conjunto M es estable ¿siempre será cierto que $D^+(M) = M$? Esto parece razonable a partir de la siguiente observación:

Si $p \in M$, la estabilidad de M, es decir, el hecho de que cualquier vecindad de M contiene una vecindad de M positivamente invariante, obliga a que el destino de ese punto p y los que le son vecinos, quede arbitrariamente cerca de M; pero entonces el destino de M y los puntos que le son vecinos no puede ser otro que M mismo, es decir $D^+(M) = M$.

Recíprocamente, ¿ $D^+(M) = M$, implicará necesariamente estabilidad? En realidad no puede ser de otra manera, porque si M fuera inestable, querría decir que podríamos encontrar puntos muy cercanos a M (o a un punto de M) tales que después de un cierto tiempo, y siguiendo por su trayectoria están alejados de M en una cierta cantidad positiva. Esto es simplemente la negación de estabilidad. Pero entonces sería posible encontrar un punto en $D^+(M)$ alejado de M en esa misma cantidad. Esto contradice la hipótesis de que $D^+(M) = M$.

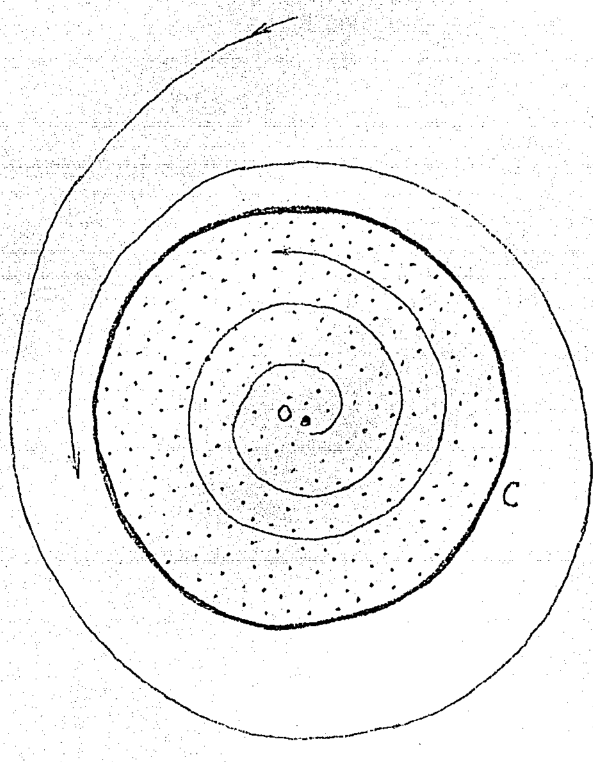
Estos argumentos parecen confirmarnos en nuestra hipótesis de que M es estable si y sólo si $D^+(M) = M$.

Pero no debemos precipitarnos. Hay que tomar las cosas con calma y ver otros ejemplos que nos harán meditar un poco.

EJEMPLO 25. Consideremos nuevamente el sistema del ejemplo 24 anterior. Sea M el interior del disco unitario. Este conjunto abierto es estable, ya que cualquier vecindad U de M contiene una vecindad V de M positivamente invariante.

Para cualquier punto p distinto del origen

$$D^+(p) = \gamma^+(p) \cup C .$$

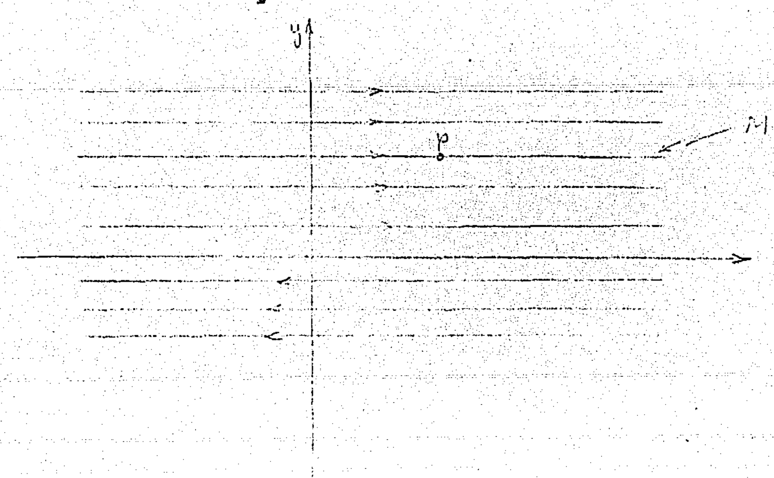


Ahora bien, para este conjunto estable no es cierto que $D^+(M) = M$, como habíamos conjeturado. ¿Qué es lo que ocurre? En realidad, en razón de la igualdad anterior $D^+(M) = \bar{M}$. Entonces, ¿nuestros razonamientos anteriores eran falaces? En realidad no.

La moraleja, como lo muestra este último ejemplo, es que si queremos caracterizar a los conjuntos estables como aquellos conjuntos cuya primera prolongación positiva es igual al conjunto mismo, debemos pagar un precio: y este precio es que debemos restringirnos a conjuntos <u>cerrados</u>.

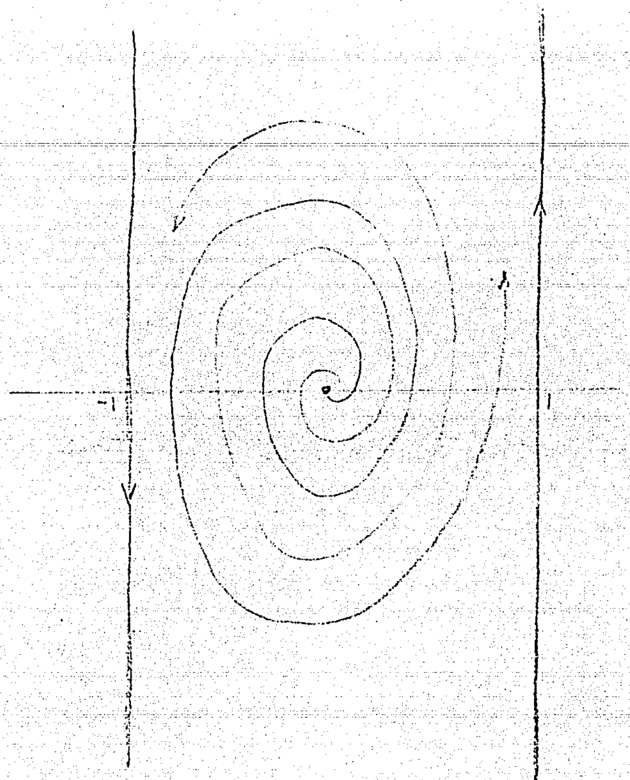
Hagamos finalmente otra observación que nos hará restringirnos un poco más. Cuando hablamos de conjuntos invariantes, mostramos el ejemplo dado por el sistema

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = 0$$



y dijimos que cualquier solución a más de ser invariante es estable. La invariancia de un conjunto M, quedó caracterizada por la ecuación $\gamma^+(M)=M$. Y, ahora, para la estabilidad queremos que la condición necesaria y suficiente sea $D^+(M)=M$. Sin embargo, hemos hablado de la transformación $D^+(p)$ como aquella que nos proporciona información acerca de todo el comportamiento de p y los puntos que le son vecinos, no sólo en tiempos finitos, sino también en tiempos arbitrariamente grandes. Esto es $\Lambda^+(p)$ va a estar contenido en $D^+(p)$. Y en este ejemplo, para un punto como p, $\Pi(p,t)$ para tiempos cada vez más y más grandes, lleva a p a puntos cada vez más y más alejados sin converger a ningún punto, es decir $\Lambda^+(p)=\phi$. Esto será, en general, bastante inconveniente y nos muestra, volviendo a nuestro problema de la caracterización de la estabilidad, la conveniencia de considerar conjuntos M <u>compactos</u>.

En el siguiente ejemplo se muestran más claramente las graves inconveniencias que acarrea el hecho de que M no sea compacto. Tomemos el ejemplo que se muestra en la siguiente figura (para una presentación más detallada de este sistema ver [4]).



Si tomamos a M como el conjunto formado por las dos rectas $x = \pm 1$, entonces ocurre que $D^+(M) = M$, y sin embargo este conjunto, el conjunto formado por las rectas no es estable.

Esto muestra, otra vez, la necesidad de considerar a conjuntos M compactos.

Ahora sí, con estas restricciones, volvemos a hacernos la misma pregunta anterior: ¿será cierto que si M es un conjunto compacto, $D^+(M) = M$, si y sólo si M es estable?

Afirmamos que sí, y vamos a dar una demostración de este hecho.

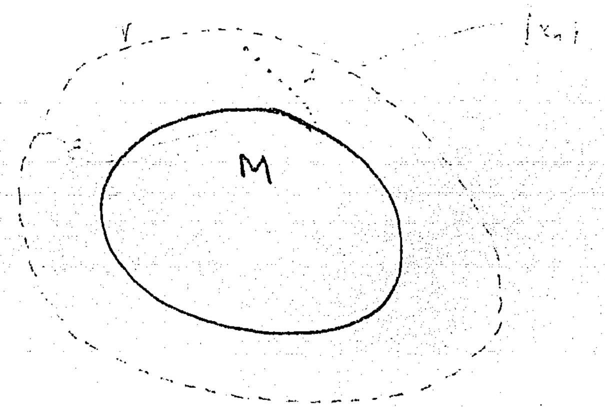
<u>Teorema</u>. Un conjunto M compacto contenido en X, es estable si y sólo si

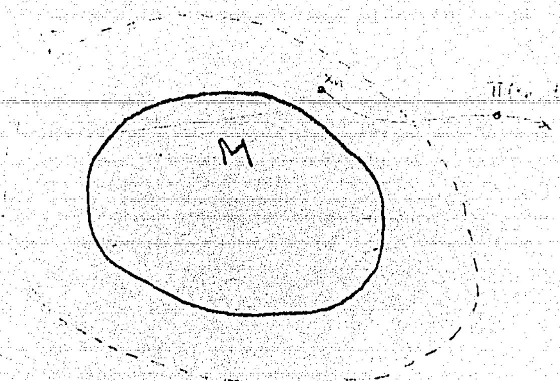
$$D^+(M) = M.$$

<u>Demostración.</u>

Admitamos primero que $D^+(M) = M$, y vamos a demostrar que ello implica que M es estable.

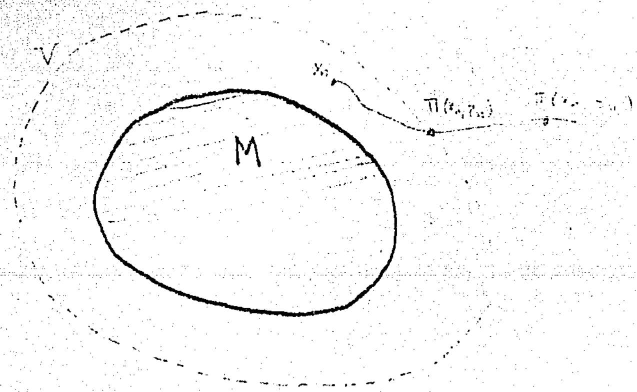
Supongamos que M no es estable. Esto es, que existe una vecindad V de M, digamos de radio $\varepsilon > 0$, de tal manera que podemos escoger una sucesión $\{x_n\}$, y una sucesión $\{t_n\}$, con $t_n > 0$ tales que $d(x_n, M) \to 0$ y $d(\pi(x_n, t_n), M) \geq \varepsilon$.





Como M es cerrado podemos suponer que $x_n \to x \in M$.

Podemos ahora escoger una sucesión $\{\tau_n\}$, $0 \le \tau_n \le t_n$, de tal manera que $\pi(x_n, \tau_n)$ está en la frontera de V.



Pero esta frontera es un compacto, porque X es localmente compacto y M es compacto. De aquí que podemos asegurar que la sucesión $\pi(x_n, \tau_n)$, (o una subsucesión de ella) converge a un punto $y \in \partial V$. Pero $y \in D^+(M)$, porque $y \in D^+(x)$, donde x es el punto en M límite de la sucesión x_n mencionados anteriormente. Que $y \in D^+(x)$ se ve de la siguiente manera:

Sea $\alpha>0$. Como $x_n \to x$, existe N_1 tal que si $n>N_1$

$$x_n \in S(x,\alpha).$$

Esto significa que

$$\pi(x_n, \tau_n) \in \gamma^+(S(x,\alpha)),$$

y en el límite

$$y \in \overline{\gamma^+(S(x,\alpha))}.$$

Como esto es válido para toda $\alpha>0$, se tiene que

$$y \in \bigcap_{\alpha>0} \overline{\gamma^+(S(x,\alpha))} = D^+(x),$$

y esto significa, como ya dijimos que

$$y \in D^+(M).$$

Pero como $y \notin M$, obtenemos que $D^+(M) \neq M$, contradicción que demuestra la primera parte del teorema.

Recíprocamente, sea ahora que M es estable; queremos demostrar que $D^+(M)=M$.

Obviamente $M \subset D^+(M)$. Faltará demostrar la otra contención.

Por la estabilidad de M, sabemos que cualquier vecindad V que contiene a M, contiene otra vecindad U (que contiene a M) positivamente invariante.

Por la compacidad de M, existe un $\alpha_1>0$ tal que $S(x,\alpha_1) \subset U \subset \overline{V}$ para todo $x \in M$. Siendo verdad que esto se cumple para todo α con $0<\alpha<\alpha_1$, se tiene en consecuencia que $D^+(M) \subset \overline{V}$ para cualquier vecindad V de M.

Por lo tanto

$$D^+(M) \subset \bigcap\{\overline{V} : V \text{ es una vecindad de } M\} = M,$$

donde la igualdad se justifica ya que M es compacto.

Todo esto significa que

$$D^+(M) = M. \quad //$$

CAPÍTULO IV

ESTABILIDAD ASINTÓTICA

INTRODUCCIÓN

En el capítulo II estudiamos a los atractores y vimos algunas de sus propiedades. En el capítulo III el tema principal que tratamos fue el de la estabilidad para un conjunto M en un sistema dinámico. Ahora queremos mostrar la relación que existe entre estos dos conceptos. Esto nos conducirá a un nuevo concepto de estabilidad, el de estabilidad asintótica. Estudiaremos, además, la primera prolongación positiva de un atractor compacto. A continuación, utilizando el primer conjunto límite prolongacional positivo, demostraremos el siguiente resultado: todo atractor uniforme compacto contiene un subconjunto asintóticamente estable. Finalmente, caracterizaremos a la estabilidad asintótica mediante un importante método, método debido al matemático ruso Alexander Mikhailovich Liapunov.

§2 1. ESTABILIDAD ASINTÓTICA.

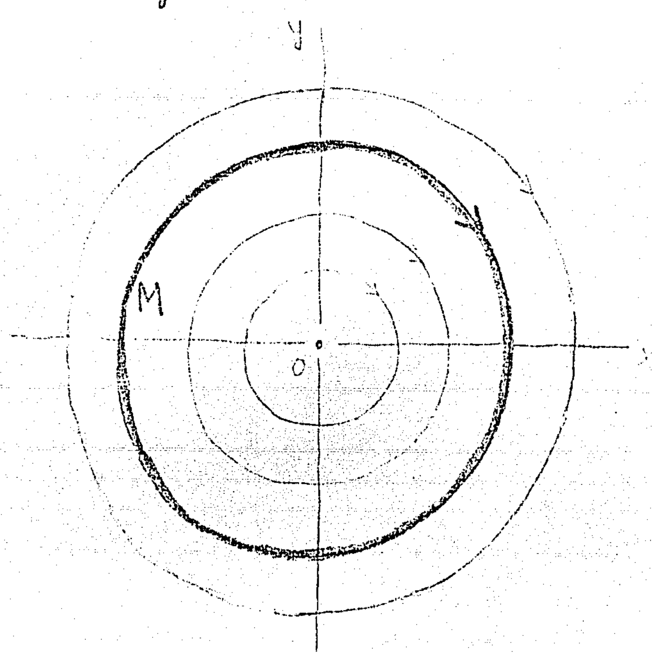
1.1 EJEMPLOS

En relación a los siguientes dos ejemplos vamos a hacer algunas observaciones.

El primer ejemplo es el sistema dinámico que ya mostramos en el capítulo I y que está dado por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x.$$

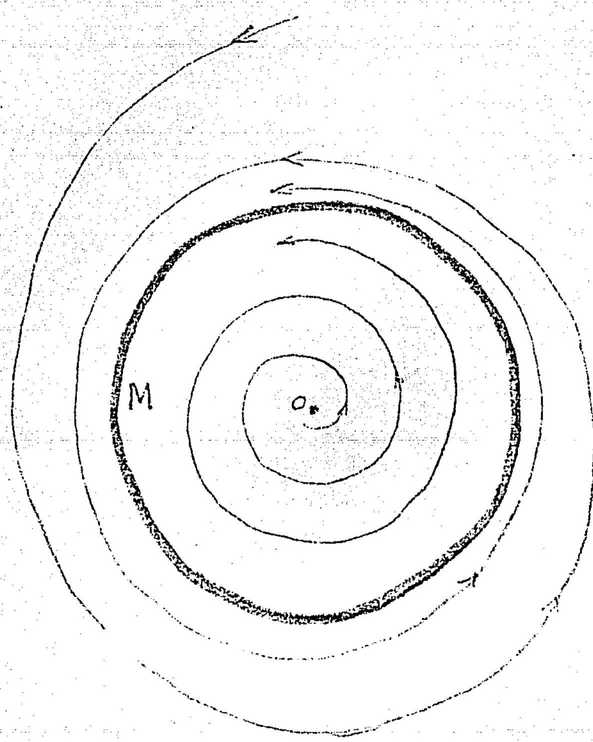
Como dijimos en aquel capítulo, sus trayectorias son círculos y el origen es el único punto crítico



El segundo ejemplo es el sistema dinámico ya muy conocido por nosotros y que está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales (en coordenadas polares)

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$



Como vimos en el ejemplo 7, Cap. I, la trayectoria que pasa por cualquier punto del plano (distinto del origen) espiralea alrededor del círculo unitario M que se aproxima más y más a él cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Esto es, el círculo unitario M es el conjunto ω-límite de cualquier punto p del plano distinto del origen.

1.2 ESTABILIDAD ASINTÓTICA. Ahora bien, en los dos casos el círculo unitario M es estable, ya que, para cada sistema, dada cualquier vecindad U de M, U contiene una vecindad V de M positivamente invariante.

Sin embargo, debemos observar una importante diferencia. En el segundo ejemplo, al tomar la trayectoria que pasa por un punto arbitrario p distinto del origen, esa trayectoria se aproxima sin límite al círculo M cuando el tiempo tiende a $+\infty$. En el primer ejemplo esta situación no se da; allí, las trayectorias permanecen a la misma distancia de M siempre. A pesar de ello, repetimos, en los dos casos el círculo unitario es estable.

Entonces, en el segundo ejemplo, M tiene, además de ser estable, la siguiente propiedad:

si p es un punto del plano, distinto del origen, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} d(\pi(p,t), \text{[illegible]}) = 0.$$

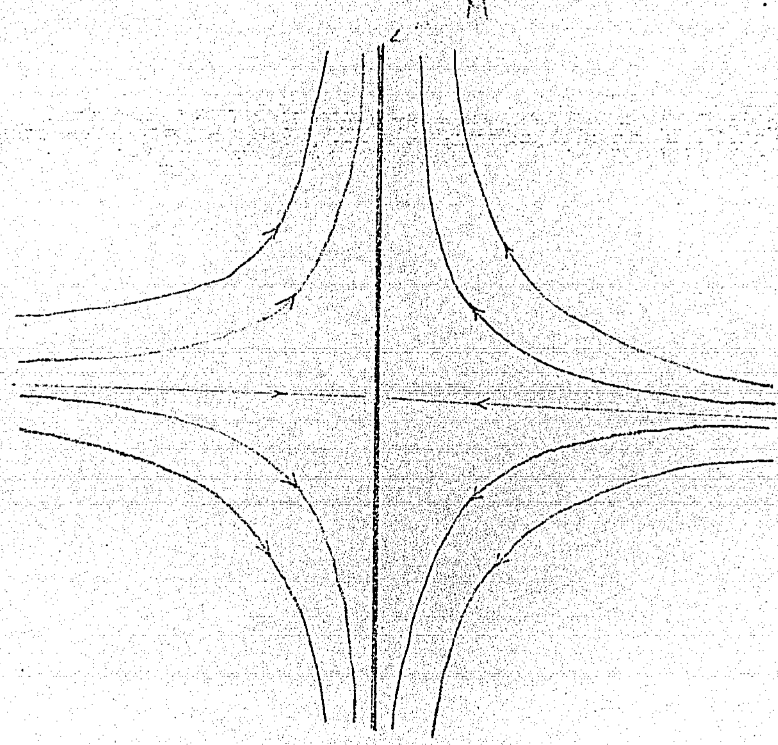
Este tipo de estabilidad merece distinguirse de la estabilidad a secas, y se llama estabilidad asintótica. Vamos a escribir la definición formal de la siguiente manera:

DEFINICIÓN. Sean $(X, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico y $M \subset X$. Se dice que M es asintóticamente estable si es estable y además, para todos los puntos p en una vecindad de M, ocurre que

$$\lim_{t \to +\infty} d(\pi(p,t), M) = 0.$$

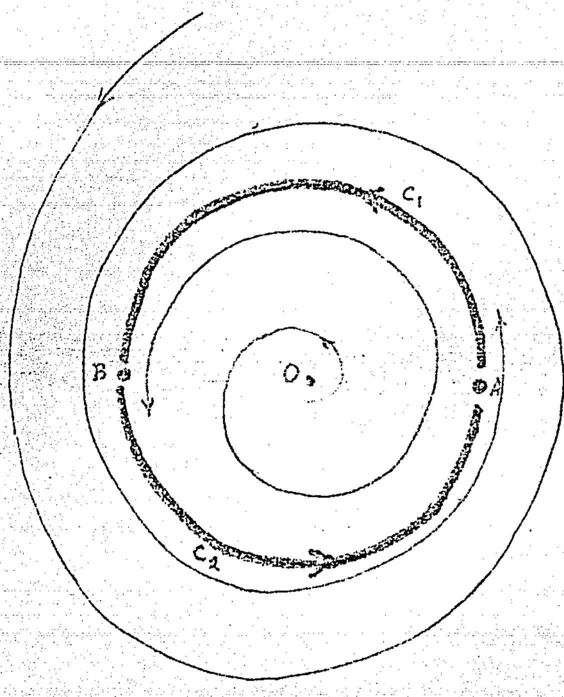
EJEMPLO 1. El círculo unitario en el segundo ejemplo anterior, las trayectorias del cual aparecen en la página 168, es asintóticamente estable.

EJEMPLO 2. Consideremos una vez más el sistema cuyas trayectorias aparecen en la siguiente figura y donde M es la recta contenida en el eje y



entonces M es asintóticamente estable.

EJEMPLO 3. Consideremos el sistema descrito en la siguiente figura, (ver Capítulo II, ejemplo 6)



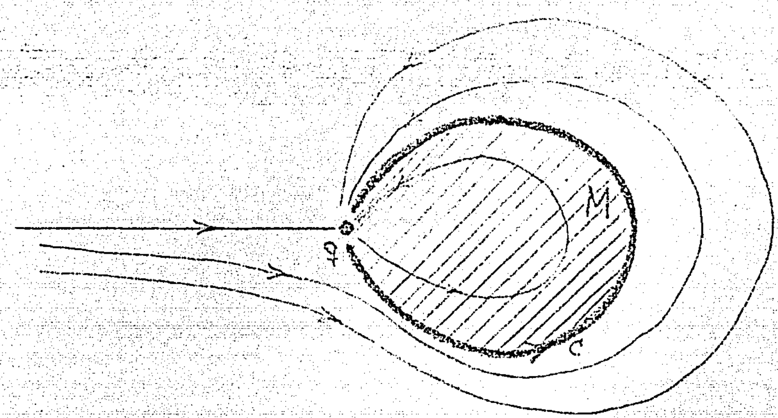
Sea M la unión de los puntos críticos A y B con las trayectorias C_1 y C_2, es decir M es el círculo unitario. Entonces M es asintóticamente estable, pues para cada punto p del plano (distinto del origen) se tiene que

$$\Lambda^+(p) = M,$$

lo que implica que

$$\lim_{t\to+\infty} d(\pi(p,t), M) = 0.$$

EJEMPLO 4. Consideremos ahora el mismo sistema mostrado en la página 148 y cuyas trayectorias se describen a continuación nuevamente.



Llamémosle M ahora al compacto acotado por la trayectoria C. Entonces M no sólo es estable, es asintóticamente estable.

1.3 **ALGUNOS RESULTADOS**. A. Ahora bien, si M es un conjunto asintóticamente estable, entonces, según la definición existe una vecindad de M tal que si p es un punto en esa vecindad, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} d(\pi(p,t), M) = 0.$$

Esto nos habla de los puntos que son atraídos por M, y se sabe muy bien (ver páginas 99-103) que si M es compacto, la igualdad anterior significa que

$$\Lambda^{+}(p) \neq \phi$$

y además

$$\Lambda^{+}(p) \subset M.$$

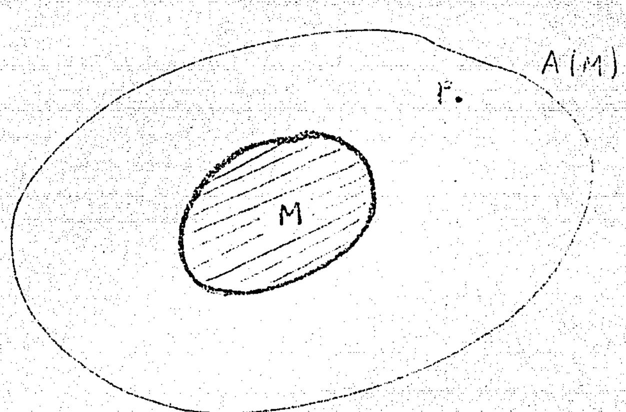
Como esto ocurre para todos los puntos p en una vecindad de M, se concluye que M es un atractor. La recíproca también vale, y se tiene en consecuencia el siguiente teorema:

> <u>Teorema</u>. El conjunto compacto M es asintóticamente estable si y sólo si es estable y es además un atractor.

En el diagrama representado en la página 173, el punto q es un ejemplo de un atractor que no es estable.

B. Tomemos otra vez un conjunto compacto M asintóticamente estable y utilicemos el teorema anterior para dar un paso más adelante.

Como M es asintóticamente estable y compacto, el teorema dice que es estable y es un atractor. Consideremos la región de atracción de M, es decir, el conjunto $A(M)$, que, como M es atractor es una vecindad de M.



Para un punto $p \in A(M)$, sabemos que

$$\Lambda^+(p) \neq \phi \quad \text{y} \quad \Lambda^+(p) \subset M.$$

Podemos, en consecuencia, tomar un punto $\omega \in \Lambda^+(p)$. Entonces $\omega \in M$.

Ahora bien, como M es estable

$$D^+(M) = M,$$

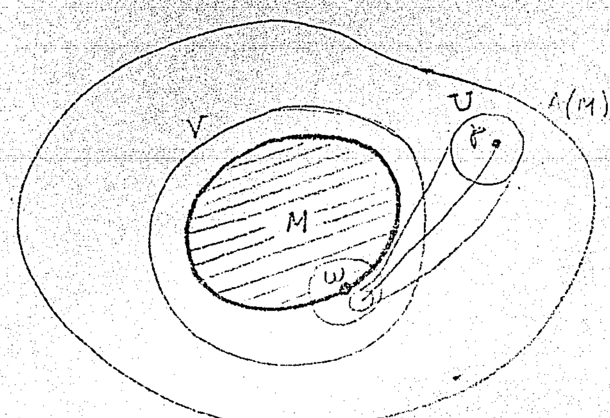
en consecuencia

$$D^+(\omega) \subset M,$$

pero $D^+(\omega)$ es la descripción del destino de ω junto con los puntos que le son vecinos, para todo tiempo t. Esto es, $D^+(\omega) \subset M$ nos dice que ω y los puntos que le son vecinos tienen como destino futuro al propio conjunto M. Esto por un lado.

Por otro lado, volviendo al hecho de que p es atraído por M y que $\omega \in \Lambda^+(p) \subset M$, existirá un T, tal que para todo $t \geq T$, $\pi(p,t)$ estará arbitrariamente cerca de ω, es decir de M.

Ahora, por la continuidad de π, existirá una vecindad U de p tal que $\pi(U,T)$ está contenida en una vecindad de ω contenida en una vecindad arbitraria V de M.



Pero ahora, por lo dicho antes acerca del destino de los puntos vecinos de ω, se tendrá que la imagen $\pi(U,t)$ de esa vecindad U de p va a quedar contenida en V para todo tiempo $t \geq T$.

Esto significa que p es uniformemente atraído por M. Y como esto vale para todo $p \in A(M)$, se tiene que

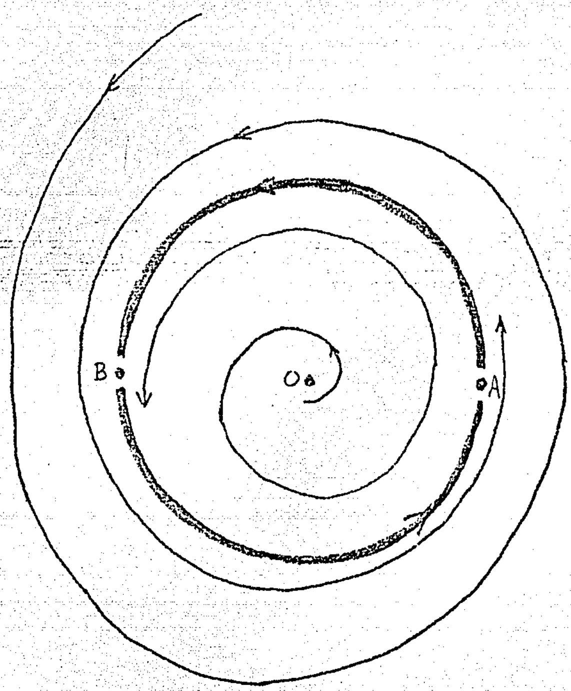
$$A(M) \subset A_u(M),$$

es decir M es un atractor uniforme.

Todos estos razonamientos hacen plausible el siguiente teorema (cuya demostración completa puede verse en [1]).

<u>Teorema</u>. Si M es un compacto asintóticamente estable entonces M es un atractor uniforme.

C. Consideremos nuevamente el ejemplo 3 de este capítulo.



Anteriormente vimos que el conjunto $M=\{A,B\}$, formado por la unión de los puntos críticos A y B es un atractor débil, pero no es un atractor, y en consecuencia, no es asintóticamente estable.

Sin embargo, una observación de las trayectorias que están en la región de atracción $A_\omega(M)$ nos muestra que ellas no tienen un comportamiento demasiado errático. De hecho son atraídas de una manera más fuerte por un conjunto más grande que $\{A, B\}$. ¿Quién es ese conjunto y cómo son atraídas por él las trayectorias?

Ese atractor más fuerte que suponemos que existe, deberá contener al atractor más débil ya conocido, puesto que éste atrae de alguna manera a las trayectorias.

En otras palabras, lo que estamos diciendo es que ante la presencia de un atractor débil, muy plausiblemente existe un atractor uniforme, es decir, existe un conjunto compacto asintóticamente estable. Esto es, existe un atractor que es además estable.

Recordemos la caracterización de conjuntos compactos estables: M es estable si y sólo si $D^+(M) = M$. Pues bien, para el conjunto $M = \{A, B\}$, se tiene, naturalmente, que

$$D^+\{A, B\} \neq \{A, B\}.$$

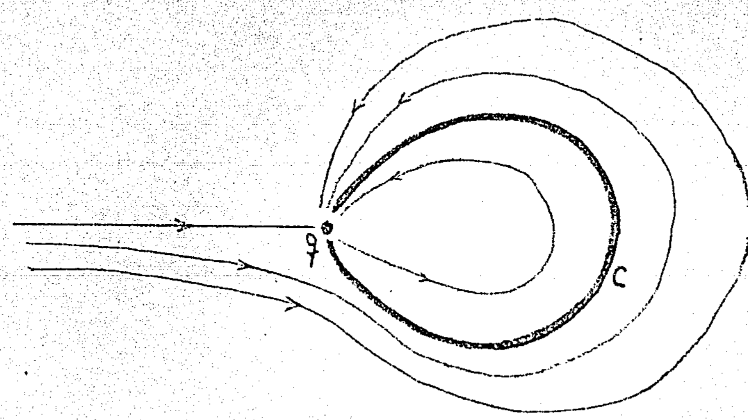
Pero entonces ¿qué es $D^+\{A, B\}$? Es el círculo unitario C. ¡Y resulta que el círculo unitario C, en este sistema, es asintóticamente estable! Esto es, $D^+\{A, B\}$ es un conjunto estable y que es además un atractor. Ahora nos preguntamos por su región de atracción $A(D^+\{A, B\})$. Es decir, ¿cuáles trayectorias son atraídas? En este caso es evidente viendo la figura correspondiente, que son atraídas las mismas trayectorias que son atraídas débilmente por el atractor débil. Así que

$$A(D^+\{A,B\}) = A_\omega(\{A,B\}).$$

Igualdad que usando la letra M para el conjunto $\{A, B\}$ nos queda

$$A(D^+(M)) = A_\omega(M).$$

Para un ejemplo más, tomemos el atractor inestable $\{q\}$ proporcionado por P. Mendelson en 1960, y que ya hemos utilizado anteriormente.



Nuevamente, como en el ejemplo anterior

$$D^+\{q\} \neq \{q\}.$$

Nuevamente, observando la figura, se ve que la presencia del atractor inestable $\{q\}$ nos hace pensar en la presencia de un atractor estable, es decir, de un conjunto asintóticamente estable.

Siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior inquirimos por el conjunto $D^+(\{q\})$. Ya vimos (página 140) que $D^+(\{q\})$ es el compacto acotado por la trayectoria C, ¡y este conjunto es, otra vez, asintóticamente estable! Es decir $D^+(\{q\})$ es estable y es un atractor que, además, atrae a todas las trayectorias atraídas por $\{q\}$. De modo que

$$A(D^+(\{q\})) = A(\{q\}) = A_\omega(\{q\}).$$

Ahora bien, ¿será cierto en general que los hechos que acabamos de observar en estos dos ejemplos son válidos? Sí, sí lo es. El teorema puede enunciarse de la siguiente manera:

<u>Teorema.</u> Sea M un atractor débil compacto. Entonces $D^+(M)$ es un conjunto compacto asintóticamente estable, con $A(D^+(M)) \equiv A_\omega(M)$. Además, $D^+(M)$ es el conjunto asintóticamente estable más chico conteniendo a M.

Para la demostración, habría que probar:

(i) que $D^+(M)$ es un conjunto compacto;

(ii) que $A_\omega(M)$ es una vecindad de $D^+(M)$;

(iii) que $D^+(M)$ es un atractor, es decir que $p \in A_\omega(M)$ implica que $\Lambda^+(p) \neq \phi$ y $\Lambda^+(p) \subset D^+(M)$. (Además que $A(D^+(M)) \subset A_\omega(M)$, lo cual significa, por lo anterior, la igualdad);

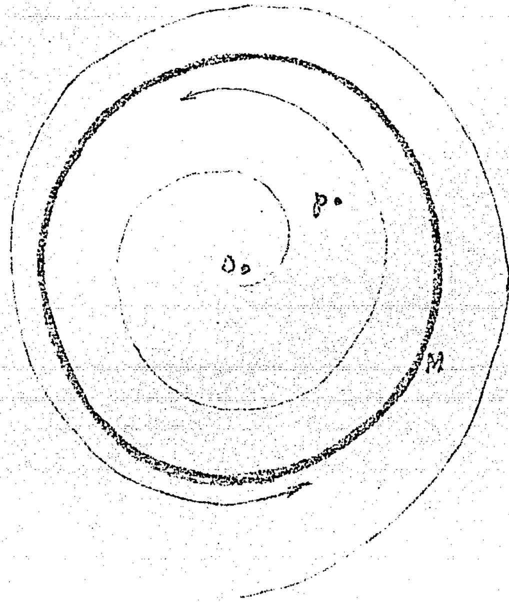
(iv) que $D^+(D^+(M)) = D^+(M)$, lo cual significa, por el teorema que vimos en el Cap. III, que $D^+(M)$ es estable;

(v) y finalmente que si M^* es un compacto asintóticamente estable tal que $M \subset M^* \subset D^+(M)$, entonces $M^* = D^+(M)$.

Para una demostración completa, siguiendo estos lineamientos, ver [1], páginas 64-65.

D. El teorema del parágrafo B del Cap. IV afirma que todo conjunto compacto asintóticamente estable es un atractor uniforme. Preguntamos nosotros ahora, ¿será válido el recíproco? Es decir, ¿todo atractor uniforme es asintóticamente estable? A primera vista parecería que así es. Pero, desafortunadamente, no lo es. Veamos un ejemplo que lo muestra.

<u>EJEMPLO 5.</u> Al atractor uniforme M del ejemplo 8 del Capítulo II le unimos cualquier punto p distinto del origen y que no esté sobre el círculo unitario. Entonces este conjunto $M \cup \{p\}$ es un atractor uniforme que no es asintóticamente estable; ni siquiera es estable.



El siguiente teorema aclara la situación:

<u>Teorema.</u> Sea M un atractor uniforme positivamente invariante, entonces M es estable. Consecuentemente es asintóticamente estable.

Este teorema será usado posteriormente para demostrar un interesante resultado, (ver E, página 187), pero antes vamos a abrir un paréntesis para introducir un nuevo concepto y técnicas adecuadas para las demostraciones.

Primero, vamos a recordar la función D^+ que a cada punto $p \in \bar{X}$ le asocia su primera prolongación positiva (ver capítulo II, 5.1). Tal función quedó definida como

$$D^+(p) = \bigcap_{\alpha > 0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))},$$

y dijimos que su significado es el de ser una función que nos describe el comportamiento, tanto del punto p como de los puntos que le son vecinos.

En el apéndice A de este capítulo, demostramos que

$$D^+(p) = \{q \in X : \text{existen sucesiones } \{p_n\} \subset X,\ \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tales que } p_n \to p \text{ y } \pi(p_n, t_n) \to q\}.$$

Ahora bien, recordemos que cuando estudiamos a los atractores uniformes estuvimos interesados en el destino final tanto de p como de los puntos que le son vecinos. Pero el destino final, en nuestro lenguaje, significa investigar la situación cuando el tiempo tiende a infinito. En consecuencia, traduciendo al lenguaje formal de las matemáticas, esto nos lleva a restringir a las sucesiones $\{t_n\}$ en la igualdad anterior que nos da D^+, a aquellas sucesiones $\{t_n\}$ que tienden a $+\infty$. Tendremos pues una nueva función que a cada punto $p \in X$ le asocia un subconjunto de X, que nos describe el comportamiento a tiempos infinitos del punto p y de los que le son vecinos. La designaremos con el símbolo $J^+(p)$, y tradicionalmente se le conoce con el difícil nombre de <u>primer conjunto límite prolongacional positivo</u>. Así pues:

<u>DEFINICIÓN</u>. Sean $(X, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico y $p \in X$. Se llama el <u>primer conjunto límite prolongacional positivo de p</u>

al conjunto

$J^+(p) = \{q \in X :$ existen sucesiones $\{p_n\} \subset X$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $p_n \to p$, $t_n \to +\infty$ y $\pi(p_n, t_n) \to q\}$.

DEFINICIÓN. Sea $M \subset X$ compacto. Entonces el primer conjunto límite prolongacional positivo de M es

$$J^+(M) = \bigcup_{p \in M} \{q \in X : \text{existen sucesiones } \{p_n\} \subset X, \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tales que } p_n \to p,\ t_n \to +\infty \text{ y } \pi(p_n, t_n) \to q\}.$$

El siguiente teorema muestra la utilidad de la función J^+:

Teorema. Sea M compacto. Entonces $p \in X$ está en la región de atracción uniforme de M si y sólo si $J^+(p) \neq \phi$ y $J^+(p) \subset M$.

Demostración. Ver apéndice B.

Finalmente, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema. Sea $M \subset X$ compacto. Entonces $J^+(M)$ es cerrado e invariante.

Demostración. Ver apéndice C.

Lema. Dados M y $p \in A_u(M)$, entonces
$$J^+(p) \subset J^+(M).$$

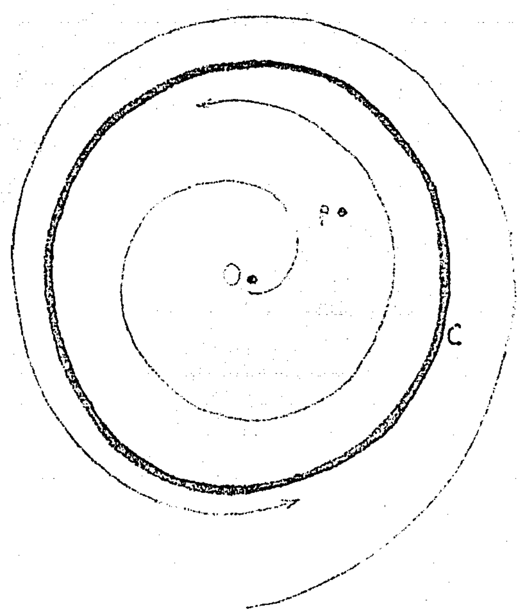
Hasta aquí el paréntesis abierto en la página 184.

E. Ahora vamos a enunciar y demostrar el interesante resultado prometido antes.

TEOREMA. Sea M un atractor uniforme. Entonces $J^+(M)$ es asintóticamente estable.

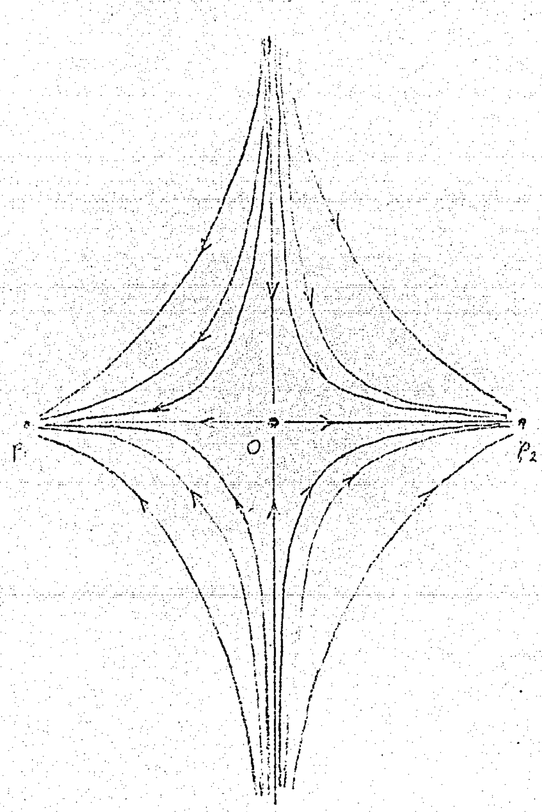
Antes de la demostración veamos dos ejemplos.

EJEMPLO 6. Consideremos el mismo atractor uniforme del ejemplo 5 anterior. Llamémosle C al círculo unitario y M al conjunto $C \cup \{p\}$.

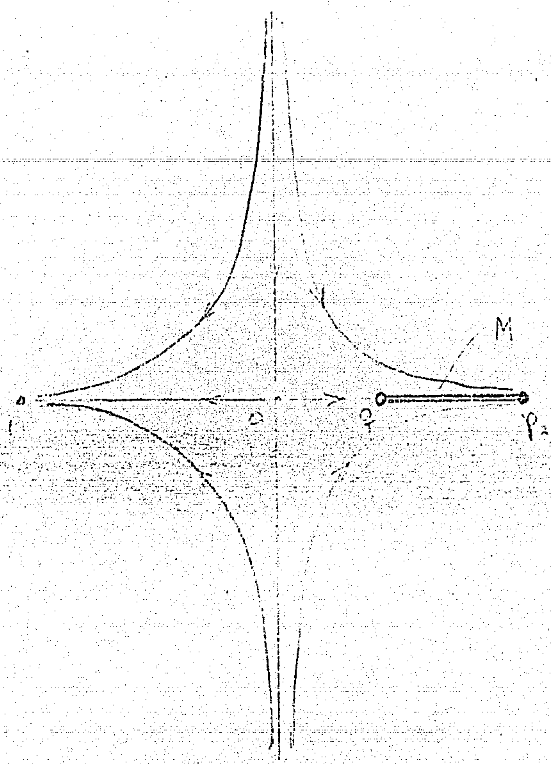


Para este atractor uniforme $M = C \cup \{p\}$ se tiene $J^+(M) = C$, que es asintóticamente estable.

EJEMPLO 7. Consideremos el sistema dinámico del cual las trayectorias se muestran en la siguiente figura



Sea que el conjunto M es el segmento de recta comprendido desde el punto q hasta p_2, como se muestra en la siguiente figura



Entonces M es un atractor uniforme, y se tiene que $J^+(M) = \{p_2\}$, que es asintóticamente estable.

En otras palabras, el teorema puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea M un atractor uniforme. Entonces $J^+(M)$ es un subconjunto de M asintóticamente estable.

Demostración del teorema:

(i) $J^+(M) \neq \phi$, porque por hipótesis M es un atractor uniforme, así que $M \subset Au(M)$, y para cada punto p de $Au(M)$, $J^+(p) \neq \phi$ y $J^+(p) \subset M$. En particular, esto vale para cada $p \in M$, y

$$J^+(M) = \bigcup_{p \in M} \{q : q \in J^+(p)\} \neq \phi .$$

(ii) $J^+(M)$ es cerrado e invariante. Para una demostración, véase el apéndice C.

(iii) $J^+(M)$ es compacto, porque en (i) demostramos que $J^+(M) \subset M$, así pues, se tiene un cerrado contenido en un compacto, luego es compacto.

(iv) $J^+(M)$ es un atractor uniforme. Para hacerlo ver vamos a demostrar que $Au(M) \subset Au(J^+(M))$:

Sea $p \in Au(M)$. Por el lema p. 186, $J^+(p) \subset J^+(M)$. Además $J^+(M) \subset M \subset Au(M)$, y como $Au(M)$ es una vecindad de M, es también vecindad de $J^+(M)$. Así pues $J^+(M)$ es un atractor uniforme.

(v) Se sabe que $J^+(M)$ es positivamente invariante, ya que es invariante (ver Cap. III. 4.).

(vi) Por (iv) y (v) y el teorema de la página 184, $J^+(M)$ es asintóticamente estable.

(vii) Finalmente, $A_u(J^+(M)) = A_u(M)$. Porque si $p \in A_u(J^+(M))$, entonces

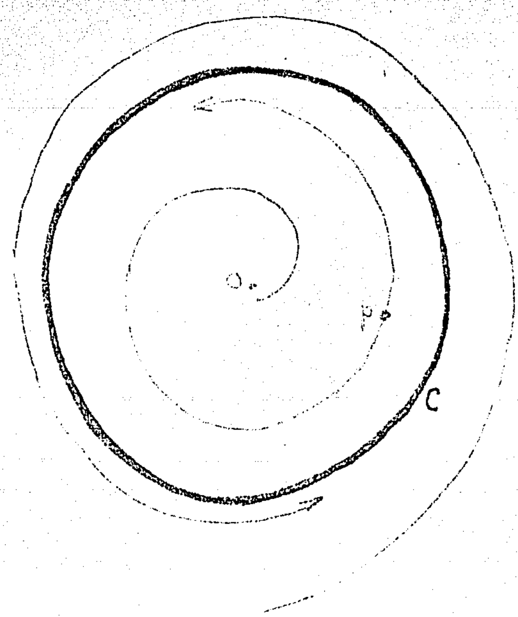
$$J^+(p) \subset J^+(M) \subset M,$$

esto es, $p \in A_u(M)$. //

§2. FUNCIONES DE LIAPUNOV

Ahora, nuestra intención es caracterizar a la estabilidad asintótica mediante el estudio de ciertas funciones escalares definidas en una vecindad de un conjunto compacto M. Este método recibe el nombre de <u>segundo método</u> o <u>método directo de Liapunov</u>, debido al matemático que lo introdujo.

Las funciones de Liapunov son funciones escalares no negativas que se anulan en el conjunto M y que decrecen a lo largo de las trayectorias del sistema. Esta característica es la que nos impide caracterizar, por ejemplo, a un atractor uniforme, pues si este no es invariante como en la siguiente figura



donde M es el atractor uniforme formado por el círculo C al que se le ha agregado el punto p, es decir, $M = C \cup \{p\}$, una función tal no puede ser encontrada.

Sin embargo, para la caracterización de la estabilidad asintótica se han encontrado fuertes resultados que generalizan a sistemas dinámicos los enunciados por Liapunov. Uno de estos resultados es el que a continuación se menciona (ver [1]):

<u>Teorema</u>. Un conjunto compacto $M \subset X$ es asintóticamente estable si y sólo si existe una función Φ continua con valores reales definida en una vecindad N de M tal que

1. $\Phi(x) = 0$ si $x \in M$,
   $\Phi(x) > 0$ si $x \notin M$;
2. $\Phi(\pi(x,t)) < \Phi(x)$ para $x \notin M$, $t > 0$ y $\pi(x, [0,t]) \subset N$.

En [1], se demuestra primero que la existencia de una función Φ con las propiedades mencionadas es una condición suficiente para la estabilidad asintótica de M. Al demostrar la necesidad de la existencia de una función Φ con las propiedades del teorema se define primeramente

$\psi(x)$, como una función que involucra la distancia del punto x al conjunto M, de la siguiente manera

$$\psi(x) = \sup\{d(\pi(x,t), M) : t \geq 0\}.$$

Esta función tiene las propiedades requeridas excepto, probablemente, la de ser decreciente a lo largo de las trayectorias. Se modifica entonces ψ de la siguiente manera

$$\int_0^\infty \psi(\pi(x,\tau))\, e^{-\tau}\, d\tau ,$$

y esta integral define una función $\Phi(x)$ que es la del teorema.

Ahora, consideremos un conjunto compacto M asintóticamente estable. Con la función

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \psi(\pi(x,\tau))\, e^{-\tau}\, d\tau$$

del teorema anterior, función que sabemos definida en una vecindad N de M, podemos nosotros definir, para cada x fija en N la siguiente función:

$$\varepsilon(t) = \Phi(\pi(x,t));$$

esto es,

$$\varepsilon(t) = \int_0^\infty \varphi[\pi(x, t+\tau)]\, e^{-\tau}\, d\tau ;$$

que haciendo el cambio de variable $s = t + \tau$, queda

$$\varepsilon(t) = e^{t} \int_t^\infty \varphi(\pi(x,s))\, e^{-s}\, ds.$$

Observamos primeramente que $\varepsilon(0) = \Phi(x)$. Esta función $\varepsilon(t)$ tiene además las propiedades que se mencionan en el siguiente lema.

<u>Lema</u>. Sean M un conjunto compacto asintóticamente estable y N la vecindad de M del teorema anterior. Entonces la función $\varepsilon(t)$ es diferenciable y, para $x \in N - M$, la derivada $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ es negativa.

Una demostración de este lema la damos en el Apéndice de este capítulo.

Finalmente demostraremos que en un sistema dinámico, los conjuntos compactos asintóticamente estables quedan caracterizados por los ceros de una función diferenciable.

<u>Teorema</u>. Un conjunto compacto $M \subset X$ es asintóticamente estable si y sólo si existe una función $\varepsilon(x,t)$ continua en las dos variables x, t y diferenciable con respecto a t, $\varepsilon(x,t): N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, (donde N es una vecindad de M), tal que

(i) $\varepsilon(x,0) = 0$ si $x \in M$,
$\varepsilon(x,0) > 0$ si $x \notin M$;

(ii) $\varepsilon(\pi(x,t),0) = \varepsilon(x,t)$;

(iii) $D_\pi \varepsilon < 0$, donde $D_\pi \varepsilon$ significa la derivada con respecto a t de la función $\varepsilon(x,t)$ a lo largo de las trayectorias.

<u>Demostración</u>. Ver apéndice F.

APÉNDICE AL CAPÍTULO IV.

A

Demostración de que

$$D^+(p) = \{q \in X : \text{existen sucesiones } \{p_n\} \subset X,\ \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tales que } p_n \to p \ \text{ y } \ \pi(p_n, t_n) \to q\}.$$

Sea $q \in D^+(p)$, es decir $q \in \bigcap_{\alpha > 0} \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$. Entonces, para cada $\alpha > 0$, $q \in \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}$, lo cual significa que o bien $q \in \gamma^+(S(p,\alpha))$ o q es punto límite de $\gamma^+(S(p,\alpha))$. Pero si $q \in \gamma^+(S(p,\alpha))$ para cada α, tiene que estar en la semitrayectoria positiva de p; es decir, para algún $t_1 \in \mathbb{R}^+$, $q = \pi(p, t_1)$. Y así podríamos tomar $p_n = p$ y $t_n = t_1$. Si q es punto límite de $\gamma^+(S(p,\alpha))$, tomamos vecindades de q y de p de radios iguales a $\frac{1}{n}$. Podemos entonces, tomar $p_n \in S(p, \frac{1}{n})$ y un t_n tal que $\pi(p_n, t_n) \in V_{\frac{1}{n}}(q)$. Claramente $p_n \to p$ y $\pi(p_n, t_n) \to q$.

Recíprocamente, si existen sucesiones $\{p_n\}$, $\{t_n\}$ tales que $p_n \to p$ y $\pi(p_n, t_n) \to q$, tenemos que demostrar que $q \in D^+(p)$. Sea $\alpha > 0$:

$$\gamma^+(S(p,\alpha)) = \{y \in X : \ y = \pi(x, t),\ x \in S(p,\alpha),\ t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Ahora: $p_n \in S(p,\alpha)$ para n mayor que una cierta N. Por lo tanto

$$\pi(p_n, t_n) \in \gamma^+(S(p,\alpha)),$$

en consecuencia

$$q \in \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))}.$$

y como α era arbitrario

$$q \in \bigcap \overline{\gamma^+(S(p,\alpha))} = D^+(p). \quad //$$

B

Demostración del siguiente teorema (ver p. 186)

> Sea M compacto. Entonces $p \in X$ está en la región de atracción uniforme de M si y sólo si $J^+(p) \neq \phi$ y $J^+(p) \subset M$.

Supongamos primero que para $p \in X$, $J^+(p) \neq \phi$ y $J^+(p) \subset M$. Esto implica que $\Lambda^+(p) \neq \phi$ y $\Lambda^+(p) \subset M$ (ver [1]). Supongamos que existe una vecindad $V = S(M,\alpha)$, $\alpha > 0$, tal que para cualquier vecindad U de p y $T > 0$ hay un $t > T$ tal que $\pi(U,t) \not\subset V$. Como $\Lambda^+(p) \neq \phi$ y $\Lambda^+(p) \subset M$, existe t_0 tal que $\pi(p,t) \in V$ para todo $t > t_0$. De esto se puede concluir que existen sucesiones $\{t_n\}$, $\{\tau_n\}$ en $\mathbb{R}^+$, con $t_n < \tau_n$, $t_n \to +\infty$ y una sucesión $\{p_n\}$ en X, $p_n \to p$, tales que $\pi(p_n, t_n) \in V$, pero $\pi(p_n, \tau_n) \in H(M,\alpha)$. (*) Puesto que

---

(*) $H(M,\alpha) = \{x \in X : d(x,M) = \alpha\}$.

$H(M,\alpha)$ puede suponerse compacto (ya que el espacio X es localmente compacto), existe una sucesión $\{p_n\}$, $p_n \to p$, y una sucesión $\{\tau_n\}$, $\tau_n \to +\infty$, con $\pi(p_n, \tau_n) \to q \in H(M,\alpha)$. Esto es, $q \in J^+(p)$, pero $q \notin M$. Esta contradicción prueba que $p \in Au(M)$.

Supongamos ahora que $p \in Au(M)$, es decir que para cualquier vecindad V de M existe una vecindad U de p y un $T > 0$ tales que $\pi(U,t) \subset V$ para todo $t \geq T$. Entonces $\overline{\pi(U,t)} \subset \overline{V}$. Esto muestra que $\pi(p,t) \in \overline{V}$ para $t \geq T$, y puesto que podemos suponer $\overline{V}$ compacto, tendremos $\Lambda^+(p) \neq \phi$. Por lo tanto $J^+(p) \neq \phi$. Claramente $J^+(p) \subset \overline{\pi(U,[t,+\infty))}$ para cualquier vecindad U de p y $t \in \mathbb{R}^+$. En consecuencia $J^+(p) \subset \overline{V}$ para cualquier vecindad V de M. Así que

$$J^+(p) \subset \bigcap \{\overline{V} : V \text{ es una vecindad de } M\} = M \quad //$$

C

Demostración de que si M es compacto, entonces $J^+(M)$ es cerrado e invariante. Primero demostramos que $J^+(M)$ es invariante. Sean $q_1 \in J^+(M)$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para algún $p \in M$, existen sucesiones $\{p_n\} \subset X$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $p_n \to p$, $t_n \to +\infty$ y $\pi(p_n, t_n) \to q_1$. Consideremos la sucesión $\tau_n = t_n + t$. Entonces, $\tau_n \to +\infty$ y

$$\pi(p_n, \tau_n) = \pi(p_n, t_n + t) = \pi(\pi(p_n, t_n), t) \to \pi(q_1, t)$$

(por la continuidad de π). Por lo tanto $\pi(q_1, t) \in J^+(M)$.

La demostración de que $J^+(M)$ es cerrado, corre de la siguiente manera.

Sea $\{q_n\}$ una sucesión en $J^+(M)$ con $q_n \to q$. Para cada entero k, existen sucesiones $\{p_n^k\}$, $\{t_n^k\}$ y un punto $p^k \in M$, tales que $p_n^k \to p^k$, $t_n^k \to +\infty$ y $\pi(p_n^k, t_n^k) \to q_k$. Podemos suponer, tomando subsucesiones si es necesario, que

$$t_n^k > k,$$

$$d(p_n^k, p^k) < \frac{1}{k},$$

$$d(\pi(p_n^k, t_n^k), q_k) < \frac{1}{k},$$

para todo $n \geq k$.

Como $\{p^1, p^2, \ldots, p^k, \ldots\} \subset M$ y M es compacto, podemos suponer que la sucesión $\{p^k\}$, o una subsucesión de ella, converge a un punto $p \in M$.

Consideremos ahora las sucesiones $\{p_n^n\}$, $\{t_n^n\}$. Se tiene lo siguiente:

(i) $p_n^n \to p$, (ii) $t_n^n \to +\infty$, (iii) $\pi(p_n^n, t_n^n) \to q$,

porque

(i) $t_n^n \to +\infty$, ya que $t_n^n > n$.

(ii) $d(p_n^n, p) \leq d(p_n^n, p^n) + d(p^n, p) < \frac{1}{n} + d(p^n, p)$.

(iii) $d(\pi(p_n^n, t_n^n), q) \leq d(\pi(p_n^n, t_n^n), q_n) + d(q_n, q)$

$$< \frac{1}{n} + d(q_n, q).$$

Por lo tanto, $q \in J^+(M)$, y $J^+(M)$ es cerrado. //

D

El lema enunciado en la página 186, es en realidad un corolario del siguiente teorema y su corolario

__Teorema__. Sean $p \in X$ y $\omega \in \Lambda^+(p)$. Entonces $J^+(p) \subset J^+(\omega)$;

cuya demostración puede verse en [1].

__Corolario__ Dados M y $p \in A_\omega(M)$, se tiene

$$J^+(p) \subset J^+(M).$$

Ahora nuestro lema se sigue del hecho de que

$$A_u(M) \subset A(M) \subset A_\omega(M).$$

E

Demostración del lema de la página 195. Que $\varepsilon(t)$ es diferenciable se infiere al aplicar el teorema fundamental del cálculo, ya que las funciones φ y π son continuas. Además, la derivada es

$$\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt} = e^{t}\int_t^{\infty}\varphi(\pi(x,s))\,e^{-s}\,ds - e^{t}\,\varphi(\pi(x,t))\,e^{-t}$$

$$= e^{t}\int_t^{\infty}\varphi(\pi(x,s))\,e^{-s}\,ds - \varphi(\pi(x,t)) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Para ver el signo, bastará calcular la derivada en $t=0$:

$$\left.\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_0^{\infty}\varphi(\pi(x,s))\,e^{-s}\,ds - \varphi(x)$$

$$= \Phi(x) - \varphi(x),$$

ya que, si en la expresión $(*)$ para la derivada hacemos $\pi(x,t)=y$ y efectuamos el cambio de variable $s=t+\tau$, obtendremos:

$$\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt} = e^{t}\int_t^{\infty}\varphi(\pi(x,s))\,e^{-s}\,ds - \varphi(y)$$

$$= \int_t^{\infty}\varphi(\pi(x,s))\,e^{t-s}\,ds - \varphi(y)$$

$$= \int_0^{\infty}\varphi(\pi(x,t+\tau))\,e^{-\tau}\,d\tau - \varphi(y)$$

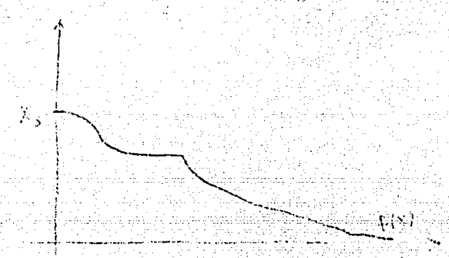
$$= \int_0^{\infty}\varphi[\pi(\pi(x,t),\tau)]\,e^{-\tau}\,d\tau - \varphi(y)$$

$$= \int_0^{\infty}\varphi(\pi(y,\tau))\,e^{-\tau}\,d\tau - \varphi(y) = \Phi(y) - \varphi(y).$$

Tenemos entonces que hacer ver que $\Phi(x) < \psi(x)$ para cada x.

Para simplificar, el problema lo podemos transformar en el siguiente:

Tenemos una función $f(x)$ continua y no-creciente, con $f(0) = x_0 > 0$, y además $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.



Consideramos la función

$$F(x) = e^x \int_x^\infty f(s) e^{-s} \, ds .$$

Y lo que tenemos que demostrar es que

$$x_0 \ngeq F(0).$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^\infty f(s) e^{-s} \, ds \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x) e^{-x} \, dx . \end{aligned}$$

Además

$$f(x) \leq f(0) = x_0 \quad \forall\, x. \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

Ahora bien, como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, podemos escoger $\alpha>0$, x_1, tales que

$$f(x)<\alpha<x_0 \qquad \forall\ x>x_1 \quad \ldots\ldots \ (2)$$

De manera que existe $h>0$ tal que $x_0=h+\alpha$, y tendremos lo siguiente:

$$\int_0^b f(x)\,e^{-x}dx=\int_0^{x_1} f(x)\,e^{-x}dx+\int_{x_1}^b f(x)\,e^{-x}dx \qquad (\text{con } b>x_1)$$

$$\leq x_0\int_0^{x_1} e^{-x}dx+\int_{x_1}^b f(x)\,e^{-x}dx \qquad (\text{por } (1))$$

$$< x_0\int_0^{x_1} e^{-x}dx+\alpha\int_{x_1}^b e^{-x}dx \qquad (\text{por } (2))$$

$$= x_0(1-e^{-x_1})+\alpha(e^{-x_1}-e^{-b})$$

$$= x_0(1-e^{-x_1})+(x_0-h)(e^{-x_1}-e^{-b})$$

$$= x_0(1-e^{-b})-h(e^{-x_1}-e^{-b})$$

Pasando al límite tendremos que

$$F(0)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,e^{-x}dx \leq \lim_{b\to\infty}\left[x_0(1-e^{-b})-h(e^{-x_1}-e^{-b})\right]$$

$$= x_0-h\,e^{-x_1}.$$

Obsérvese que $x_0-h\,e^{-x_1}>0$.

Es decir que $F(0)$ es estrictamente menor que x_0.

F

Demostración del teorema de la página 193. Si M es asintóticamente estable, el teorema de la página 193, asegura la existencia de una función continua Φ definida en una vecindad N de M, con valores reales y con las siguientes propiedades:

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{si } x \in M,$$

$$\Phi(x) > 0 \quad \text{si } x \notin M;$$

$$\Phi(\pi(x,t)) < \Phi(x) \quad \text{para } x \notin M, t>0 \text{ y } \pi(x,[0,t]) \subset N.$$

Pues bien, con esta función Φ hacemos ahora la siguiente función, definida en $N \times \mathbb{R}^+$:

$$\varepsilon(x,t) = \Phi(\pi(x,t)).$$

Afirmamos que ésta es la función cuya existencia se asegura en el teorema que estamos demostrando.

Efectivamente, como consecuencia directa de la definición de $\varepsilon(x,t)$ tendremos que

$$\varepsilon(x,0) = \Phi(\pi(x,0)) = \Phi(x).$$

Esto demuestra (i) en el teorema.

Observemos enseguida que

$$\varepsilon(\pi(x,t),0) = \Phi(\pi(\pi(x,t),0)) = \Phi(\pi(x,t+0)) = \Phi(\pi(x,t)) = \varepsilon(x,t).$$

Esto demuestra (ii).

Finalmente, para la demostración de (iii) observemos que tomar la derivada a lo largo de las trayectorias, es fijar un $x \in N - M$ y tomar la derivada de la función $\varepsilon(x,t) = \Phi(\pi(x,t))$, que, por el lema, es negativa.

Para el recíproco, hagamos

$$\Phi_1(x) = \varepsilon(x, 0).$$

Esta función Φ_1 tiene las siguientes propiedades: está definida en una vecindad de M, es continua y se cumple lo siguiente

$$\Phi_1(x) = 0 \qquad si \quad x \in M,$$

$$\Phi_1(x) > 0 \qquad si \quad x \notin M;$$

$$\Phi_1(\pi(x,t)) < \Phi_1(x) \quad para \quad x \notin M,\ t>0 \ y$$

$$\pi(x, [0,t]) \subset N.$$

Por el teorema de la página 193, M es asintóticamente estable. //

Bibliografía.

[1] Bhatia, N. P. and Szegö, Stability Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag. 1970.

[2] Brauer, Fred and Nohel, John A., The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. W. A. Benjamin, 1969

[3] Hirsch, Morris W. and Smale Stephen, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic Press, 1974

[4] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton University Press. 1960.

[5] Pontriaguin, L. S., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Aguilar. 1973.

[6] Sánchez, David A., Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction. W. H. Freeman. 1968.