ALGORITMOS BASICOS PARA MINIMIZAR FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

Ma. Guadalupe Juárez Godinez

MEXICO D.F. 1982

Indice

1a. Parte

2a. Parte

Métodos de Interpolación Polinomial

1.1 Introducción

En la práctica frecuentemente surge el problema de cómo cálcular el mínimo o el máximo de una función la cual puede ser de una variable o varias variables, y nos encontramos que la mayoría de los libros que tratan ese problema, ninguno hace una descripción clara de las ideas ni del desarrollo matemático y en algunos tampoco se proporciona el algoritmo en lenguaje fortran. Estas han sido unas de las principales razones que nos han motivado para desarrollar este trabajo. Por lo general este problema es conocido con el nombre técnico de "Optimización de Funciones sin Restricciones"*. Por ahora en nuestro trabajo solo será contemplado el problema de optimización sin restricciones de funciones de una variable unimodales, es decir funciones con un solo mínimo.

(*) Restricciones — (El dominio donde debe buscarse el mínimo de la función)

El desarrollo de este trabajo está dividido en dos partes; en la primera parte explicamos la idea en general de algunos de los métodos que nos interesan los cuales son seguros pero muy lentos y que son conocidos en la literatura como métodos de Busqueda Directa. Estos métodos tienen por objeto reducir el tamaño del intervalo donde se encuentra el mínimo. Algunos de los métodos que trataremos en esta parte son:

1) Método Cuasi - Bisección

2) Método de Fibonacci

3) Método Sección Aurea

4) Método de Gill y Murray

El objetivo en la segunda parte es estudiar métodos que sean más rápidos y que conserven las carácteristicas de los anteriores. Pues bien, aprovechando que los métodos de interpolación polinomial son rápidos aunque inseguros, combinamos sus ventajas con los que siempre convergen, de donde tal combinación nos da como resultado los métodos llamados híbridos. Algunos de estos métodos que describiremos en esta parte son:

1) Método híbrido que combina los métodos de Gill y Murray e Interpolación cuadrática

2) Método híbrido que combina los métodos de Gill y Murray e Interpolación cúbica

Al finalizar cada uno de los métodos presentamos su diagrama de flujo, así como la tabla respectiva en la que se encuentran los resultados obtenidos de las pruebas realizadas con cada uno de ellos.

El trabajo termina con la presentación de un apéndice general en el cual se encuentran la lista de las funciónes y los intervalos correspondientes con las cuales se hicieron las pruebas, así como las gráficas de cada una, y una tabla general con los resultados de todos los algo_ ritmos discutidos. Concluimos proporcionando la bibliografía correspondiente que fue empleada para su elaboración.

Es importante mencionar que tambien se hicieron pruebas con el método hibrido FMIN de Brent que es una versión análoga al método ZEROIN de Brent, para una descripción más detallada de este algoritmo consultese la tesis sobre "Algoritmos Básicos para el Cálculo de Ceros de Funciones Escalares" de Eduardo Tobías Guzmán.

Esperamos que este trabajo aclare un poco más las ideas de los métodos que resuelven este tipo de problemas.

Agradezco la dirección en el presente trabajo del Dr. Pablo Barrera Sanchez, sin la cual este no hubiera sido posible. Tambien agradezco la valiosa colaboración del profesor M. en C. Jesús López Estrada durante el desarrollo de este trabajo.

Agradezco la participación en la revisión de mi tesis, de los profesores.

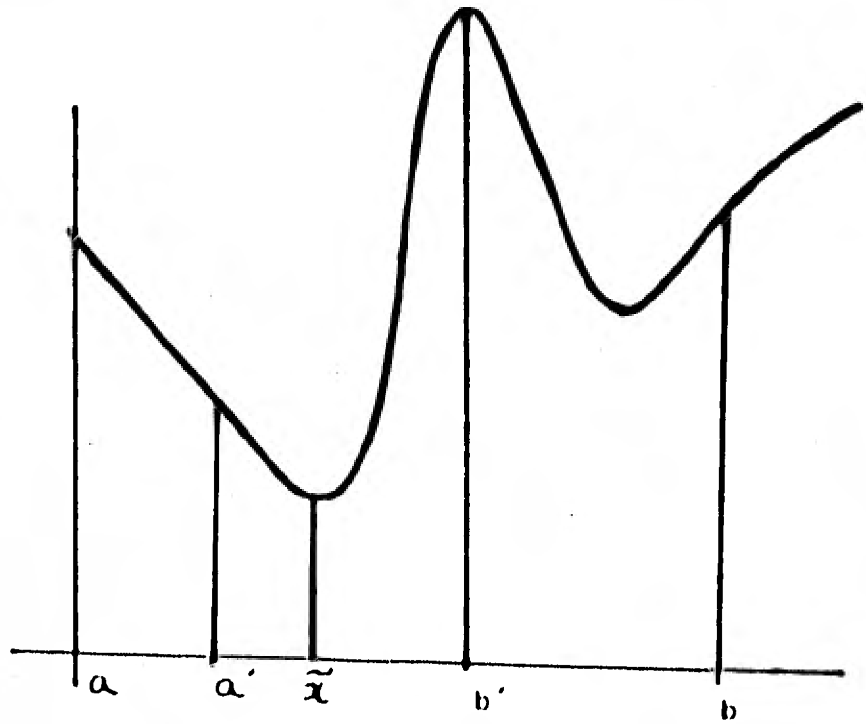
Mat. José López Estrada

Mat. María Elena García Alvarez

Mat. José Guerrero Grajeda.

1.2 Funciones Unimodales

En muchos casos el problema de encontrar el mínimo de una función f en un intervalo dado (a,b)



Se puede reducir al problema de encontrar el mínimo de $f(x)$ en un intervalo (a,b') donde la función tiene derivada monótona creciente.

Como se ve en la figura, la función es estrictamente monótona a ambos lados del mínimo $\tilde{x}$, en este caso decimos que la función es unimodal en el intervalo (a,b'). Resumiendo diremos que una función $f: [a,b] \to R$ es unimodal si:

i) Es continua

ii) alcanza su mínimo en (a,b')

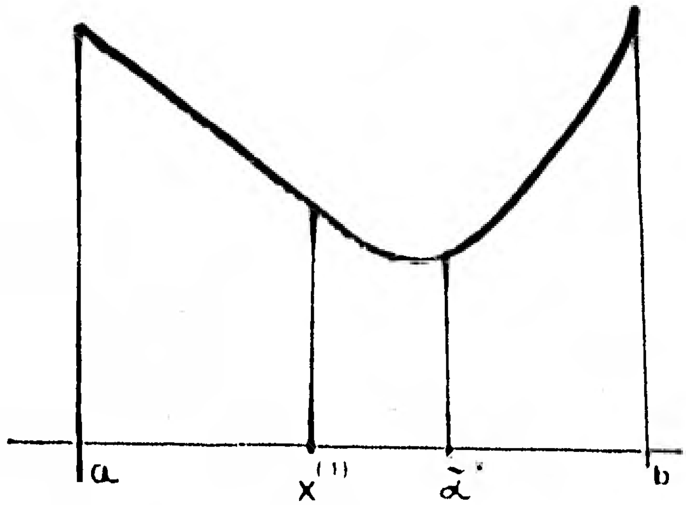
iii) Es estrictamente monótona a ambos lados del mínimo.

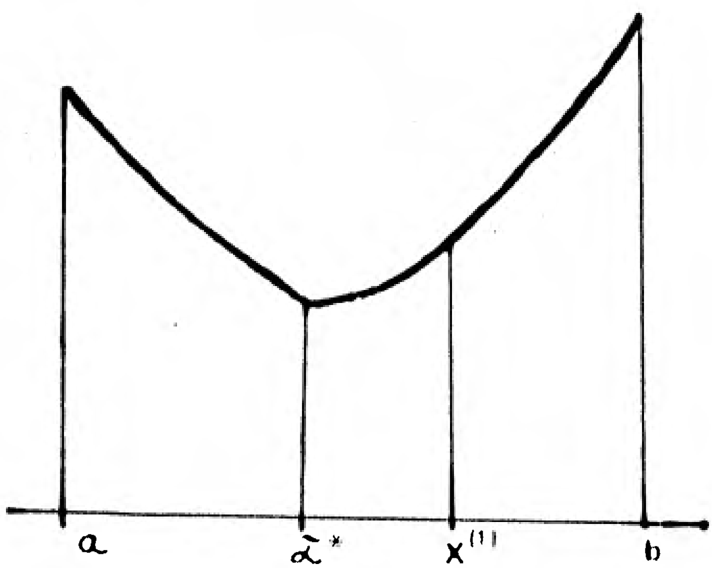
En base a esto tenemos el siguiente resultado:

Lema.- Si $f(x)$ es uni-modal en $[a,b]$ entonces es necesario evaluar a f por lo menos en dos puntos de $[a,b]$ para poder determinar un subintervalo de $[a,b]$ que contenga el mínimo de f.

Dem.

Sea $x^{(1)} \in (a,b)$ entonces los siguientes ejemplos demuestran que el mínimo, puede estar en cualquiera de los intervalos $(a, x^{(1)})$ ó $(x^{(1)}, b)$.

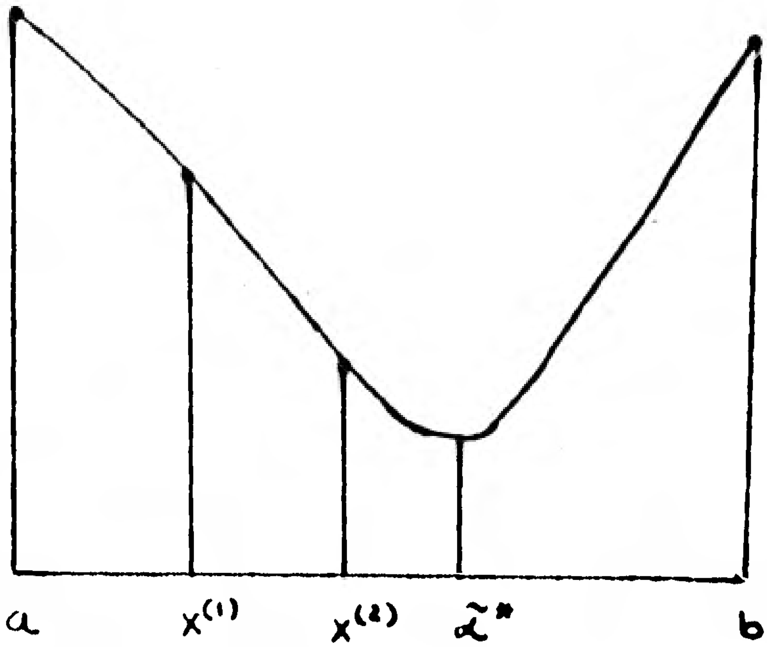




Sean $a < x^{(1)} < x^{(2)} < b$ y sea $\tilde{\alpha}^*$ el mínimo entonces :

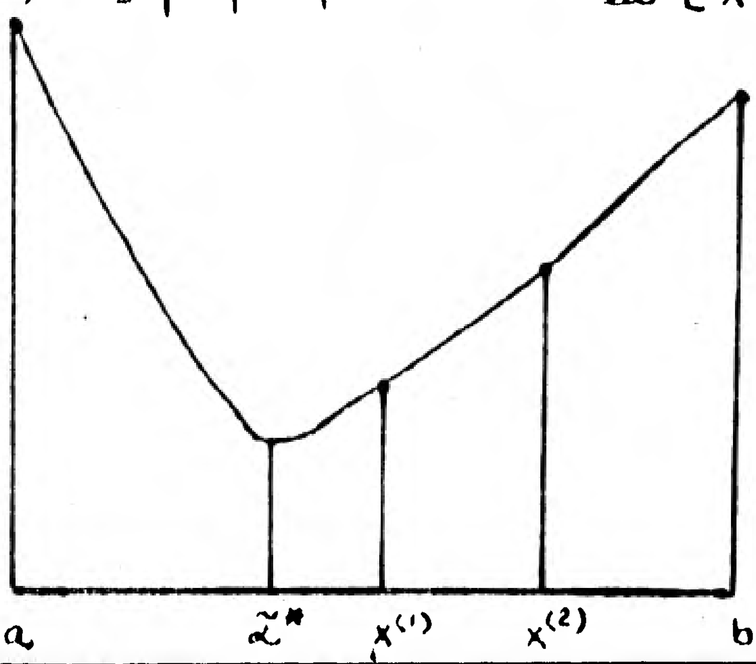
a) $f(x^{(1)}) > f(x^{(2)})$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}^* \in [x^{(1)}, b]$ porque f es decreciente en $[a, x^{(1)}]$



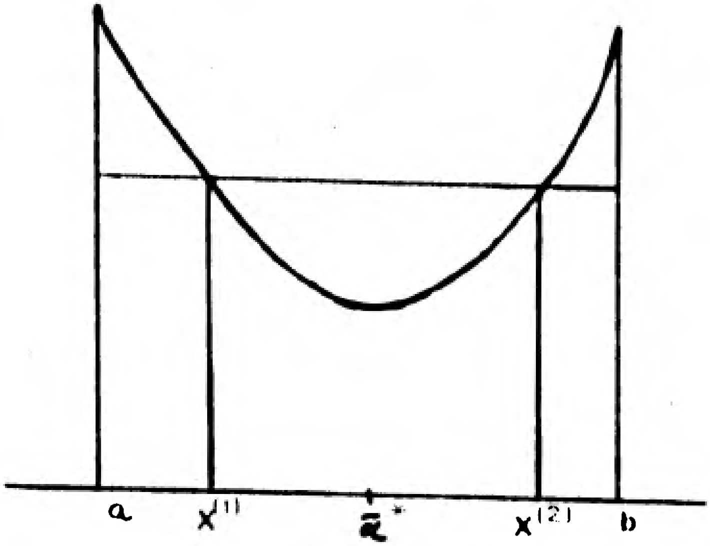
b) $f(x^{(1)}) < f(x^{(2)})$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}^* \in [a, x^{(2)}]$ porque f es creciente en $[x^{(2)}, b]$



c) $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)})$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}^* \in [x^{(1)}, x^{(2)}]$ porque es estrictamente monótona a cada lado de $\tilde{\alpha}^*$



De ahora en adelante vamos a considerar, sólo el caso cuando $f(x^{(1)}) \neq f(x^{(2)})$ que es el que se presenta en la práctica

Surge de manera natural la siguiente pregunta:

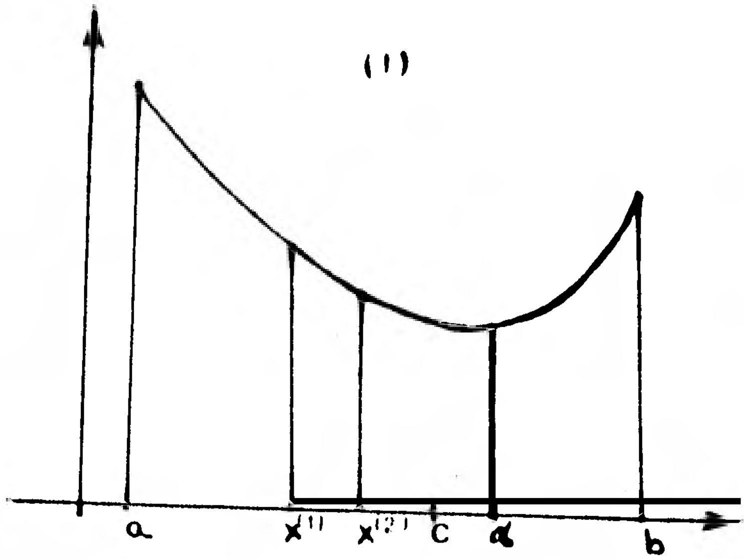
¿ Cómo escoger $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ en $[a,b]$, tal que sea posible obtener una reducción máxima del intervalo que contenga al mínimo?

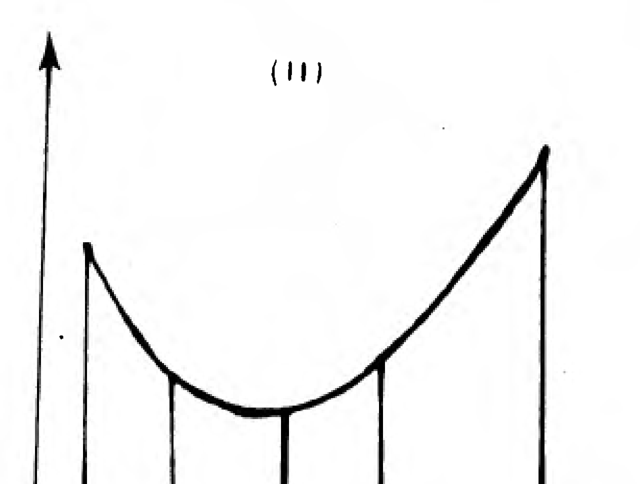
Antes de dar respuesta a la pregunta, consideremos las observaciones siguientes:

<u>Observación 1.-</u> Sean $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ en (a,b). Si $x^{(1)} < x^{(2)}$ entonces,

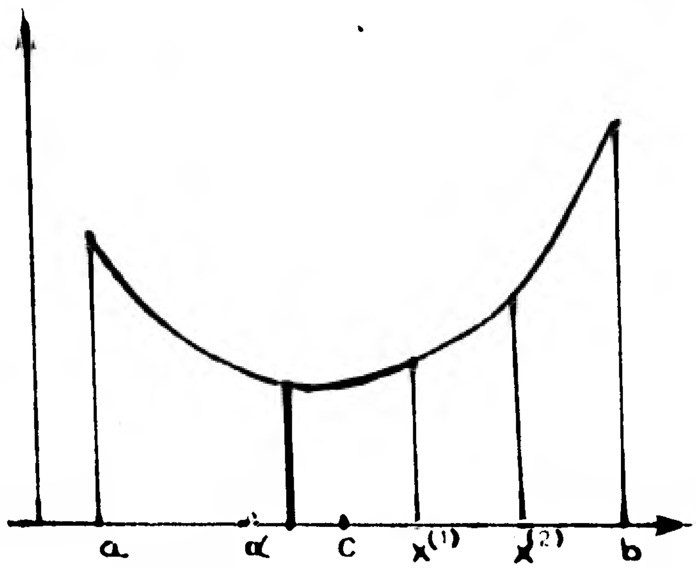
$$\max\left\{x^{(2)}-a,\ b-x^{(1)}\right\} \geq \frac{b-a}{2}$$

Se tienen tres casos, los cuales se ilustran en las siguientes figuras:





(III)



Para el caso (I):

Si $x^{(1)} < x^{(2)} \leq c = \dfrac{a+b}{2}$ entonces :

$x^{(2)} - a \leq c - a$ y $b - x^{(1)} > b - c$ luego

$$x^{(2)} - a \leq c - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$b - x^{(1)} > b - c = \frac{2b-(a+b)}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Consecuentemente

$$\max\left\{x^{(2)} - a, b - x^{(1)}\right\} > \frac{b-a}{2}$$

Los otros casos son completamente similares.

Observación 2.- $\displaystyle\inf_{x^{(1)} \neq x^{(2)}} \max\left\{x^{(2)} - a, b - x^{(1)}\right\} = \frac{b-a}{2}$

es directo ver que :

Observación 3.- $x^{(2)} - a = \max\left\{x^{(2)} - a, b - x^{(1)}\right\} = b - x^{(1)}$

si y sólo si $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ son simétricos respecto a $c = \dfrac{a+b}{2}$

Así, dada $\varepsilon > 0$ la menor reducción posible viene dada al tomar $x^{(1)} = c - \varepsilon/2$ y $x^{(2)} = c + \varepsilon/2$ en virtud de la tercera observación.

La discusión anterior la podemos resumir como sigue:

<u>Teorema</u>.- Si $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ están en $[a,b]$ y son tales que $x^{(2)} - x^{(1)} \geq \varepsilon$, para $\varepsilon \geq 0$, entonces la reducción máxima se alcanza cuando:

$$x^{(1)} = M - \varepsilon/2$$

$$x^{(2)} = M + \varepsilon/2$$

donde $$M = \frac{a+b}{2}$$

y $l(I^{(1)}) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2}$, donde $I^{(1)}$ es $[a, x^{(2)}]$ ó $[x^{(1)}, b]$

La segunda parte del teorema se sigue de que

$$x^{(2)} - a = M + \frac{\varepsilon}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore l(I^{(1)}) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

1.3 Método Cuasi - Bisección

En esta sección veremos un método para determinar el subintervalo de menor longitud donde se encuentra el mínimo de una función unimodal basado en la estrategia dada por el teorema de la sección anterior.

La idea del método consiste en aplicar dicha estrategia iterativamente, por lo que le llamaremos de cuasi-bisección.

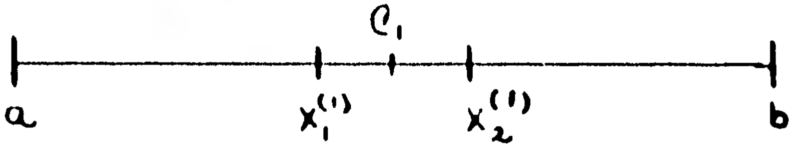
Explícitamente, el método consiste en lo siguiente:

Dada $\varepsilon > 0$, tomamos $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$ dados por

$$x_1^{(1)} \longleftarrow c_1 - \varepsilon/2$$

$$x_2^{(1)} \longleftarrow c_1 + \varepsilon/2$$

donde $c_1 \longleftarrow \dfrac{a+b}{2}$



Suponiendo que x^* el mínimo de $f : [a,b] \longrightarrow R$ está en $[a, x_2^{(1)}]$, tomamos $b \longleftarrow x_2^{(1)}$

$$x_1^{(2)} \longleftarrow c_2 - \varepsilon/2$$

$$x_2^{(2)} \longleftarrow c_2 + \varepsilon/2$$

donde $c_2 \longleftarrow \dfrac{a+b}{2}$

Con el propósito de tener un criterio para detener el proceso antes descrito, veamos que si denotamos

$$\tilde{a} = a \quad ; \quad \tilde{b} = x_2^{(1)} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces $\quad l(I^{(1)}) = \dfrac{b-a}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$

lo mismo ocurre

cuando $\tilde{a} = x^{(1)} = b - \dfrac{b+a}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \tilde{b} = b$

Así, tenemos que:

$$l(I^{(2)}) = \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$

se sigue por inducción que:

$$l(I^{(k)}) = \frac{1}{2^k}[b-a+\varepsilon] + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k-2}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b-a}{2^k} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

esto lo podemos resumir como sigue

Proposición.- La longitud del n-ésimo subintervalo producido por cuasi-bisección viene dado por

$$(1.3.1) \;------\; l(I^{(n)}) = \frac{b-a}{2^n} + \varepsilon\left(1 - 1/2^n\right)$$

Un problema que se presenta en la práctica con este método es el hecho de que para cada función hay una $\varepsilon_f > 0$ (resolución), tal que el valor de la función no cambia al evaluarla en la computadora, es decir,

$$\hat{f}(x+z) = \hat{f}(x),$$

si $|z| \leq \varepsilon_f$,

donde $\hat{f}$ es el valor de f obtenido en la computadora, lo cual se debe a dos cosas:

1a. Función

2a. Al sistema de punto flotante que se esté usando

Cuando nuestra función es monótona creciente o monótona decreciente y los puntos están muy cercanos la propiedad de que $f(x_1) < f(x_2)$ no se cumple y esto hace que el algoritmo fracase; por ello es necesario elegir una ε (epsilon) $> \varepsilon_f$ (resolución).

Para terminar con esta sección daremos una descripción breve del algoritmo, su diagrama de flujo y finalmente las tablas de las pruebas realizadas donde se encuentran recopilados los resultados obtenidos. Denotaremos por C las funciones que converjan, con F las funciones que fracasen y por NEVALF el número de evaluaciones de la función en cada una. La lista de las funciones y los intervalos correspondientes con las que se hicieron las pruebas aparecen en el apéndice general, así como sus gráficas correspondientes

Descripción del Algoritmo Cuasi - Bisección

Dado un intervalo de búsqueda [A, B], una cierta tolerancia absoluta o una cierta tolerancia relativa y una cierta EPS (epsilon) el algoritmo procede como sigue:

1.- Se calcula N el número de iteraciones necesarias

Si se dá una tolerancia absoluta

$N \longleftarrow \log((B-A)/(\text{Tolabs} - EPS))/\log(2.)$; vaya al paso 2

si se dá una tolerancia relativa

$N \longleftarrow (\log(B-A)) - (\log(EPS)) - (\log(\text{Tolrel}))/\log(2.)$

2.- Evaluamos la función en A, B

$FA \longleftarrow F(A)$

$FB \longleftarrow F(B)$

3.- Calculamos el punto medio

$M \longleftarrow \frac{A+B}{2}$

4.- Calculamos los puntos x_1 y x_2

$X_1 \longleftarrow M - EPS/2$

$X_2 \longleftarrow M + EPS/2$

5.- Evaluamos la función en los puntos x_1 y x_2

$F_1 \longleftarrow F(X_1)$

$F_2 \longleftarrow F(X_2)$

6.- Checamos si la función es unimodal ; si lo es vaya al paso 7

en caso contrario vaya al paso 11

7.- Si $(F_1 > F2)$; vaya al paso 8

en caso contrario hacemos :

$A \longleftarrow A$

$B \longleftarrow X_2$

$FA \longleftarrow FA$

$FB \longleftarrow F_2$; vaya al paso 9

8.- $A \longleftarrow X_1$

$B \longleftarrow B$

$FA \longleftarrow F_1$

$FB \longleftarrow FB$

9.- Si $(ITER > N)$; vaya al paso 10

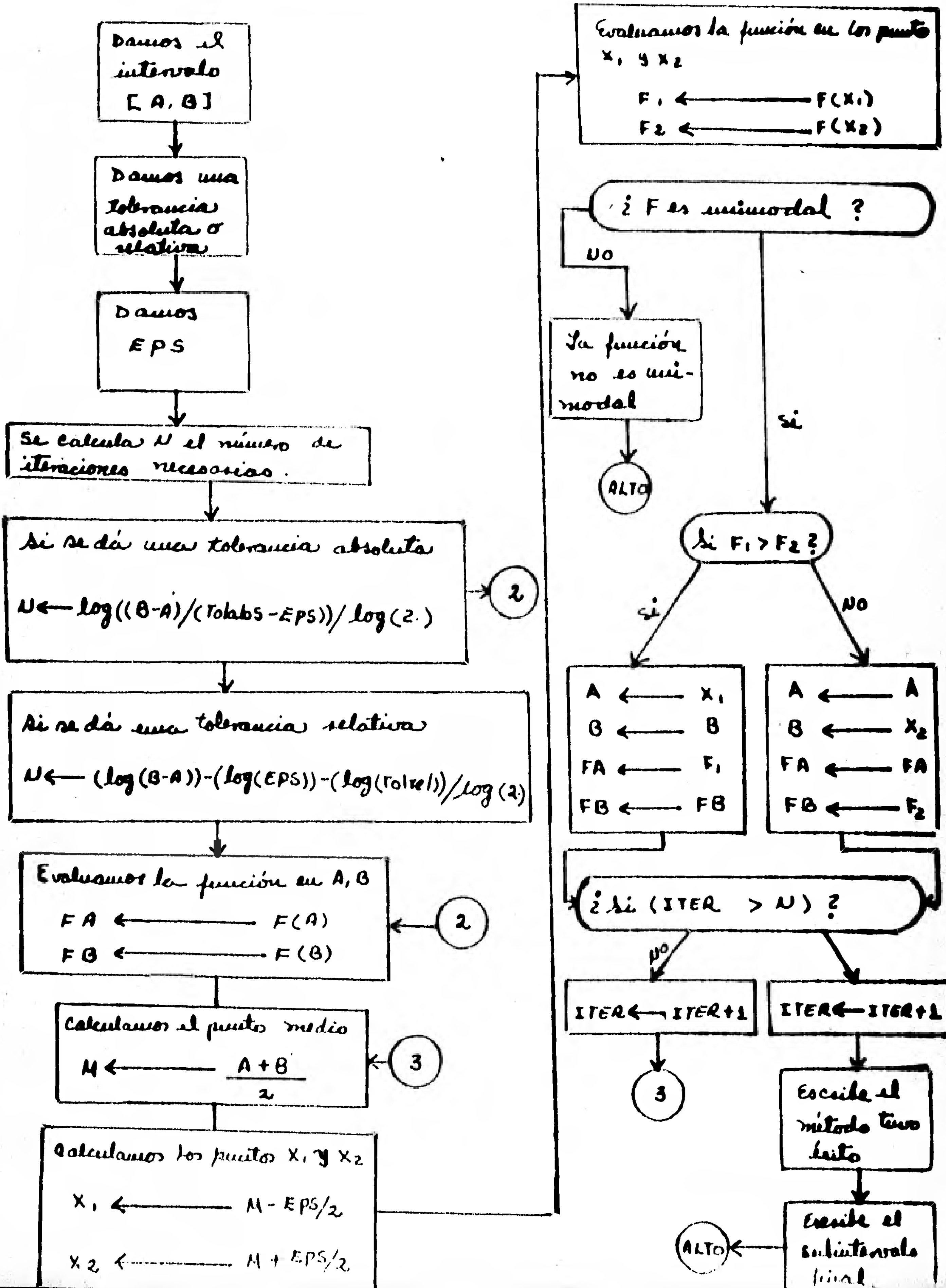
en caso contrario

$ITER \longleftarrow ITER + 1$; vaya al paso 3

10.- $ITER \longleftarrow ITER + 1$; escribe el método tuvo éxito, el subintervalo final obtenido y el algoritmo se detiene.

11.- Escribe la función no es unimodal y el algoritmo se detiene.

DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE CUASI-BISECCION



Damos el intervalo [A, B]
Damos una tolerancia absoluta o relativa
Damos EPS
Se calcula N el número de iteraciones necesarias.
Si se dá una tolerancia absoluta
N ← log((B-A)/(Tolabs-EPS))/log(2.)
2
Si se dá una tolerancia relativa
N ← (log(B-A))-(log(EPS))-(log(Tolrel))/log(2)
Evaluamos la función en A, B
FA ← F(A)
FB ← F(B)
2
Calculamos el punto medio
M ← (A+B)/2
3
Calculamos los puntos X1 y X2
X1 ← M - EPS/2
X2 ← M + EPS/2
Evaluamos la función en los puntos X1 y X2
F1 ← F(X1)
F2 ← F(X2)
¿ F es unimodal ?
NO
La función no es unimodal
ALTO
si
¿ Si F1 > F2 ?
si
NO
A ← X1
B ← B
FA ← F1
FB ← FB
A ← A
B ← X2
FA ← FA
FB ← F2
¿ Si (ITER > N) ?
NO
ITER ← ITER+1
3
ITER ← ITER+1
Escribe el método tuvo éxito
Escribe el subintervalo final
ALTO

Resultados Producidos por el Método de Cuasi-Bisección

	NEVALF	EPS = .01 ; Tolabs = .05	
1		F	La función no es unimodal
2		F	La función no es unimodal
3	24	C	A = 1.24 B = 1.25
4		F	La función no es unimodal
5	22	C	A = 2.99 B = 3.01
6		F	La función no es unimodal
7		F	"
8		F	"
9		F	"
10		F	"
11		F	"

1.4 Método de Fibonacci

Cuando que en algunos problemas sólo se dispone de un número determinado de evaluaciones debido a variadas razones entre ellas que en ciertos problemas el tiempo de máquina por evaluación resulta ser muy costoso. En consecuencia se hace necesario diseñar una "estrategia óptima", en el sentido que permita determinar el menor subintervalo posible de $[a, b]$ que contenga el mínimo de la función disponiendo de sólo n evaluaciones.

En la sección anterior hemos hallado dicha estrategia para el caso $n = 2$.

Analicemos primero el caso particular $n = 4$. Esto es tratamos de dar respuesta a la pregunta: ¿En que puntos debemos evaluor la función para obtener una reducción máxima del intervalo con sólo 4 evaluaciones?

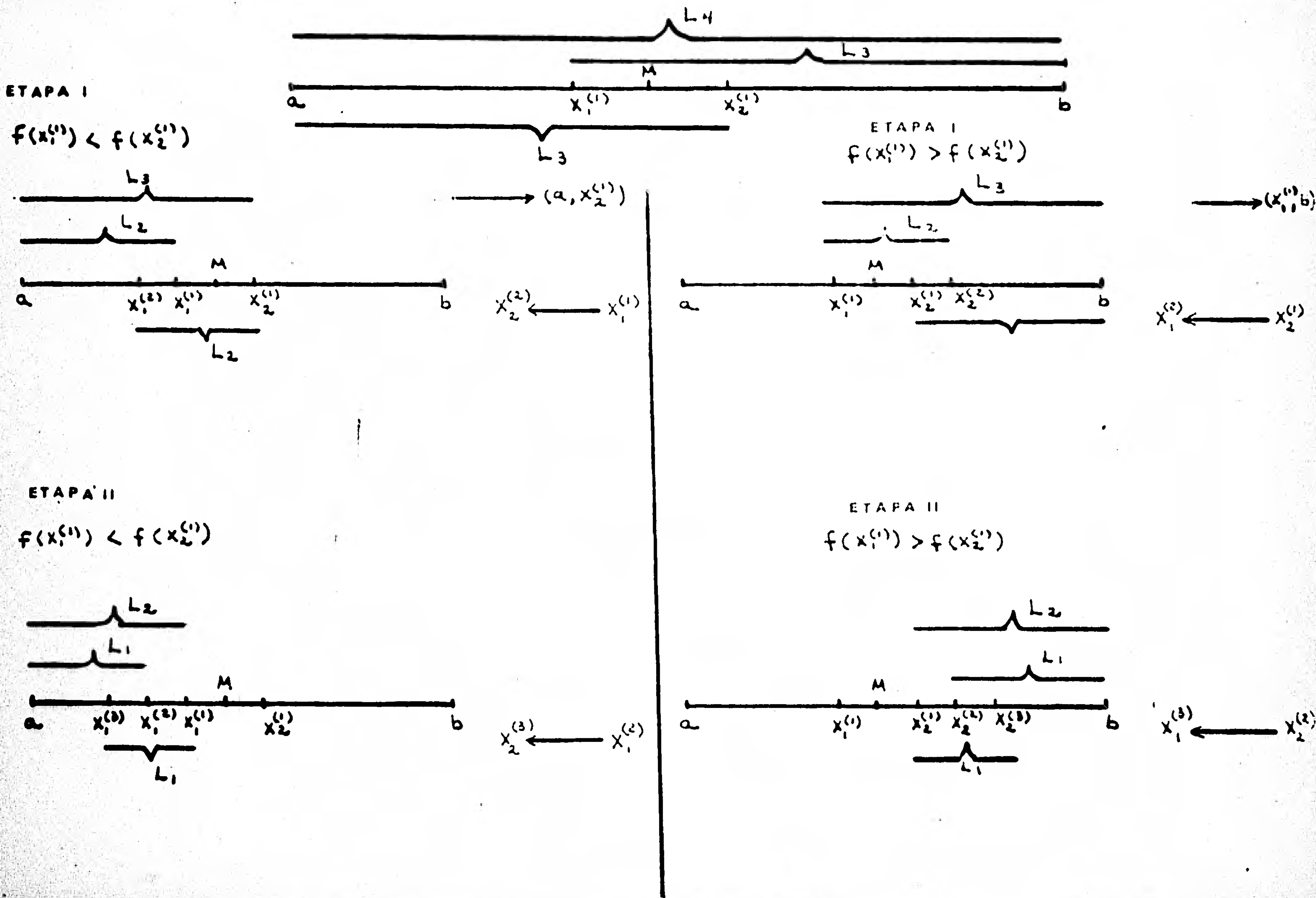
Para determinar óptimamente el subintervalo de $[a,b]$ que contenga al mínimo de f, se requiere de dos evaluaciones $f(x_1)$ y $f(x_2)$, tales que:

$$l(a, x_2) = l(x_1, b)$$

se comparan los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de f eligiendo el subintervalo $[a, x_2]$ si $f(x_1) < f(x_2)$ o (el subintervalo $[x_1, b]$ en caso de que $f(x_1) > f(x_2)$). A continuación procedemos iterativamente, repitiendo el esquema anterior hasta agotar el número ...

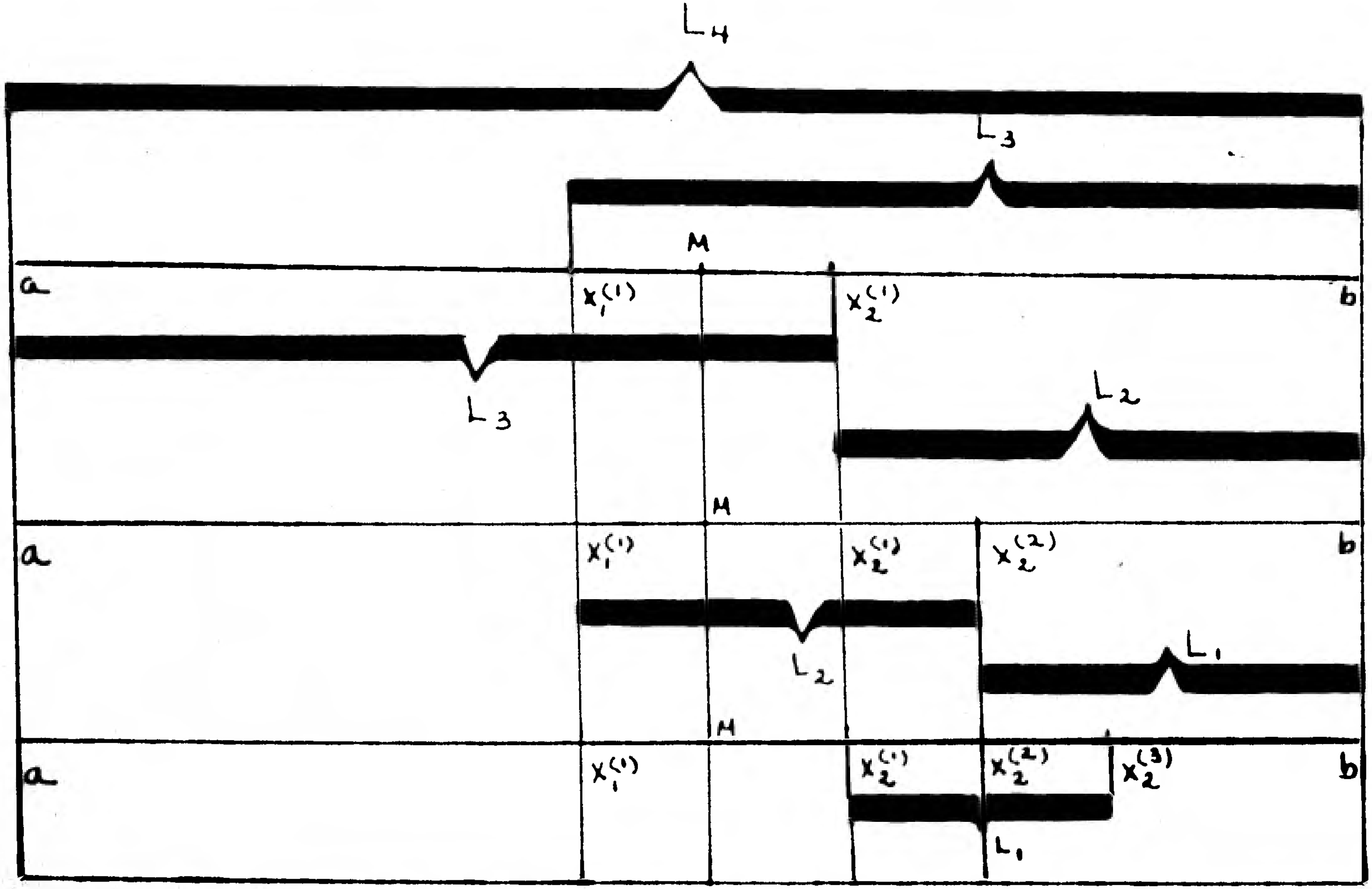
evaluaciones disponibles, haciendo uso de la evaluación en $f(x_1)$ o $f(x_2)$ nos ahorramos en consecuencia una evaluación para hacer la comparación entre los valores de la función, a partir del segundo paso, es decir la idea consiste en tratar de usar a $x_1 \in [a, x_2]$ como uno de los puntos en la segunda etapa o a $x_2 \in [x_1, b]$, según sea el caso.

A continuación se ilustran algunos de los posibles casos que se presentan en las dos primeras etapas para el caso $n = 4$. Con el propósito de ir conociendo en que paso vamos, denotaremos los puntos como $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, con $k = 1, 2, 3, \ldots$.



ETAPA I
f(x1(1)) < f(x2(1))
L4
L3
M
a
x1(1)
x2(1)
b
L3
L2
(a, x2(1))
x2(2) ← x1(1)
ETAPA I
f(x1(1)) > f(x2(1))
(x1(1), b)
x1(2) ← x2(1)
ETAPA II
f(x1(1)) < f(x2(1))
L2
L1
x1(3) x1(2) x1(1)
x2(3) ← x1(2)
ETAPA II
f(x1(1)) > f(x2(1))
x2(1) x2(2) x2(3)
x1(3) ← x2(2)

En la figura siguiente se ilustran de manera global, algunas de las posibles generaciones de subintervalos producidos por el procedimiento anterior.



Ahora, observemos que en base a la estrategia anterior se obtienen las siguientes relaciones :

$$L_4 = L_3 + L_2 ,$$
$$L_3 = L_2 + L_1 \quad .$$

Teniendo en cuenta las consideraciones discutidas en la sección (1.2), la última de las relaciones anteriores debe ser

$$L_2 = 2L_1 - \varepsilon \quad ,$$

donde $\quad 0 < \varepsilon << L_1 \quad .$

Ahora, veamos que conociendo L_1 y ε podemos determinar a L_2, en base a L_1 y L_2 podemos determinar a L_3 y en base a L_3 y L_2, L_4 queda determinada.

Por último procedemos a escribir las relaciones desde L_4 hasta L_2 en términos de $l = (b-a)$ y ε (epsilon), para así obtener la "sucesión" desde L_4 hasta L_1.

De
$$L_4 = L_3 + L_2 \quad ,$$
$$L_3 = L_2 + L_1 \quad ,$$
$$L_2 = 2L_1 - \varepsilon \quad ,$$

se tiene que

$$L_3 = 2L_1 - \varepsilon + L_1 = 3L_1 - \varepsilon \quad ,$$
$$L_4 = 3L_1 - \varepsilon + 2L_1 - \varepsilon = 5L_1 - 2\varepsilon \, ,$$

luego

$$5L_1 - 2\varepsilon = l = (b-a) \quad ,$$

o bién

$$L_1 = \frac{l}{5} + \frac{2}{5}\varepsilon \quad .$$

De cuya expresión se sigue directamente que:

$$L_2 = \frac{2}{5}l - \frac{\varepsilon}{5} \quad ,$$

$$L_3 = \frac{3}{5}l + \frac{\varepsilon}{5} \quad .$$

Pasando al caso general, procedemos de manera análoga al caso particular anterior. Así si sólo disponemos de n evaluaciones de la función, se tienen las siguientes relaciones:

$$(1.4.1) \text{------} \left\{ \begin{array}{ll} L_n = L_{n-1} + L_{n-2} & , \\ L_{n-1} = L_{n-2} + L_{n-3} & , \\ \vdots & \\ L_3 = L_2 + L_1 & , \\ L_2 = 2L_1 - \varepsilon & , \end{array} \right.$$

de donde vemos que conociendo a L_1 y ε determinamos a L_2 y en base a L_1 y L_2 podemos determinar a L_3, y así hasta llegar a L_n, la cual queda determinada en base a L_{n-1} y L_{n-2}.

Es deseable poder escribir a $L_1, L_2, \ldots, L_n$ en términos de l y ε (epsilon). Para ello observemos que la expresión

$$(1.4.2) \text{------} \quad L_{k+2} = L_k + L_{k+1} \,,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-2$, esta relacionada con la ecuación en diferencias de Fibonacci.

En la expresión anterior, cuando k se hace variar sobre todos los enteros no-negativos se obtiene dicha ecuación.

Nótese que dados L_0 y L_1 se tiene una sucesión bien definida. La sucesión generada por $L_0 = L_1 = 1$ es conocida, como la sucesión de Fibonacci, la cual para distinguirla de cualquier otra que satisfaga dicha ecuación, la denotaremos como sigue:

$$F_0 = F_1 = 1 \,,$$

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1} \,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Es natural esperar que la sucesión de Fibonacci este relacionada con nuestras relaciones (1.4.1).

En efecto veamos que la relación

$$L_2 = 2L_1 - \varepsilon$$

la podemos escribir como:

$$L_2 = F_2 L_1 - F_0 \varepsilon \,,$$

veamos también que:

$$L_3 = L_2 + L_1$$

$$= (F_2 L_1 - F_0 \varepsilon) + L_1$$

$$= (F_2 + F_1) L_1 - F_0 \varepsilon$$

$$= F_3 L_1 - F_1 \varepsilon \quad ,$$

$$L_3 = F_3 L_1 - F_1 \varepsilon \quad .$$

En general se sigue por inducción que:

(1.4.4) ------ $L_k = F_k L_1 - F_{k-2} \varepsilon$.

Haciendo uso de la relación (1.4.4) en términos de $k = n$ se tiene lo siguiente:

$$L_n = F_n L_1 - F_{n-2} \varepsilon \quad ,$$

denotando $\quad l = L_n \quad ,$

se sigue que:

$$l = L_n = F_n L_1 - F_{n-2} \varepsilon \quad ,$$

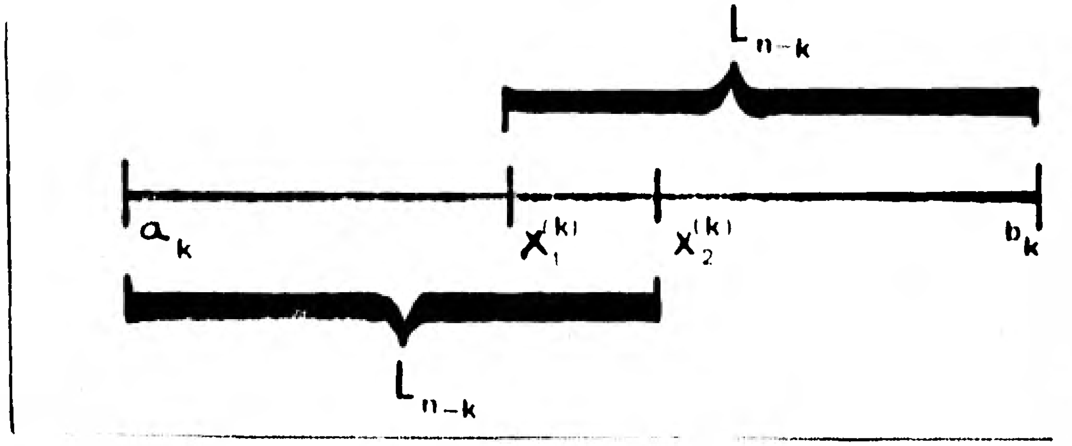
de donde

$$L_1 = \frac{l}{F_n} + \frac{F_{n-2}}{F_n} \varepsilon$$

es la longitud del último sub-intervalo que contiene al punto donde la función alcanza su mínimo producido por la estrategia antes discutida disponiendo de sólo n evaluaciones.

Dicha estrategia de búsqueda es conocida en la literatura como búsqueda de Fibonacci.

Con el propósito de escribir los puntos de evaluación en términos de los números de Fibonacci vemos que:



$$X_1^{(k)} = b_k - L_{n-k} \quad ,$$

$$X_2^{(k)} = a_k + L_{n-k} \quad ,$$

en la k-ésima etapa de la estrategia.

Ahora de (1.4.4) se sigue que:

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = \frac{F_{j-1}L_1 - F_{j-3}\,\varepsilon}{F_j L_1 - F_{j-2}\,\varepsilon} \quad ,$$

lo que da lugar a la aproximación

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} \simeq \frac{F_{j-1}}{F_j} \quad .$$

Si suponemos que $0 < \varepsilon << L_1$

$$(1.4.6) \text{------} \quad L_{j-1} \approx \frac{F_{j-1}}{F_j} L_j$$

Se tiene que $x_1^{(k)}$ viene dada por la siguiente relación, tomando $j = n-k+1$, $L_{n-k} = (b_k - a_k)$ en la expresión (1.4.6)

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= b_k - L_{n-k} \\ &= b_k - a_k + a_k - L_{n-k} \\ &= (b_k - a_k) - L_{n-k} + a_k \\ &= (b_k - a_k) - \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) + a_k \\ &= \frac{F_{n-k+1}(b_k - a_k) - F_{n-k}(b_k - a_k)}{F_{n-k+1}} + a_k \\ &= \frac{(F_{n-k+1} - F_{n-k})(b_k - a_k)}{F_{n-k+1}} + a_k . \end{aligned}$$

Por los números de Fibonacci tenemos

$$F_{n-k+1} = F_{n-k} + F_{n-k-1} ,$$

o bien que,

$$F_{n-k-1} = F_{n-k+1} - F_{n-k} ,$$

en base a estas relaciones, la última expresión toma la forma:

$$(1.4.7) \text{------} \quad x_1^{(k)} = \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) + a_k .$$

Tenemos que

$$x_2^{(k)} - a_k = b_k - x_1^{(k)} = b_k - \left[\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) + a_k \right]$$

$$= b_k - a_k - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k)$$

$$= \frac{F_{n-k+1}(b_k - a_k) - F_{n-k-1}(b_k - a_k)}{F_{n-k+1}}$$

$$= \frac{(F_{n-k+1} - F_{n-k-1})(b_k - a_k)}{F_{n-k+1}} ,$$

en base a las relaciones anteriores de los números de Fibonacci, la última expresión toma la forma:

$$x_2^{(k)} - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) ,$$

de donde

$$(1.4.8) \text{ --------- } x_2^{(k)} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) + a_k .$$

Ahora como se vio anteriormente, al ir obteniendo reducciones en nuestro intervalo, hemos visto que vamos obteniendo dos subintervalos, y que escogemos uno de los dos dependiendo en cuál de ellos, el valor de la función es menor, a la vez que eliminamos el subintervalo.

en el cual el valor de la función es mayor.

Bien si se tiene que:

$$f(x_2^{(k)}) > f(x_1^{(k)}),$$

no es difícil ver que

$$x_1^{(k)} = x_2^{(k+1)} .$$

En efecto, como

$$a_{k+1} = a_k ,$$

$$b_{k+1} = x_2^{(k)} ,$$

$$x_2^{(k)} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) + a_k ,$$

se sigue que

$$x_2^{(k+1)} = \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} (b_{k+1} - a_{k+1}) + a_{k+1}$$

$$= \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} (x_2^{(k)} - a_k) + a_k$$

$$= \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} \left(\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) + a_k - a_k \right) + a_k$$

$$= \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) + a_k$$

$$= x_1^{(k)} ,$$

esto es, sólo se requiere de una evaluación por etapa.

Ahora veamos que para $k = n-1$, (1.4.7) y (1.4.8) dan:

$$x_1^{(n-1)} = \frac{F_0}{F_2}(b_{k-1}-a_{k-1})+a_{k-1} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$$

$$x_2^{(n-1)} = \frac{F_1}{F_2}(b_{k-1}-a_{k-1})+a_{k-1} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$$

Por tanto en vez de estas relaciones tomamos las siguientes :

$$\tilde{x}_1^{(n-1)} = x_1^{(n-1)} \quad ,$$
$$\tilde{x}_2^{(n-1)} = x_1^{(n-1)} + \varepsilon \quad , \quad (0<\varepsilon<<L_1)$$

para poder determinar el subintervalo que contiene al mínimo.

Resumiendo toda la discusión anterior tenemos el siguiente teorema :

<u>Teorema :</u> La longitud del último subintervalo de $[a,b]$ que contiene al punto donde la función alcanza su mínimo, producido por la estrategia de Fibonacci, en la cual sólo se disponen de n evaluaciones, viene dada por

$$L_1 = \frac{l}{F_n} + \frac{F_{n-2}}{F_n}\varepsilon$$

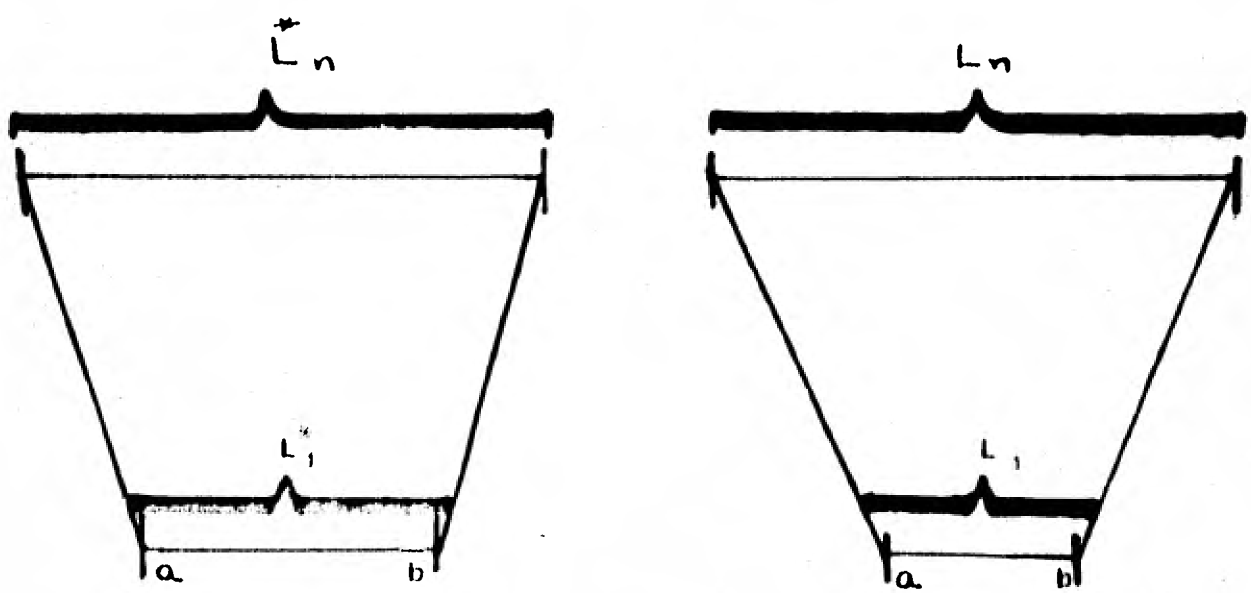
y los puntos de evaluación $x_1^{(k)}$ y $x_2^{(k)}$ elegidos en términos de dicha estrategia, están determinados por las siguientes relaciones :

$$x_1^{(k)} = \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k-a_k)+a_k \quad ,$$

$$x_2^{(k)} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) + a_k$$

Para finalizar, demostremos que el método de búsqueda de Fibonacci es óptimo en el sentido siguiente: Supóngase la existencia de otro método "M" de búsqueda que trabaja con n evaluaciones, pero que los puntos de evaluación son escogidos de manera diferente a la estrategia del método de Fibonacci y supóngase que L_1^* es la longitud del último subintervalo producido por el método, que contiene al mínimo de $f: [a,b] \to R$. Afirmamos que:

$$L_1 \leq L_1^*$$



$(L_n = L_n^*)$

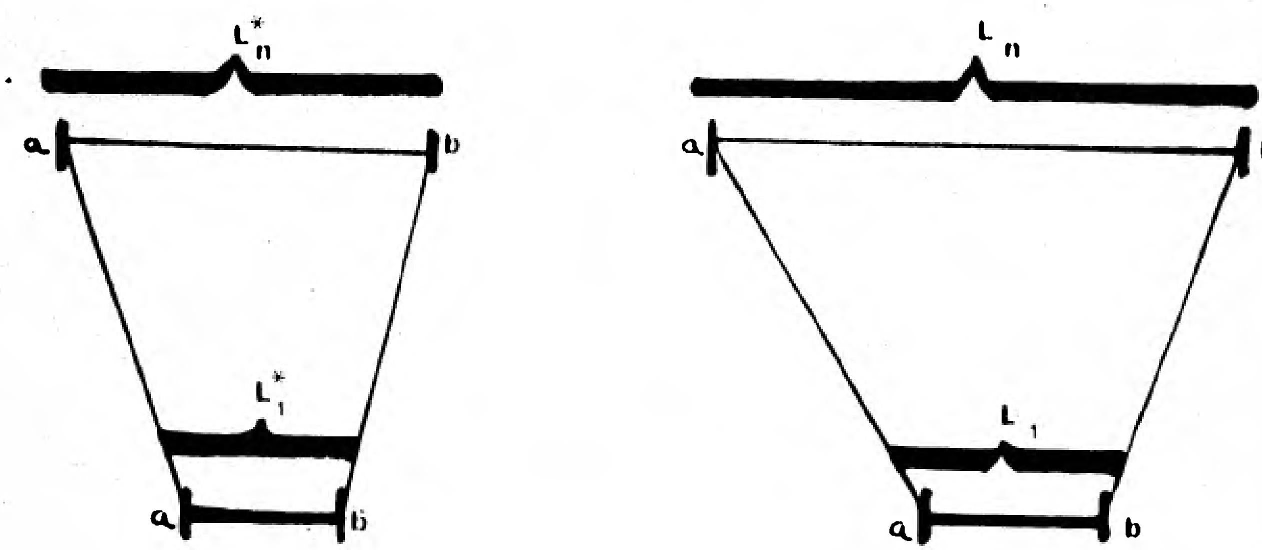
en donde L_1 es la longitud del último subintervalo producido por el método de Fibonacci.

Dem. La desigualdad anterior es equivalente a la siguiente:

$$\frac{L_1}{L_n} \leq \frac{L_1^*}{L_n^*},$$

ya que $L_n = L_n^* = (b-a)$. Pero ésta, a su vez, es equivalente a la desigualdad

$$L_n \geq L_n^* \quad ; \text{ si } L_1 = L_1^* .$$



$$\left(\begin{array}{c} L_n \neq L_n^* \\ \text{Sup. } L_1 = L_1^* = 1 \end{array} \right)$$

así demostrar que

$$L_1 \leq \overset{*}{L}_1$$

es equivalente a demostrar que:

$$L_n \geq \overset{*}{L}_n$$

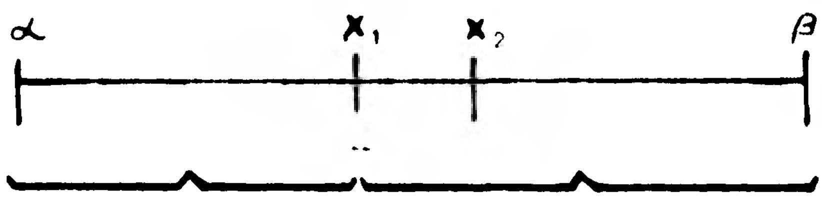
A continuación se verá que $L_1 = \overset{*}{L}_1$.

La demostración es por inducción sobre n. Para $n = 2$ es claro.

Supongamos que es cierto para toda $k < n$ y hagamos ver que es cierto para n, como sigue:

Sea $\overset{*}{L}_n$ la longitud de cierto intervalo $[\alpha, \beta]$ y sean x_1 y x_2 con $x_1 < x_2$, dos puntos de evaluación determinados por el método "M", x_1 y x_2 no tienen porque ser simétricos respecto a $c = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Ahora si el mínimo estuviera en (x_1, b) entonces necesitaríamos $(n-1)$ evaluaciones para obtener el último subintervalo que contenga al mínimo, ya que contamos con la evaluación en $x^{(2)}$ que pertenece a (x_1, b) y si el mínimo estuviera en (a, x_2) entonces necesitaríamos $(n-2)$ evaluaciones para obtener el último subintervalo que contenga al mínimo, como se ilustra a continuación:



(n-2) evaluaciones se requieren para determinar a L_1.

Como se dispone de la evaluación en x_2 se requieren $(n-1)$ evaluaciones para determinar a L_1.

En consecuencia, $x_1 - \alpha \le L_{n-2}$ y $\beta - x_1 \le L_{n-1}$, por la hipótesis de inducción.

Y por lo tanto

$$L_n^* = (x_1 - \alpha) + (\beta - x_1) \le L_{n-2}$$

Para terminar a continuación hacemos una descripción breve del algoritmo, anexando su diagrama de flujo y la tabla en la que se encuentran los resultados de las pruebas realizadas. El listado con la rutina del método se anexa en el apéndice con el nombre de FIBONA.

Descripción del Algoritmo de Fibonacci

Damos un intervalo de búsqueda [A,B], una cierta EPS (epsilon) y N el número máximo de evaluaciones de la función el algoritmo procede como sigue:

1.- Determinamos los puntos X_1 y X_2 por las siguientes relaciones

$$X_1 \longleftarrow \frac{FIB_{N-K-1}}{FIB_{N-K+1}}(B-A)+A$$

$$X_2 \longleftarrow \frac{FIB_{N-K}}{FIB_{N-K+1}}(B-A)+A$$

2.- Evaluamos la función en los puntos X_1 y X_2

$$F_1 \longleftarrow F(X_1)$$

$$F_2 \longleftarrow F(X_2)$$

y vaya al paso 5

3.- Calcula únicamente el punto X_1 y evalúa la función en X_1

$$X_1 \longleftarrow \frac{FIB_{N-K-1}}{FIB_{N-K+1}}(B-A)+A$$

$$F_1 \longleftarrow F(X_1)$$

y vaya al paso 5

4.- Calcula únicamente el punto X_2 y evalúa la función en X_2

$$X_2 \longleftarrow \frac{FIB_{N-K}}{FIB_{N-K+1}}(B-A)+A$$

$$F_2 \longleftarrow F(X_2)$$

5.- Si $(F_1 > F_2)$; vaya al paso 7

en caso contrario hacemos

$A \longleftarrow A$

$B \longleftarrow X_2$

$X_2 \longleftarrow X_1$

$F_2 \longleftarrow F_1$

6.- Si $(K = (N-3))$; vaya al paso 11

en caso contrario hacemos

$K \longleftarrow K+1$

y vaya al paso 3

7.- $A \longleftarrow x_1$

$B \longleftarrow B$

$X_1 \longleftarrow X_2$

$F_1 \longleftarrow F_2$

8.- Si $(K = (N-3))$; vaya al paso 9

en caso contrario hacemos

$K \longleftarrow K+1$

vaya al paso 4

9.- Calcula únicamente X_2 perturbada y evalúa la función en X_2

$EPS1 \longleftarrow X_2(EPS)$

$X_2 \longleftarrow X_1 + EPS1$

$F2 \longleftarrow F(X_2)$

$K \longleftarrow K+1$

10.- Si $(F_2 < F_1)$; vaya al paso 14

en caso contrario vaya al paso 13

11.- Calcula x_1 perturbadas y evalúa la función en x_1

$$EPS1 \longleftarrow x_1(EPS)$$

$$x_1 \longleftarrow x_2 - EPS1$$

$$F1 \longleftarrow F(x_1)$$

$$K \longleftarrow K+1$$

12.- Si ($F1 < F2$), vaya al paso 13

en caso contrario vaya al paso 14

13.- Escribe el subintervalo final (A,B)

$$A \longleftarrow A$$

$$B \longleftarrow x_2$$

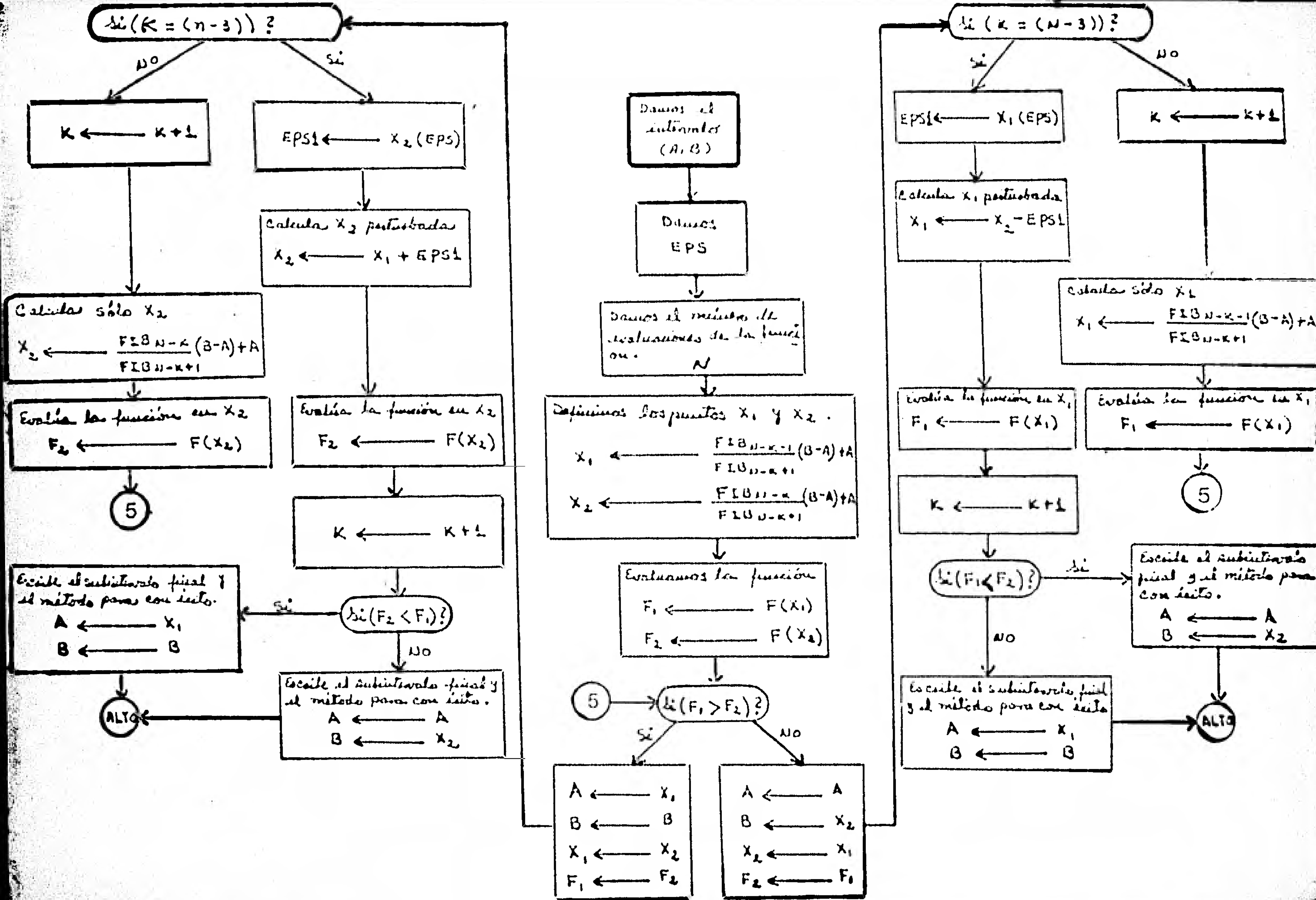
14.- Escribe el subintervalo final (A,B)

$$A \longleftarrow x_1$$

$$B \longleftarrow B$$

DIAGRAMA DF FLUJO DEL METODO

DE FIBONACCI



Si (K = (n-3))?
NO
Sí
K ← K+1
EPS1 ← X2 (EPS)
Calcula X2 perturbada
X2 ← X1 + EPS1
Calcular sólo X2
X2 ← FIB N-K (B-A)+A / FIB N-K+1
Evalúa la función en X2
F2 ← F(X2)
5
Evalúa la función en X2
F2 ← F(X2)
K ← K+1
Si (F2 < F1)?
Sí
NO
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
A ← X1
B ← B
ALTO
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
A ← A
B ← X2
Damos el intervalo (A,B)
Damos EPS
Damos el número de evaluaciones de la función.
N
Definimos los puntos X1 y X2.
X1 ← FIB N-K-1 (B-A)+A / FIB N-K+1
X2 ← FIB N-K (B-A)+A / FIB N-K+1
Evaluamos la función
F1 ← F(X1)
F2 ← F(X2)
5
Si (F1 > F2)?
Sí
NO
A ← X1
B ← B
X1 ← X2
F1 ← F2
A ← A
B ← X2
X2 ← X1
F2 ← F1
Si (K = (N-3))?
Sí
NO
EPS1 ← X1 (EPS)
K ← K+1
Calcula X1 perturbada
X1 ← X2 − EPS1
Calcula sólo X1
X1 ← FIB N-K-1 (B-A)+A / FIB N-K+1
Evalúa la función en X1
F1 ← F(X1)
Evalúa la función en X1
F1 ← F(X1)
5
K ← K+1
Si (F1 < F2)?
Sí
NO
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
A ← A
B ← X2
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
A ← X1
B ← B
ALTO

Resultados producidos por el método de Fibonacci

Función	NEVALF	EPS = .01	
1	12	C	A = .561 B = .575
2	17	C	A = 3.27 B = 3.31
3	16	C	A = 1.23 B = 1.26
4	11	C	A = .382 B = .393
5	14	C	A = 2.99 B = 3.03
6	16	C	A = 3.11 B = 3.15
7	11	C	A = 2.99 B = 3.00
8	16	C	A = 3.11 B = 3.15
9	11	C	A = .529 B = .542
10	11	C	A = .529 B = .542
11	11	C	A = .811 B = .826

1.5 Método Sección Aurea

Con frecuencia ocurre que el costo por evaluación de la función a minimizar es barato o relativamente barato.
Esto es, en principio, no tenemos limitaciones respecto al número de evaluaciones.

Así se hace necesario buscar un método que conserve en lo posible las características del método de Fibonacci, el cual nos dé el intervalo de incertidumbre donde se encuentra el mínimo, sin ser requisito para ello que se conozca el número de evaluaciones necesarias de antemano.

Resulta pues que andamos en busca de un método con las siguientes características:

1a. Sólo se base en la comparación de los valores de la función.

2a. A partir de la 2a. iteración sólo necesita un punto para evaluar la función y llevar a cabo la comparación.

3a. Que los puntos de evaluación elegidos sean simétricos con respecto al punto medio

$$C = \frac{a+b}{2}$$

Es de esperar que la pista no la dé el método de Fibonacci. En efecto, recordemos que dados a_k, b_k Calculamos:

$$(1.5.1) \text{ - - - - - - } x_1^{(k)} = \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) + a_k ,$$

$$(1.5.2) \text{ - - - - - - } x_2^{(k)} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) + a_k ,$$

$$f_1^{(k)} = f(x_1^{(k)}) \quad y \quad f_2^{(k)} = f(x_2^{(k)})$$

para determinar el subintervalo $[a_k, x_2^{(k)}]$ o $[x_1^{(k)}, b_k]$ que contenga al mínimo y así sucesivamente.

Ahora bien, si pudiéramos demostrar que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_i}{F_{i+1}} = \tau \quad y \quad \lim_{i\to\infty} \frac{F_{i-1}}{F_{i+1}} = \tau' ,$$

entonces un método candidato consistiría en el de Fibonacci usando las relaciones

$$(1.5.3) \text{ - - - - - - } x_1^{(k)} = \tau'(b_k - a_k) + a_k ,$$

$$(1.5.4) \text{ - - - - - - } x_2^{(k)} = \tau(b_k - a_k) + a_k ,$$

en vez de las dadas por (1.5.1) y (1.5.2) respectivamente.

En efecto, $\lim_{j\to\infty} \frac{F_j}{F_{j+1}}$ y $\lim_{j\to\infty} \frac{F_{j-1}}{F_{j+1}}$ existen.

Una manera de ver esto, la presentamos a continuación.

Empecemos por recordar que la sucesión $\{F_n\}$ de Fibonacci es la solución de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0 \qquad \text{--------- (1.5.5)}$$

con condiciones iniciales

$$y_0 = y_1 = 1$$

Se demuestra que la solución general de (1.5.5) viene dada por

$$y_n = C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}$$

en donde r_1 y r_2 son las raíces del polinomio característico asociado a (1.5.5).

$$p(r) = r^2 - r - 1$$

las cuales vienen dadas por

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Pasemos a establecer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} \, ,$$

donde $\{y_n\}$, es una solución no trivial de la ecuación

$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0$$

Se presentan dos casos :

1o. Cuando $C_1 = 0$, en este caso, es directo ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{1}{r_2}$$

2o. Cuando $C_1 \neq 0$

Debido a que $\left| r_2 / r_1 \right| < 1$, se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{c_1 r_1^n + c_2 r_2^n}{c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{c_1 + c_2 (r_2/r_1)^n}{c_1 r_1 + c_2 (r_2/r_1)^n r_2}$$

$$= \frac{c_1}{c_1 r_1} = \frac{1}{r_1} = \tau$$

Es natural tratar de escribir las condiciones de los casos anteriores, en términos de las condiciones iniciales y_0 y y_1, de la solución de la ecuación $\{y_n\}$, las cuales determinan a c_1 y c_2 en la solución general de nuestra ecuación. Lo que podemos hacer a partir del sistema

$$c_1 + c_2 = y_0$$
$$r_1 c_1 + r_2 c_2 = y_1$$

De donde se sigue que $c_1 = 0$, sí y sólo sí

$$\begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

Resumiendo, tenemos la siguiente proposición:

Proposición.- Si $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $(y_n \neq 0, \forall n)$ es una solución no trivial de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = \begin{cases} \tau = \left(\frac{1}{r_1}\right), \text{ si } \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 , \\[2ex] \frac{1}{r_2} , \quad \text{si } \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 , \end{cases}$$

en donde

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} ,$$

son las raíces del polinomio

$$p(r) = r^2 - r - 1 .$$

Como $\begin{vmatrix} F_0 & 1 \\ F_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - 1 \neq 0$, se tiene el siguiente corolario.

Corolario .- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \tau$

La existencia del $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$ se sigue directamente de la existencia del límite antes discutido. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

$$= \begin{cases} \tau' = (\tau^2) \, , & \text{si} \quad \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 \, , \\ \left(\dfrac{1}{r_2}\right)^2 \, , & \text{si} \quad \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \, . \end{cases}$$

En resumen, diremos que nuestro proyecto de método tuvo éxito. Este método es conocido en la literatura como el método de "sección aurea".

Dado que ya tenemos demostrado la existencia de los límites de $\dfrac{F_i}{F_{i+1}} \to \tau$ y de $\dfrac{F_{i-1}}{F_{i+1}} \to \tau'$ y en base a la proposición anterior, podemos ya determinar cuanto valen τ y τ'.

En efecto :

dado que $\tau = \dfrac{1}{r_1}$; con $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

se sigue que:

$$\tau = \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = .6172839$$

análogamente para τ'.

sabemos que $\tau' = \tau^2 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = .381679$

Con el objeto de escribir las relaciones para determinar los puntos de evaluación en el presente método y haciendo uso de las relaciones (1.5.3) y (1.5.4) tenemos que $x_1^{(k)}$ y $x_2^{(k)}$ están dadas por :

(1.5.6) ------ $x_1^{(k)} = 0.3816966\ (b_k - a_k) + a_k$,

(1.5.7) ------ $x_2^{(k)} = 0.618034\ (b_k - a_k) + a_k$.

Con el propósito de tener un criterio para poder saber qué tanto va decreciendo nuestro intervalo mediante el proceso antes descrito veamos lo siguiente :

Sean

$$x^1 = \tau^2 (b-a) + a \quad ,$$

$$x^2 = \tau\ (b-a) + a \quad ,$$

y denotemos por $\bar{a}$ y $\bar{b}$ a los extremos del subintervalo que a partir de la 2a. iteración y considerando los dos casos que se presentan escribimos como sigue :

1o) $\bar{a} = a \quad , \quad \bar{b} = x^2$,

2o) $\bar{a} = x^1 \quad , \quad \bar{b} = b$.

Para (1o) se tiene que :

$$\bar{b} - \bar{a} = x^2 - a = \tau(b-a) + a - a$$
$$= \tau(b-a)$$

El (2o) caso se tiene de manera análoga .

Por lo tanto, se sigue por inducción matemática que

$$\frac{l(I_n)}{l(I_1)} = \tau^{N-1},$$

lo cual lo podemos resumir como sigue:

<u>Proposición</u>. Después de N evaluaciones se tiene que la longitud del intervalo está dada por la siguiente expresión:

$$b_N - a_N = \tau^{N-1}(b_1 - a_1) .$$

Descripción del método Sección Aurea

Dados un intervalo de búsqueda [A,B], una cierta EPS (epsilon) y un número máximo de iteraciones ITMAX, el algoritmo procede como sigue :

1.- Fijamos TAO $\longleftarrow$ 0.618034

2.- Hacemos LN $\longleftarrow$ (B-A)

3.- calculamos los puntos x_1 y x_2 mediante las siguientes relaciones

$$x_1 \longleftarrow 0.381966(B-A)+A$$

$$x_2 \longleftarrow 0.618034(B-A)+A$$

4.- Evaluamos la función en x_1 y x_2

$$F_1 \longleftarrow F(x_1)$$

$$F_2 \longleftarrow F(x_2)$$

5.- Si $F_1 > F_2$; vaya al paso 6
en caso contrario hacemos

$$A \longleftarrow A$$

$$B \longleftarrow X_2$$

$$X_2 \longleftarrow X_1$$

$$F_2 \longleftarrow F_1$$

vaya al paso 7

6.-

$$A \longleftarrow x_1$$

$$B \longleftarrow B$$

$$X_1 \longleftarrow X_2$$

$$F_1 \longleftarrow F_2$$

vaya al paso 8

7.- Checamos convergencia ; si satisface la precisión requerida paramos el algoritmo , habiendo tenido éxito.

en caso contrario

(Si N = ITMAX) ; vaya al paso 9

en caso contrario hacemos

$N \longleftarrow N+1$ y calculamos únicamente $X_1 \longleftarrow 0.381966(B-A)+A$

y regresamos al paso 5

8.- Checamos convergencia ; si satisface el criterio el algoritmo se detiene habiendo tenido éxito

en caso contrario hacemos

Si (N = ITMAX) ; vaya al paso 9

en caso contrario

$N \longleftarrow N+1$; y calculamos únicamente $X_2 \longleftarrow 0.618034(B-A)+A$

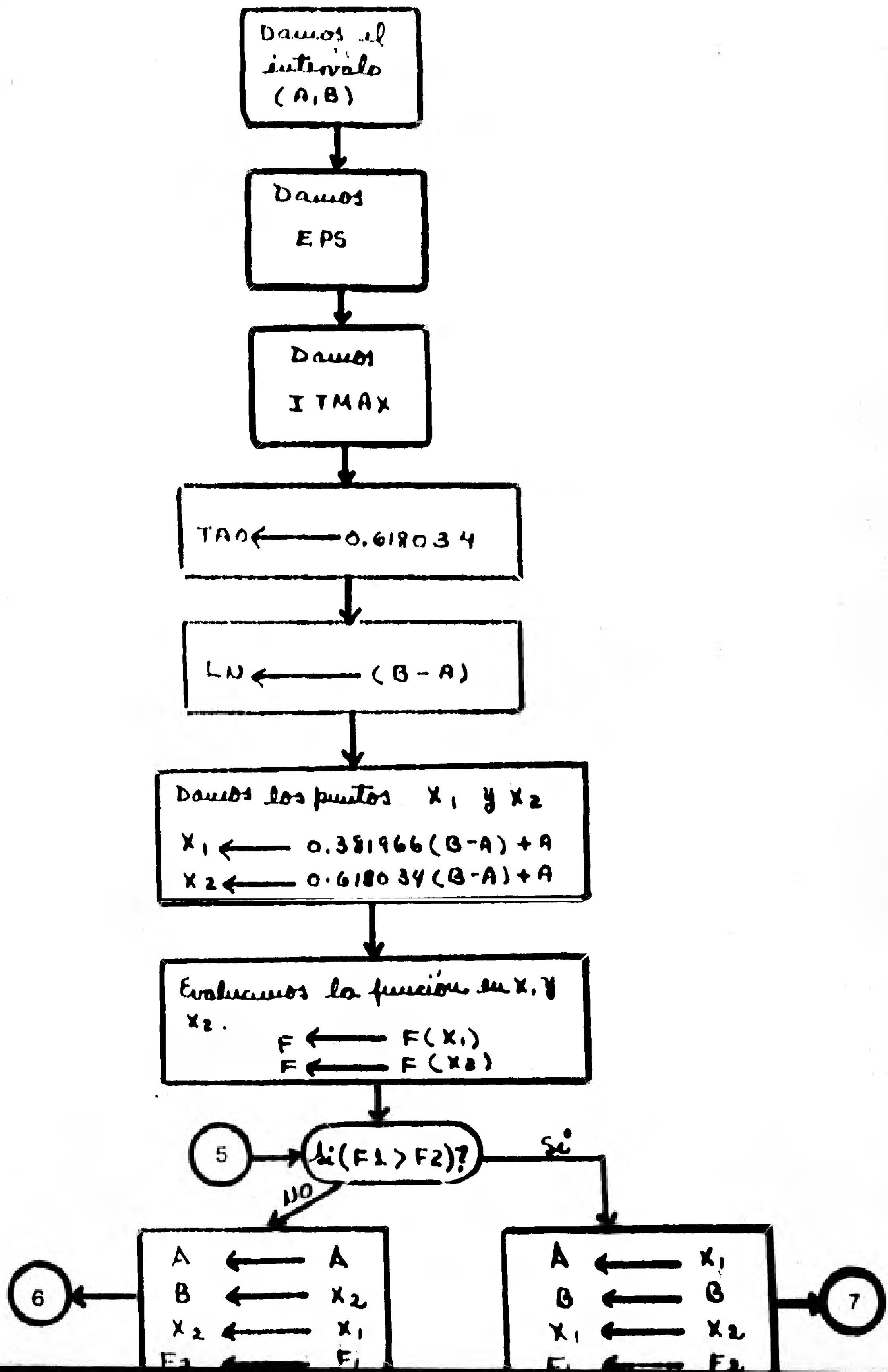
y regresamos al paso 5

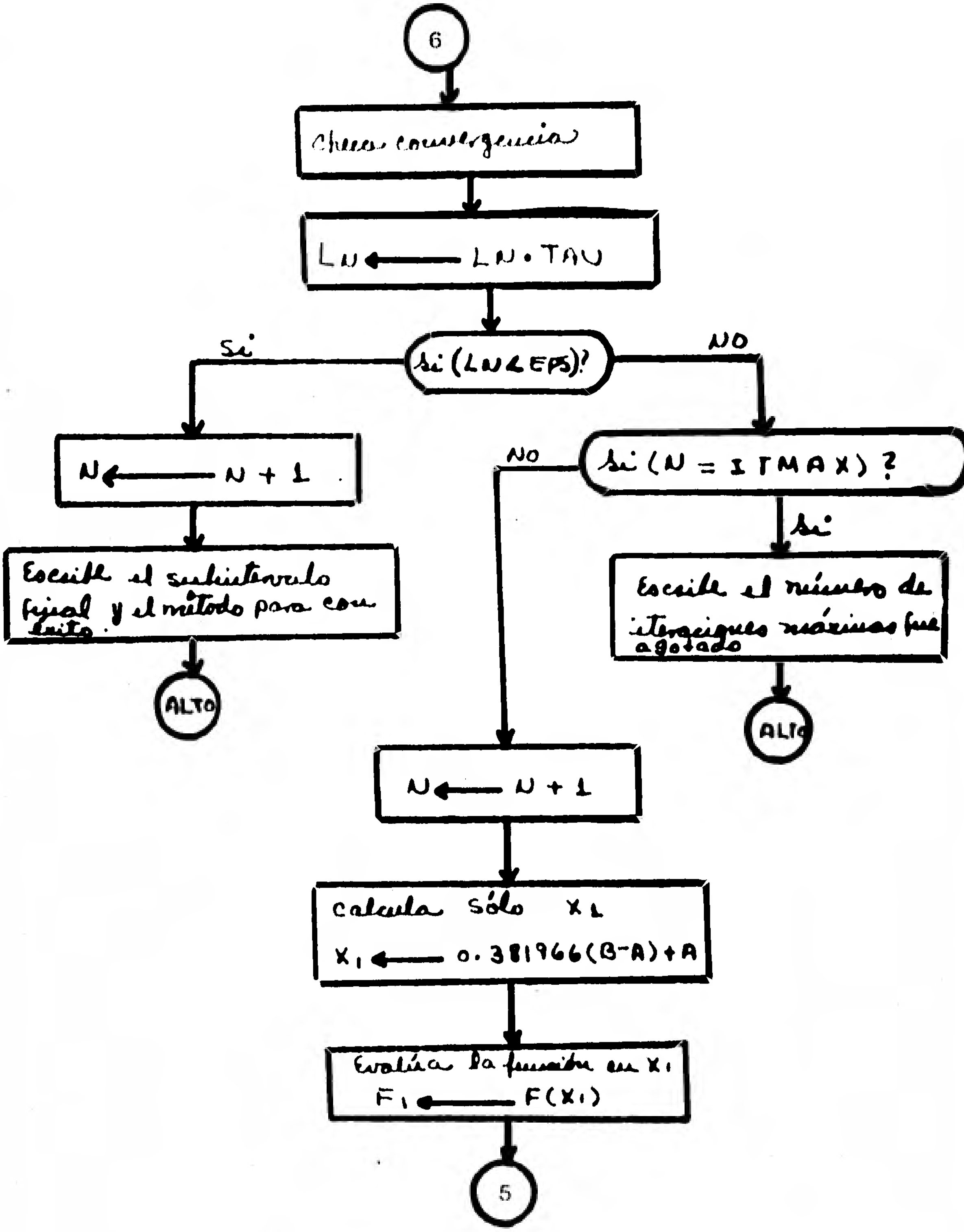
9.- El número de iteraciones máximas fue agotado y el algoritmo se detiene.

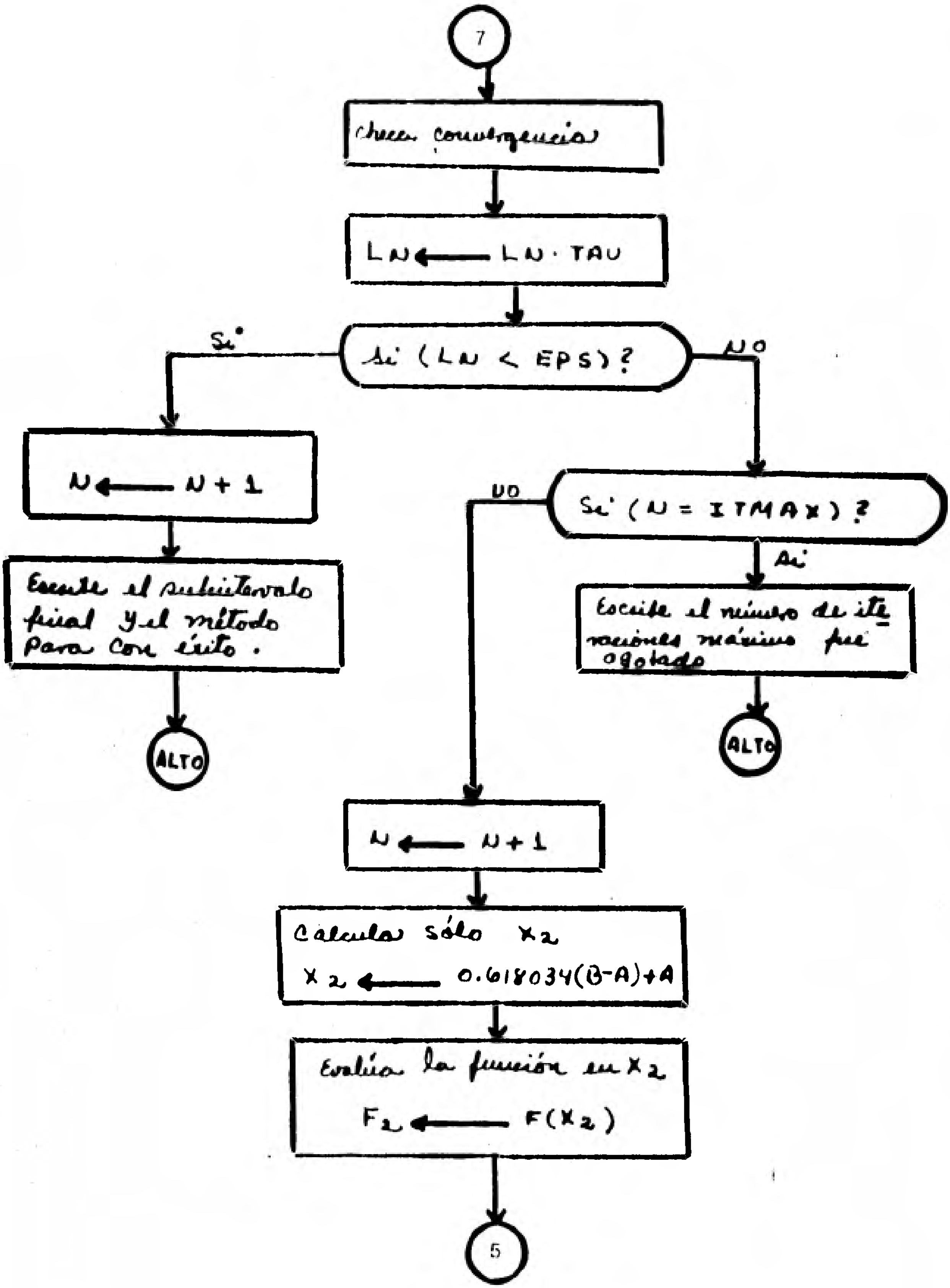
Por último anexamos la tabla con los resultados de las pruebas realizadas, el diagrama de flujo y el listado de la rutina se anexa en el apéndice general con el nombre de Anexa.

DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO

SECCION AUREA


Damos el intervalo (A,B)
Damos EPS
Damos ITMAX
TAO ← 0.618034
LN ← (B − A)
Damos los puntos X1 y X2
X1 ← 0.381966(B−A)+A
X2 ← 0.618034(B−A)+A
Evaluamos la función en X1 y X2.
F ← F(X1)
F ← F(X2)
5
Si (F1 > F2)?
Sí
NO
A ← A
B ← X2
X2 ← X1
6
A ← X1
B ← B
X1 ← X2
7


6
Checa convergencia
LN ← LN · TAU
Si (LN < EPS)?
Si
NO
N ← N + 1
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
ALTO
NO
Si (N = ITMAX) ?
Si
Escribe el número de iteraciones máximas fue agotado
ALTO
N ← N + 1
calcula sólo X1
X1 ← 0.381966(B-A)+A
Evalúa la función en X1
F1 ← F(X1)
5


7
Checa convergencia
LN ← LN · TAU
Si (LN < EPS)?
Si
NO
N ← N + 1
Escribe el subintervalo final y el método para con éxito.
ALTO
NO
Si (N = ITMAX)?
Si
Escribe el número de iteraciones máximo fue agotado
ALTO
N ← N + 1
Calcula sólo X2
X2 ← 0.618034(B-A)+A
Evalúa la función en X2
F2 ← F(X2)
5

Resultados Producidos por el método Sección áurea

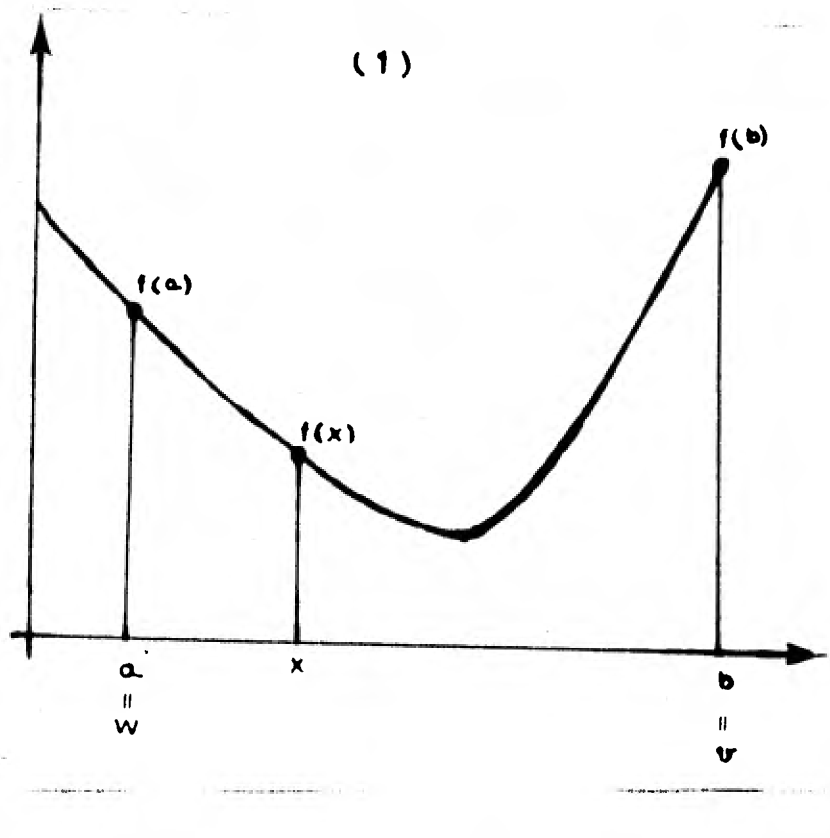
Función	NEVALF	EPS = .01	
1	13	C	A = .563 B = .570
2	17	C	A = 3.30 B = 3.31
3	17	C	A = 1.24 B = 1.25
4	11	C	A = .382 B = .390
5	15	C	A = 3.00 B = 3.01
6	16	C	A = 3.14 B = 3.15
7	11	C	A = 2.99 B = 3.00
8	16	C	A = 3.14 B = 3.15
9	11	C	A = .528 B = .536
10	11	C	A = .528 B = .536
11	11	C	A = .812 B = .820

1.6 Método de Gill y Murray

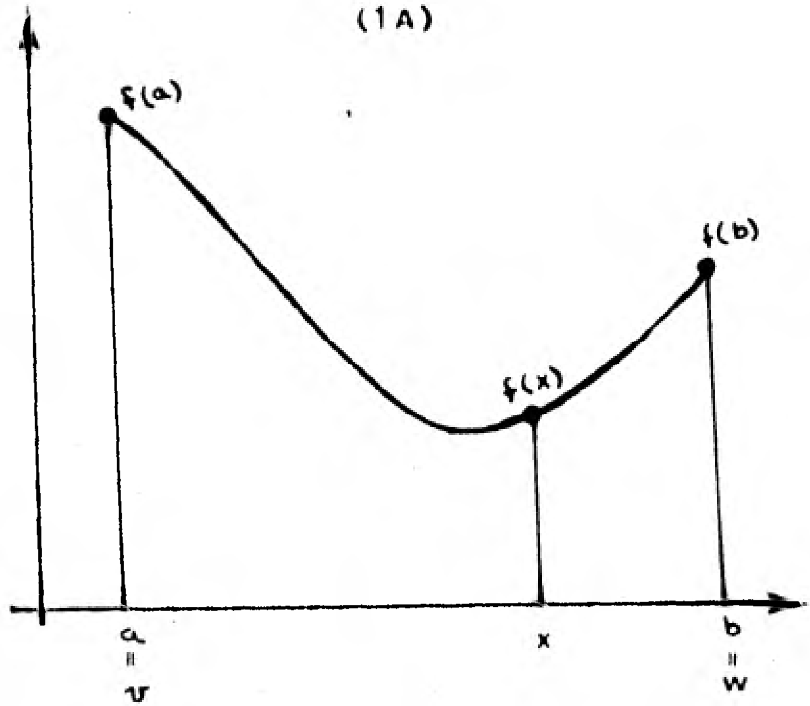
En la presente sección estudiaremos un método más de búsqueda, propuesto recientemente, que proporciona ideas que serán muy fructíferas para determinar el subintervalo de menor longitud donde se encuentra el mínimo de la función.

Dados tres puntos $a < x < b$ y sus valores correspondientes $f(a), f(x), f(b)$ con $f(x) < \min(f(a), f(b))$, la situación que se nos puede presentar es cualquiera de las cuatro siguientes:

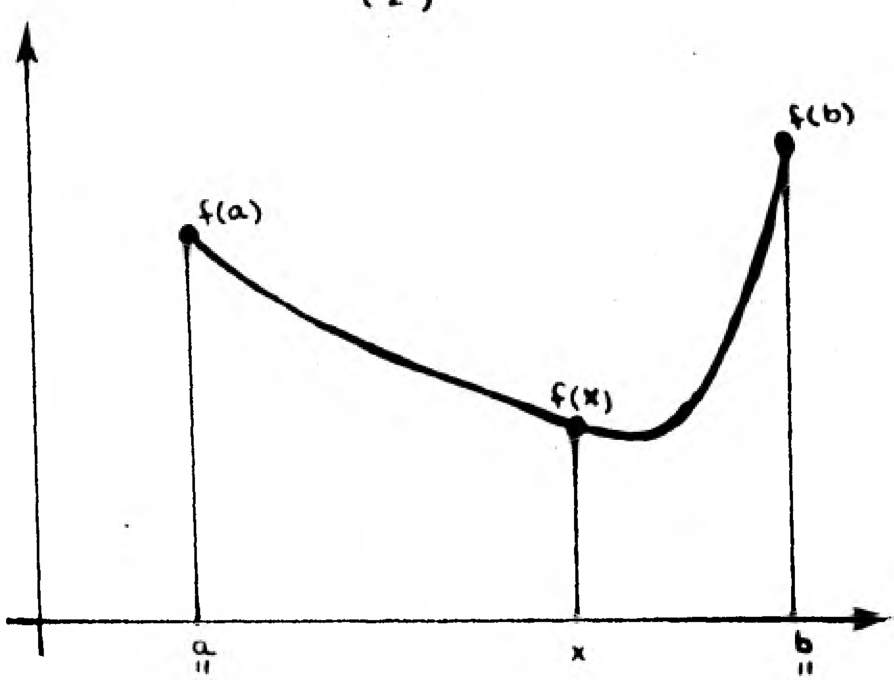
(1)



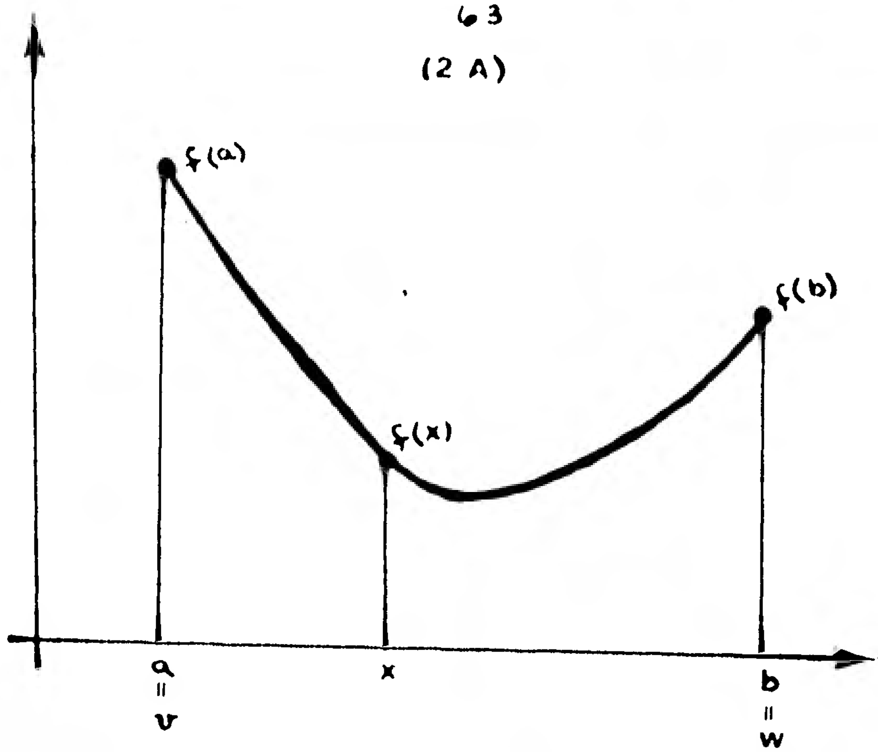
(1A)



(2)



(2 A)



Sean w aquel extremo del intervalo en el cual el valor de la función es más cercano a $f(x)$, y sea v el restante. Sean $d_1 = w - x$, $d_2 = v - x$, es decir d_1 es la distancia dirigida al extremo con valor más cercano a $f(x)$, y d_2 la distancia dirigida al otro; entonces los casos 1, 1A y 2, 2A son simétricos respectivamente ya que 1A sería la misma figura que 1, únicamente vista al revés. Análogamente 2A y 2, lo cual para propósitos del algoritmo que propondremos dará lo mismo considerar 1 o 1A que 2 o 2A.

Independientemente de qué caso se nos presente, nuestro interés es poder reducir el intervalo de seguridad $[a,b]$, eligiendo para ello un nuevo punto, el cual denotaremos por u, con las siguientes características:

(A) El nuevo punto debe ser elegido en el subintervalo cuyos extremos son los valores más grande y más pequeño.'

(B) u debería estar sesgado hacia x que es el punto donde la función toma el valor más chico.

Podemos reducir los cuatro casos antes contemplados a dos solamente :

1) Caso $|d_1| < |d_2|$, figura 1, 1A.

2) caso $|d_1| \geq |d_2|$, figura 2, 2A.

A continuación describiremos cómo se aplica el algoritmo, en los dos casos. Es decir, describiremos cómo cálcular el nuevo punto u en cada uno de los casos y después cómo se actualiza el intervalo de seguridad.

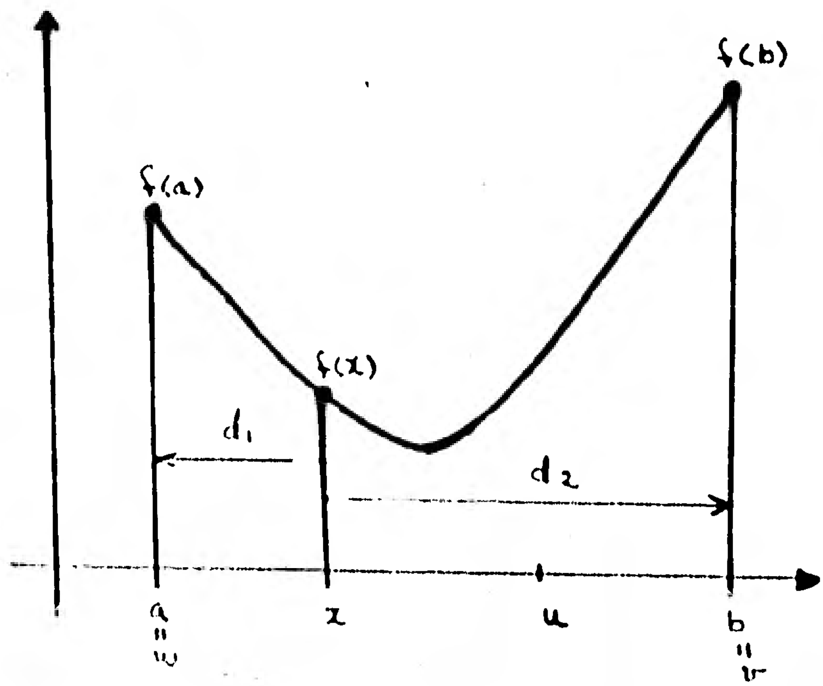
Consideremos primero el caso

$$|d_1| < |d_2|$$

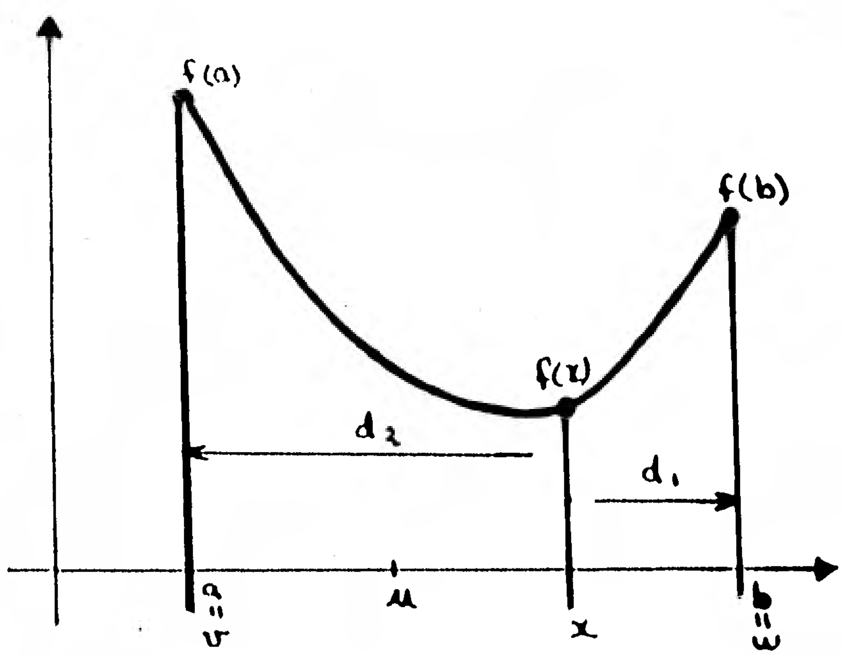
como se ve en las figuras (1.6.A).

Caso en que $|d_1| < |d_2|$

Figuras (1.6. A)



(1)



(1 A)

Queremos diseñar un algoritmo que satisfaga las condiciones A y B enunciadas anteriormente. La condición B en particular la interpretaremos como que el nuevo punto u debe estar más cerca a x que cualquiera de los extremos; esto implica que:

$$|d_1| < |x-u| < |d_2| \quad .$$

Una forma de lograr esto es usando las propiedades de la media geométrica, es decir, pidiendo que $|x-u|$ sea la media geométrica de $|d_1|$ y $|d_2|$, es decir

$$|x-u|^2 = |d_1| \cdot |d_2|$$

Además tenemos que imponer la condición A que nos dice que u debe estar en el intervalo de longitud mayor para aplicar esta condición tendremos que considerar por separado los casos 1, 1A.

<u>Caso 1</u>

$$d_1 = w - x = a - x < 0 \quad ,$$

$$d_2 = v - x = b - x > 0 \quad ,$$

Con $x < u < v$,

se tiene entonces

$$|x-u|^2 = -d_1 d_2 \quad ,$$

$$|x-u| = \sqrt{-d_1 d_2} \quad ,$$

Como $x < u$,

$$|x-u| = -(x-u) = \sqrt{-d_1 d_2}$$

$$u - x = \sqrt{-d_1 d_2} \quad ,$$

$$u = x + \sqrt{-d_1 d_2} \quad ,$$

véase que u también se puede expresar como sigue:

$$u = x + \sqrt{-d_1 d_2}$$

$$= x + \sqrt{-d_1 d_2 \frac{d_2}{d_2}}$$

$$= x + \sqrt{-d_1/d_2}\ |d_2| \quad .$$

Como $d_2 > 0$, $|d_2| = d_2$ y si denotamos $\beta = (-d_1/d_2)^{1/2}$ se llega a que $u = x + \beta d_2$.

Análogamente para (1A), haciendo uso de la misma relación:

<u>Caso 1A</u>

$d_1 = w - x = b - x > 0$,

$d_2 = v - x = a - x < 0$,

con $v < u < x$,

$|x - u|^2 = -d_1 d_2$,

$|x - u| = \sqrt{-d_1 d_2}$,

como $x > u$,

$|x - u| = (x - u) = \sqrt{-d_1 d_2}$,

$-u = -x + \sqrt{-d_1 d_2}$,

$u = x - \sqrt{-d_1 d_2}$,

de donde u también se puede expresar como sigue

$$u = x - \sqrt{-d_1 d_2 \frac{d_2}{d_2}}$$

$$= x - \sqrt{\frac{-d_1}{d_2} d_2^2} \quad .$$

Como $d_2 < 0$, $|d_2| = -d_2$

de la última igualdad se sigue que

$$u = x - \sqrt{\frac{-d_1}{d_2}} \, (-d_2)$$

$$= x + \sqrt{\frac{-d_1}{d_2}} \, d_2 \quad ,$$

y si denotamos

$$\beta = (-d_1/d_2)^{1/2}$$

se llega a que $\quad u = x + \beta d_2$.

Nótese que la fórmula para u es la misma en los dos casos.

Obsérvese que si $d_1 \simeq d_2$ obtendríamos casi los extremos del intervalo y la reducción del intervalo de seguridad no sería significativa ; por lo que hacemos una pequeña modificación a la fórmula , así que mejor usaremos

$$u = x + 1/2 \, \beta d_2$$

ya que esta se reduce a bisección en el peor de los casos.

Finalmente consideremos el caso en que

$$|d_1| \geq |d_2|$$

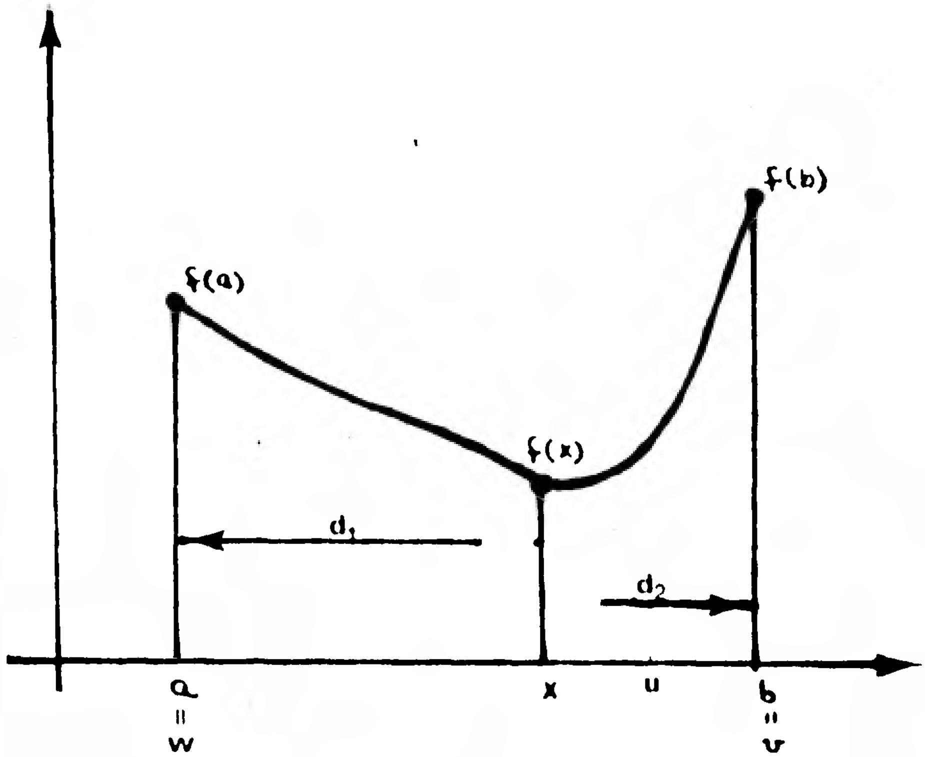
como se ve en las figuras (1.6.B) .

Nota: La interpretación que Gill y Murray dan para escoger u, es que esté más sesgado hacia x, no es muy clara en términos de qué intervalo se debe escoger, si el mayor o el menor; parece ser que lo que les interesa es escoger a u en el intervalo que tenga los valores más grandes de la función pero no vemos cómo esto sesga a u hacia x.

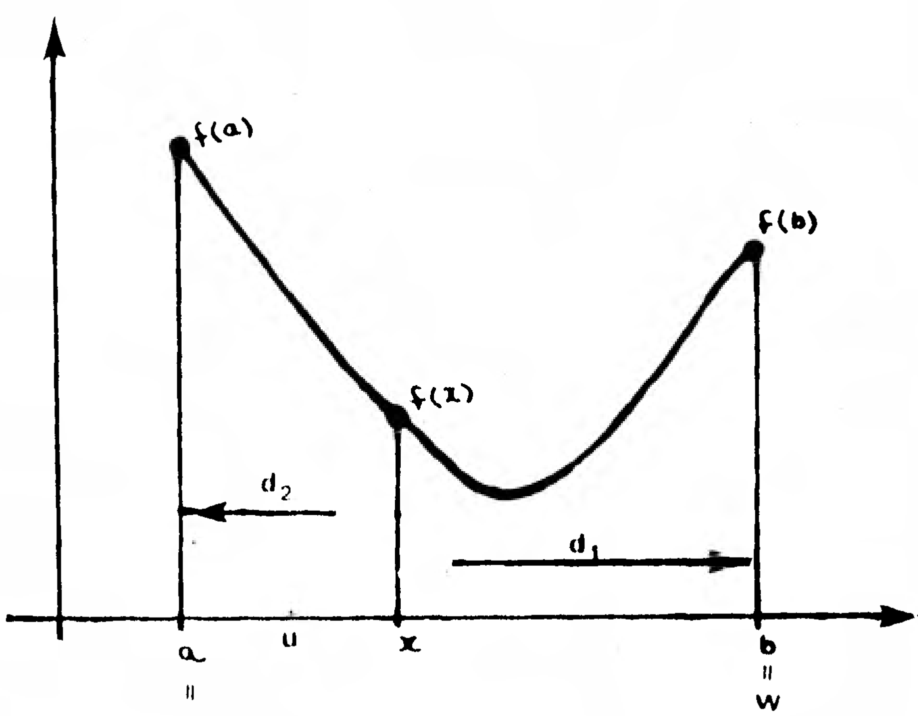
Caso en que
$|d_1| \geq |d_2|$

Figuras (1.6.B)

(2)



(2 A)



Nótese que en este caso la idea es la misma que se discutió anteriormente: poder reducir el intervalo de seguridad y poder elegir un nuevo punto con las características antes mencionadas.

Nuevamente una forma de lograrlo es a través de la media geométrica, esta vez pidiendo que $|d_2|$ sea la media geométrica de $|d_1|$ y $|x-u|$ es decir

$$|d_2|^2 = |d_1||x-u|$$

para ello analizaremos separadamente los casos 2 y 2A.

Caso 2

Eligiendo el nuevo punto u en el intervalo más chico se tiene lo siguiente :

$$d_1 = w - x = a - x < 0 \quad ,$$

$$d_2 = v - x = b - x > 0 \quad ,$$

con $x < u < v$,

se tiene entonces

$$d_2^2 = |d_1| \cdot |x - u| \quad ,$$

Como $d_1 < 0$, $|d_1| = -d_1$,

$$d_2^2 = -d_1 \cdot -(x-u) \quad ,$$

$$= d_1 (x-u)$$

$$\frac{d_2^2}{d_1} = x - u \quad ,$$

$$u = x - \frac{d_2^2}{d_1} = x + (-d_2/d_1) d_2 \quad ,$$

denotando $\beta = (-d_2/d_1)$ se sigue que u se puede expresar como:

$$u = x + \beta d_2 \quad .$$

Análogamente para 2 A , haciendo uso de la misma relación que en 2 , se tiene :

Caso 2 A

$$d_1 = w - x = a - x < 0 \quad ,$$

$$d_2 = v - x = b - x > 0 \quad ,$$

con $v < u < x$,

$$d_2^2 = |d_1| \cdot |x-u| \; ,$$
$$= d_1 (x-u)$$

$$\frac{d_2^2}{d_1} = (x-u) \; ,$$

$$u = x - \frac{d_2^2}{d_1} = x + (-d_2/d_1)\, d_2 \; ,$$

denotando a $\beta = -d_2/d_1$ se tiene que

$$u = x + \beta d_2 \; .$$

Observemos que si $d_1 \approx d_2$ obtendríamos casi los extremos del intervalo y la reducción del intervalo no sería significativa, por ello haciendo una pequeña modificación al cociente $(-d_2/d_1)$ como

$$\frac{5}{11}(0.1 - d_2/d_1) \; ,$$

así que la fórmula que mejor usaremos para u es

$$u = x + \frac{5}{11}(0.1 - d_2/d_1)\, d_2 \; ,$$

ya que esta se reduce a bisección.

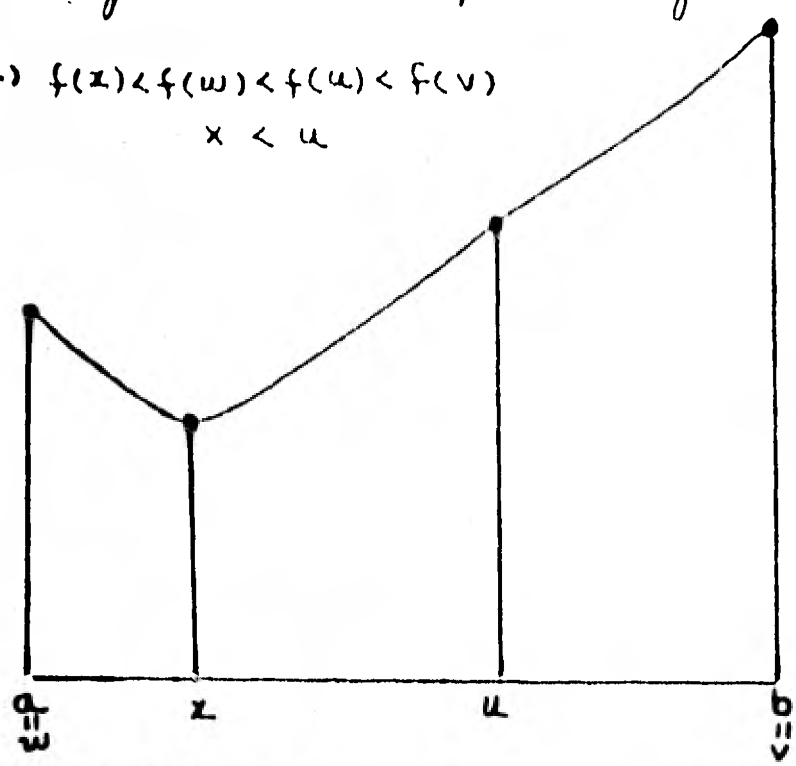
Así pues la discusión sobre la forma de seleccionar u está completa y sólo nos falta indicar cómo actualizar el intervalo de seguridad.

Actualización del Intervalo de Seguridad.

Como se puede observar en las siguientes figuras, la actualización se hace de tal forma que se obtenga el intervalo de longitud más chica que contenga al mínimo en su interior.

(a) $f(x) < f(w) < f(u) < f(v)$

$x < u$

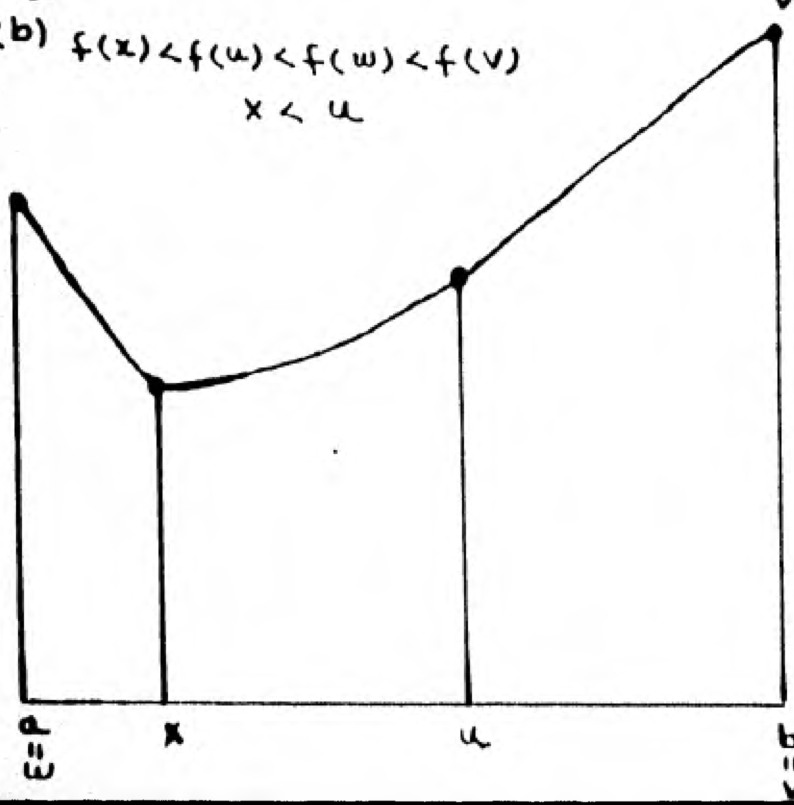


$b \leftarrow u$

$f(b) \leftarrow f(u)$

(b) $f(x) < f(u) < f(w) < f(v)$

$x < u$

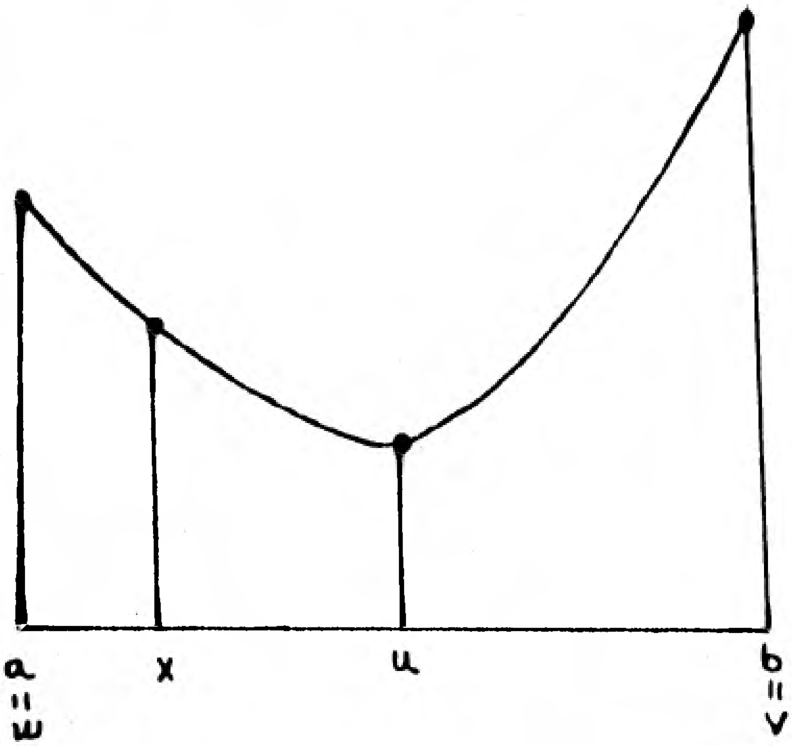


$b \leftarrow u$

$f(b) \leftarrow f(u)$

(c) $f(u) < f(x) < f(w) < f(v)$

$x < u$



$a \leftarrow x$

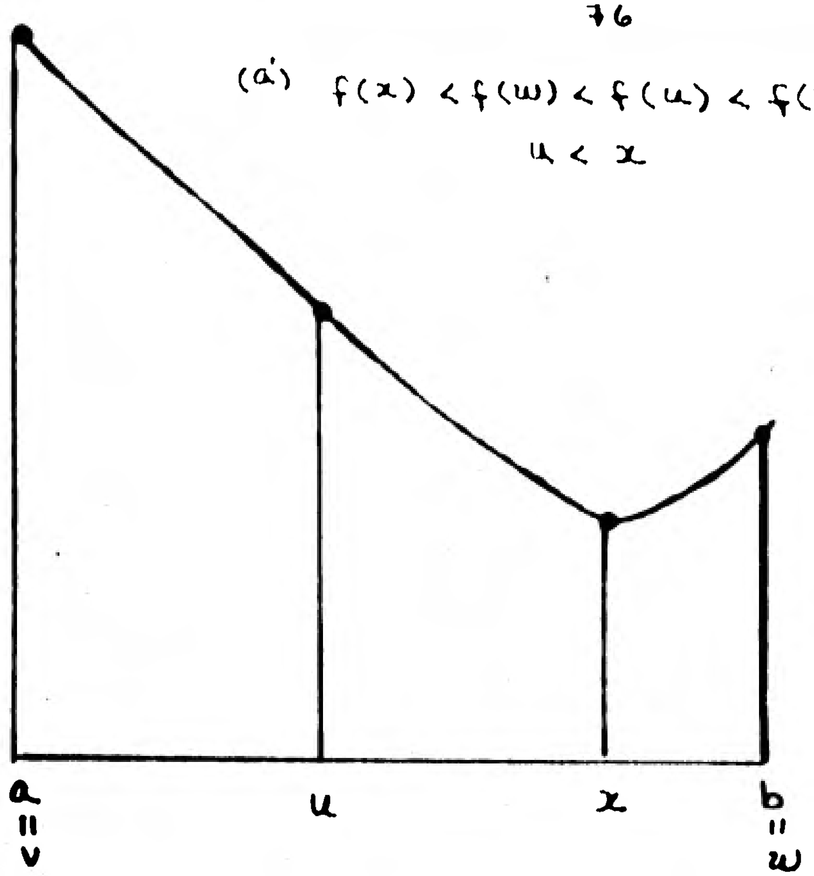
$x \leftarrow u$

$f(a) \leftarrow f(x)$

$f(x) \leftarrow f(u)$

(a') $f(x) < f(w) < f(u) < f(v)$

$u < x$

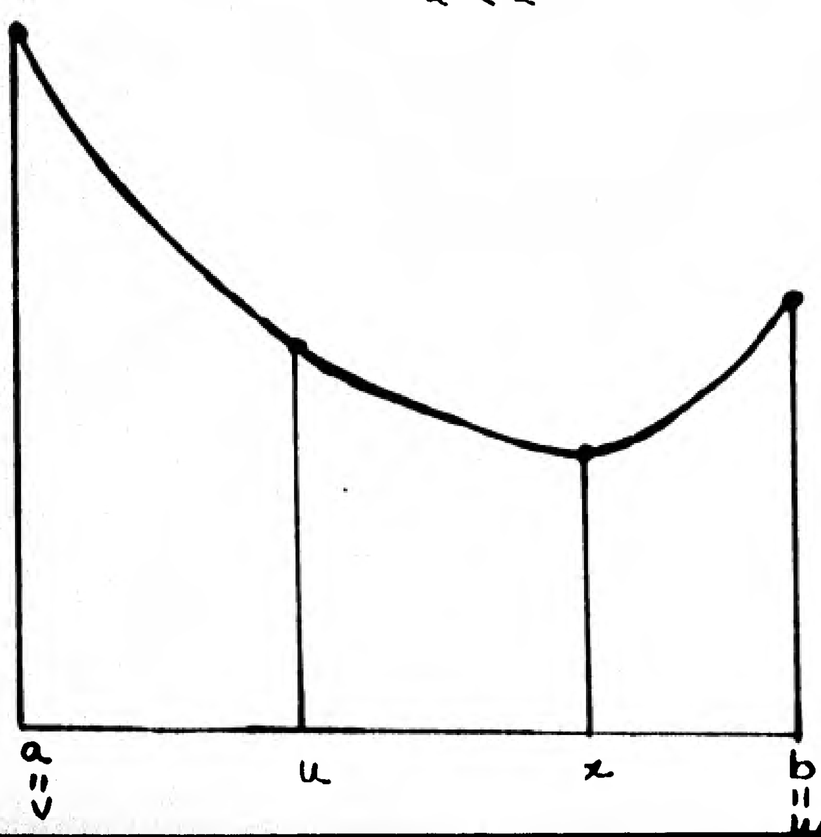


$a \longleftarrow u$

$f(a) \longleftarrow f(u)$

(b') $f(x) < f(u) < f(w) < f(v)$

$u < x$

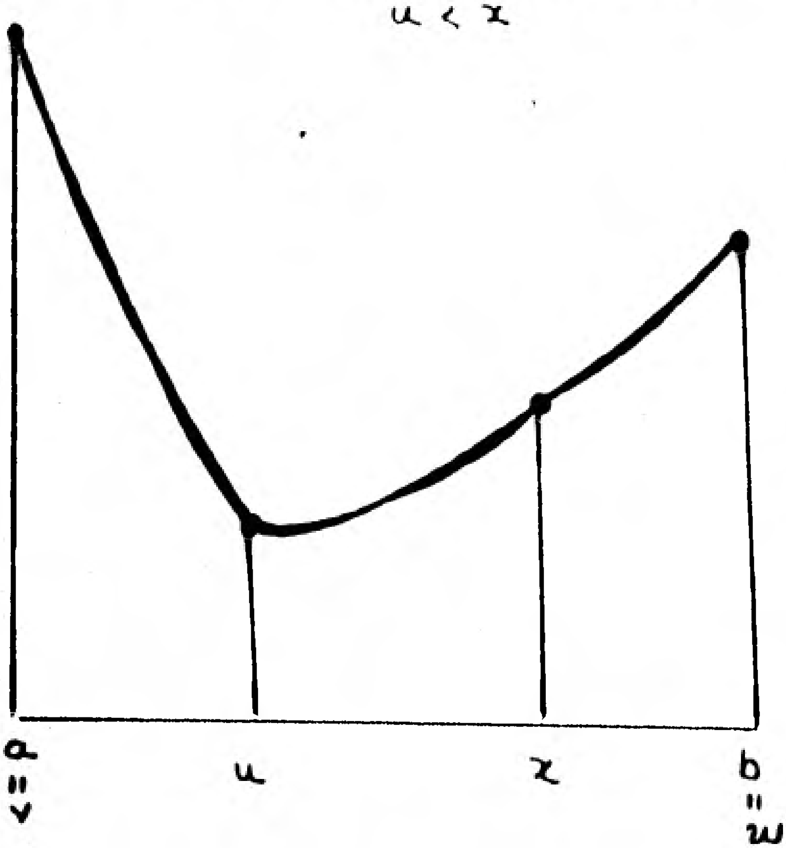


$a \longleftarrow u$

$f(a) \longleftarrow f(u)$

(c') $f(u) < f(x) < f(w) < f(v)$

$u < x$



$b \leftarrow x$

$x \leftarrow u$

$f(b) \leftarrow f(x)$

$f(x) \leftarrow f(u)$

Descripción del algoritmo de Gill y Murray

Dado un intervalo de búsqueda [A,B] una cierta EPS(epsilon), una cierta TAO y un número máximo de iteraciones, el algoritmo procede como sigue:

1.- Damos un punto interior X como

$$X \longleftarrow \frac{A+B}{2}$$

2.- Se checa si X está o no en el intervalo (A,B); Si no está vaya al paso 17

en caso contrario significa que $X \in (A,B)$ y evalúe la función en A, B, X

$$FA \longleftarrow F(A)$$
$$FB \longleftarrow F(B)$$
$$FX \longleftarrow F(X)$$

vaya al paso 3

3.- Checa si la función es o no unimodal; si lo es vaya al paso 4

en caso contrario vaya al paso 18

4.- Se determinan W y V

Si (FA ≥ FB); vaya al paso 5

en caso contrario (FA < FB)

$$W \longleftarrow A$$
$$V \longleftarrow B$$
$$FW \longleftarrow FA$$
$$FV \longleftarrow FB$$

vaya al paso 6

5.- $V \longleftarrow A$

$W \longleftarrow B$

$FV \longleftarrow FA$

$FW \longleftarrow FB$

vaya al paso 6

6.- Se calcula u la cota modificada

$d_1 \longleftarrow (w - x)$

$d_2 \longleftarrow (v - x)$

7.- Si $(d_1 \geq d_2)$; vaya al paso 8

en caso contrario hacemos

$$\beta \longleftarrow \sqrt{\frac{-d_1}{d_2}}$$

$$u \longleftarrow x + \frac{1}{2}\beta d_2$$

y vaya al paso 9

8.- $\beta \longleftarrow \frac{5}{11}(0.1 - d_2/d_1)$

$u \longleftarrow x + \beta d_2$; vaya al paso 9

9.- Se checa si el punto u está cerca de uno de los extremos, como sigue :

Si ((mínimo $(|u-A|, |u-B|) > TOL1$) ; vaya al paso 10

en caso contrario

se checa si el punto u casi coincide con uno de los extremos como sigue :

Si $((B-x) > (x-A))$; haga $u \longleftarrow \frac{x+B}{2}$ y vaya a (10)

en caso contrario preguntamos

Si $((B-x) \leq (x-A))$; hacemos $u \longleftarrow \frac{A+x}{2}$ vaya a (10)

en caso contrario vaya al paso (10)

10.- Evaluamos la función en u

$$FU \longleftarrow F(u)$$

11.- Se determina el intervalo de seguridad

Si $(x < u)$; vaya al paso (12)

en caso contrario preguntamos

Si $(x > u)$; vaya al paso (14)

en caso contrario vaya al paso (17)

12.- Si $(FX \geq FU)$; vaya al paso (13)

en caso contrario hacemos

$$B \longleftarrow u$$

$FB \longleftarrow FU$; vaya al paso (16)

13.- $A \longleftarrow x$

$FA \longleftarrow Fx$

$X \longleftarrow u$

$FX \longleftarrow FU$; vaya al paso (16)

14.- Si $(FX \geq FU)$; vaya al paso (15)

en caso contrario hacemos

$$A \longleftarrow u$$

$FA \longleftarrow FU$; vaya al paso (16)

15.- $B \longleftarrow X$

$FB \longleftarrow FX$

$X \longleftarrow U$

$FX \longleftarrow FU$; vaya al paso siguiente

16. checa un criterio de convergencia ; si el método converge vaya al paso 20

en caso contrario preguntamos

Si ($K = ITMAX$) ; vaya al paso 19

en caso contrario

$K \longleftarrow K+1$; vaya al paso 3

17.- X no está en el intervalo y el método se detiene

18.- La función no es unimodal y el método se detiene

19.- El método no tuvo éxito ; el número de iteraciones máximo fue agotado y el método se detiene.

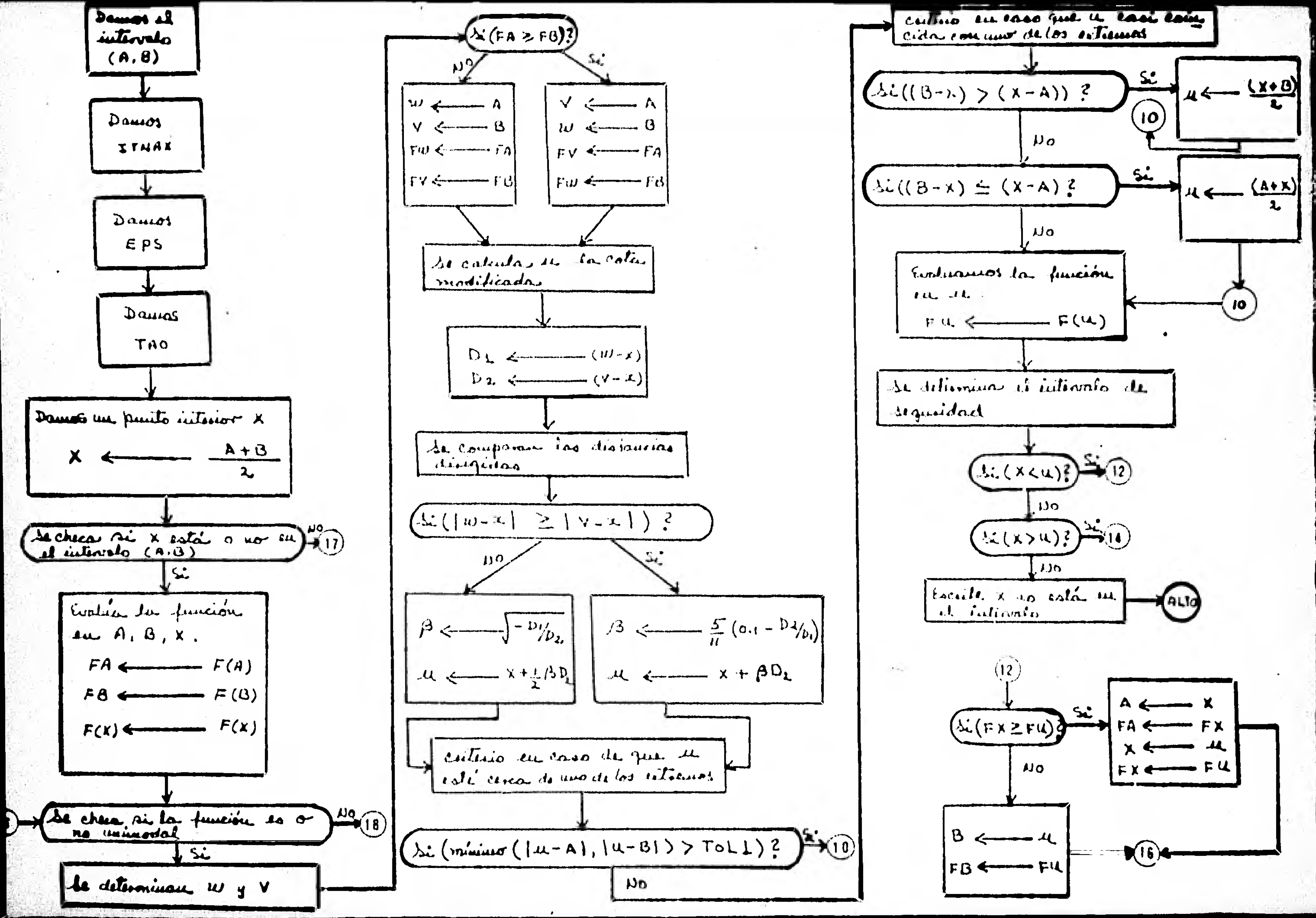
20.- El método tuvo éxito y escribe el subintervalo final.

Para finalizar la discusión del método de Gill y Murray haremos una descripción breve del algoritmo proporcionando su diagrama de flujo y una tabla con los resultados de las pruebas realizadas.

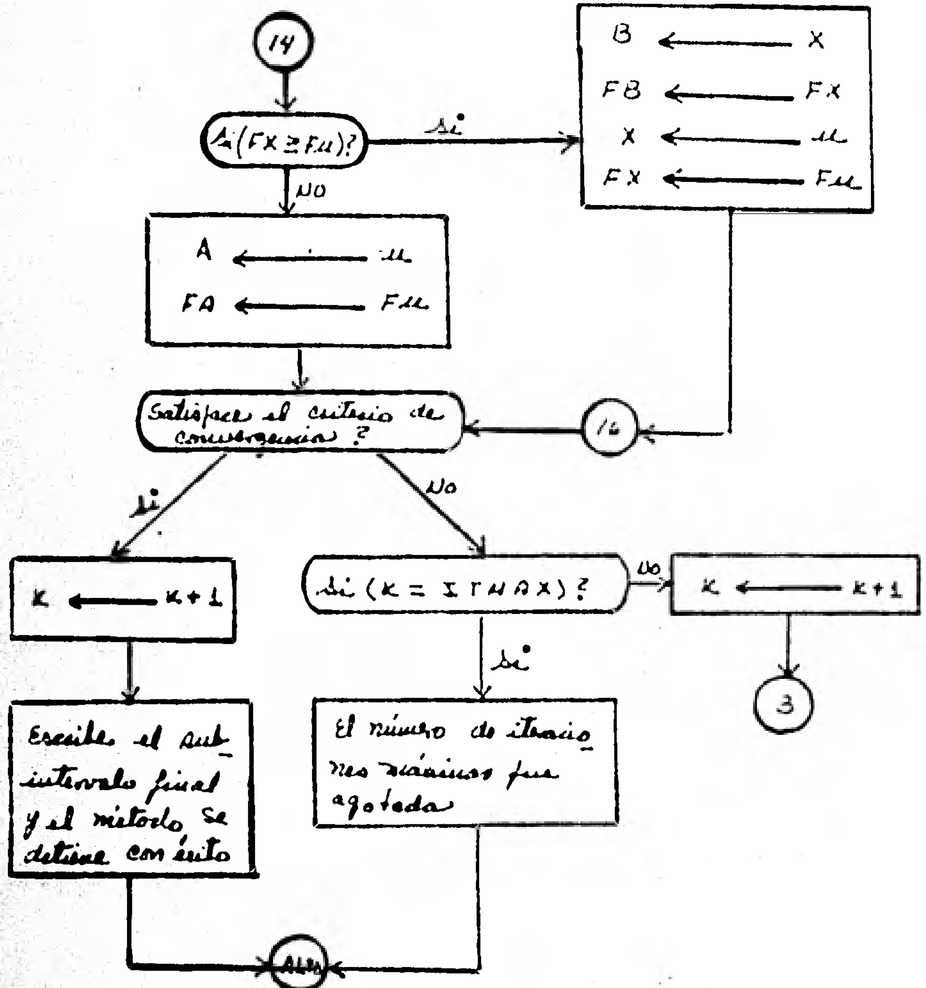
Finalmente en el apéndice general aparecerá un listado con la rutina del algoritmo de nombre IUSEG.

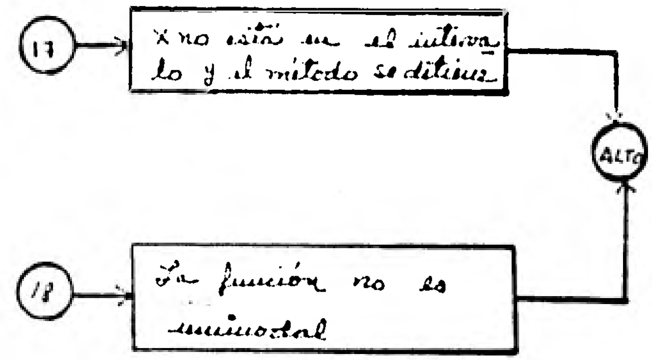
DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE

GILL Y MURRAY



Damos el intervalo (A, B)
Damos ITMAX
Damos EPS
Damos TAO
Damos un punto interior X
X ← (A+B)/2
Se checa si X está o no en el intervalo (A, B)
NO
17
Si
Evalúa la función en A, B, X.
FA ← F(A)
FB ← F(B)
F(X) ← F(X)
Se checa si la función es o no unimodal
NO
18
Si
Se determinan W y V
Si (FA ≥ FB)?
NO
Si
W ← A
V ← B
FW ← FA
FV ← FB
V ← A
W ← B
FV ← FA
FW ← FB
Se calcula u la cota modificada
D1 ← (W − X)
D2 ← (V − X)
Se comparan las distancias dirigidas
Si (|W − X| ≥ |V − X|)?
NO
Si
β ← √(−D1/D2)
u ← X + ½βD2
β ← 5/11 (0.1 − D2/D1)
u ← X + βD2
criterio en caso de que u esté cerca de uno de los extremos
Si (mínimo (|u − A|, |u − B|) > TOL1)?
Si
10
NO
criterio en caso que u casi coincida con uno de los extremos
Si ((B − X) > (X − A))?
Si
u ← (X+B)/2
10
No
Si ((B − X) ≤ (X − A))?
Si
u ← (A+X)/2
No
Evaluamos la función en u.
Fu ← F(u)
10
Se determina el intervalo de seguridad
Si (X < u)?
Si
12
No
Si (X > u)?
Si
14
No
Escribe X no está en el intervalo
ALTO
12
Si (FX ≥ Fu)?
Si
A ← X
FA ← FX
X ← u
FX ← Fu
No
B ← u
FB ← Fu
16


14
Si (FX ≥ FU)?
si
B ← X
FB ← FX
X ← U
FX ← FU
NO
A ← U
FA ← FU
16
Satisface el criterio de convergencia?
si
NO
K ← K+1
Si (K = ITMAX)?
NO
K ← K+1
3
si
Escribe el subintervalo final y el método se detiene con éxito
El número de iteraciones máximas fue agotado
ALTO


17
X no está en el intervalo y el método se detiene
ALTO
18
La función no es unimodal

Resultados Producidos por el Método de Gill y Murray.

Función	No. de Evaluaciones	EPS = .01 ; TAO = .01	
1	14	C	A = .553 B = .588
2	15	C	A = 3.24 B = 3.35
3	18	C	A = 1.23 B = 1.29
4	13	C	A = .378 B = .412
5	14	C	A = 2.95 B = 3.04
6	15	C	A = 3.09 B = 3.18
7	11	C	A = 2.88 B = 3.00
8	15	C	A = 3.09 B = 3.18
9	11	C	A = .575 B = .629
10	11	C	A = .575 B = .629
11	13	C	A = .798 B = .838

2.1 Introducción acerca de los métodos híbridos que usan interpolación polinomial.

Los métodos descritos anteriormente tienen la propiedad de que siempre convergen, aunque en general son lentos; por ello ha sido necesario estudiar algoritmos que converjan más rápido, unos que nos interesan son los métodos de interpolación polinomial; la idea de estos métodos es la siguiente:

Interpolamos un polinomio de grado dos o grado tres a través de los últimos puntos, dependiendo de la información que se tenga, calculamos el mínimo del polinomio interpolado, evaluamos la función en ese punto, con el cual vamos a eliminar uno de los puntos y repetimos el proceso iterativamente hasta satisfacer un criterio de convergencia.

Una de las virtudes de este tipo de métodos es que son muy rápidos, pero el precio que tenemos que pagar es que son inseguros, es decir, no siempre convergen.

El objetivo en esta parte es construir métodos que combinen las propiedades buenas de los que convergen rápido (interpolación), con los que siempre convergen (de comparación) a estos nuevos métodos los llamaremos "Híbridos".

La idea básica de los métodos híbridos es que en cada paso, se va a contar con un intervalo en el que la función tiene un mínimo, este intervalo recibe el nombre de intervalo de seguridad y a sus extremos se les suele llamar "seguros". Este intervalo de seguridad es actualizado en cada paso y sólo se usa en el caso en que el método de interpolación pronostique una iteración fuera de este intervalo o una iteración insatisfactoria.

Antes de pasar a discutir en detalle el método híbrido que usa interpolación cuadrática, necesitamos las fórmulas del mínimo de una cuadrática, en forma apropiada para nuestras necesidades.

2.2 Fórmulas para interpolación cuadrática.

Consideremos el siguiente problema:

Dada una función unimodal en el intervalo $[a,b]$, un punto $x \in (a,b)$ y los correspondientes valores de la función, deseamos encontrar una aproximación al mínimo de f usando una cuadrática.

A continuación trataremos de encontrar una fórmula para el mínimo α de la cuadrática que pasa por los puntos $(x, f(x))$, $(w, f(w))$ y $(v, f(v))$ de la forma

$$\alpha = x + z$$

para que de esta forma se tenga a α como una corrección de x, lo cual será de gran utilidad para la implementación del método.

<u>Lema</u> El mínimo de la parábola que pasa por $(x, f(x))$, $(w, f(w))$, $(v, f(v))$ esta dada por

$$\alpha = x - \frac{s}{q}$$

donde

$$s = \left[(w-x)^2 (f(v) - f(w)) - (v-x)^2 (f(w) - f(x))\right]$$

$$q = \left[(v-x)(f(w) - f(x)) - (w-x)(f(v) - f(x))\right]$$

Dem.

Definamos

$$P(t) = (t-x)^2 A + (t-x) B + C \quad ,$$

Como queremos que :

$$P(x) = f(x) \qquad , \quad C = f(x) \quad .$$

así, $P(t) = (t-x)^2 A + (t-x) B + f(x)$,

como también queremos que $P(v) = f(v)$ y $P(w) = f(w)$

$$(v-x)^2 A + (v-x) B + f(x) = f(v) \text{ ----------- } (\mathrm{I})$$

$$(w-x)^2 A + (w-x) B + f(x) = f(w) \text{ ----------- } (\mathrm{II})$$

dividiendo entre A ambos miembros de las 2 relaciones se llega

a $$(v-x)^2 + (v-x)\frac{B}{A} + \frac{f(x)}{A} = \frac{f(v)}{A} \quad ,$$

$$(w-x)^2 + (w-x)\frac{B}{A} + \frac{f(x)}{A} = \frac{f(w)}{A} \quad ,$$

dividiendo miembro a miembro

$$\frac{(v-x)^2 + (v-x)\frac{B}{A}}{(w-x)^2 + (w-x)\frac{B}{A}} = \frac{\frac{f(v)}{A} - \frac{f(x)}{A}}{\frac{f(w)}{A} - \frac{f(x)}{A}} \quad ,$$

obtenemos que

$$\left[(v-x)^2 + (v-x)\frac{B}{A}\right]\left[f(w) - f(x)\right] = \left[(w-x)^2 + (w-x)\frac{B}{A}\right]\left[f(v) - f(x)\right] ,$$

de donde

$$\frac{B}{A} = \frac{(w-x)^2(f(v)-f(x)) - (v-x)^2(f(w)-f(x))}{(v-x)(f(w)-f(x)) - (w-x)(f(v)-f(x))}$$

ahora si denotamos por α el punto donde $P(t)$ alcanza el mínimo, entonces $P'(\alpha) = 0$. En consecuencia,

$$2A(\alpha - x) + B = 0$$

de donde

$$\alpha = x - \frac{B}{2A} = x - \frac{s}{q}$$

lo cual prueba el resultado.

En seguida hacemos una descripción breve del algoritmo del método híbrido que usa interpolación cuadrática.

2.3 Descripción del Método Híbrido que usa Interpolación Cuadrática.

El método que vamos a describir combinará el método de Gill y Murray junto con el método de interpolación cuadrática.

En una descripción, en términos generales, este método iterá simultaneamente los dos métodos mencionados y toma lo que le parece más rápido y seguro al mismo tiempo.

En concreto dados $(x, f(x))$, $(w, f(w))$, $(v, f(v))$, un intervalo $[a, b]$ que contiene al mínimo y un punto interior x procedemos de la siguiente manera:

1º Calculamos el mínimo de la cuadrática, interpolada por $(x, f(x))$, $(w, f(w))$, $(v, f(v))$

$$\alpha \longleftarrow x - S/q$$

2º Calculamos $u \in (a, b)$ usando a, x, b con el método de Gill y Murray

$$u \longleftarrow u(a, x, b)$$

3º Si $u > x$ y $\alpha \in (a, u)$ entonces $m \longleftarrow \alpha$

Si $u < x$ y $\alpha \in (u, b)$ entonces $m \longleftarrow \alpha$

en caso contrario hacemos

$$m \longleftarrow u$$

4º Actualizamos a, b, x, v, w y sus valores correspondientes

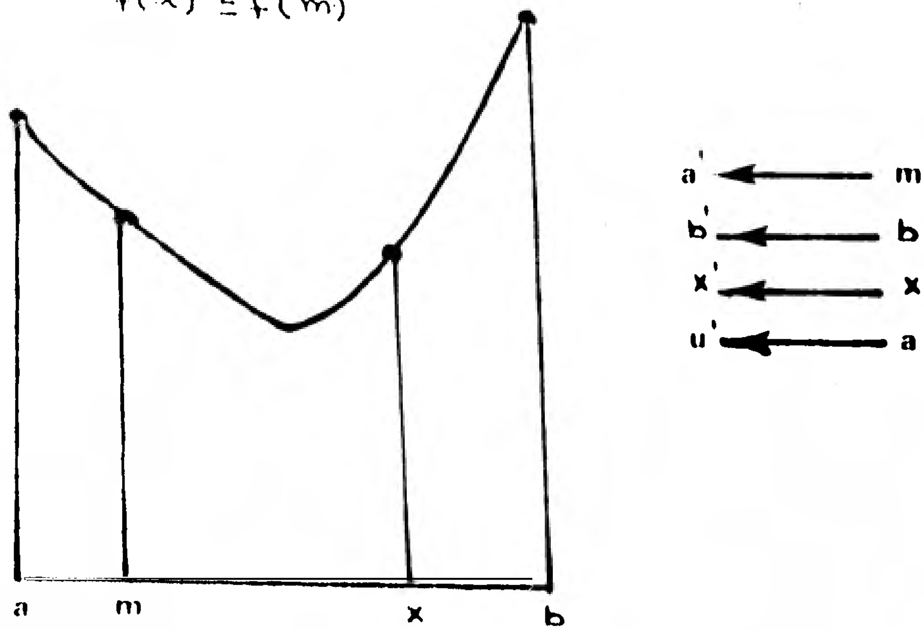
5º Checamos convergencia; si satisface el criterio hacemos ALTO

en caso contrario regresamos al paso 1º.

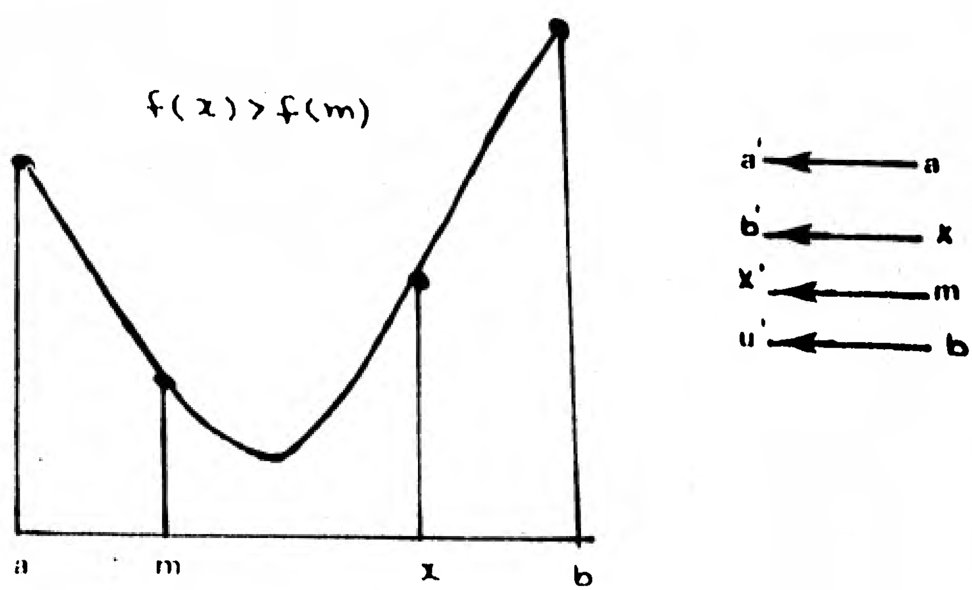
La actualización se realiza en dos etapas, en la primera se hace énfasis en obtener un nuevo intervalo de seguridad; esto es $\{a, x, m, b\} \longrightarrow \{a', x', b', u'\}$. Como podremos observar a continuación, se tienen dos casos: cuando $x > m$ y $x < m$ y la situación que se nos puede presentar en uno u otro caso, es cualquiera de los cinco siguientes.

Casos cuando $X > M$

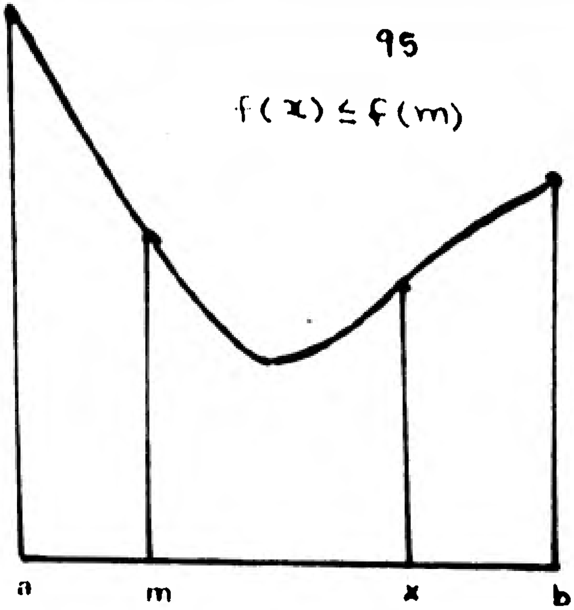
$f(x) \leq f(m)$



$f(x) > f(m)$



$f(x) \leq f(m)$



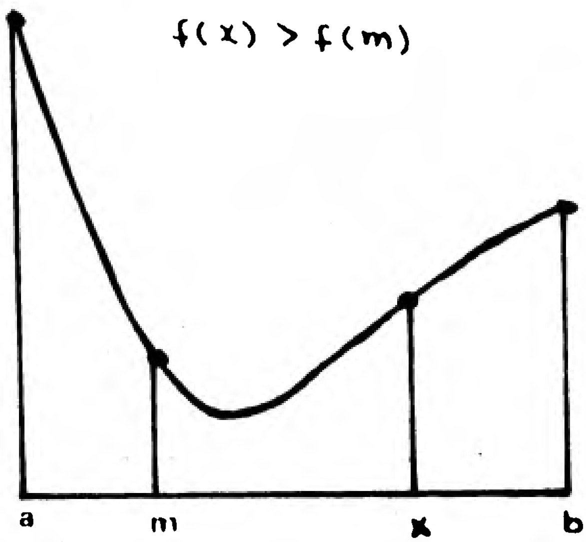
$a' \leftarrow m$

$b' \leftarrow b$

$x' \leftarrow x$

$u' \leftarrow a$

$f(x) > f(m)$



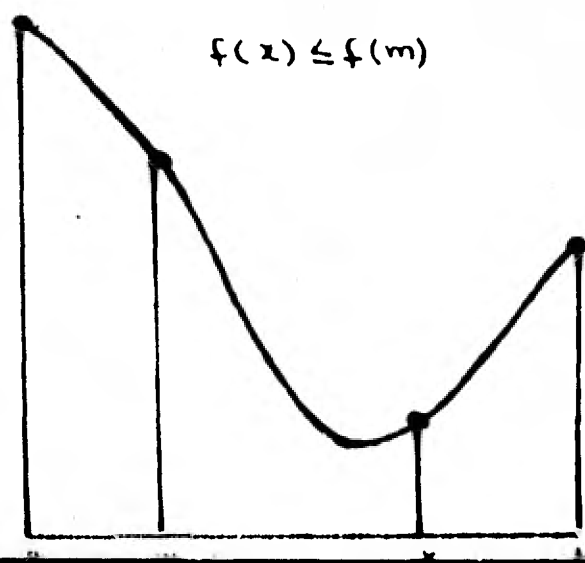
$a' \leftarrow a$

$b' \leftarrow x$

$x' \leftarrow m$

$u' \leftarrow b$

$f(x) \leq f(m)$



$a' \leftarrow m$

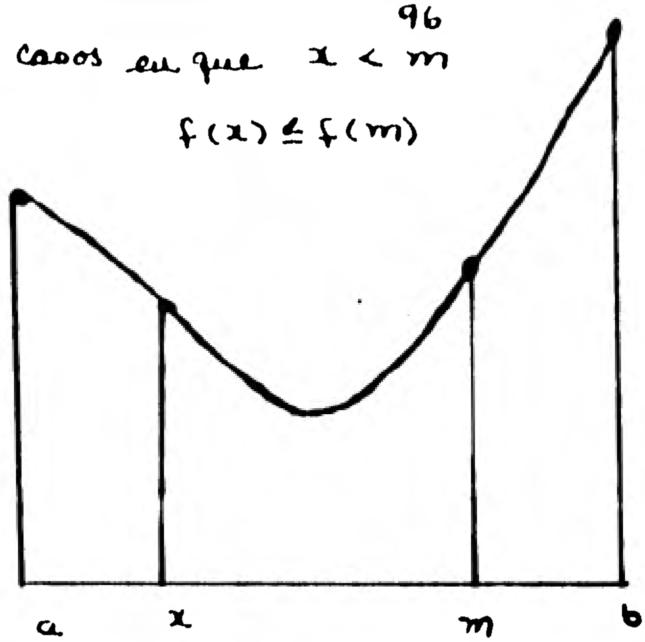
$b' \leftarrow b$

$x' \leftarrow x$

$u' \leftarrow a$

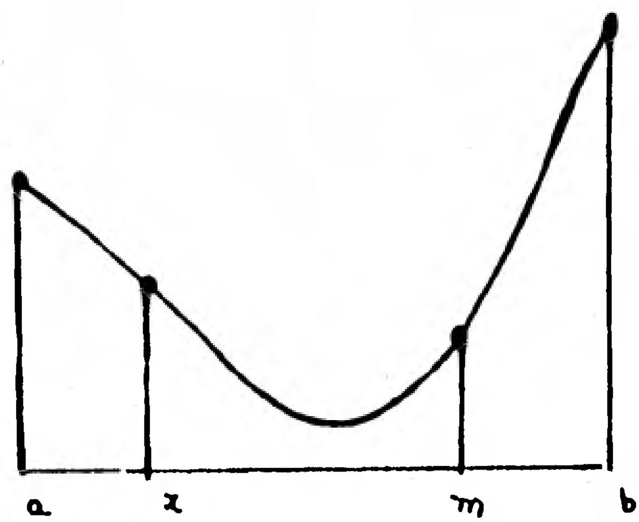
casos em que $x < m$

$f(x) \leq f(m)$



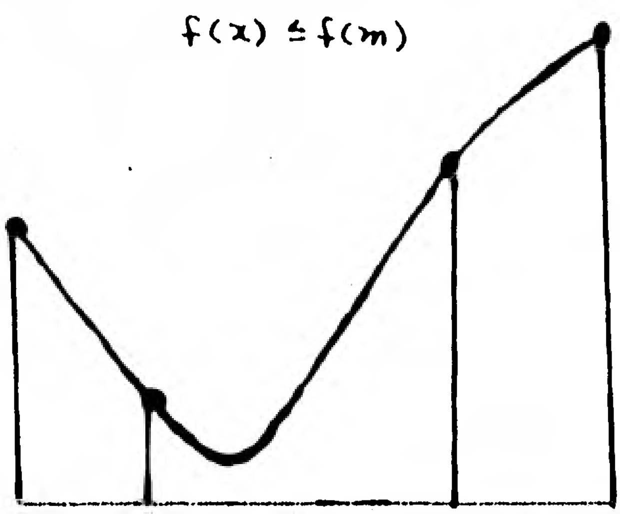
$a' \leftarrow a$
$b' \leftarrow m$
$x' \leftarrow x$
$u' \leftarrow b$

$f(x) > f(m)$



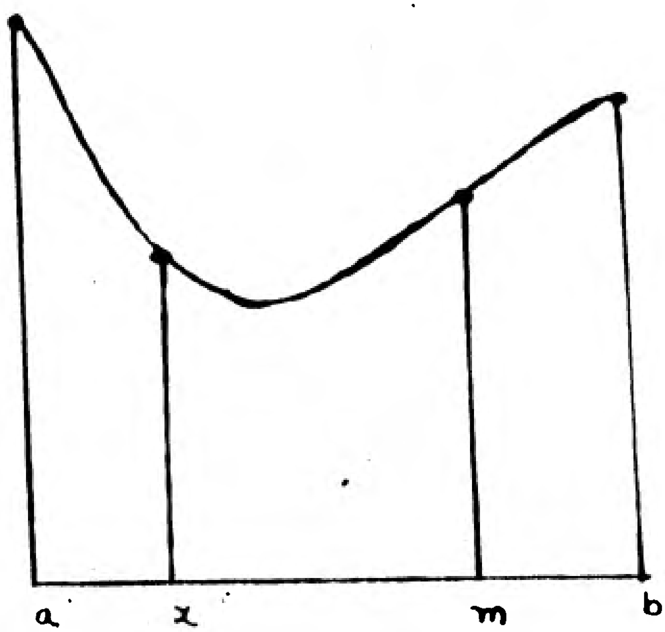
$a' \leftarrow x$
$b' \leftarrow b$
$x' \leftarrow m$
$u' \leftarrow a$

$f(x) \leq f(m)$



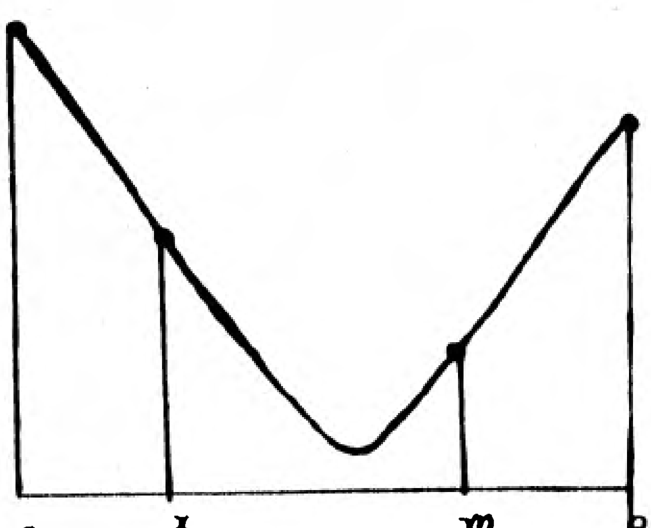
$a' \leftarrow a$
$b' \leftarrow m$
$x' \leftarrow x$
$u' \leftarrow b$

$f(x) \leq f(m)$



$a' \leftarrow a$
$b' \leftarrow m$
$x' \leftarrow x$
$u' \leftarrow b$

$f(x) > f(m)$

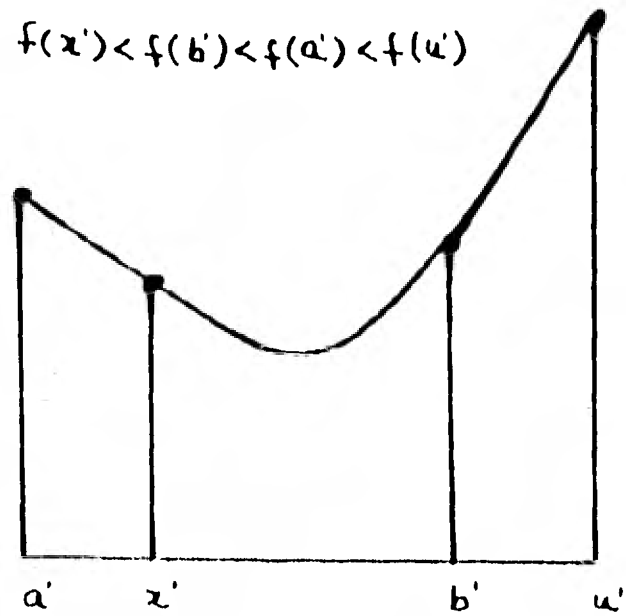


$a' \leftarrow x$
$b' \leftarrow b$
$x' \leftarrow m$
$u' \leftarrow a$

Nótese que los cinco casos antes mencionados sólo se reducen a dos.

Finalmente en la segunda etapa de la actualización, se ilustrará la forma de escoger los valores más pequeños, esto es de $\{a', x', b', u'\} \rightarrow \{a', x', b', w', v'\}$.

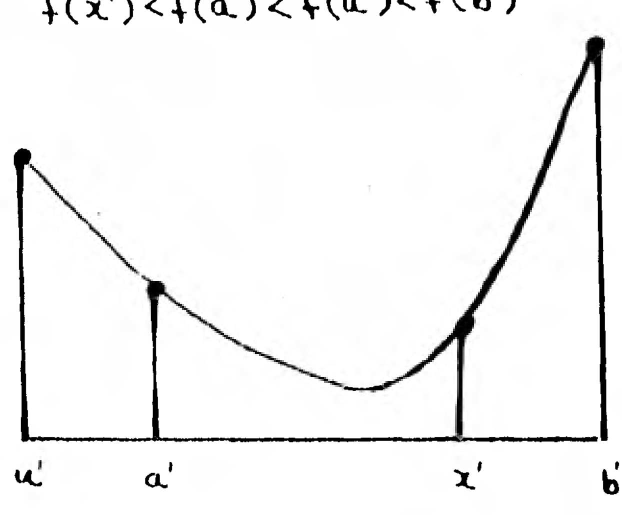
$f(x') < f(b') < f(a') < f(u')$



$w' \longleftarrow a'$

$v' \longleftarrow u'$

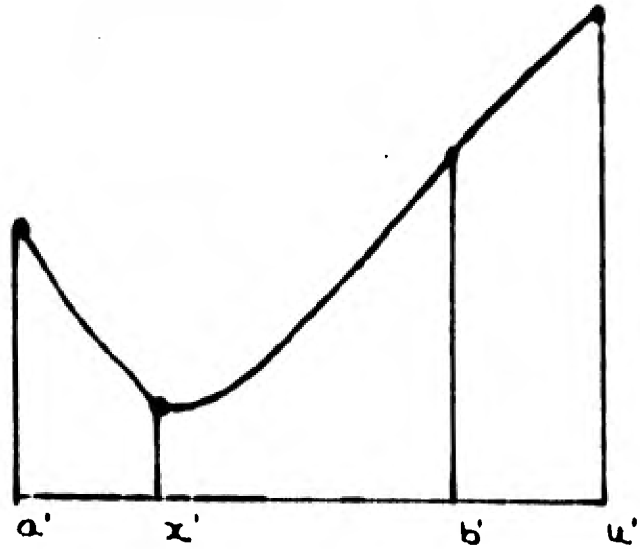
$f(x') < f(a') < f(u') < f(b')$



$w' \longleftarrow b'$

$v' \longleftarrow a'$

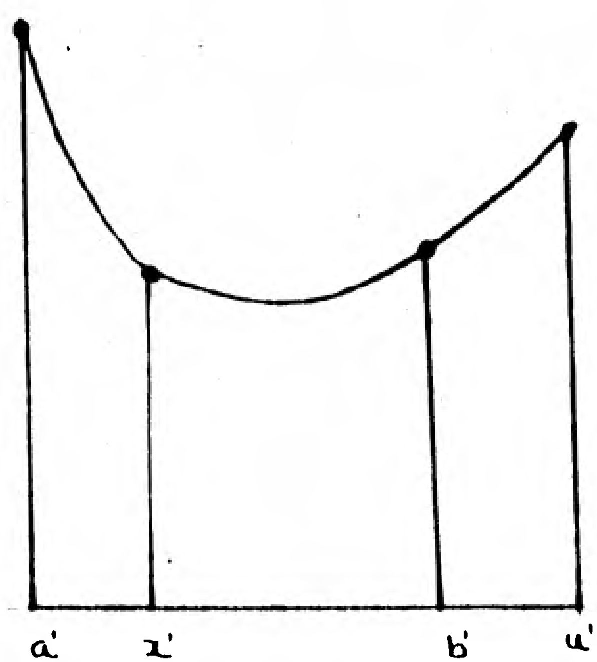
$f(x') < f(a') < f(b') < f(u')$



$w' \longleftarrow a'$

$v' \longleftarrow b'$

$f(x') < f(b') < f(u') < f(a')$



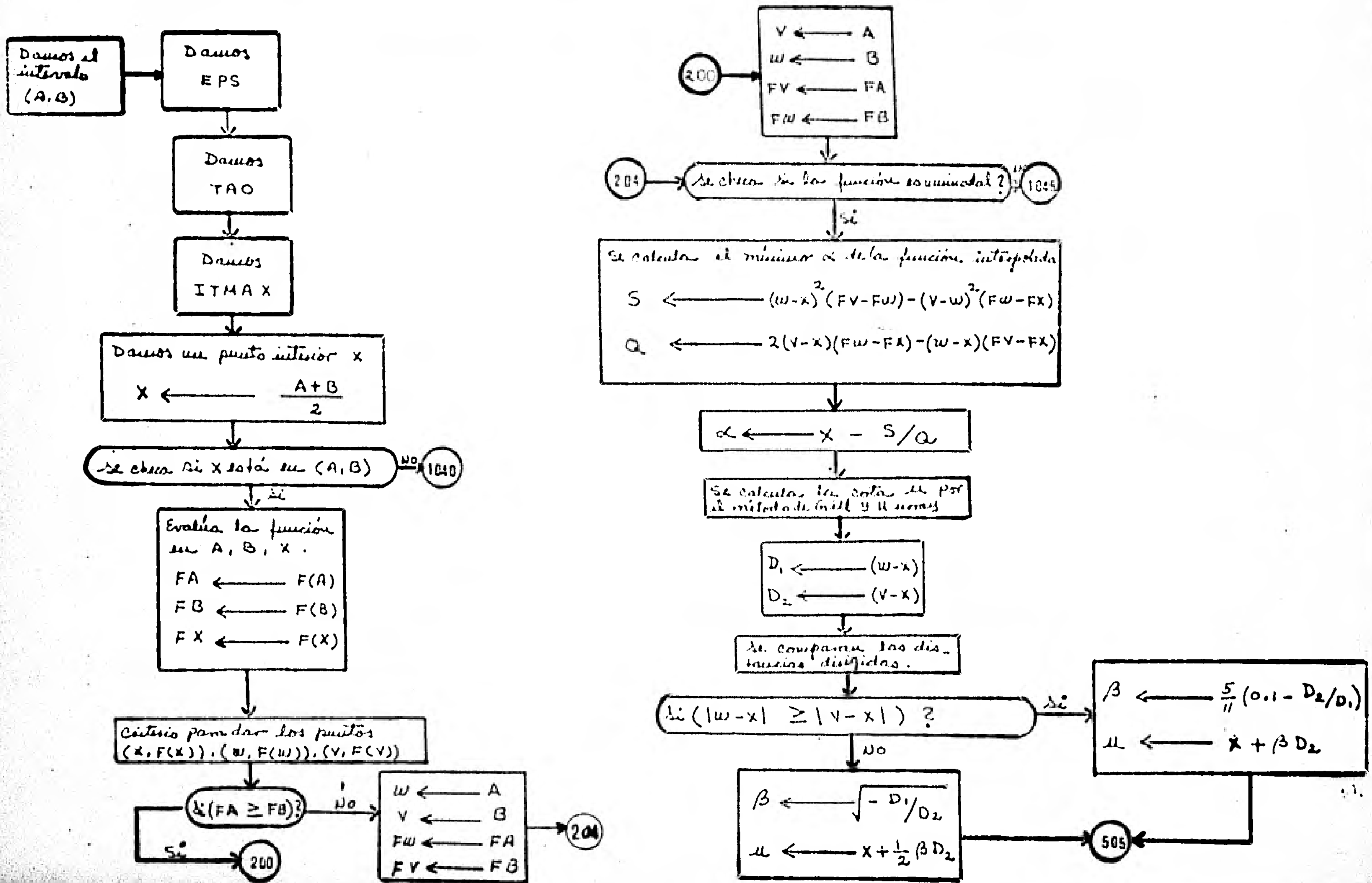
$w' \longleftarrow b'$

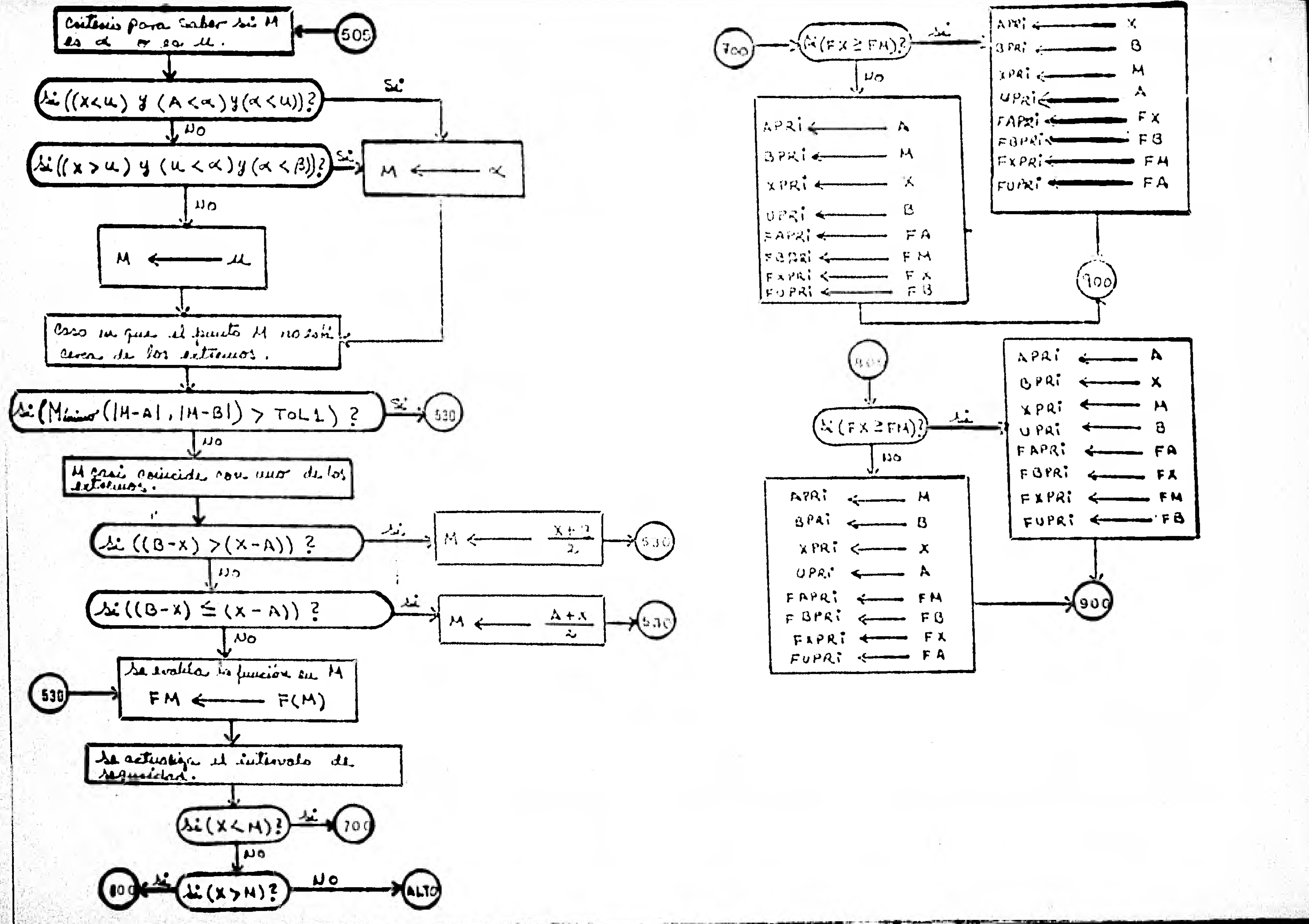
$v' \longleftarrow u'$

Para finalizar con este método anexamos la tabla correspondiente en la cual se recopilaron los resultados de las pruebas realizadas, así como su diagrama de flujo. En el apéndice general se anexa el listado de la rutina correspondiente al método híbrido con el nombre de CUAGIM.

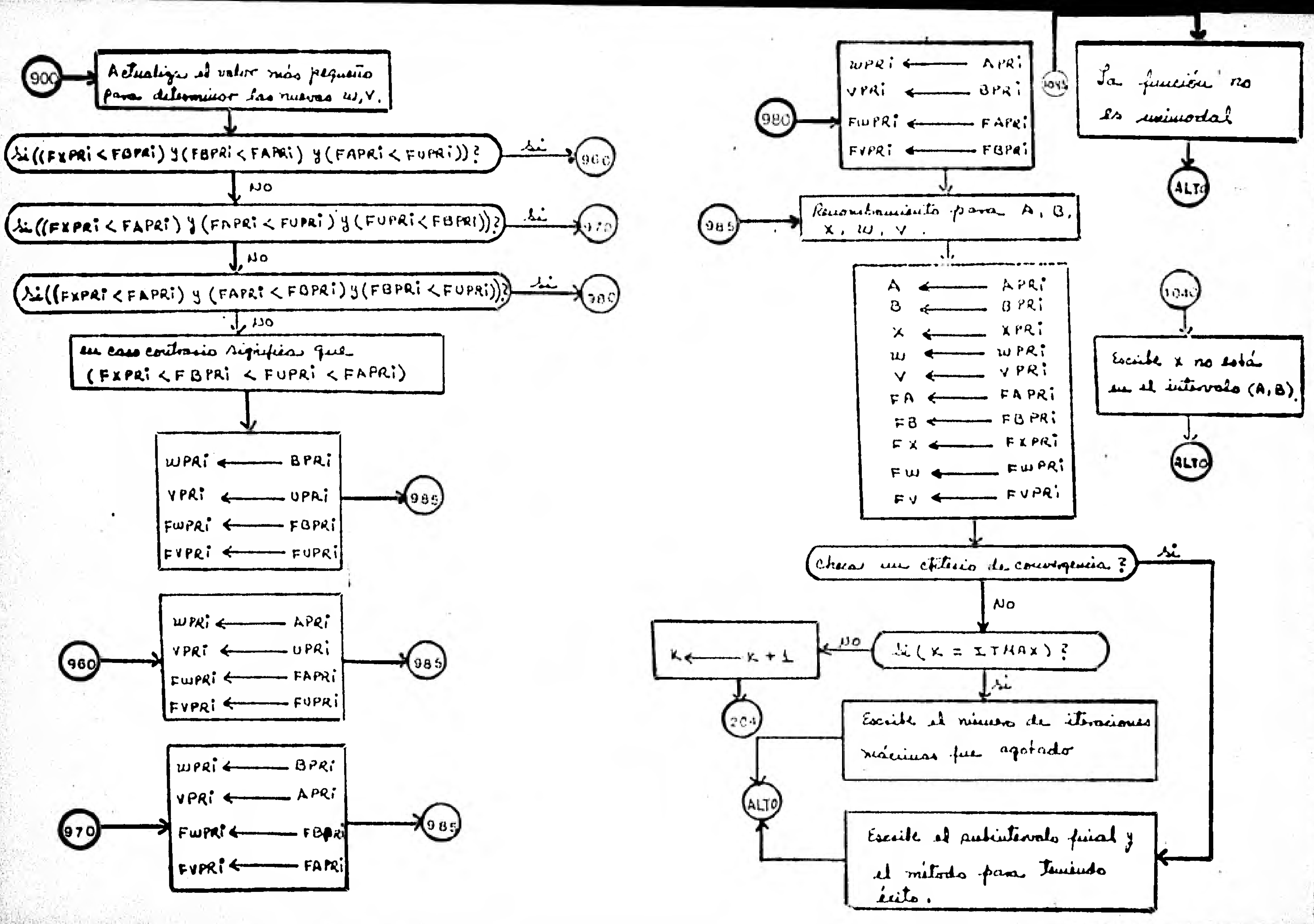
DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO HIBRIDO QUE COMBINA LOS METODOS DE GILL Y MURRAY E INTERPOLACION CUADRATICA

Gill y Murray e interpolación cuadrática.





505
Criterio para saber si M es α o es u.
Si ((X<u) y (A<α) y (α<u))?
Si
No
Si ((X>u) y (u<α) y (α<β))?
Si
M ← α
No
M ← u
Caso en que el punto M no está cerca de los extremos.
Si (Mínimo (|M-A|, |M-B|) > TOL1) ?
Si
530
No
M casi coincide con uno de los extremos.
Si ((B-X) > (X-A)) ?
Si
M ← (X+B)/2
530
No
Si ((B-X) ≤ (X-A)) ?
Si
M ← (A+X)/2
530
No
530
Se evalúa la función en M
FM ← F(M)
Se actualiza el intervalo de seguridad.
Si (X<M)?
Si
700
No
800
Si
Si (X>M)?
No
ALTO
700
Si (FX ≥ FM)?
Si
APRI ← X
BPRI ← B
XPRI ← M
UPRI ← A
FAPRI ← FX
FBPRI ← FB
FXPRI ← FM
FUPRI ← FA
No
APRI ← A
BPRI ← M
XPRI ← X
UPRI ← B
FAPRI ← FA
FBPRI ← FM
FXPRI ← FX
FUPRI ← FB
900
800
Si (FX ≥ FM)?
Si
APRI ← A
BPRI ← X
XPRI ← M
UPRI ← B
FAPRI ← FA
FBPRI ← FX
FXPRI ← FM
FUPRI ← FB
No
APRI ← M
BPRI ← B
XPRI ← X
UPRI ← A
FAPRI ← FM
FBPRI ← FB
FXPRI ← FX
FUPRI ← FA
900
900


900
Actualiza el valor más pequeño para determinar las nuevas W, V.
Si ((FXPRI < FBPRI) y (FBPRI < FAPRI) y (FAPRI < FUPRI)) ?
si
960
NO
Si ((FXPRI < FAPRI) y (FAPRI < FUPRI) y (FUPRI < FBPRI)) ?
si
970
NO
Si ((FXPRI < FAPRI) y (FAPRI < FBPRI) y (FBPRI < FUPRI)) ?
si
980
NO
en caso contrario significa que (FXPRI < FBPRI < FUPRI < FAPRI)
WPRI ← BPRI
VPRI ← UPRI
FWPRI ← FBPRI
FVPRI ← FUPRI
985
960
WPRI ← APRI
VPRI ← UPRI
FWPRI ← FAPRI
FVPRI ← FUPRI
985
970
WPRI ← BPRI
VPRI ← APRI
FWPRI ← FBPRI
FVPRI ← FAPRI
985
980
WPRI ← APRI
VPRI ← BPRI
FWPRI ← FAPRI
FVPRI ← FBPRI
1045
La función no es unimodal
ALTO
985
Renombramiento para A, B, X, W, V.
A ← APRI
B ← BPRI
X ← XPRI
W ← WPRI
V ← VPRI
FA ← FAPRI
FB ← FBPRI
FX ← FXPRI
FW ← FWPRI
FV ← FVPRI
1040
Escribe x no está en el intervalo (A, B).
ALTO
Checa un criterio de convergencia ?
si
NO
Si (K = ITMAX) ?
NO
K ← K + 1
204
si
Escribe el número de iteraciones máximas fue agotado
ALTO
Escribe el subintervalo final y el método para teniendo éxito.

Resultados producidos por el método híbrido que combinó los métodos de Gill y Murray e Interpolación cuadrática.

Función	No. de evaluaciones	EPS = .01 ; TAO = .01	
1	10	C	A = .544 B = .586
2	11	C	A = 3.27 B = 3.33
3	16	C	A = 1.22 B = 1.29
4	11	C	A = .376 B = .405
5	11	C	A = 2.95 B = 3.11
6	18	C	A = 3.10 B = 3.19
7	9	C	A = 2.88 B = 3.00
8	18	C	A = 3.10 B = 3.19
9	11	C	A = 5.33 B = 5.65
10	11	C	A = .533 B = .566
11	11	C	A = .798 B = .845

2.4 Fórmulas para Interpolación Cúbica

Antes de pasar a ver en detalle el método híbrido que usa interpolación cúbica, necesitamos las fórmulas para determinar el mínimo de una cúbica.

El método de interpolación cúbica a diferencia del método de interpolación cuadrática necesita información adicional sobre la función a optimizar, como es el cálculo de las primeras derivadas.

Consideremos el siguiente problema:

Dada una función uni - modal en el intervalo $[a,b]$ y los correspondientes valores de la función, deseamos encontrar una aproximación al mínimo de la función usando un polinomio cúbico que pasa por los puntos $(x, f(x)), (w, f(w))$ y además en x y w las derivadas están asignadas y deben ser iguales a $f'(x)$ y $f'(w)$ respectivamente.

Para encontrar dicha aproximación utilizaremos la expresión para la primera derivada que nos da el siguiente lema.

Lema: La ecuación de la pendiente de el polinomio cúbico que pasa a través de los puntos $(x, f(x))$, $(w, f(w))$ con derivadas $f'(x)$ y $f'(w)$ respectivamente está dada por:

$$P'(t) = f'(x) - 2\alpha(f'(x) + \eta) + \alpha^2(f'(x) + f'(w) + 2\eta),$$

donde $$\eta = -3\left[\frac{f(x)-f(w)}{w-x}\right] + f'(x) + f'(w) \quad ;$$

$$\alpha = \frac{t-x}{w-x}$$

Dem.

Podemos escribir el polinomio cúbico $P(t)$ en la forma

$$P(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + A\frac{(t-x)^2}{(w-x)} + B\frac{(t-x)^3}{(w-x)^2}$$

donde sólo nos falta determinar A y B.

Calculando la derivada en x, tenemos:

$$P'(x) = f'(x)$$

análogamente la derivada en w, tenemos

$$P'(w) = f'(w) = f'(x) + 2A + 3B$$

$$P(w) = f(w) = f(x) + f'(x)(w-x) + A\frac{(w-x)^2}{(w-x)} + B\frac{(w-x)^3}{(w-x)^2},$$

$$= f(x) + f'(x)(w-x) + (A+B)(w-x)$$

despejando $(A+B)$, en las dos relaciones anteriores tenemos:

$$(A+B) = \frac{f(w)-f(x)}{w-x} - f'(x),$$

$$(2A+3B) = f'(w) - f'(x).$$

Resolviendo el sistema llegamos:

$$3\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right] - 3f'(x) = 3A+3B$$

$$-f'(w) \qquad + f'(x) = -2A-3B$$

$$3\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right] - f'(w) - 2f'(x) = A$$

$$\therefore \quad A = 3\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right] - f'(w) - 2f'(x),$$

sustituyendo obtenemos el valor de B

$$\frac{f(w)-f(x)}{w-x} - f'(x) = 3\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right] - f'(w) - 2f'(x) + B$$

$$\therefore \quad B = f'(w) + f'(x) - 2\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right],$$

si definimos a η como:

$$\eta = -3\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right] + f'(w) + f'(x),$$

entonces A y B se pueden escribir como

$$A = -\eta - f'(x)$$

dado que $B = f'(w) + f'(x) - 2\left[\dfrac{f(w)-f(x)}{w-x}\right]$

$$= f'(w) + f'(x) + 2\,\frac{(\eta - f'(w) - f'(x))}{3},$$

$$B = \frac{f'(w) + f'(x) + 2\eta}{3},$$

$$P(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + A\,\frac{(t-x)^2}{(w-x)} + B\,\frac{(t-x)^3}{(w-x)^2}$$

$$= f(x) + (w-x)\left[f'(x)\alpha + A\alpha^2 + B\alpha^3\right]$$

$$P'(t) = (w-x)\left[f'(x) + 2A\alpha + 3B\alpha^2\right]\frac{d\alpha}{dt},$$

como $\alpha = \dfrac{t-x}{w-x}$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{w-x},$$

o sea $(w-x)\dfrac{d\alpha}{dt} = 1$,

$$P'(t) = f'(x) + 2A\alpha + 3B\alpha^2,$$

si sustituimos A y B por sus valores obtenemos

$$P'(t) = f'(x) - 2(\eta + f'(x))\alpha + (f'(w) + f'(x) + 2\eta)\alpha^2 .$$

Lema .- La raíz t_* de $P'(t)=0$ correspondiente al mínimo de la interpolación cúbica puede ser expresada como

$$t_* = x + s/q \, ,$$

donde

$$s = \pm (w-x)\left[f'(x) - \gamma - \eta\right] \, ,$$

$$q = \mp \left[f'(w) - f'(x) + 2\gamma\right] \, ,$$

y $$\gamma = \left[\operatorname{sign}(w-x)\right]\left(\eta^2 - f'(x) f'(w)\right)^{1/2} \, .$$

Dem. Denotando $\left(\dfrac{t-x}{w-x}\right) = \alpha$ tenemos :

$$t - x = \alpha (w-x) \, ,$$

$$t = x + \alpha (w - x) \, ,$$

tenemos que

$$\alpha^2 (f'(x) + f'(w) + 2\eta) - 2\alpha (f'(x) + \eta) + f'(x) = 0$$

$$\alpha_* = \frac{2(f'(x)+\eta) \pm \sqrt{4(f'(x)+\eta)^2 - 4f'(x)(f'(x)+f'(w)+2\eta)}}{2(f'(x)+f'(w)+2\eta)}$$

desarrollando lo que está dentro de la raíz

$$\begin{aligned} 4(f'(x)+\eta)^2 - 4f'(x)(f'(x)+f'(w)+2\eta) &= 4f'(x)^2 + 8\eta f'(x) + 4\eta^2 \\ &\quad - 4f'(x)^2 - 4f'(x)f'(w) \\ &\quad - 8\eta f'(x) \\ &= 4\eta^2 - 4f'(x)f'(w) \end{aligned}$$

$$\alpha_* = \frac{2(f'(x)+\eta) \pm \sqrt{4\eta^2 - 4f'(x)\,f'(w)}}{2(f'(x)+f'(w)+2\eta)}$$

$$= \frac{2(f'(x)+\eta) \pm \sqrt{4(\eta^2 - f'(x)\,f'(w))}}{2(f'(x)+f'(w)+2\eta)}$$

$$= \frac{2\left[(f'(x)+\eta) \pm \sqrt{\eta^2 - f'(x)\,f'(w)}\right]}{2(f'(x)+f'(w)+2\eta)}$$

$$\therefore \alpha_* = \frac{(f'(x)+\eta \pm \gamma)}{(f'(x)+f'(w)+2\gamma)} \quad ,$$

donde

$$\gamma = \sqrt{\eta^2 - f'(x)\,f'(w)} \quad .$$

Con el objeto de saber qué signo debemos elegir para γ puesto que andamos en busca de un mínimo, cálculamos la 2a. derivada.

$$P''(t) = \frac{2A}{(w-x)} + \frac{6B\alpha}{(w-x)} \quad ,$$

$$P''(t) = \frac{2}{(w-x)}\left[A + 3B\alpha\right] \quad ,$$

$$P''(\alpha_*) = \frac{2}{(w-x)}\left[A + 3B\alpha_*\right] \quad ,$$

$$P''(\alpha_*) = \frac{2}{(w-x)}\left[-\eta - f'(x) + (f'(w)+f'(x)+2\eta) \cdot \left(\frac{f'(x)+\eta \pm \gamma}{f'(x)+f'(w)+2\eta}\right)\right] \quad ,$$

$$= \frac{2}{(w-x)}\left[\pm r\right]$$

$$P''(\alpha_*) = \pm \frac{2r}{(w-x)}$$

Observemos que el cociente debe resultar ser mayor que cero, ya que lo que se desea encontrar es su mínimo de tal forma que si el denominador $(w-x)$ es negativo el numerador deberá ser negativo, en caso contrario si $(w-x)$ fuese positivo, el numerador sería positivo, por tanto se tiene que:

Si hacemos

$$r_* = (\operatorname{Sign}(w-x))\sqrt{\eta^2 - f'(x)} \quad ,$$

α la podemos escribir ahora como:

$$\alpha_* = \frac{-A + r_*}{3B} \quad .$$

En la relación anterior para α_* observemos que si $B = 0$ la expresión no estaría definida y se tendrá que:

$$f'(\alpha) = f'(x) - 2\alpha A = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_* = \frac{f'(x)}{2A} \quad .$$

Dado que

$$P'(\alpha) = \alpha^2 (f'(w) + f'(x) + 2\eta) - 2\alpha (f'(x) + \eta) + f'(x),$$

resolvemos la ecuación resultante, aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2o. grado; la siguiente observación es de gran utilidad.

<u>Observación.-</u> Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos que una solución cuando $a \neq 0$, está dada por:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

si $a = 0$ la solución para la ecuación es $x = -c/b$.

Otra expresión abreviada para el caso cuando $a \neq 0$ está dada por:

$$x = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

observemos que aún en este caso, si $a = 0$, la solución sigue siendo

$$x = \frac{-\cancel{2}c}{\cancel{2}b} = \frac{-c}{b}.$$

Estas dos expresiones para la misma raíz las vamos a combinar para obtener otra expresión que nos será muy útil.

Para ello recordemos la siguiente propiedad de las proporciones,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{\alpha_1+\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_4} ,$$

apliquemos esta propiedad a las relaciones

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} ,$$

$$x = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} ,$$

$$\therefore\ x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} + (-2c)}{a + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} .$$

Procedamos ahora en forma análoga con α_*.

$$\alpha_* = \frac{-A + \gamma_*}{3B} = \frac{\gamma_* - A}{3B}$$

$$= \frac{\gamma_*^2 - A^2}{3B(\gamma_* + A)} = \frac{2(\gamma_*^2 - A^2)}{6B(\gamma_* + A)} = \frac{-2f'(x)}{2(\gamma_* + A)} ,$$

$$\alpha_* = \frac{\gamma_* - A - 2f'(x)}{3B + 2(\gamma_* + A)}$$

$$= \frac{\gamma_* + \eta + f'(x) - 2f'(x)}{f'(w) + f'(x) + 2\eta + 2\gamma_* - 2f'(x) - 2\eta}$$

$$= \frac{\eta - f'(x) + \gamma_*}{f'(w) - f'(x) + 2\gamma_*} ,$$

$$\therefore \alpha_* = \frac{\eta - f'(x) + \gamma_*}{f'(w) - f'(x) + 2\gamma_*} ,$$

donde $\gamma_* = (\mathrm{Sign}(w-x))\sqrt{\eta^2 - f'(x)f'(w)}$,

y $\eta = -3\left[\dfrac{f(w) - f(x)}{w - x}\right] + f'(w) + f'(x)$,

Como $t_* = x + \alpha_*(w-x)$

$$= x + \left(\frac{\eta - f'(x) + \gamma_*}{f'(w) - f'(x) + 2\gamma_*}\right)(w-x)$$

$$= x - \frac{(-\eta + f'(x) - \gamma_*)}{f'(w) - f'(x) + 2\gamma_*}(w-x)$$

$$= x - \frac{(f'(x) - \gamma_* - \eta)}{f'(w) - f'(x) + 2\gamma_*}(w-x) ,$$

de donde $t_* = x + S/q$,

lo cual prueba el resultado.

Actualización del Intervalo de Seguridad

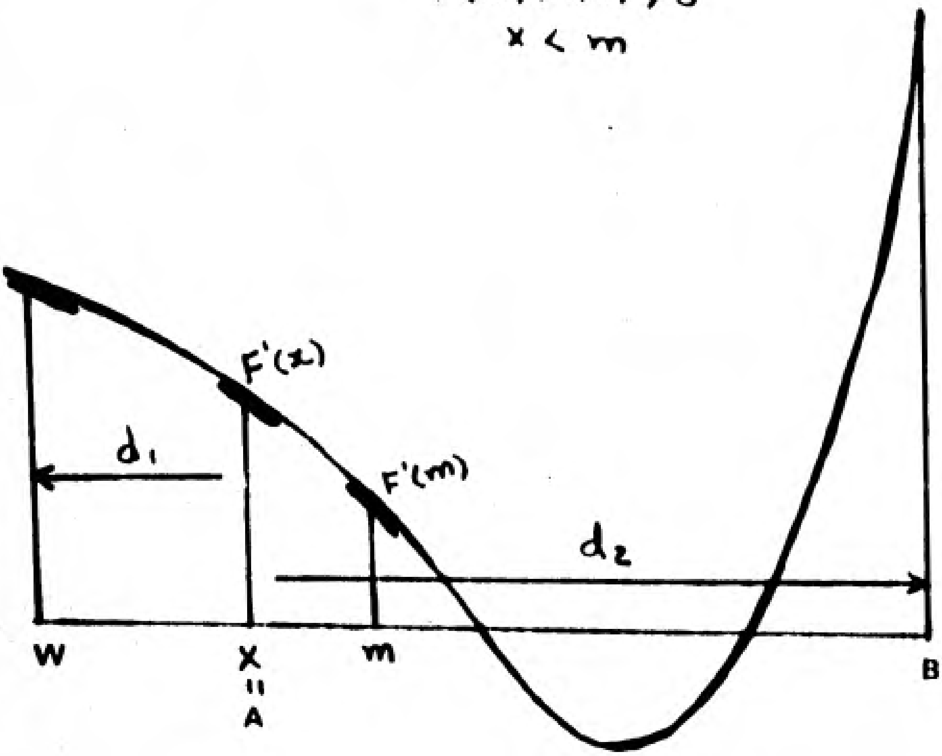
Como se podrá observar de las siguientes figuras, la actualización se hace de tal forma que siempre se cuente con un intervalo de seguridad, el cual al aplicarle el algoritmo nos reduzca el intervalo a un subintervalo de longitud más chica que contenga al mínimo en su interior.

Caso (I)

$F(x) \geq F(m)$

$F'(m)\,F'(x) > 0$

$x < m$



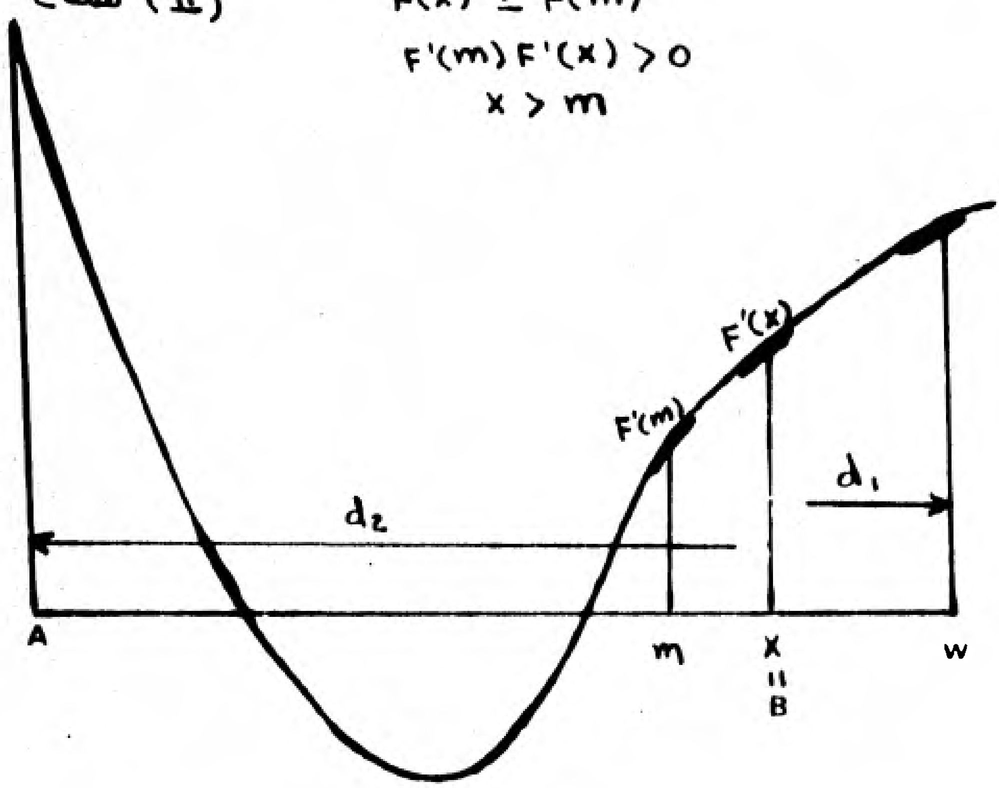
$A' \leftarrow M$
$B' \leftarrow B$
$X' \leftarrow M$
$W' \leftarrow X$
$FA' \leftarrow FM$
$FB' \leftarrow FB$
$FX' \leftarrow FM$
$FW' \leftarrow FX$

Caso (II)

$F(x) \geq F(m)$

$F'(m)\,F'(x) > 0$

$x > m$



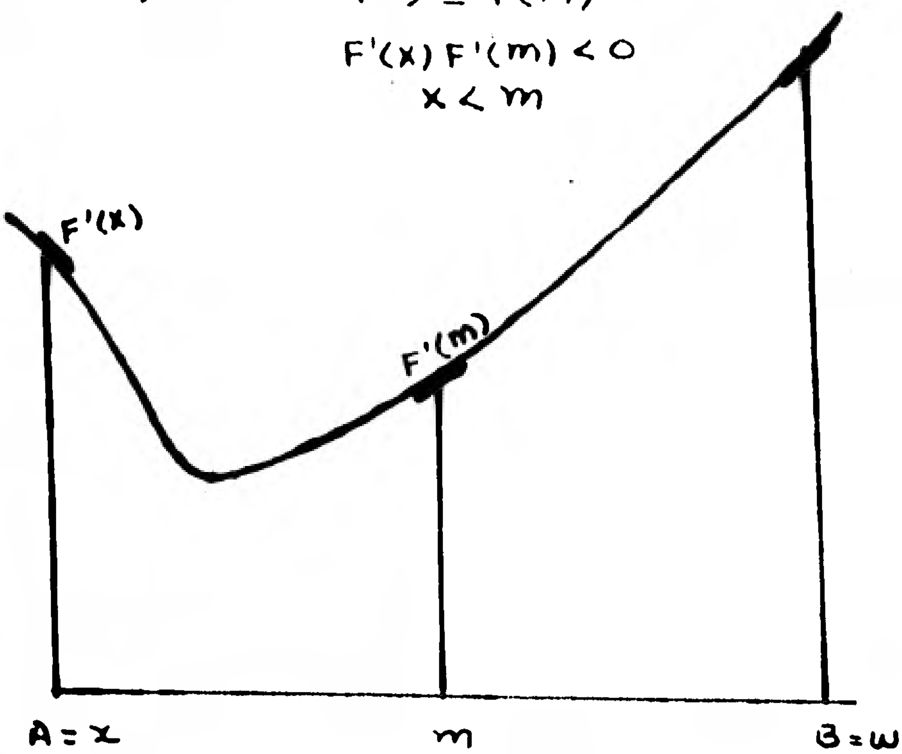
$A' \leftarrow A$
$B' \leftarrow M$
$X' \leftarrow M$
$W' \leftarrow X$
$FA' \leftarrow FA$
$FB' \leftarrow FM$
$FX' \leftarrow FM$
$FW' \leftarrow FX$

Caso (III)

$F(x) \geq F(m)$

$F'(x)\,F'(m) < 0$

$x < m$



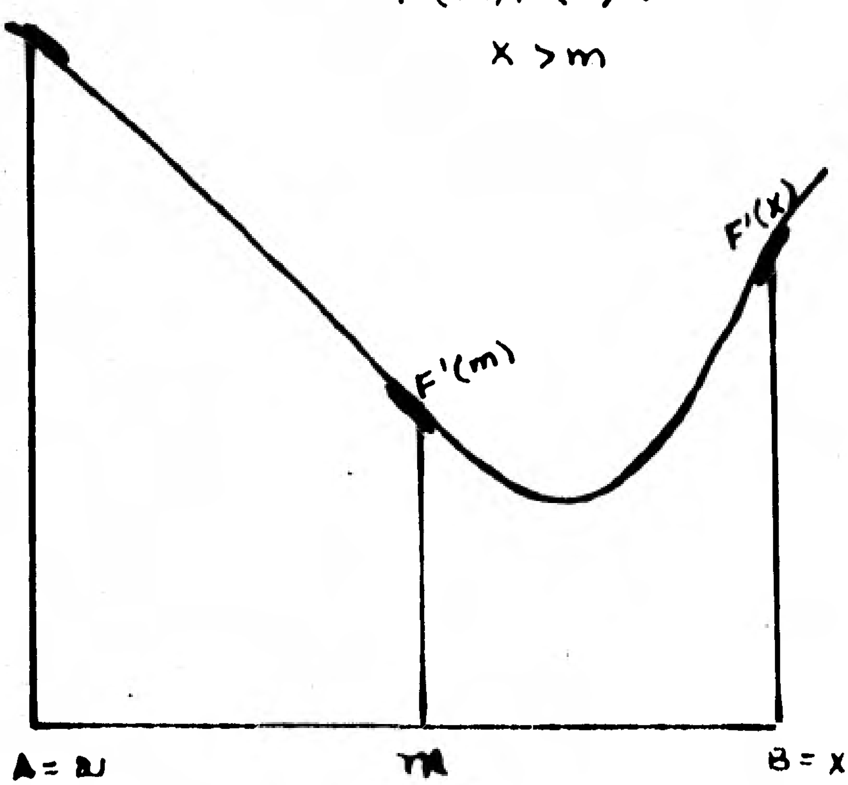
$A' \longleftarrow X$
$B' \longleftarrow M$
$X' \longleftarrow M$
$W' \longleftarrow X$
$FA' \longleftarrow FX$
$FB' \longleftarrow FM$
$FX' \longleftarrow FM$
$FW' \longleftarrow FX$

Caso (IV)

$F(x) \geq F(m)$

$F'(m)\,F'(x) < 0$

$x > m$



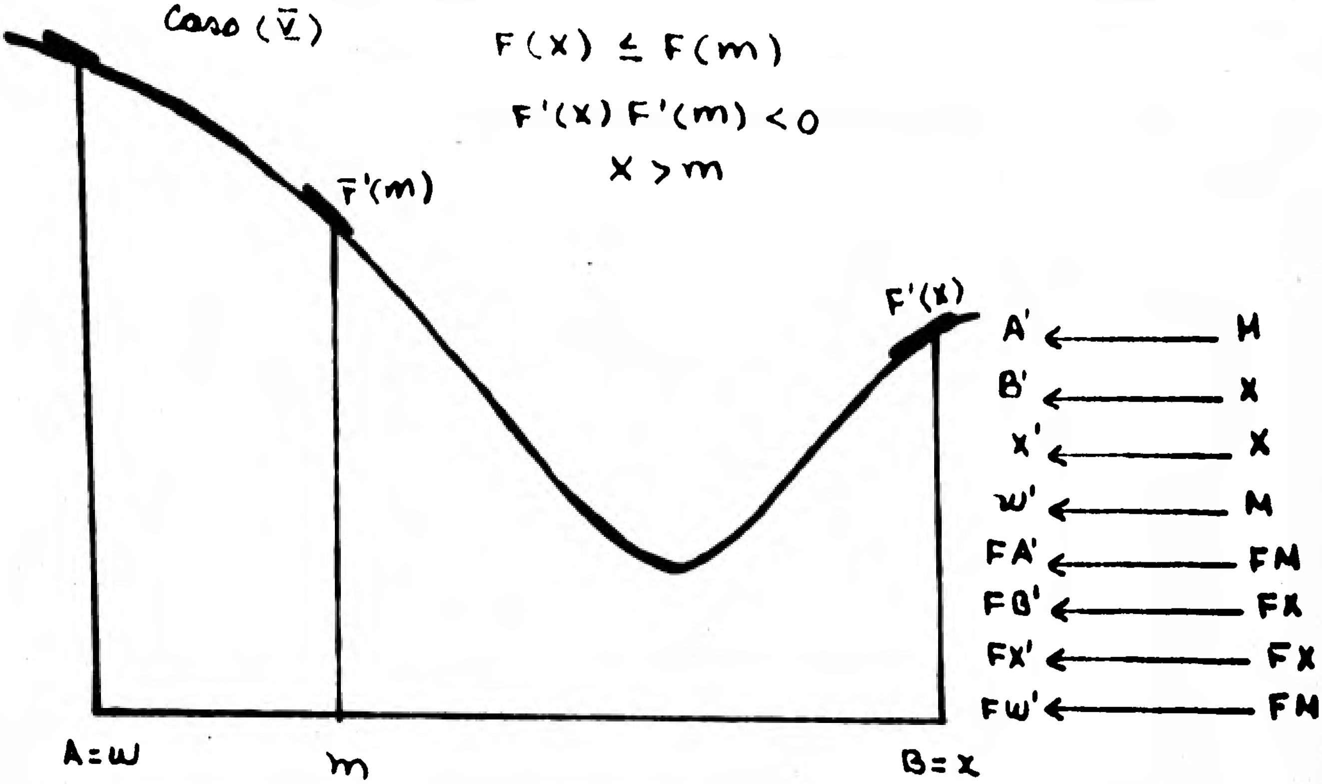
$A' \longleftarrow M$
$B' \longleftarrow X$
$X' \longleftarrow M$
$W' \longleftarrow X$
$FA' \longleftarrow FM$
$FB' \longleftarrow FX$
$FX' \longleftarrow FM$
$FW' \longleftarrow FX$

Caso ($\overline{V}$)

$F(X) \leq F(m)$

$F'(X)\,F'(m) < 0$

$X > m$

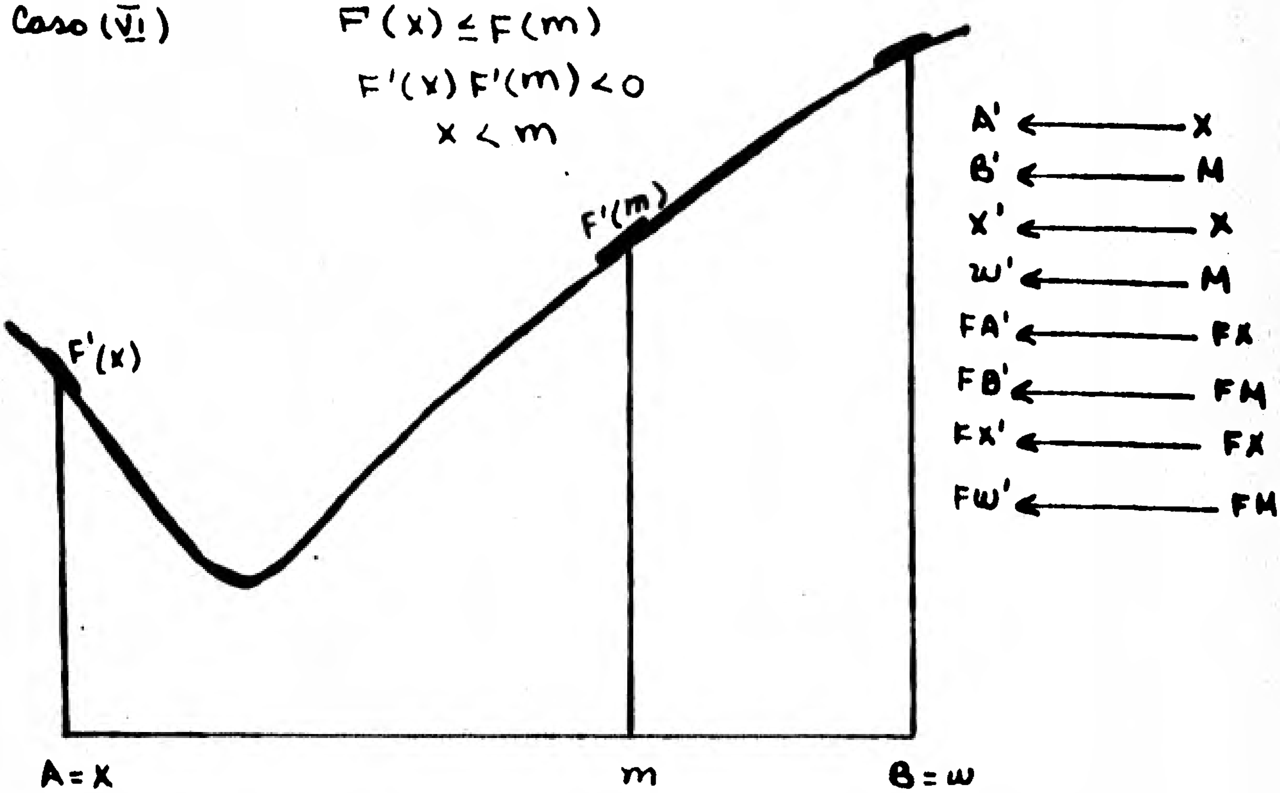


Caso ($\overline{VI}$)

$F'(X) \leq F(m)$

$F'(X)\,F'(m) < 0$

$X < m$

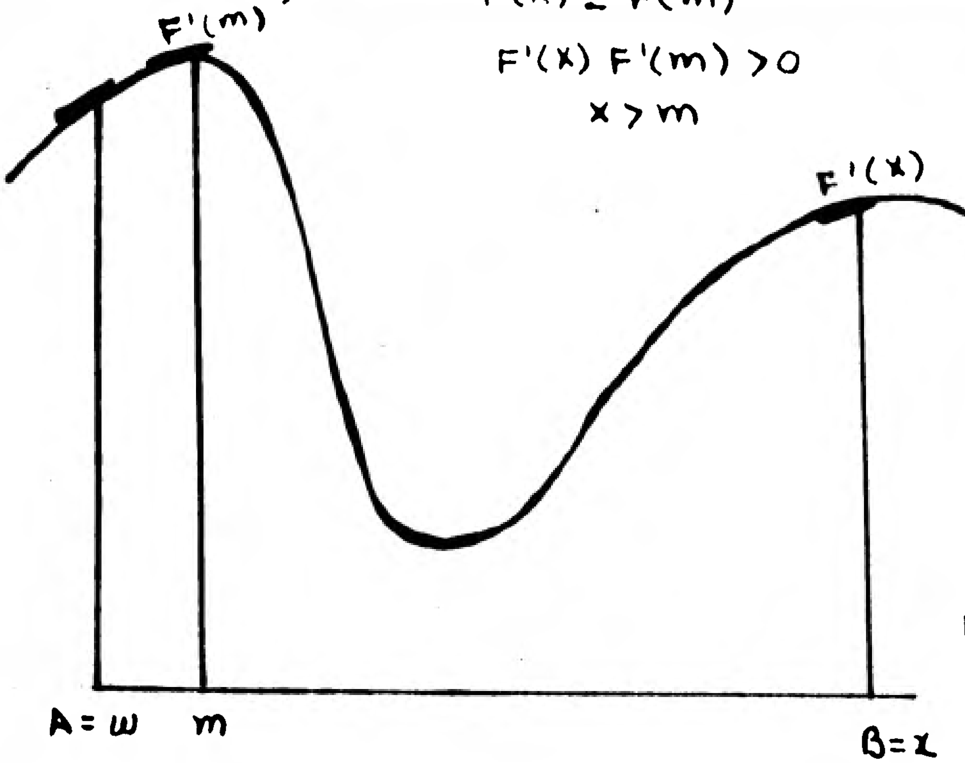


Caso (VII)

$F(X) \leq F(m)$

$F'(X)\, F'(m) > 0$

$X > m$



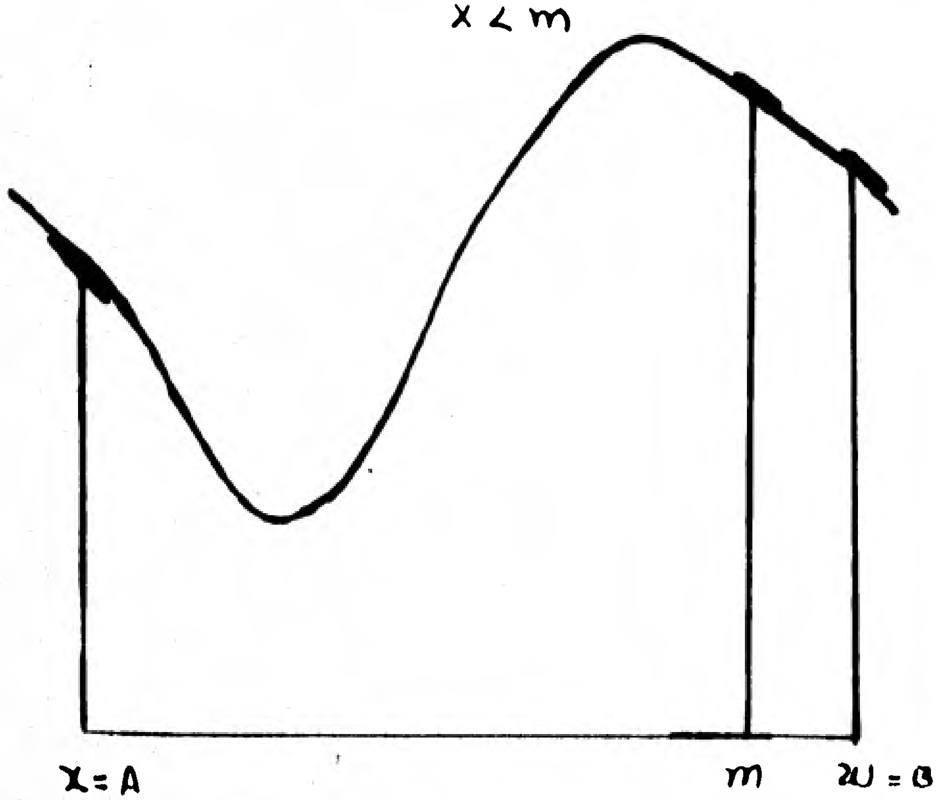
$A' \leftarrow M$
$B' \leftarrow X$
$X' \leftarrow X$
$w' \leftarrow M$
$FA' \leftarrow FM$
$FB' \leftarrow FX$
$FX' \leftarrow FX$
$Fw' \leftarrow FM$

Caso (VIII)

$F(X) \leq F(m)$

$F'(X)\, F'(m) > 0$

$X < m$



$A' \leftarrow X$
$B' \leftarrow M$
$X' \leftarrow X$
$w' \leftarrow M$
$FA' \leftarrow FX$
$FB' \leftarrow FM$
$FX' \leftarrow FX$
$Fw' \leftarrow FM$

2.5 Descripción del Método Híbrido que usa Interpolación Cúbica

El método que vamos a describir en la presente sección combinará el método de Gill y Murray junto con el método de Interpolación Cúbica. Este método itera simultáneamente los dos métodos antes mencionados.

Dados un intervalo [a, b] que contiene al mínimo y un número máximo de iteraciones ITMAX, el algoritmo procede de la siguiente manera:

1.- Evaluamos la función en A, B

2.- Comparamos los valores de la función en A y en B para determinar X y W.

Si $(FA \geq FB)$; vaya al paso 3

en caso contrario hacemos

$X \longleftarrow A \; ; \; FX \longleftarrow FA$

$W \longleftarrow B \; ; \; FW \longleftarrow FB$; vaya al paso 4

3.- $W \longleftarrow A \; ; \; FW \longleftarrow FA$

$X \longleftarrow B \; ; \; FX \longleftarrow FB$

4.- Calculamos las derivadas en X y W, para establecer un criterio de si la función es unimodal o no, esto es

Si(((F'x)(F'w)) > 0) ; vaya al paso (10)

en caso contrario vaya al paso (5)

5.- Como podemos observar más adelante en las figuras, son ocho los posibles casos que se pueden presentar. Preguntamos lo siguiente

Si((caso > 2) y (caso < 7)) vaya al paso (6)
Casos 3, 4, 5, 6
en caso contrario la forma de calcular u es por el método de Gill y Murray

$$u \leftarrow u(x, w) \quad ; \text{ vaya al paso } (7)$$

6.- Casos 3, 4, 5, 6

En caso de que A, B coincida con x, w la forma de calcular u es :

$$u \longleftarrow \frac{(x+w)}{2} \quad ; \text{ vaya al paso } (7)$$

7.- Como es posible que el punto caiga fuera del intervalo, es importante dar un intervalo de seguridad. Por tal motivo se procede a calcular α el mínimo de la función interpolada por (x, Fx), (w, Fw), $F'x$, $F'w$

$$\alpha \longleftarrow x - S/q$$

8.- Si $((u < x)$ y $\alpha \in (u, B))$ entonces $M \longleftarrow \alpha$

Si $((u > x)$ y $\alpha \in (A, u))$ entonces $M \longleftarrow \alpha$

en caso contrario hacemos

$$M \longleftarrow u \quad ; \text{ vaya al paso } (9)$$

9.- Checamos un criterio para salvar el punto x cuando éste coincide con A o con B.

Si lo satisface vamos al paso (11)

en caso contrario damos otra forma para determinar M como

$$M \longleftarrow X + Tol * SIG$$; vaya al paso (11)

10.- Significa que la función no es unimodal, por lo cual M se calcula como sigue

$$M \longleftarrow \frac{A+B}{2}$$

11.- Se evalúa la función en M y se calcula la derivada de la función en M.

12.- Se determina el caso haciendo ciertas comparaciones entre los valores de la función en X y W y las derivadas de la función en X y W para poder actualizar el intervalo A, B, X, W y sus valores correspondientes; así como las derivadas en X y W.

13.- Se checa el criterio de convergencia, si lo satisface hacemos la escritura de resultados y el algoritmo se detiene.

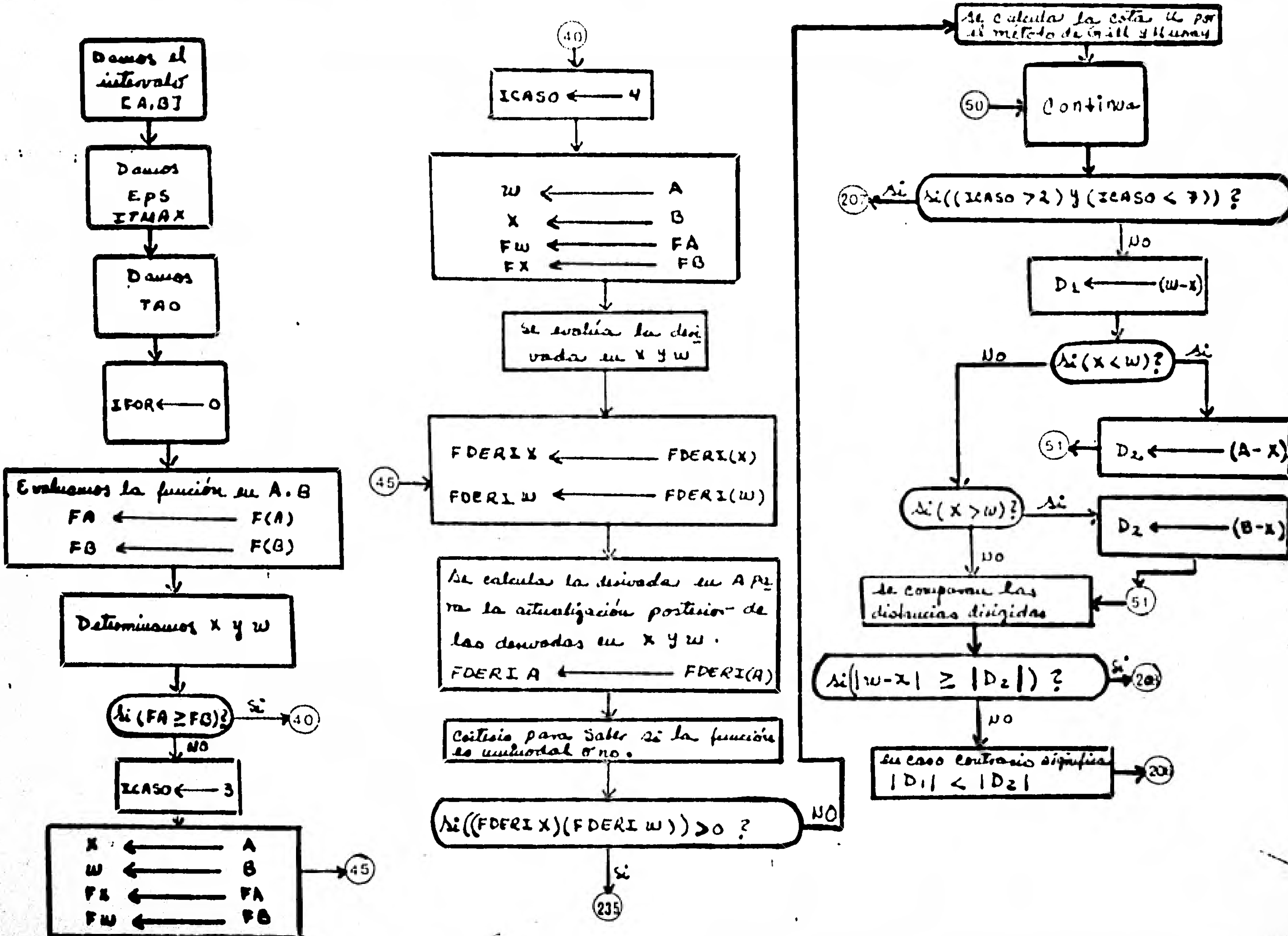
En caso contrario checamos qué caso es el que tenemos, para así poder saber si se trata de un caso en el que la función es o no unimodal. Si es un caso en el que la función es unimodal regresamos al paso (4). Y si es un caso en el que la función no es unimodal regresamos al paso (10).

Para finalizar anexamos una tabla con los resultados obtenidos en las pruebas y el diagrama de flujo correspondiente, así como un listado de la rutina del método con el nombre de CUBGIM el cual aparece en el apéndice general

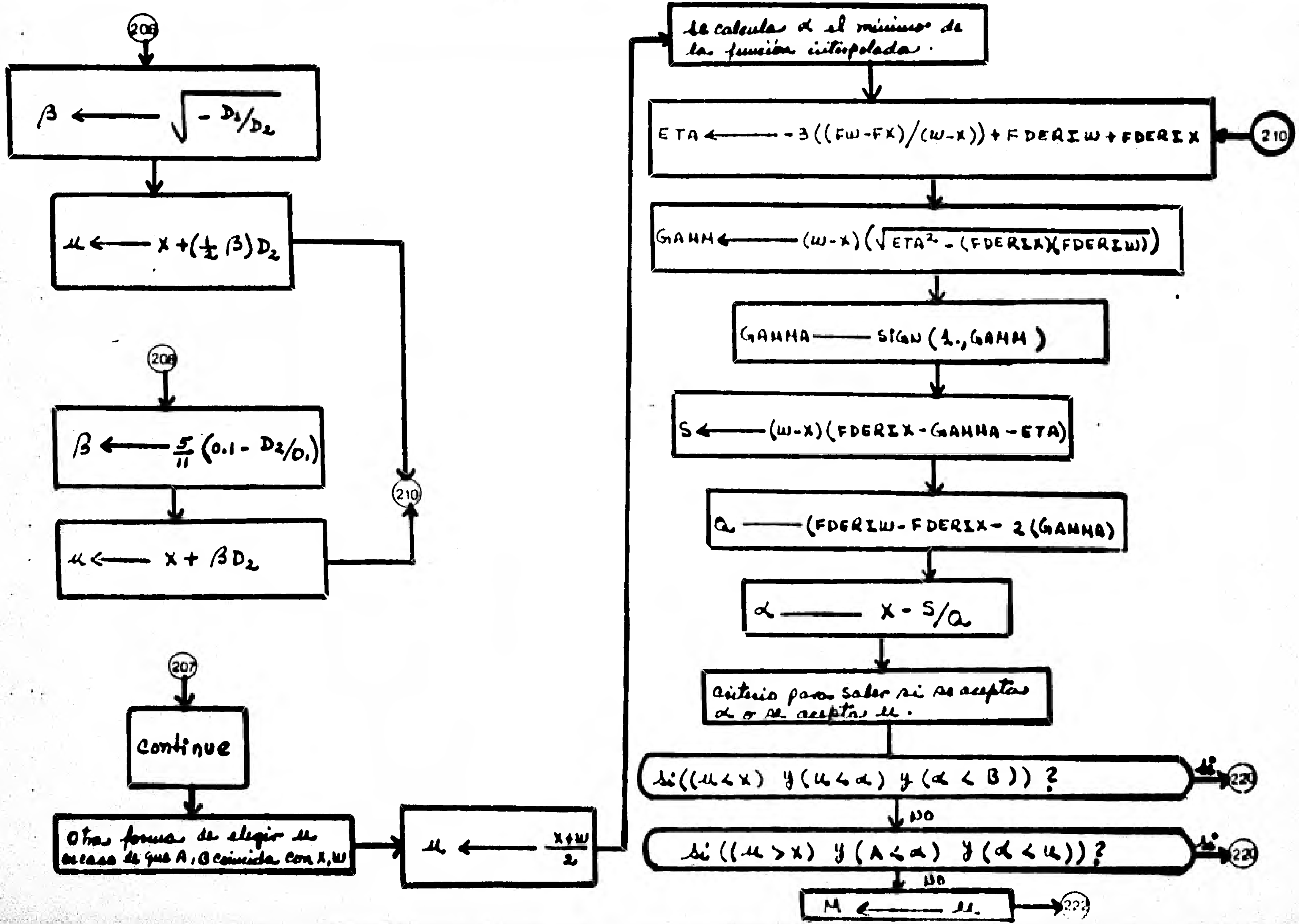
DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO HIBRIDO QUE

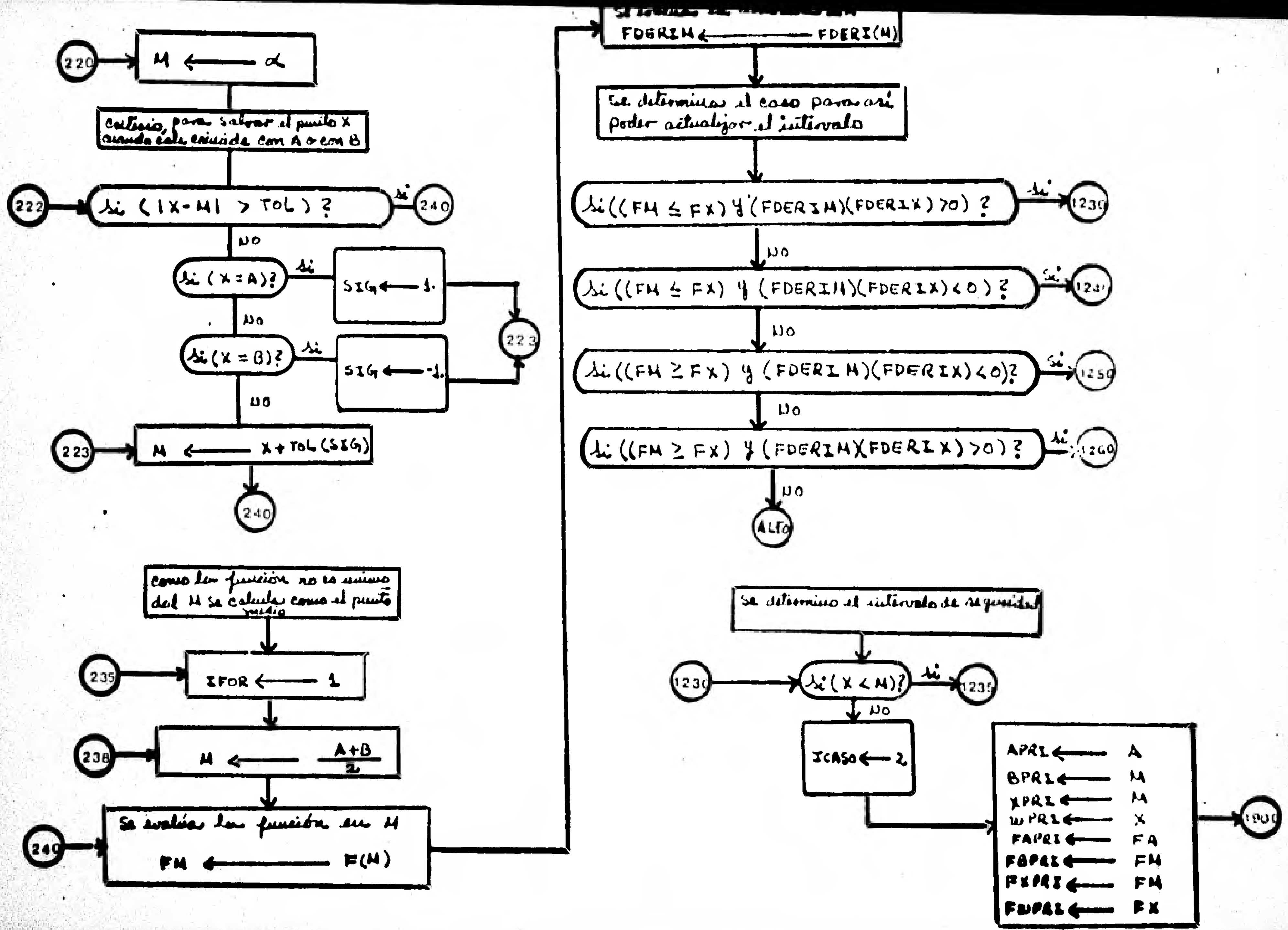
COMBINA LOS METODOS DE

GILL Y MURRAY E INTERPOLACION CUBICA

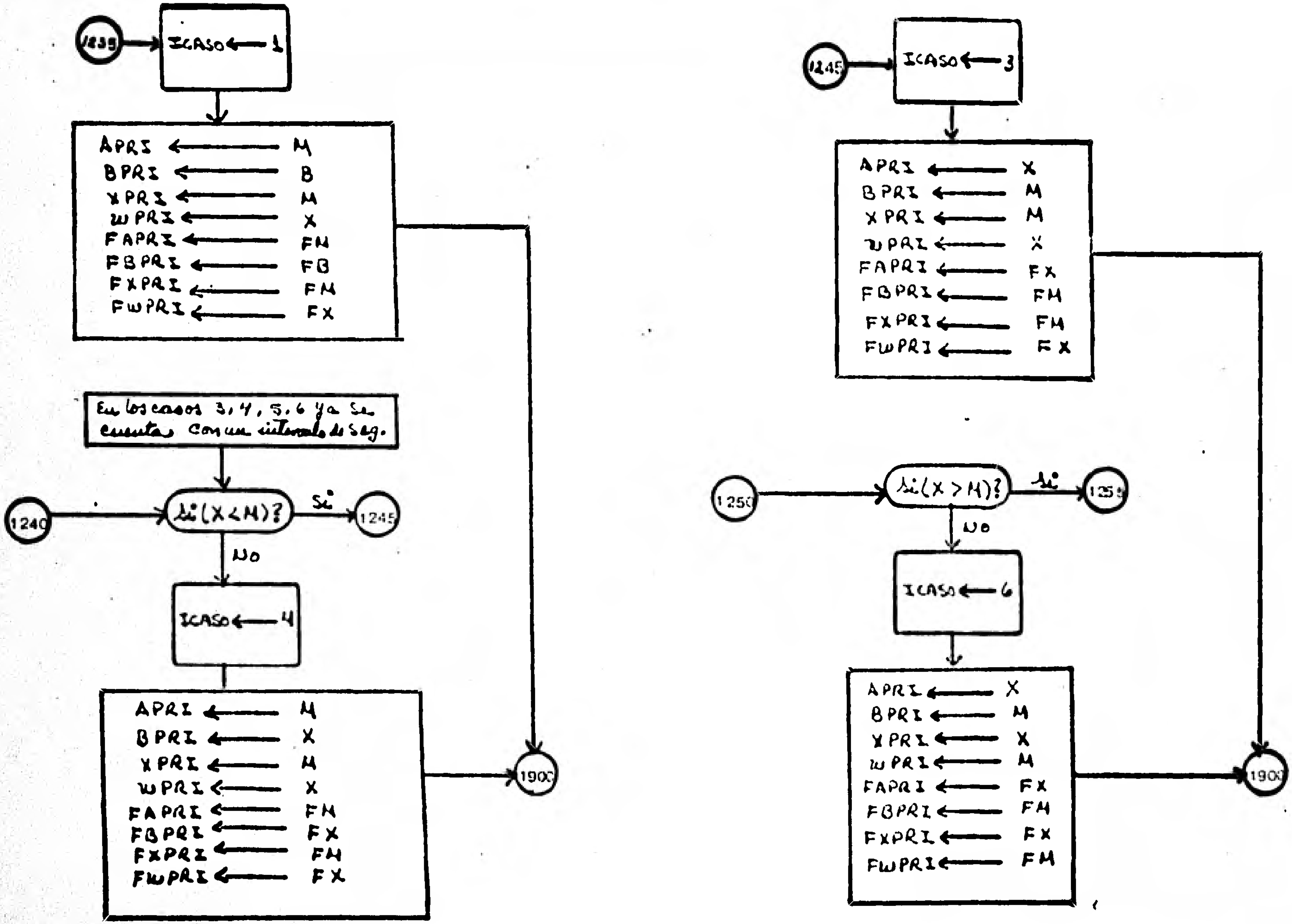


Damos el intervalo [A,B]
Damos EPS ITMAX
Damos TAO
IFOR ← 0
Evaluamos la función en A.B
FA ← F(A)
FB ← F(B)
Determinamos x y w
Si (FA ≥ FB)?
Si
40
NO
ICASO ← 3
X ← A
W ← B
FX ← FA
FW ← FB
45
40
ICASO ← 4
w ← A
X ← B
Fw ← FA
FX ← FB
Se evalúa la derivada en X y W
45
FDERIX ← FDERI(X)
FDERIW ← FDERI(W)
Se calcula la derivada en A para la actualización posterior de las derivadas en x y w.
FDERI A ← FDERI(A)
Criterio para saber si la función es unimodal o no.
Si((FDERI X)(FDERI W))>0 ?
NO
Si
235
Se calcula la cota u por el método de Gill y Murray
50
Continua
Si((ICASO > 2) y (ICASO < 7)) ?
Si
207
NO
D1 ← (W-X)
Si (X < W)?
NO
Si
D2 ← (A-X)
51
Si (X > W)?
Si
D2 ← (B-X)
NO
Se comparan las distancias dirigidas
51
Si(|W-X| ≥ |D2|) ?
Si
201
NO
En caso contrario significa |D1| < |D2|
201

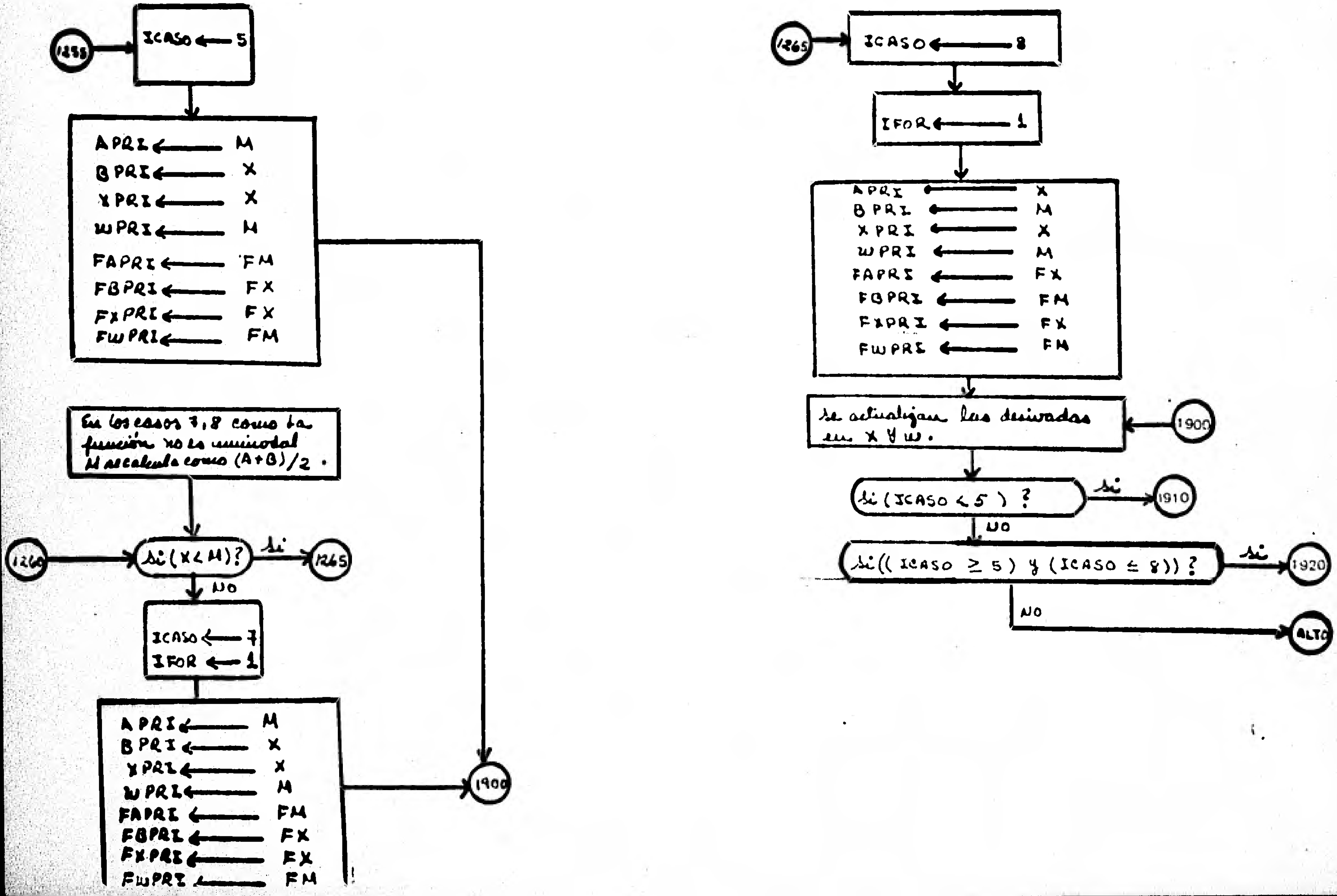

206
β ← √(- D1/D2)
u ← X + (½ β) D2
208
β ← 5/11 (0.1 - D2/0.1)
u ← X + β D2
210
207
continue
Otras formas de elegir u en caso de que A, B coincida con X, W
u ← (X+W)/2
se calcula α el mínimo de la función interpolada.
ETA ← -3((FW-FX)/(W-X)) + FDERIW + FDERIX
210
GAMM ← (W-X)(√(ETA² - (FDERIX)(FDERIW)))
GAMMA ← SIGN (1., GAMM)
S ← (W-X)(FDERIX - GAMMA - ETA)
a ← (FDERIW - FDERIX - 2(GAMMA)
α ← X - S/a
criterio para saber si se acepta α o se acepta u.
si((u<X) y (u<α) y (α < B)) ?
sí
220
NO
si ((u >X) y (A<α) y (α < u)) ?
sí
220
NO
M ← u
222



220
M ← α
criterio, para salvar el punto X cuando este coincide con A o con B
222
si (|X-M| > TOL) ?
si
240
NO
si (X = A)?
si
SIG ← 1.
NO
si (X = B)?
si
SIG ← -1.
223
NO
223
M ← X + TOL (SIG)
240
como la función no es unimodal el M se calcula como el punto medio
235
IFOR ← 1
238
M ← (A+B)/2
240
Se evalúa la función en M
FM ← F(M)
FDERIM ← FDERI(M)
Se determina el caso para así poder actualizar el intervalo
si ((FM ≤ FX) y (FDERIM)(FDERIX) > 0) ?
si
1230
NO
si ((FM ≤ FX) y (FDERIM)(FDERIX) < 0) ?
si
1240
NO
si ((FM ≥ FX) y (FDERIM)(FDERIX) < 0)?
si
1250
NO
si ((FM ≥ FX) y (FDERIM)(FDERIX) > 0) ?
si
1260
NO
ALTO
Se determina el intervalo de seguridad
1230
si (X < M)?
si
1235
NO
ICASO ← 2
APRI ← A
BPRI ← M
XPRI ← M
WPRI ← X
FAPRI ← FA
FBPRI ← FM
FXPRI ← FM
FWPRI ← FX
1900



1235
ICASO ← 1
APRI ← M
BPRI ← B
XPRI ← M
WPRI ← X
FAPRI ← FM
FBPRI ← FB
FXPRI ← FM
FWPRI ← FX
En los casos 3, 4, 5, 6 ya se cuenta con un intervalo de 5 seg.
1240
Si (X < M)?
Si
1245
No
ICASO ← 4
APRI ← M
BPRI ← X
XPRI ← M
WPRI ← X
FAPRI ← FM
FBPRI ← FX
FXPRI ← FM
FWPRI ← FX
1900
1245
ICASO ← 3
APRI ← X
BPRI ← M
XPRI ← M
WPRI ← X
FAPRI ← FX
FBPRI ← FM
FXPRI ← FM
FWPRI ← FX
1250
Si (X > M)?
Si
1255
No
ICASO ← 6
APRI ← X
BPRI ← M
XPRI ← X
WPRI ← M
FAPRI ← FX
FBPRI ← FM
FXPRI ← FX
FWPRI ← FM
1900

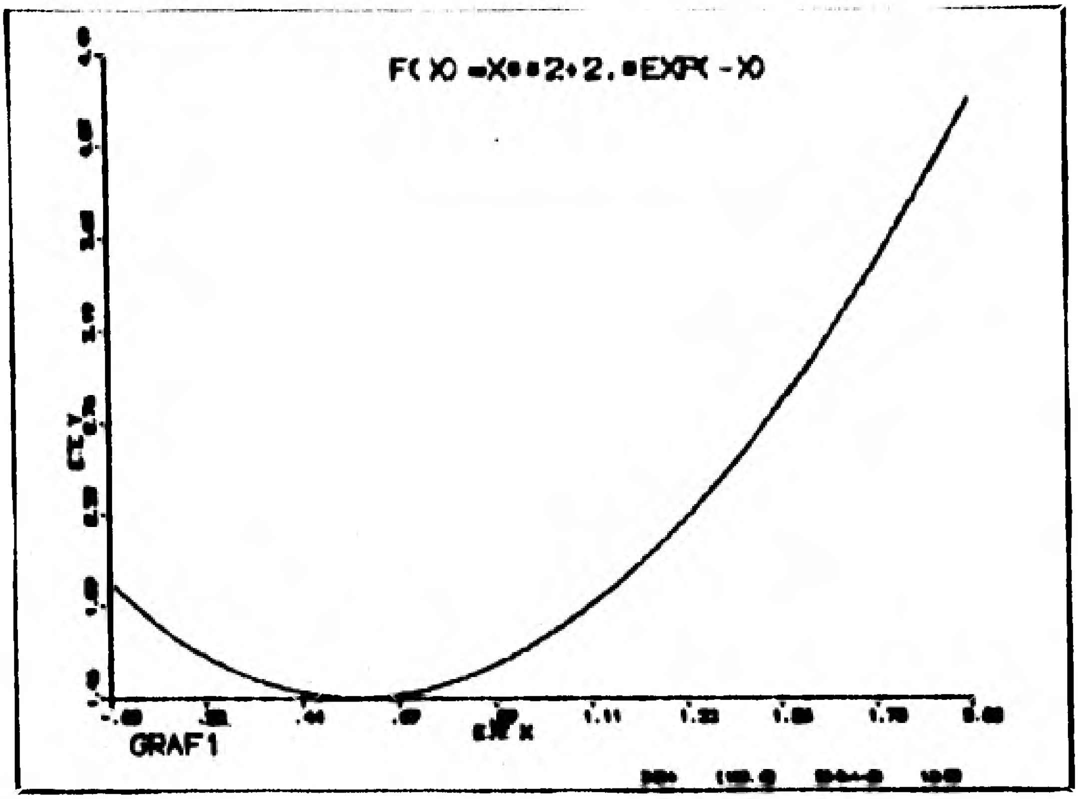

1255
ICASO ← 5
APRI ← M
BPRI ← X
XPRI ← X
WPRI ← M
FAPRI ← FM
FBPRI ← FX
FXPRI ← FX
FWPRI ← FM
En los casos 7,8 como la función no es unimodal M se calcula como (A+B)/2.
1260
si (X<M)?
si
1265
NO
ICASO ← 7
IFOR ← 1
APRI ← M
BPRI ← X
XPRI ← X
WPRI ← M
FAPRI ← FM
FBPRI ← FX
FXPRI ← FX
FWPRI ← FM
1900
1265
ICASO ← 8
IFOR ← 1
APRI ← X
BPRI ← M
XPRI ← X
WPRI ← M
FAPRI ← FX
FBPRI ← FM
FXPRI ← FX
FWPRI ← FM
Se actualizan las derivadas en X y W.
1900
si (ICASO < 5) ?
si
1910
NO
si ((ICASO ≥ 5) y (ICASO ≤ 8)) ?
si
1920
NO
ALTO

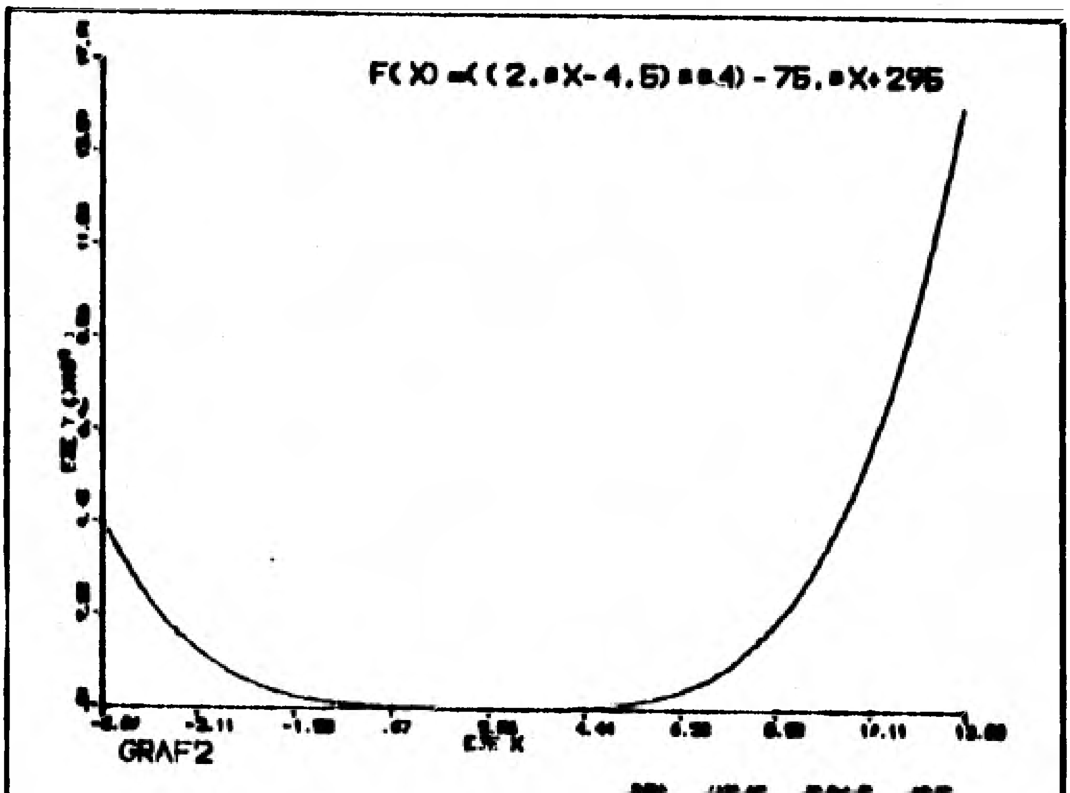
Resultados producidos por el método híbrido que combinó los métodos de Gill y Murray e Interpolación cúbica.

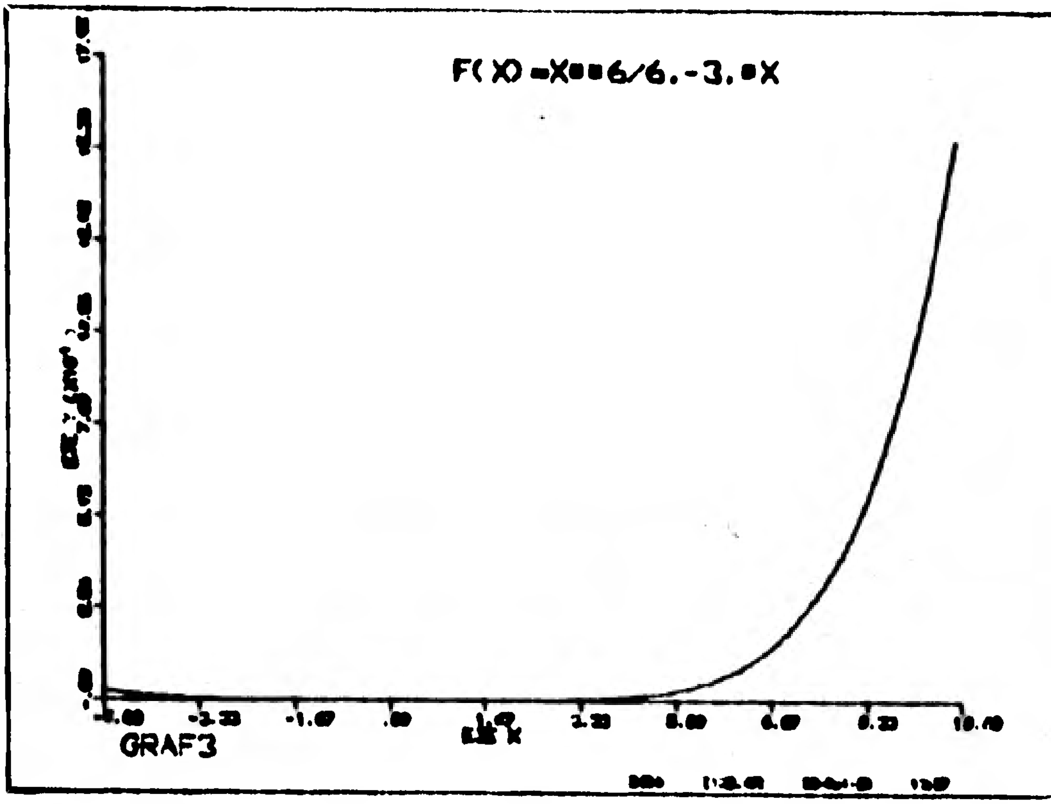
Función	No. de evaluaciones	EPS = .01 ; TAO = .01	
1	8	C	A = .554 B = .577
2	8	C	A = 3.29 B = 3.34
3	10	C	A = 1.22 B = 1.26
4	8	C	A = .373 B = .388
5	9	C	A = 2.98 B = 3.03
6	9	C	A = 3.14 B = 3.19
7	6	C	A = 2.94 B = 3.00
8	9	C	A = 3.10 B = 3.16
9	7	C	A = .558 B = .586
10	11	C	A = .560 B = .576
11	7	C	A = .812 B = .843

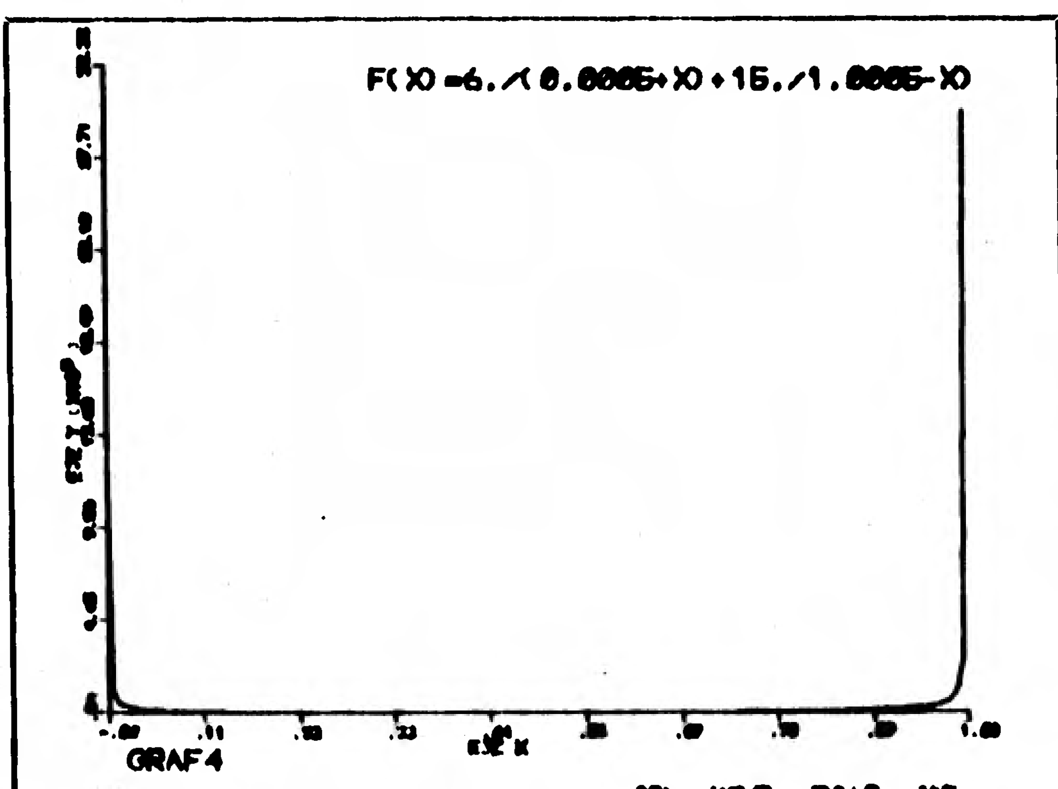
Apéndice General

	Funciones Prueba	Intervalo
1	$F(x) = x^{2} + 2e^{-x}$	$\lvert 0 . 2 \rvert$
2	$F(x) = (2x - 4.5)^{4} - 75x + 295$	$\lvert -5 . 12 \rvert$
3	$F(x) = x^{6}/6 - 3x$	$\lvert -5 . 10 \rvert$
4	$F(x) = 6/(0.0005 + x) + 15/(1.0005 - x)$	$\lvert 0 . 1 \rvert$
5	$F(x) = ((e^{(x-3)}) - x + 2)^{4} + (x-3)^{8} + (x-3)^{2}$	$\lvert -1 . 5 \rvert$
6	$F(x) = 1. - e^{-(x - 3.1416)^{2}}$	$\lvert -2 . 10 \rvert$
7	$F(x) = e^{(x-3.1416)^{2} + 10(x-3.1416)^{4}}$	$\lvert 2 . 3 \rvert$
8	$F(x) = 1 - 10e^{-(x - 3.1416)^{2}}$	$\lvert -2 . 10 \rvert$
9	$F(x) = 1 - e^{-(2x - 3.1416 + 2)^{8}}$	$\lvert 0 . 1 \rvert$
10	$F(x) = 1 - 10e^{-(2x - 3.1416 + 2)^{8}}$	$\lvert 0 . 1 \rvert$
11	$F(x) = x^{3} - 2x - 5$	$\lvert 0 . 1 \rvert$

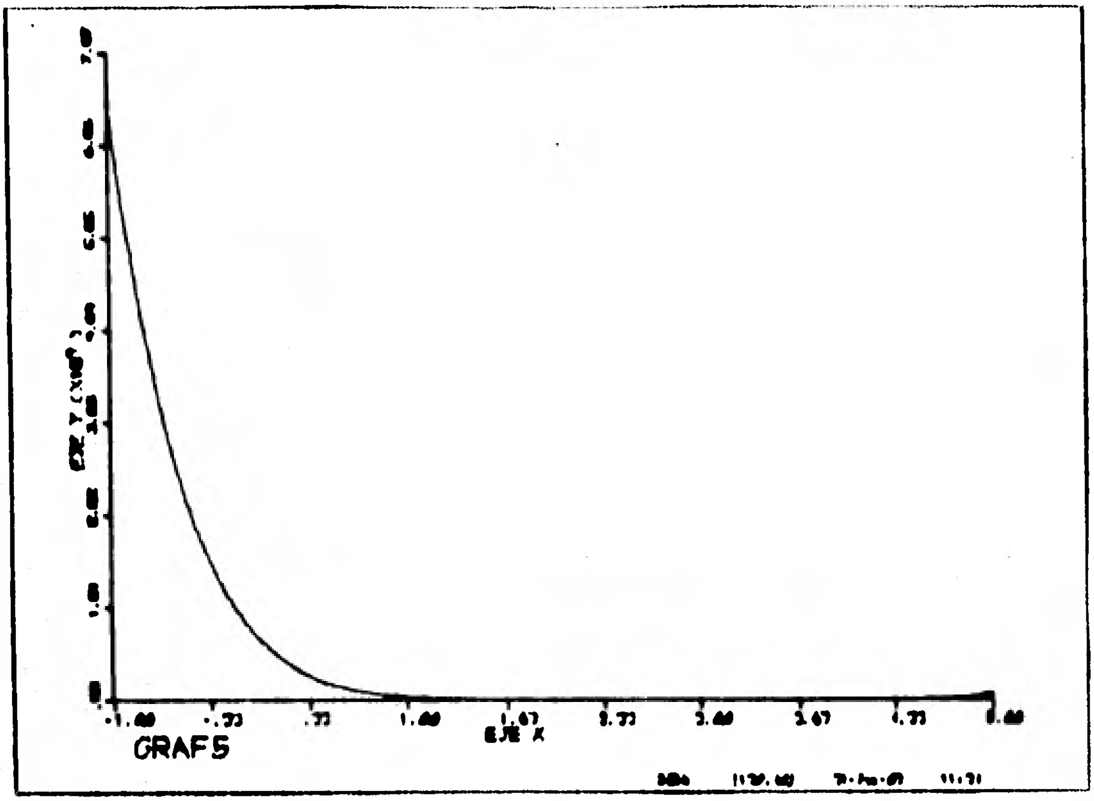

F(X) =X**2+2.*EXP(-X)
GRAF1

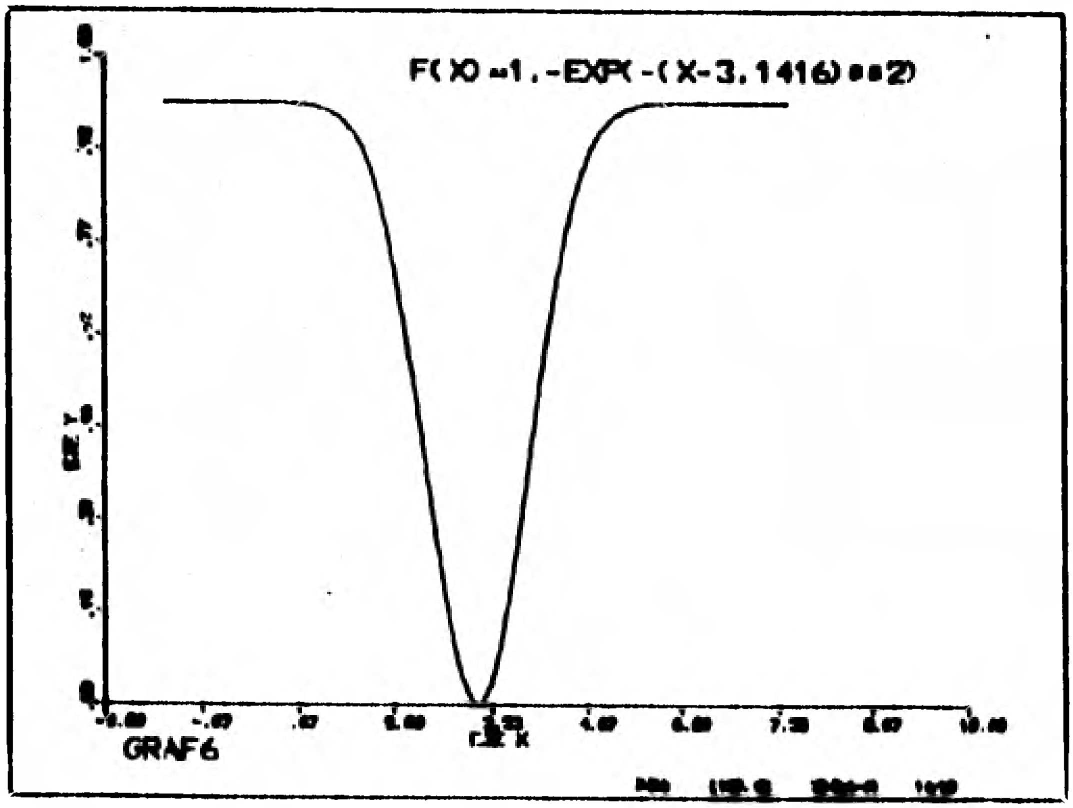

F(X) =((2.*X-4.5)**4)-75.*X+295
GRAF2


F(X)=X**6/6.-3.*X
-4.00
-2.33
-1.67
.00
1.67
2.33
5.00
6.67
8.33
10.00
GRAF3

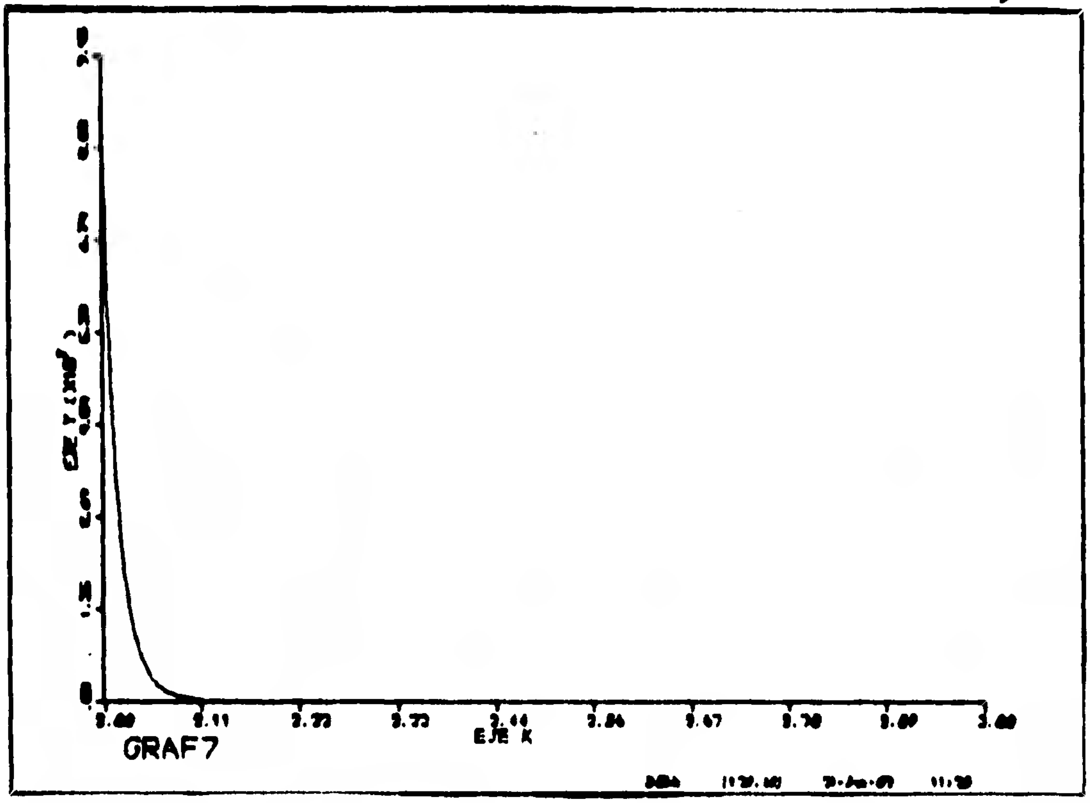

F(X)=6./(0.0005+X)+15./(1.0005-X)
.11
1.00
GRAF4

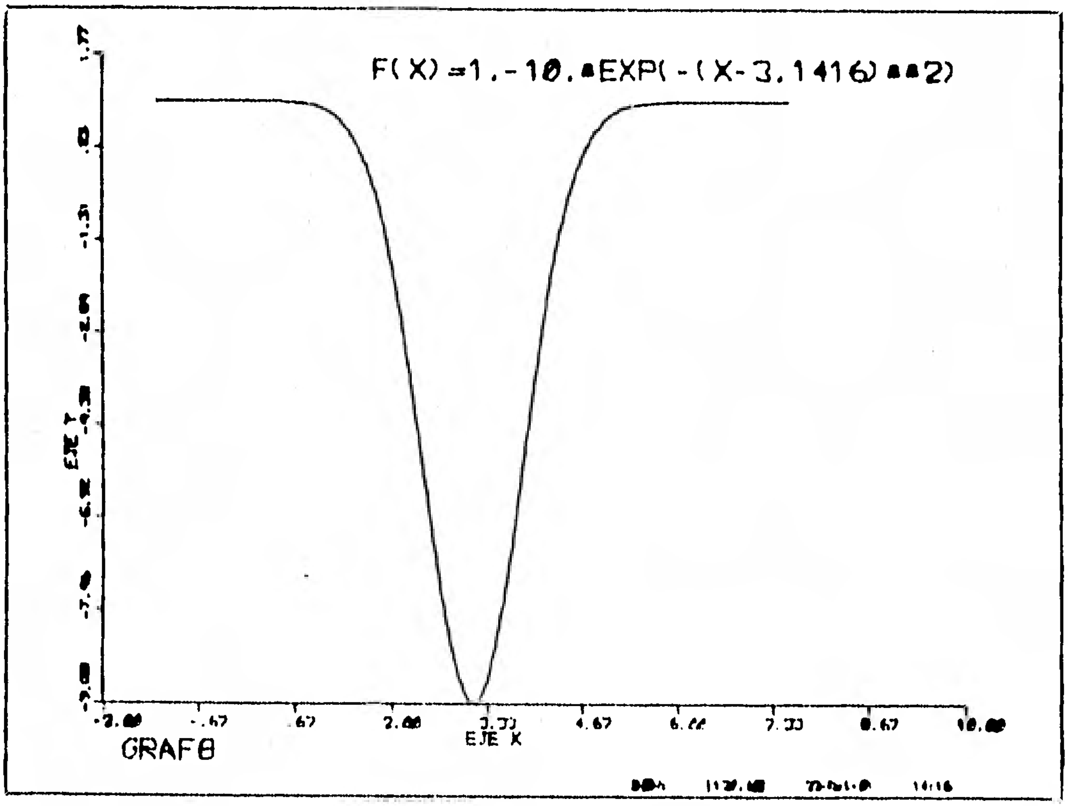
F(X) =((EXP(X-3.)-X+2.)**4)+((X-3.)**8)+((X-3.)**2)

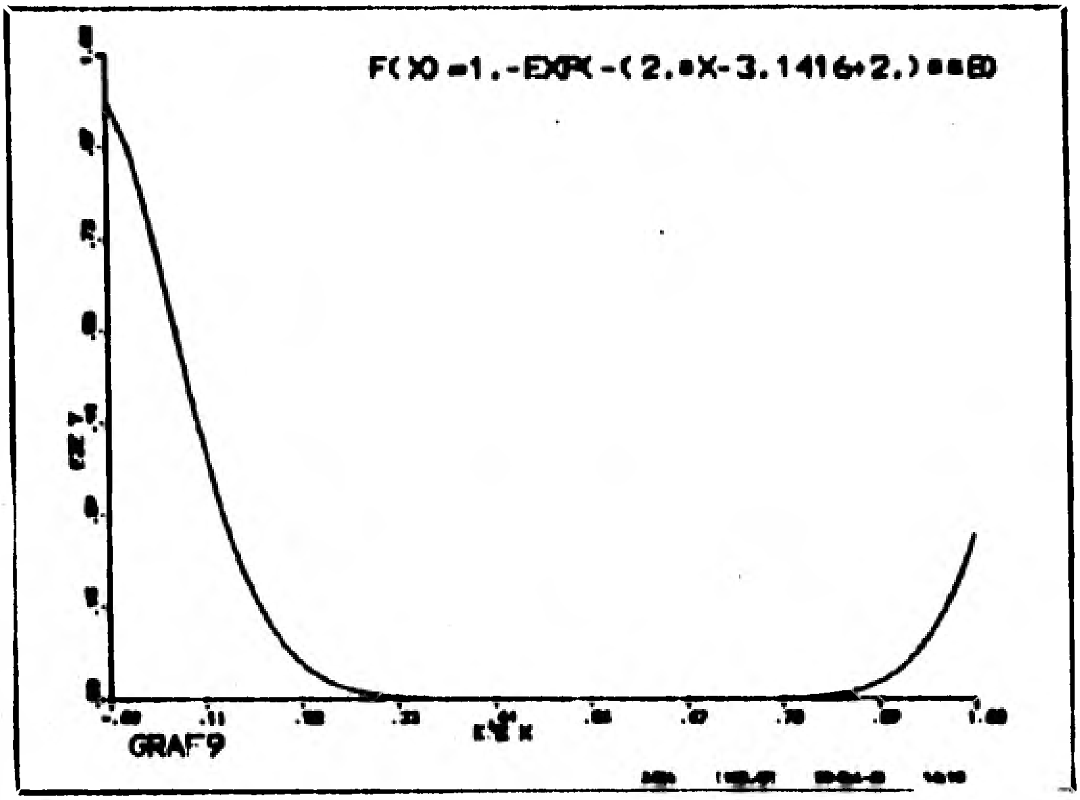


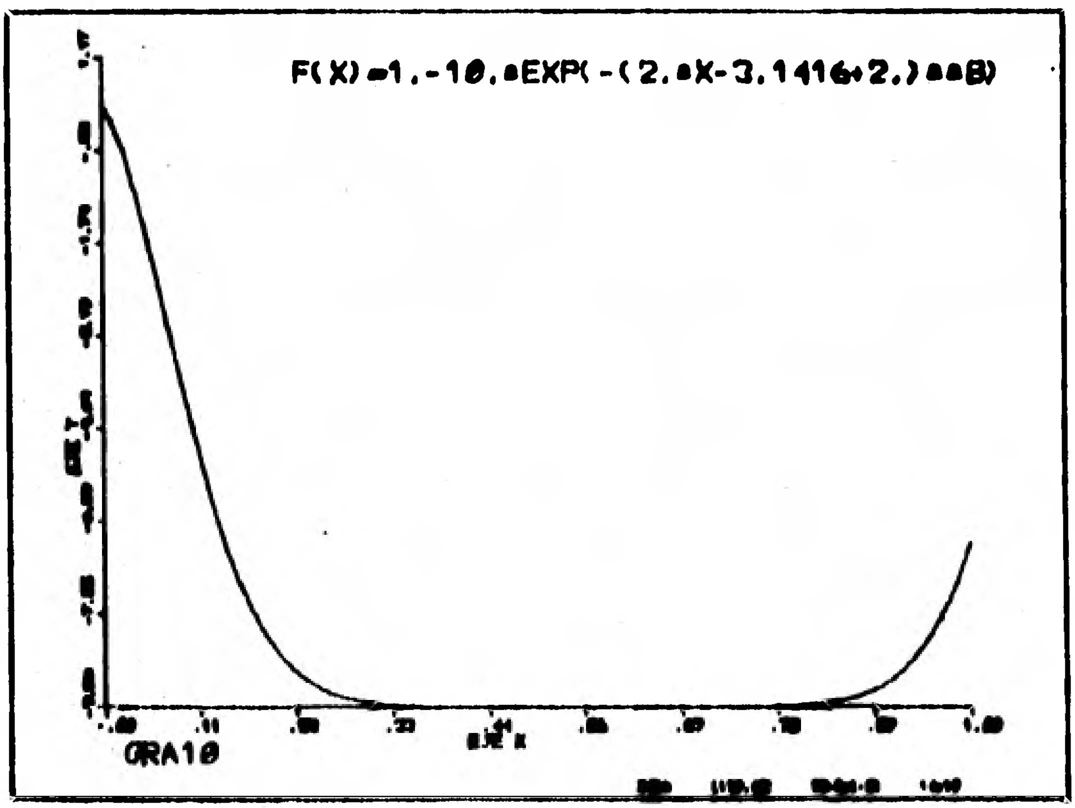


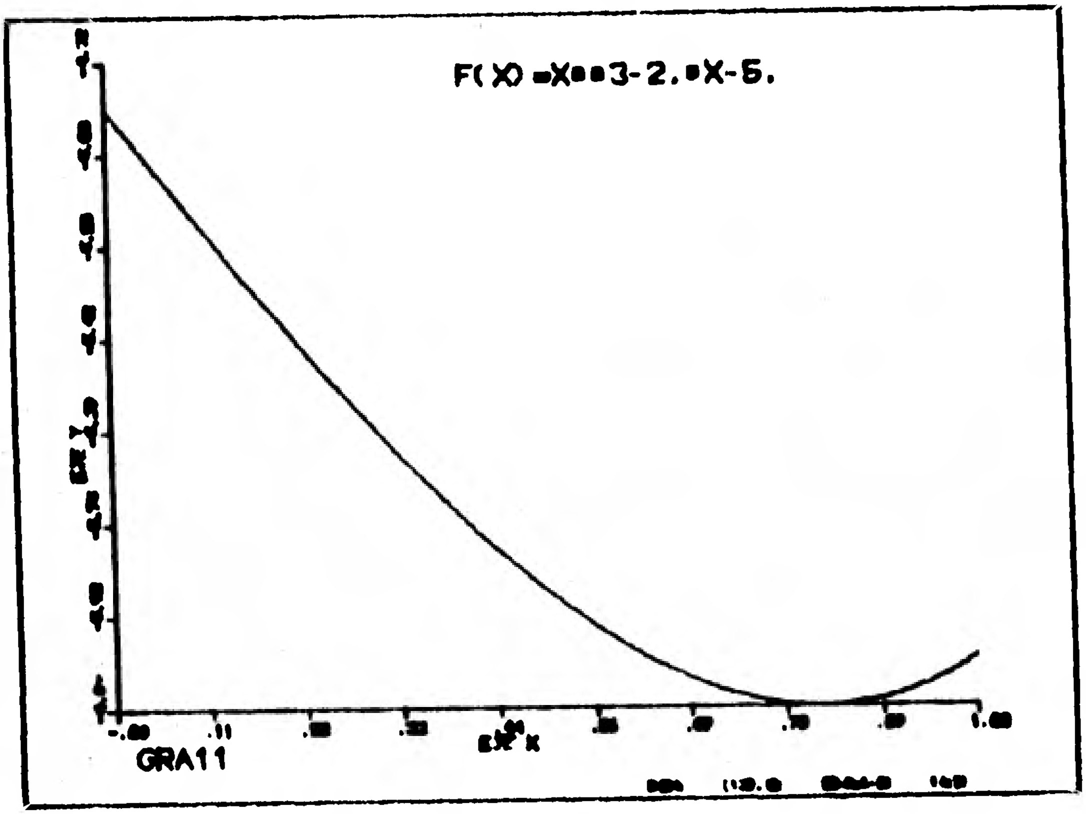
F(X) = EXP((X-3.1416)**2 + 10.*(X-3.1416)**4)






F(X)=1.-EXP(-(2.*X-3.1416*2.)**8)
GRAF9


F(X)=1.-10.*EXP(-(2.*X-3.1416*2.)**8)
GRA10


F(X)=X**3-2.*X-5.
GRA11

PRUEBAS REALIZADAS EN UNA COMPUTADORA PDP-10

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS CON LOS DIFERENTES METODOS DE MINIMIZACION PARA FUNCIONES EN UNA VARIABLE

Funcion	BISEC		FIBONA		AUREA		INSEG		CUAGIM		CUBGIM		FMIN	
1	La función no es unimodal		A=.561 B=.575	12	A=.563 B=.570	13	A=.553 B=.588	14	A=.555 B=.587	16	A=.554 B=.577	8	Exceso en el número de iteraciones	
2	La función no es unimodal		A=3.27 B=3.31	17	A=3.30 B=3.31	17	A=3.24 B=3.31	15	A=3.23 B=3.33	[illegible]	A=3.29 B=3.34	8	A= 3.30 B= 3.31	15
3	A= 1.24 B= 1.25	24	A=1.23 B=1.26	16	A=1.24 B=1.25	17	A=1.23 B=1.29	18	A=1.22 B=1.29	18	A=1.22 B=1.26	10	A= 1.24 B= 1.25	8
4	La función no es unimodal		A=.382 B=.393	11	A=.382 B=.390	11	A=.378 B=.412	11	A=.373 B=.411	11	A=.373 B=.388	8	Exceso en el número de iteraciones	
5	A= 2.99 B= 3.01	22	A=2.99 B=3.03	14	A=3.00 B=3.01	15	A=2.95 B=3.04	14	A=2.95 B=3.11	14	A=2.98 B=3.03	9	A= 2.99 B= 3.00	12
6	La función no es unimodal		A= 3.11 B= 3.15	16	A=3.14 B=3.15	16	A= 3.00 B= 3.18	15	A=3.08 B=3.22	15	A= 3.14 B= 3.19	9	A= 3.13 B= 3.14	10
7	La función no es unimodal		A=2.99 B=3.00	11	A=2.99 B=3.00	11	A= 2.88 B= 3.00	11	A= 2.88 B=3.00	9	A=2.94 B=3.00	6	A= 3.14 B= 3.15	11
8	"		A=3.11 B=3.15	15	A= 3.14 B= 3.15	16	A= 3.09 B= 3.18	15	A=3.08 B=3.22	15	A= 3.10 B= 3.16	9	A= 3.13 B= 3.14	10
9	"		A=.529 B=.542	11	A=.528 B=.536	11	A=.575 B=.629	11	A=.528 B=.573	8	A=.558 B=.586	7	Exceso en el número de iteraciones	
10	"		A=.529 B=.542	11	A=.528 B=.536	11	A=.575 B=.629	11	A=.528 B=.573	8	A=.560 B=.576	11	Exceso en el número de iteraciones	
11	"		A=.811 B=.826	11	A=.812 B=.820	11	A=.798 B=.838	11	A=.780 B=.831	10	A=.812 B=.843	7	A= 0.813 B= 0.820	8

```
C
C    B I S E C
C
C    ------------------------------------------------------------------
     SUBROUTINE BISEC(ITER,ITMAX,A,B,N,EPS)
C
C    PROPOSITO:LA SUBRUTINA BISEC ES LA IMPLEMENTACION DE UN
C              METODO DE BUSQUEDA DIRECTA ANALOGO AL METODO DE BI-
C              SECCION  PARA DETERMINAR EL INTERVALO
C              DE MENOR LONGITUD DONDE SE ENCUENTRA EL MINIMO
C              DE UNA FUNCION ESCALAR.
C
C
C
C    PARAMETROS DE ENTRADA Y SALIDA:
C
C            ITER - NUMERO DE ITERACIONES
C
C
C           TOLABS-TOLERANCIA ABSOLUTA
C
C           TOLREL-TOLERANCIA RELATIVA
C
C           NEVALF-NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C
C              EPS-EPSILON
C
C               KL-NUMERO DEL PROBLEMA
C
C             A,B - EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C
C               N - MEDIDA DE ERROR ABSOLUTA O MEDIDA DE ERROR
C                     RELATIVA.
C
C               M - PUNTO MEDIO RESPECTO AL INTERVALO
C         X1 Y X2- PUNTOS DE EVALUACION
C
C          F1 Y F2- VALORES DE LA FUNCION EN LOS PUNTOS X1 Y X2
C
C
C    ------------------------------------------------------------------
     REAL M
     COMMON/NPROB/KL,NEVALF
     WRITE(7,505)


C    INICIALIZACION



C    EVALUA LA FUNCION EN A Y B

     FA=F(A)
     FB=F(B)


C    DETERMINA EL PUNTO MEDIO
```

```
300     M=(A+B)/2.
C
C       DETERMINA LOS PUNTOS X1 Y X2
C
        X1=M-EPS/2.
        X2=M+EPS/2.
C
C
C       EVALUA LA FUNCION EN X1 Y X2
C
        F1=F(X1)
        F2=F(X2)
        WRITE(7,510)ITER,A,X1,X2,B,FA,F1,F2,FB
C
C       CHECA SI LA FUNCION ES UNIMODAL O NO .
C
        IF((FA.GT.F1).AND.(FB.GT.F2)) GO TO 350
        GO TO 625
C
C
350     IF(F1 .GT. F2) GO TO 600
        A=A
        B=X2
        FA=FA
        FB=F2
        GO TO 610
600     A=X1
        B=B
        FA=F1
        FB=FB
610     IF(ITER.GT.N) GO TO 700
        ITER=ITER+1
        GO TO 300
C
C
C       ESCRITURAS
C
505     FORMAT(/,113('*'),//,1X,'ITER',9X,'A',12X,'X1',12X,'X2'
       110X,'B',10X,'FA',10X,'F(X1)',10X,'F(X2)',10X,'FB',//,113('*'))
510     FORMAT(//,1X,I5,8(1X,E12.3))
625     WRITE(7,630)
630     FORMAT(//,113('*'),//,50X,'***LA FUNCION NO ES
       1 UNIMODAL***',/)
        GO TO 850
C
        GO TO 850
C
C       ESCRIBE EL SUBINTERVALO FINAL
C
700     ITER=ITER+1
        WRITE(7,710)ITER,A,X1,X2,B,FA,F1,F2,FB
710     FORMAT(//,1X,I5,8(1X,E12.3 ))
        WRITE(7,800)A,B,NEVALF
800     FORMAT(//,113('*'),//,55X,'***EL METODO TUVO EXITO***'
       1//50X,3('*'),'INTERVALO
       1 DE INCERTIDUMBRE',3('*'),//,55X,'A=',E12.3,2X,'B=',E12.3
       1//,50X,'NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION : ',I4)
        GO TO 850
850     RETURN
        END
```

```
E R R A B S
-----------------------------------------------------------------------------------
SUBROUTINE ERRABS(TOLABS,EPS,A,B,N)


PROPOSITO:LA SUBRUTINA ERRABS NOS PROPORCIONA UNA MEDIDA DE
          ERROR ABSOLUTA.


XO=(B-A)
IF(TOLABS.LT.2.*EPS) TOLABS=2.*EPS

A1=ALOG(XO/(TOLABS-EPS))/ALOG(2.)

N=IFIX(A1)+1

RETURN
END
```

```
C
C     E R O R E L
C     -----------------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE EROREL(TOLREL,EPS,A,B,N)
C
C     PROPOSITO:LA SUBRUTINA EROREL NOS PROPORCIONA UNA MEDIDA DE
C               ERROR RELATIVA.
C
C

      A1=(ALOG(B-A))-(ALOG(EPS))-(ALOG(TOLREL))/ALOG(2.)
      N=IFIX(A1)+1
      RETURN
      END
```

```
C
C       N U F I B
C       ----------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE NUFIB(A,B,EPS,FL,FL1,FIB,N)
C
C       PROPOSITO:LA SUBRUTINA NUFIB CALCULA LA SUCESION DE NUME-
C                 ROS DE FIBONACCI PARA FIJAR N LA CUAL REPRE-
C                 SENTA EL NUMERO DE EVALUACIONES REQUERIDAS
C                 EN LA IMPLEMENTACION DEL METODO DE FIBONACCI .
C

C       PARAMETROS DE ENTRADA Y SALIDA:
C
C       FIB(1) Y FIB(2)-PRIMEROS NUMEROS DE LA SUCESION DE FIBO-
C                       NACCI .
C                 EPS -PRESICION REQUERIDA
C                 FL1 -REPRESENTA A  L1=L/EPS
C
C                NOTA: LA FORMULA ORIGINAL PARA DETERMINAR A  N  ES-
C                      TA DADA POR  L1=L/FN < EPS  .
C
C       ----------------------------------------------------------------
        DIMENSION FIB(50)
C
C       NUMEROS INICIALES DE LA SUCESION DE FIBONACCI
C
        FIB(1)=1.

        FIB(2)=1.

        FL=B-A
        FL1=FL/EPS
C
C       CALCULO DE LOS NUMEROS RESTANTES  DE FIBONACCI
C
C       ------------------------------------------------------------
        JJ=2
80      JJ=JJ+1
        FIB(JJ)=FIB(JJ-1)+FIB(JJ-2)
        IF(FL1.LT.FIB(JJ)) GO TO 90
        GO TO 80
90      N=JJ
        RETURN
        END
```

```
C
C       F I B O N A
C
C       ----------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE FIBONA(K,N,A,B,FIB,EPS,F)
C



C       PROPOSITO: LA SUBRUTINA FIBONA ES UN METODO DE BUSQUEDA DIREC-
C                  TA QUE IMPLEMENTA EL METODO DE FIBONACCI PARA DETER-
C                  MINAR EL INTERVALO DE MENOR LONGITUD QUE CONTIENE
C                  AL MINIMO DE UNA FUNCION ESCALAR.
C
C       PARAMETROS DE
C       ENTRADA  Y SALIDA .
C
C                  K - NUMERO DE ITERACIONES
C                  N -   NUMERO DE EVALUACIONES REQUERIDAS
C                     POR EL METODO DE FIBONACCI .
C             NEVALF-NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C                EPS-CONSTANTE DE PERTURBACION
C                    (NORMALMENTE SE DA COMO 1.0E-02 YA QUE SI SE
C                     DA MAS CHICO LA FUNCION PUEDE DEJAR DE SER
C                     UNIMODAL)
C
C               A,B- EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C
C           X1 Y X2- PUNTOS DE EVALUACION EN CADA ITERACION
C           F1 Y F2- VALORES DE LA FUNCION EN CADA PASO
C
C       ----------------------------------------------------------------
C
        DIMENSION FIB(50)
        COMMON/NFRCB/KL,NEVALF

        X1=(FIB(N-K-1)/FIB(N-K+1))*(B-A)+A
        X2=(FIB(N-K)/FIB(N-K+1))*(B-A)+A
C
        F1=F(X1)
C
        F2=F(X2)
        WRITE(7,600)K,A,B,X1,X2,F1,F2
        GO TO 260
C
C       CALCULA UNICAMENTE X1
C       ----------------------------------------------------------------
155     X1=(FIB(N-K-1)/FIB(N-K+1))*(B-A)+A
        F1=F(X1)
        WRITE(7,610) K,A,B,X1,X2,F1,F2
        GO TO 260
C
C       CALCULA UNICAMENTE  X2
C       ----------------------------------------------------------------
165     X2=(FIB(N-K)/FIB(N-K+1))*(B-A)+A
        F2=F(X2)
        WRITE(7,610) K,A,B,X1,X2,F1,F2
C
C
```

```
260       IF(F1.GT.F2)GO TO 280
          A=A
          B=X2
          X2=X1
          F2=F1
          IF(K.EQ.(N-3)) GO TO 420
          K=K+1
          GO TO 155
C
C
280       A=X1
          B=B
          X1=X2
          F1=F2
          IF(K.EQ.(N-3)) GO TO 310
          K=K+1
          GO TO 165
C
C
C         CALCULA  X2  PERTURBADA
C
C         -----------------------------------------------------------
310       EPS1=X2*EPS
          X2=X1+EPS1
          F2=F(X2)
          K=K+1
          WRITE(7,630)K,A,B,X1,X2,F1,F2
          IF(F2.LT.F1)GO TO 430
          GO TO 485
C
C         CALCULA  X1  PERTURBADA
C         -----------------------------------------------------------
420       EPS1 =X1 *EpS
          X1=X2-EPS1
          F1=F(X1)
          K=K+1
          WRITE(7,640)K,A,B,X1,X2,F1,F2
          IF(F1.LT.F2)GO TO 485
430       A=X1
          B=B
          GO TO 690
485       A=A
          B=X2


C         ESCRITURAS

600       FORMAT(/,84('*'),/,4X,'K',7X,'A',14X,'B',
          110X,'X1',10X,'X2',
          111X,'F(X1)',8X,'F(X2)',//
          184('*'),/,1X,I5,6(1X,E12.3))
610       FORMAT(//,1X,I5,6(1X,E12.3))
630       FORMAT(//,50X,'X2',//,48X,'PERT.'
          1//,1X,I5,6(1X,E12.3),//,84('*'))
640       FORMAT(//,38X,'X1',//,36X,'PERT.'
          1//,1X,I5,6(1X,E12.3),//,84('*'))
C
C         ESCRIBE SUBINTERVALO FINAL
C         -----------------------------------------------------------
690       WRITE(7,750)A,B,NEVALF
```

```
750   FORMAT(//40X,'***EL METODO TUVO EXITO***',
     1//,40X,'INTERVALO DE INCERTIDUMBRE',//,40X,
     1'A=',E12.3,2X,'B=',E12.3,
     1//,30X,'NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION :',I4)
      RETURN
      END
```

```
C
C     A U R E A
C     ------------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE AUREA(ITMAX,A,B,N,EPS,TAO)
C
C     PROPOSITO:LA SUBRUTINA AUREA ES LA IMPLEMENTACION
C               DE UN METODO DE BUSQUEDA DIRECTA PARA
C               DETERMINAR EL INTERVALO DE MENOR LONGITUD
C               DONDE SE ENCUENTRA EL MINIMO DE UNA FUNCION
C               ESCALAR.
C
C
C     PARAMETROS DE ENTRADA Y SALIDA.
C
C
C               N - NUMERO DE ITERACIONES
C          NEVALF - NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C           ITMAX - NUMERO DE ITERACIONES MAXIMAS
C             A,B - EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C              KL - NUMERO DEL PROBLEMA
C             EPS - PRESICION REQUERIDA
C         X1 Y X2- PUNTOS DE EVALUACION EN CADA ITERACION .
C         F1 Y F2- VALORES DE LA FUNCION
C              LN- REPRESENTA LA LONGITUD DEL INTERVALO EN CADA
C                  PASO .
C
C     ------------------------------------------------------------------------
C
      REAL LN
      COMMON/NPROB/KL,NEVALF
C
      LN=(B-A)
C
      X1=0.381966*(B-A)+A
C
      X2=0.618034*(B-A)+A
C
      F1=F(X1)
C
      F2=F(X2)
C
      WRITE(7,500) N,LN,A,B,X1,X2,F1,F2
      GO TO 350
C
C     CALCULA UNICAMENTE X1
C     ------------------------------------------------------------------
C
C
330   X1=0.381966*(B-A)+A
      F1=F(X1)
      WRITE(7,510)N,LN,A,B,X1,X2,F1,F2
      GO TO 350
C
C     CALCULA UNICAMENTE X2
C     ------------------------------------------------------------------------
C
C
340   X2=0.618034*(B-A)+A
      F2=F(X2)
      WRITE(7,520)N,LN,A,B,X1,X2,F1,F2
C
```

```
      A=B
      B=X2
      X2=X1
      F2=F1
C
C     CHECA CONVERGENCIA
C
      LN=LN*TAO
      IF(LN .LT. EPS)GO TO 675
      IF(N.EQ.ITMAX) GO TO 650
      N=N+1
      GO TO 330
C
400   A=X1
      B=B
      X1=X2
      F1=F2
C
C     CHECA CONVERGENCIA
C
      LN=LN*TAO
      IF(LN .LT.EPS)GO TO 675
      IF(N.EQ.ITMAX)GO TO 650
      N=N+1
      GO TO 340
C
C     ESCRITURAS
C
500   FORMAT(/,80('*'),/,1X,'N',6X,'LN',10X,'A',12X,'B',
     112X,'X1',12X,'X2',8X,'F(X1)',8X,'F(X2)',/,80
     1('*'),//,1X,I4,7E12.3)
510   FORMAT(/,1X,I4,7E12.3)
520   FORMAT(/,1X,I4,7E12.3)
650   WRITE(7,660)
660   FORMAT(///,50X,'EL NUMERO DE ITERACIONES MAX. FUE AGOTADO',//,
     150X,'***EL INTERVALO DE INCERTIDUMBRE NO FUE ENCONTRADO***')
      GO TO 800
C
C     ESCRIBE EL SUBINTERVALO FINAL
C
675   N=N+1
      WRITE(7,680)N,LN,A,B,X1,X2,F1,F2
680   FORMAT(/,1X,I4,7E12.3)
      WRITE(7,700) A,B,NEVALF
700   FORMAT(//,80('*'),//,55X,'***EL METODO TUVO EXITO***',
     1//,55X,'A=',E12.3,2X,'B=',E12.3
     1//,45X,'NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION : ',I4)
800   RETURN
      END
```

```
C
C     I N S E G
C     ------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE INSEG(K,ITMAX,F,A,B,X,EPS,TAO)
C
C     PROPOSITO:  LA SUBRUTINA INSEG  ES LA IMPLEMENTACION
C                 DEL METODO DE GILL Y MURRAY PARA DETERMINAR UN IN-
C                 TERVALO DE SEGURIDAD QUE CONTIENE AL MINIMO.
C
C     PARAMETROS DE
C     ENTRADA Y SALIDA.
C
C                 K - NUMERO DE ITERACIONES
C             ITMAX- NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES
C               A,B- EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C                 X- PUNTO INTERIOR
C               EPS-PRESICION REQUERIDA
C                   (SE RECOMIENDA DAR EPS=1.0E-02 YA QUE SI
C                    SE DA MAS GRANDE LA FUNCION DEJA DE SER UNIMO-
C                    DAL)
C               TAO-PRESICION ABSOLUTA
C                KL-NUMERO DEL PROBLEMA
C            NEVALF-NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C          FA,FB,FX-VALORES DE LA FUNCION EN A,B,X .
C
C               IND- INDICADOR
C                    =1 SIGNIFICA QUE X ESTA EN EL INTERVALO
C                         (A,B)
C                    =-1 SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO
C                          (A,B)
C                    =2 SIGNIFICA QUE EL METODO TUVO EXITO
C                    =-2 SIGNIFICA QUE EL METODO FRACASO
C     ------------------------------------------------------------------
C
      COMMON/NPROB/KL,NEVALF
C
C
C     INICIALIZACION
C
      IF((X .GT. B) .AND. (X .LT. A)) GO TO 50
      GO TO 60
C
C     SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO (A,B) .
C
50    IND=-1
      GO TO 800
C
C     SIGNIFICA QUE X ESTA EN EL INTERVALO (A,B)
C
60    IND=1
C
C     EVALUA LA FUNCION EN A,B,X  .
C
      FA=F(A)
      FB=F(B)
      FX=F(X)
```

```
C       CHECA SI LA FUNCION ES O NO UNIMODAL

100     AMAX=AMAX1(FA,FB)
        IF(FX.GT.AMAX) GO TO 611

C       CRITERIO PARA DETERMINAR W Y V

        IF(FA .GE. FB) GO TO 200
C
C       EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                             FA < FB
C
        W=A
        V=B
        FW=FA
        FV=FB
        GO TO 205

200     V=A
        W=B
        FV=FA
        FW=FB
205     WRITE(7,808)X,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
C
C       SE CALCULA U LA COTA MODIFICADA
C
        D1=W-X
        D2=V-X

C       SE COMPARAN LAS DISTANCIAS DIRIGIDAS

        IF(ABS(W-X) .GE. ABS(V-X)) GO TO 300
C
C       EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                             ABS(D1) < ABS(D2)
C
        BETA=SQRT(-D1/D2)
        U=X + ((1./2.) * BETA) * D2
        GO TO 510
500     BETA=(5./11.) * (0.1 - (D2/D1))
        U=X + (BETA * D2)

C       CRITERIO EN CASO DE QUE EL PUNTO U ESTE CERCA DE UNO DE LOS
C           EXTREMOS.

510     AMIN=AMIN1(ABS(U-A),ABS(U-B))
        IF(AMIN .GT. TOL1) GO TO 515

C       CRITERIO EN CASO QUE EL PUNTO U CASI COINCIDA CON UNO
C       DE LOS EXTREMOS.

        IF(B-X .GT.X-A) U=(X+B)/2.
        IF(B-X .LE. X-A) U=(A+X)/2.

C       SE EVALUA LA FUNCION EN U
```

```
C
C      SE DETERMINA EL INTERVALO DE SEGURIDAD .
C
600    IF(X .LT. U) GO TO 700
       IF(X .GT. U) GO TO 800


609    GO TO 610
611    IND=-2
       GO TO 620

C      SE COMPARAN LOS VALORES DE LA FUNCION EN X  Y  U


700    IF(FX .GE. FU) GO TO 750
C
C      EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                         FX < FU
C
       B=U
       FB=FU
       GO TO 900


750    A=X
       FA=FX
       X=U
       FX=FU
       GO TO 900


C      SE COMPARAN LOS VALORES DE LA FUNCION EN X  Y  U

800    IF(FX .GE. FU) GO TO 850
C
C      EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                                FX < FU
C
       A=U
       FA=FU
       GO TO 900
850    B=X
       FB=FX
       X=U
       FX=FU

C
C      CHECA CONVERGENCIA .
C
900    ALPHA=ABS(X)
       TOL=(EPS * ALPHA) + TAO
       AMAX=AMAX1(X-A,B-X)
       TOL1=2. * TOL
       IF(AMAX .LE. TOL1)GO TO 1000
C
C      AUN NO CONVERGE .
C
       IF(K .EQ. ITMAX) GO TO 904
       K=K+1
       GO TO 100

C      ESCRITURAS

905    FORMAT(/,125('*'),/,3X,'K',8X,'A',10X,'B',10X,'X',12X,'W',12X,
```

```
908   FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3))
910   WRITE(7,915)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
915   FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3),/,125('*'),
     1//,30X,'***EL PUNTO COINCIDE CON UNO DE LOS EXTREMOS***'
     1//,30X,'SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO (A,B'
     1//,60X,'***FRACASO***')
      GO TO 1015
920   WRITE(7,925)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
925   FORMAT(/1X,I4,10(1X,E11.3)/
     1//,45X,'***LA FUNCION NO ES UNIMODAL***')
      GO TO 1015
C
990   WRITE(7,995)
995   FORMAT(/,125('*'),//,55X,'***EL METODO NO TUVO EXITO***'
     1//,30X,'***EL NUMERO DE ITERACIONES MAXIMO FUE AGOTADO***')
      GO TO 1015
C
C     HUBO CONVERGENCIA
C
1000  K=K+1
      IND=2
      WRITE(7,1005)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
1005  FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3))
C
C
C     ESCRIBE CUAL ES EL INTERVALO DE SEGURIDAD
C
      WRITE(7,1010)A,B,NEVALF
1010  FORMAT(/,125('*'),//,55X,'***EL METODO TUVO EXITO***'
     1//,50X,'EL INTERVALO DE SEGURIDAD ES:'
     1//,55X,'A=',E12.3/2X,'B=',E12.3
     1//,45X,'NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION : ',I10)
1015  RETURN
      END
```

```
C
C         C U A G I M
C         ---------------------------------------------------------------------
C
          SUBROUTINE CUAGIM(K,ITMAX,F,A,B,X,EPS,TAO)

          REAL M
C
C         PROPOSITO : LA SUBRUTINA CUAGIM ES UN METODO HIBRIDO QUE
C                     COMBINA LOS METODOS DE GILL Y MURRAY E INTERPOLACION
C                     CUADRATICA PARA DETERMINAR EL INTERVALO DE SEGU-
C                     RIDAD QUE CONTIENE AL MINIMO.
C
C         PARAMETROS DE
C         ENTRADA Y SALIDA.
C
C                   K - NUMERO DE ITERACIONES
C               ITMAX- NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES
C                 A,B- EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C                   X- PUNTO INTERIOR
C                 EPS-PRESICION REQUERIDA
C                      (SE RECOMIENDA DAR EPS = .01 YA QUE SI SE DA
C                      MAS CHICO SE CORRE EL PELIGRO DE QUE LA
C                      FUNCION DEJE DE SER UNIMODAL)
C                 TAO- PRESICION ABSOLUTA

C                  KL-NUMERO DEL PROBLEMA
C              NEVALF-NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C            FA,FB,FX-VALORES DE LA FUNCION EN A,B,X .
C                 IND- INDICADOR
C                      =1 SIGNIFICA QUE X ESTA EN EL INTERVALO(A,B)
C                      =-1 SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO
C                              (A,B)
C                      =2 SIGNIFICA QUE EL METODO TUVO EXITO
C                      =-2 SIGNIFICA QUE EL METODO FRACASO

C         ---------------------------------------------------------------------
C
          COMMON/NPROB/KL,NEVALF
C
C
C         INICIALIZACION
C
          IF((X .GT. B) .AND. (X .LT. A)) GO TO 50
          GO TO 60
C
C         SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO (A,B) .
C
50        IND=-1
          GO TO 609
C
C         SIGNIFICA QUE X ESTA EN EL INTERVALO (A,B)
C
60        IND=1
C
C         EVALUA LA FUNCION EN A,B,X  .
C
          FA=F(A)
          FB=F(B)
```

```
      FX=F(X)
      WRITE(7,1020)
C
C     CRITERIO PARA DAR LOS PUNTOS (X,F(X)),(W,F(W)),(V,F(V))
C
      IF(FA .GE. FB) GO TO 200
C
C     EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                          FA < FB
C
      W=A
      V=B
      FW=FA
      FV=FB
      GO TO 204
200   V=A
      W=B
      FV=FA
      FW=FB
C
C     DIAGNOSTICO PARA CHECAR SI LA FUNCION ES UNIMODAL O NO
C
204   AMAX=AMAX1(FA,FB)
      IF(FX.GT.AMAX) GO TO 611
205   WRITE(7,1030)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
C
C     SE CALCULA EL MINIMO ALPHA DE LA FUNCION INTERPOLADA
C
      S=(W-X)**2*(FV-FW)-(V-W)**2*(FW-FX)

      Q=2.*(V-W)*(FW-FX)-(W-X)*(FV-FX)

      ALPHA=X-S/Q
C
C     SE CALCULA LA COTA U POR EL METODO DE GILL Y MURRAY .
C
      D1=W-X
      D2=V-X
C
C     SE COMPARAN LAS DISTANCIAS DIRIGIDAS.
C
      IF(ABS(W-X) .GE. ABS(V-X)) GO TO 500
C
C     EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                         ABS(D1) < ABS(D2)
C
      BETA=SQRT(-D1/D2)
      U=X + ((1./2.) * BETA) * D2
      GO TO 510
500   BETA=(5./11.) * (0.1 - (D2/D1))
      U=X + (BETA * D2)
C
C     CRITERIO PARA SABER SI M ES ALPHA O ES IGUAL A U
C
510   IF((X.LT.U).AND.(A.LT.ALPHA).AND.(ALPHA.LT.U))GO TO 520
      IF((X.GT.U).AND.(U.LT.ALPHA).AND.(ALPHA.LT.B))GO TO 520
C
```

```
C         EN CASO CONTRARIO
C
          M=0
          GO TO 525
520       M=ALPHA
C
C
C         CASO EN QUE EL PUNTO M NO ESTA CERCA DE LOS EXTREMOS
C
525       AMIN=AMIN1(ABS(M-A),ABS(M-B))
          IF(AMIN.GT.TOL1) GO TO 530
C
C         CASO EN QUE EL PUNTO M CASI COINCIDE CON UNO DE LOS
C         EXTREMOS.
C
          IF(B-X .GT. X-A) M=(X+B)/2.
          IF(B-X .LE. X-A) M=(A+X)/2.
C
C         SE EVALUA LA FUNCION EN M   .
C
530       FM=F(M)
C
C         SE ACTUALIZA  EL INTERVALO DE SEGURIDAD
C
600       IF(X .LT. M) GO TO 700
          IF(X .GT. M) GO TO 800


609       WRITE(7,1040)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
611       IND=-2
          GO TO 1045

C         COMPARA LOS VALORES DE LA FUNCION EN X  Y  M.

700       IF(FX .GE. FM) GO TO 750
C
C         EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                              FX < FM
C
          APRI=A
          BPRI=M
          XPRI=X
          UPRI=B
          FAPRI=FA
          FBPRI=FM
          FXPRI=FX
          FUPRI=FB
          GO TO 900

750       APRI=X
          BPRI=B
          XPRI=M
          UPRI=A
          FAPRI=FX
          FBPRI=FB
          FXPRI=FM
          FUPRI=FA
          GO TO 900
```

```
C          COMPARA LOS VALORES DE LA FUNCION EN X  Y  M.
800        IF(FX .GE. FM) GO TO 850
C
C          EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                                      FX < FM
C
           APRI=M
           BPRI=B
           XPRI=X
           UPRI=A
           FAPRI=FM
           FBPRI=FB
           FXPRI=FX
           FUPRI=FA
           GO TO 900
850        APRI=A
           BPRI=X
           XPRI=M
           UPRI=B
           FAPRI=FA
           FBPRI=FX
           FXPRI=FM
           FUPRI=FB
C
C          ACTUALIZA EL VALOR MAS PEQUENO PARA DETERMINAR LAS NUEVAS
C               W,V  .
C
900        IF((FXPRI.LT.FBPRI).AND.(FBPRI.LT.FAPRI).AND.(FAPRI.LT.
           1FUPRI)) GO TO 960


           IF((FXPRI.LT.FAPRI).AND.(FAPRI.LT.FUPRI).AND.(FUPRI.LT.
           1FBPRI)) GO TO 970

           IF((FXPRI.LT.FAPRI).AND.(FAPRI.LT.FBPRI).AND.(FBPRI.LT.
           1FUPRI)) GO TO 980
C
C          EN CASO CONTRARIO QUIERE DECIR QUE:
C                  FXPRI<FBPRI<FUPRI<FAPRI
C
           WPRI=BPRI
           VPRI=UPRI
           FWPRI=FBPRI
           FVPRI=FUPRI
           GO TO 985

C
C
960        WPRI=APRI
           VPRI=UPRI
           FWPRI=FAPRI
           FVPRI=FUPRI
           GO TO 985

C
C
970        WPRI=BPRI
```

```
      VPRI=APRI
      FWPRI=FBPRI
      FVPRI=FAPRI
      GO TO 985
C
C
980   WPRI=APRI
      VPRI=BPRI
      FWPRI=FAPRI
      FVPRI=FBPRI
C
C     RENOMBRAMIENTO PARA  A,B,X,W,V  .
C
985   A=APRI
      B=BPRI
      X=XPRI
      W=WPRI
      V=VPRI
      FA=FAPRI
      FB=FBPRI
      FX=FXPRI
      FW=FWPRI
      FV=FVPRI
C
C     CHECA CONVERGENCIA
C
      TOL=EPS*ABS(X)+TAO
      AMAX=AMAX1(X-A,B-X)
      TOL1=2. * TOL
      IF(AMAX .LE. TOL1)GO TO 1055
C
C     AUN NO CONVERGE .
C
      IF(K .EQ. ITMAX) GO TO 1010
      K=K+1
      GO TO 204
C
C     ESCRITURAS
C
1010  WRITE(7,1051)
1020  FORMAT(/,125('*'),/,3X,'K',8X,'A',10X,'B',10X,'X',12X,'W',12X,
     1'V',8X,'F(A)',10X,'F(B)',9X,'F(X)',8X,'F(W)',8X,'F(V)',/,
     1125('*'),/)
1030  FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3))
1040  FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3),/,125('*'),
     1///50X,'***EL PUNTO COINCIDE CON UNO DE LOS EXTREMOS***'
     1//,50X,'SIGNIFICA QUE X NO ESTA EN EL INTERVALO (A,B)'
     1//,60X,'***FRACASO***')
      GO TO 1065
1045  WRITE(7,1050)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
1050  FORMAT(/,1X,I4,10(1X,E11.3),//,45X,'***LA FUNCION NO ES UNIMODAL
     1***')
      GO TO 1065
1051  FORMAT(/,125('*'),///,55X,'***EL METODO NO TUVO EXITO***'
     1//,50X,'***EL NUMERO DE ITERACIONES MAXIMO FUE AGOTADO***')
      GO TO 1065
1055  K=K+1
```

```
      WRITE(7,1030)K,A,B,X,W,V,FA,FB,FX,FW,FV
      WRITE(7,1060)A,B,NEVALF
1060  FORMAT(/,125('*'),///,55X,'***EL METODO TUVO EXITO***'
     1//,50X,'EL INTERVALO DE SEGURIDAD ES:'
     1//,55X,'A=',E12.3,2X,'B=',E12.3
     1//,45X,'NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION : ',I3)
1065  RETURN
      END
```

```
C       C U B G I M
C       ----------------------------------------------------------
        SUBROUTINE CUBGIM(K,ITMAX,A,B,EPS,TAU,F,FDERI)
        REAL M
        COMMON/NPROB/KL,NEVALF
C       ----------------------------------------------------------
C       PROPOSITO: LA SUBRUTINA CUBGIM ES UN METODO HIBRIDO QUE
C                  COMBINA LOS METODOS DE GILL Y MURRAY E INTERPO-
C                  LACION CUBICA PARA DETERMINAR EL INTERVALO DE
C                  MENOR LONGITUD QUE CONTIENE AL MINIMO.
C       PARAMETROS DE ENTRADA Y SALIDA.
C                K - NUMERO DE ITERACIONES
C
C            ITMAX - NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES
C              A,B - EXTREMOS DEL INTERVALO DE BUSQUEDA
C              EPS - PRESICION REQUERIDA
C                    (SE RECOMIENDA DAR EPS=1.0E-02 YA QUE SI SE DA
C                     MAS GRANDE LA FUNCION PUEDE DEJAR DE SER UNI-
C           MODAL)
C              TAU - PRESICION ABSOLUTA
C               KL - NUMERO DEL PROBLEMA
C           NEVALF - NUMERO DE EVALUACIONES DE LA FUNCION
C                F - FUNCION DE ENTRADA
C            FDERI - DERIVADA DE LA FUNCION
C       ---------------------------------------------------------
C       EVALUA LA FUNCION EN A Y B
        IFOR=0
        FA=F(A)
        FB=F(B)
        WRITE(7,2008)
C       DETERMINAMOS X Y W
        IF(FA.GE.FB) GO TO 40
C       EN CASO CONTRARIO  FA <  FB
C       INICIALIZACION
        ICASO=3
        X=A
        W=B
        FX=FA
        FW=FB
        GO TO 45
40      ICASO=4
        W=A
        X=B
        FW=FA
        FX=FB
```

```
C       SE EVALUA LA DERIVADA EN X Y W .

45      FDERIX=FDERI(X)
        FDERIW=FDERI(W)

C       SE CALCULA LA DERIVADA EN A PARA LA ACTUALIZACION
C       POSTERIOR DE LA DERIVADAS EN X Y W

        FDERIA=FDERI(A)

C       CRITERIO PARA SABER SI LA FUNCION ES UNIMODAL O NO

        IF((FDERIX * FDERIW) .GT. 0.) GO TO 235

C       EN CASO CONTRARIO:
C       SE CALCULA LA COTA U POR EL METODO DE GILL Y MURRAY

50      CONTINUE
        IF((ICASO.GT.2).AND.(ICASO.LT.7)) GO TO 207
        D1=W-X
        IF(X.LT.W) D2=A-X
        IF(X.GT.W) D2=B-X

C       SE COMPARAN LAS DISTANCIAS DIRIGIDAS

        IF(ABS(D1) .GE. ABS(D2)) GO TO 208

C       EN CASO CONTRARIO SIGNIFICA QUE:
C                  ABS(D1) < ABS(D2)

        BETA=SQRT(-D1/D2)
        U=X+(1./2. *BETA) * D2
        GO TO 210
208     BETA=5./11. * (0.1-(D2/D1))
        U=X+(BETA*D2)
        GO TO 210
207     CONTINUE

C       OTRA FORMA DE ELEGIR U EN CASO DE QUE A,B COINCIDA CON X,W

        U=(X+W)/2.

C       SE CALCULA ALPHA EL MINIMO DE LA FUNCION INTERPOLADA

210     ETA=-3.*((FW-FX)/(W-X))+FDERIW+FDERIX
        GAMM=(W-X)*(SQRT(ETA**2-(FDERIX*FDERIW)))
        GAMMA=SIGN(1.,GAMM)
        S=(W-X)*(FDERIX-GAMMA-ETA)
        Q=(FDERIW-FDERIX-2.*GAMMA)
        ALPHA=X-S/Q

C       CRITERIO PARA SABER SI SE ACEPTA ALPHA O SE ACEPTA U

        IF((U.LT.X) .AND.( U.LT.ALPHA) .AND.(ALPHA.LT.B)) GO TO 220
```

```
      IF((U.GT.X) .AND. (A.LT.ALPHA) .AND.(ALPHA.LT.U)) GO TO 220
C     EN CASO CONTRARIO HACEMOS
      M=U
      GO TO 222
220   M=ALPHA
C     CRITERIO PARA SALVAR EL PUNTO X CUANDO ESTE COINCIDE CON
C     A O CON B.
222   IF(ABS(X-M).GT.TOL) GO TO 240
      IF(X.EQ.A) SIG=1.
      IF(X.EQ.B) SIG=-1.
      M=X+TOL*SIG
      GO TO 240
C     COMO LA FUNCION NO ES UNIMODAL M SE CALCULA
C     COMO EL PUNTO MEDIO.
235   IFOR=1
238   M=(A+B)/2.
C     SE EVALUA LA FUNCION EN M
240   FM=F(M)
      WRITE(7,2020)K,A,B,X,W,FX,FW,FDERIX,FDERIW,ALPHA,ICASO
C     SE EVALUA LA DERIVADA EN M
      FDERIM=FDERI(M)
C     SE DETERMINA EL CASO PARA ASI PODER ACTUALIZAR EL INTERVALO
      IF((FM.LE.FX) .AND. (FDERIM * FDERIX) .GT. 0.) GO TO 1230
      IF((FM.LE.FX) .AND. (FDERIM * FDERIX) .LT. 0.) GO TO 1240
      IF((FM.GE.FX) .AND. (FDERIM * FDERIX) .LT. 0.) GO TO 1250
      IF((FM.GE.FX) .AND. (FDERIM * FDERIX) .GT. 0.) GO TO 1260
C     EN CASO CONTRARIO
      GO TO 2100
C     SE DETERMINO UN INTERVALO DE SEGURIDAD
1230  IF(X.LT.M) GO TO 1235
C     EN CASO CONTRARIO  X>M
C     CASO 2
      ICASO=2
      APRI=A
      BPRI=M
      XPRI=M
      WPRI=X
      FAPRI=FA
```

```
      FBPRI=FM
      FXPRI=FM
      FWPRI=FX
      GO TO 1900

C     SE DETERMINO UN INTERVALO DE SEGURIDAD

C     CASO 1

1235  ICASO=1
      APRI=M
      BPRI=B
      XPRI=M
      WPRI=X
      FAPRI=FM
      FBPRI=FB
      FXPRI=FM
      FWPRI=FX
      GO TO 1900

C     EN ESTE CASO Y LOS TRES QUE SIGUEN SOLO SE CALCULO ALPHA
C     EL MINIMC DE LA FUNCION INTERPOLADA ,PUESTO QUE YA SE TIENE
C     UN INTERVALO DE SEGURIDAD.

1240  IF(X.LT.M) GO TO 1245

C     EN CASO CONTRARIO   X  >  M

C     CASO 4

      ICASO=4
      APRI=M
      BPRI=X
      XPRI=M
      WPRI=X
      FAPRI=FM
      FBPRI=FX
      FXPRI=FM
      FWPRI=FX
      GO TO 1900

C     CASO 3

1245  ICASO=3
      APRI=X
      BPRI=M
      XPRI=M
      WPRI=X
      FAPRI=FX
      FBPRI=FM
      FXPRI=FM
      FWPRI=FX
      GO TO 1900
1250  IF(X.GT.M) GO TO 1255

C     EN CASO CONTRARIO X  <  M
```

```
C        CASO 6

         ICASO=6
         APRI=X
         BPRI=M
         XPRI=X
         WPRI=M
         FAPRI=FX
         FBPRI=FM
         FXPRI=FX
         FWPRI=FM
         GO TO 1900

C        CASO 5

1255     ICASO=5
         APRI=M
         BPRI=X
         XPRI=X
         WPRI=M
         FAPRI=FM
         FBPRI=FX
         FXPRI=FX
         FWPRI=FM
         GO TO 1900

C        EN ESTE CASO Y EL SIGUIENTE COMO LA FUNCION NO ES UNIMODAL
C        EL PUNTO M SE CALCULA COMO EL PUNTO MEDIO  (A+B)/2 .

1260     IF(X.LT.M) GO TO 1265

C        EN CASO CONTRARIO X  >  M

C        CASO 7

         ICASO=7
         IFOR=1
         APRI=M
         BPRI=X
         XPRI=X
         WPRI=M
         FAPRI=FM
         FBPRI=FX
         FXPRI=FX
         FWPRI=FM
         GO TO 1900

C        CASO 8

1265     ICASO=8
         IFOR=1
         APRI=X
         BPRI=M
         XPRI=X
         WPRI=M
         FAPRI=FX
         FBPRI=FM
```

```
      FXPRI=FX
      FWPRI=FW

C     SE ACTUALIZAN LAS DERIVADAS EN X Y W

1900  IF(ICASO.LT.5) GO TO 1910
      IF((ICASO.GE.5) .AND. (ICASO.LE.8)) GO TO 1920

C     EN CASO CONTRARIO

      GO TO 2100
1910  FDERIW=FDERIX
      FDERIX=FDERIM
      GO TO 2000
1920  FDERIX=FDERIX
      FDERIW=FDERIM

C     RENOMBRAMIENTO PARA A,B,X,W,FA,FB,FX,FW  .

2000  A=APRI
      B=BPRI
      X=XPRI
      W=WPRI
      FA=FAPRI
      FB=FBPRI
      FX=FXPRI
      FW=FWPRI

C     CHECA CRITERIO DE CONVERGENCIA


      TOL=EPS*ABS(X)+TAO
      AMAX=AMAX1(X-A,B-X)
      TOL1=2.*TOL
      IF(AMAX .LE. TOL1) GO TO 2090

C     AUN NO CONVERGE

      IF(ICASO.LT.7) IFOR=0
      IF(K .EQ. ITMAX) GO TO 2010
      K=K+1
      IF(IFOR.EQ.1) GO TO 238
      GO TO 50


C     ESCRITURAS

2008  FORMAT(/,135('*'),/,3X,'K',8X,'A',10X,'B',10X,'X',12X,'W',
      19X,'F(X)',10X,'F(W)',8X,'FDX',7X,'FDW',9X,'ALFA',7X,'ICASO',
      18X,/,135('*'),/)
2010  WRITE(7,2017)
2017  FORMAT(/,135('*'),//,55X,'***NO HUBO EXITO***',//,50X,
      1'***EL NUMERO DE ITERACIONES MAXIMAS FUE AGOTADO***')
      GO TO 2100
2020  FORMAT(1X,I4,9(1X,E11.3),3X,I2,/)
2090  K=K+1
      WRITE(7,2020)K,A,B,X,W,FX,FW,FDERIX,FDERIW,ALPHA,ICASO
      WRITE(7,2095)A,B,NEVALF
2095  FORMAT(/,135('*'),///,55X,'***EXITO***',//,50X,
```

```
     1'EL INTERVALO DE SEGURIDAD ES :',//,55X,
     1'A=',E,2X,'B=',E,//,45X,'NUMERO DE
     1 EVALUACIONES DE LA FUNCION : ',I3)
2100  RETURN
      END
```

```
C
C        F M I N
C        ---------------------------------------------------------------
         SUBROUTINE FMIN1(ITMAX,AX,BX,F,TOL,FMIN)
         REAL AX,BX,F,TOL
C
C        PROPOSITO:
C
C ESTE CODIGO ENCUENTRA UNA APROXIMACION AL MINIMO DE
C UNA FUNCION DEFINIDA EN EL INTERVALO (AX,BX)
C
C ENTRADA:
C
C AX EXTREMO IZQUIERDO DEL INTERVALO ORIGINAL
C BX EXTREMO DERECHO DEL INTERVALO ORIGINAL
C F FUNCION SUPRCGRAMA QUE EVALUA F EN X
C TOL LONGITUD DESEADA DEL INTERVALO DE INCERTIDUMBRE FINAL
C
C SALIDA:
C
C FMIN APROXIMACION AL MINIMO DE LA FUNCION
C
C EL METODO ES UNA COMBIMACION DE BUSQUEDA SECCION AUREA Y
C INTERPOLACION PARABOLICA SUCESIVA.LA CONVERGENCIA
C NUNCA ES MAS LENTA QUE LA CONVERGENCIA DEL METODO DE FIBONACCI
C SI F TIENE SEGUNDA DERIVADA CONTINUA LA CUAL ES POSITIVA EN EL
C MINIMO (Y NO EN AX O BX) ENTONCES LA CONVERGENCIA ES SUPER-LINEAL
C DEL ORDEN DE 1.324...
C LA FUNCION NUNCA ES EVALUADA EN DOS PUNTOS MAS CERCANOS QUE
C EPS*ABS(FMIN)+(TOL/3) DONDE EPS ES APROXIMADAMENTE LA RAIZ
C CUADRADA DE LA PRESICION RELATIVA DE LA MAQUINA.SI F ES UNIMODAL
C Y LOS VALORES CALCULADOS DE F SON SIEMPRE UNIMODALES CUANDO
C SON SEPARADOS POR  EPS*ABS(X)+(TOL/3) AL MENOS,ENTONCES
C FMIN APROXIMA LA ABCISA DE EL MINIMO GLOBAL DE F EN EL INTER-
C VALO (AX,BX) CC UN ERROR MENOR QUE 3*EPS*ABS(FMIN)+TOL. SI F NO
C ES UNIMODAL ENTONCES PUEDE APROXIMAR UN MINIMO LOCAL ,PERO
C QUIZA NO UN MINIMO GLOBAL A LA MISMA PRECISION
C ESTE SUBPROGRAMA FUNCION ES UNA VERSION LIGERAMENTE
C   MODIFICADA DE EL PROCILIO ALGOL 60 DADO POR RICHARD BRENT
C EN ALGORITMOS PARA MINIMIZACION SIN DERIVADAS, PRENTICE HALL
C (1973)
C
C        ---------------------------------------------------------------

         REAL A,B,C,D,E,EPS,XM,P,Q,R,TOL1,TOL2,U,V,W
         REAL FU,FV,FW,FX,X
         COMMON/NFRCB/KL,NEVALF


C C ES LA INVERSA AL CUADRADO DE LA RAZON DE GOLDEN
C
         C=0.5*(3.-SQRT(5.0))
C
C EPS ES APROXIMADAMENTE LA RAIZ CUADRADA DE LA PRESICION
C DE LA MAQUINA
C
         K=0
         EPS=1.0
 10      EPS=EPS/2.0
```

```
      TOL1=1.0+EPS
      IF(TOL1.GT.1.0)GO TO 10
      EPS=SQRT(EPS)
C INICIALIZACION
C
      A=AX
      B=BX
      V=A+C*(B-A)
      W=V
      X=V
      E=0.0
      FX=F(X)
      FV=FX
      FW=FX
      WRITE(7,120)K,A,B,X,W,V,FX,FW,FV
C
C EMPIEZA EL CICLO PRINCIPAL
C
20    XM=0.5*(A+B)
      TOL1=EPS*ABS(X)+TOL/3.0
      TOL2=2.0*TOL1
C
C CHECA EL CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA PARAR EL ALGORITMO
C
      XXM=X-XM
      IF(ABS(XXM).LE.(TOL2-0.5*(B-A)))GO TO 140

C ES NECESARIA SECCION DE ORO

      IF(ABS(E).LE.TOL1)GO TO 40
C
C AJUSTE PARABOLICO
C
      R=(X-W)*(FX-FV)
      Q=(X-V)*(FX-FW)
      P=(X-V)*Q-(X-W)*R
      Q=2.0*(Q-R)
      IF(Q.GT.0.0)P=-P
      Q=ABS(Q)
      R=E
      E=D
C
C SE ACEPTA LA PARABOLA
C
30    IF(ABS(P).GE.ABS(0.5*Q*R))GO TO 40
      IF(P.LE.Q*(A-X))GO TO 40
      IF(P.GE.Q*(B-X))GO TO 40
C
C PASO DE INTERPOLACION PARABOLICA
C
      D=P/Q
      U=X+D

C
C F NO DEBE SER EVALUADA TAN CERCANA A AX O BX
C
      IF((U-A).LT.TOL2)D=SIGN(TOL1,XM-X)
      IF((B-U).LT.TOL2)D=SIGN(TOL1,XM-X)
```

```
      GO TO 50
C
C PASO DE SECCION ORO
C
40    IF(X.GE.XM)E=A-X
      IF(X.LT.XM)E=B-X
      D=C*X

C
C F NO DEBE SER EVALUADA MUY CERCANA A X
C
50    IF(ABS(D).GE.TOL1)U=X+D
      IF(ABS(D).LT.TOL1)U=X+SIGN(TOL1,D)

      FU=F(U)

      K=K+1
C

C ACTUALIZA A,B,V,W, Y X
C
      IF(FU.GT.FX)GO TO 60
      IF(U.GE.X)A=X
      IF(U.LT.X)B=X
      V=W
      FV=FW
      W=X
      FW=FX
      X=U
      FX=FU
      GO TO 125
60    IF(U.LT.X)A=U
      IF(U.GE.X)B=U
      IF(FU.LE.FW)GO TO 70
      IF(W.EQ.X)GO TO 70
      IF(FU.LE.FV)GO TO 80
      IF(V.EQ.X)GO TO 80
      IF(V.EQ.W)GO TO 80
      GO TO 125
70    V=W
      FV=FW
      W=U
      FW=FU
      GO TO 125
80    V=U
      FV=FU


C     ESCRITURAS

120   FORMAT(/,135('*'),//,1X,'ITER',8X,'A',14X,'B',15X,'X',15X,'W',
     115X,'V',14X,'F(X)',14X,'F(W)',15X,'F(V)',//,135('*'),//,1X,I3,
     18(1X,E))
125   WRITE(7,130)K,A,B,X,W,V,FX,FW,FV
130   FORMAT(1X,I3,8(1X,E))
      IF(K.EQ.ITMAX)GO TO 160
      GO TO 20
C
C FIN DEL CICLO.PRINCIPAL
```

```
C
140     FMIN=X
        WRITE(7,150)A,B
150     FORMAT(/,135('*'),//,45X,'***EL METODO TUVO EXITO***',//,
       140X,'A =',G,2X,'B =',G)
        GO TO 610
160     WRITE(7,170)
170     FORMAT(/,135('*'),//,45X,'***HUBO EXCESO DE ITERACIONES***',//)
610     RETURN
        END
```
82F-43

BIBLIOGRAFIA

[F] Forsythe E. George & Michael A. Malcolm & Cleve B. Moler
"Computer Methods for Mathematical Computations"
Ed. Prentice - Hall 1977

[G] Gill E. Philip & Murray Walter
"Safeguarded Steplength algorithms for Optimización using Descent Methods"
División of Numerical Analysis and Computing
National Physical Laboratory
Teddington Middlesex
August 1974

[K] Kowalik J. & M.R. Osborne
"Methods for Unconstrained Optimization Problems"

[W] Wilde J. Douglas
"Optimum Seeking Methods"
Ed. Prentice - Hall 1964