



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CURVAS DE PONCELET

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JUAN SALVADOR GARZA LEDESMA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ

2011



Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombres Teléfono Universidad Facultad o Escuela Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno Garza Ledesma Juan Salvador 56 66 74 29 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 302204124</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Nombre Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor Doctor Pablo Barrera Sánchez</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombres Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1 Doctor Santiago Alberto Verjovsky Solá</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2 Doctor Raymundo Bautista Ramos</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3 Doctor Javier Bracho Carpizo</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4 Doctor Santiago López de Medrano Sánchez</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Título Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito Curvas de Poncelet 348 p. 2011</p>

Curvas de Poncelet

Juan Salvador Garza Ledesma

2 de junio de 2011

Agradecimientos y dedicatoria

Doy gracias por todo su apoyo a mi tutor, el Dr. Pablo Barrera Sánchez.

Agradezco el apoyo obtenido del proyecto SEP-PROMEP *Aplicaciones de la optimización numérica a la solución de diversos problemas de cómputo científico*, para llevar a cabo este trabajo en su primera etapa.

Agradezco también al matemático Jorge Contreras Reyes, con quien conversé continuamente durante la realización de este trabajo sobre el contenido del mismo.

Dedicado a Emiliano, Gina y nuestras familias. Muchas gracias por su compañía.

Índice general

Prefacio	xix
Lista de símbolos utilizados frecuentemente	xxv
I El plano euclideo	1
1. Introducción	3
1.1. La fórmula de Chaple-Euler	6
1.2. Cuadriláteros bicéntricos	10
1.2.1. El Problema de Fuss	12
1.3. Generalización del problema y plan del trabajo	20
1.3.1. Porismo de Poncelet	21
1.3.2. La versión compleja	21
1.3.3. Conexión con la teoría de curvas elípticas	22
1.3.4. De vuelta al problema de Fuss y Steiner	22
1.3.5. Curvas de Poncelet	23

2. El porismo de Poncelet en \mathbb{R}^2	25
2.1. Las transformaciones de Möbius complejas	28
2.1.1. Transformaciones que preservan \mathbb{D}	31
2.1.2. Conexión con el porismo de Poncelet	34
2.2. Productos de Blaschke finitos	39
2.2.1. Las elipses de Marden-Blaschke	42
2.2.2. Generalización de la fórmula de Chaple-Euler	46
2.3. Primeros comentarios	48
2.4. La demostración de Jacobi	50
2.4.1. Dos circunferencias	50
2.4.2. Reinterpretación: Una medida invariante	55
2.4.3. Dos elipses	58
2.5. Conjugación topológica	60
2.6. Comentarios	67
II El plano proyectivo complejo	69
3. Nociones básicas de geometría proyectiva	71
3.1. Rectas y principio de dualidad	72
3.2. Transformaciones proyectivas	74
3.2.1. Proyectividades en la recta	77
3.3. Curvas algebraicas	79

3.3.1. Polinomios	79
3.3.2. Curvas en el plano afín y proyectivo	80
3.3.3. Curvas en $\widehat{\mathbb{C}}^2$	84
4. Las cónicas	87
4.1. Intersección con rectas	89
4.1.1. La ecuación reducida	91
4.2. Estructura proyectiva y parametrización	94
4.3. Intersección de dos cónicas	96
4.3.1. Números de intersección	97
4.3.2. Un caso especial del teorema de Bezout	104
4.4. Haces de cónicas	107
4.4.1. Elementos degenerados de un haz	109
4.5. El replanteamiento del porismo de Poncelet	114
4.5.1. La variedad de Poncelet	116
III Variable Compleja	123
5. Superficies de Riemann	125
5.1. Definición y ejemplos	125
5.1.1. Funciones analíticas e isomorfismos	127
5.1.2. Ejemplos	129

5.2.	La variedad \mathcal{P}	132
5.2.1.	\mathcal{P} es suave	133
5.2.2.	\mathcal{P} es un toro (versión intuitiva)	135
5.3.	El toro	138
5.3.1.	Construcción mediante una latiz	138
5.3.2.	La proyección natural π	140
5.3.3.	Estructura compleja	141
5.3.4.	Isomorfismos y automorfismos	142
5.4.	Demostración del porismo de Poncelet	146
5.4.1.	Un breve resumen	146
5.4.2.	σ y τ son automorfismos	147
5.4.3.	η es una traslación	148
6.	Funciones y curvas elípticas	151
6.1.	Motivación	151
6.2.	Funciones elípticas	153
6.2.1.	Definición y propiedades básicas	153
6.2.2.	La función \wp de Weierstrass	156
6.3.	Otras funciones asociadas a una latiz	160
6.3.1.	Relación con la función \wp	161
6.3.2.	Ceros y polos de una función elíptica	162

6.4. La ecuación diferencial de \wp	164
6.4.1. El discriminante modular	166
6.4.2. El problema de inversión	167
6.5. Curvas elípticas	168
6.5.1. \mathcal{P} es un toro (versión formal)	168
6.5.2. La estructura de grupo	171
6.5.3. Los puntos de torsión de \mathbb{C}/Λ	175
6.5.4. Los puntos de torsión de \mathcal{E}	178
6.6. El teorema de Cayley	180
6.6.1. Comentarios	183
7. Polinomios y circunferencias de Poncelet	187
7.1. Introducción	187
7.2. El problema de las circunferencias	188
7.2.1. La simetría σ	189
7.3. Resultados	191
7.3.1. Relaciones de recurrencia para los porismos de Poncelet	191
7.3.2. Los polinomios de Poncelet	192
7.4. La conexión con la teoría de funciones elípticas	194
7.4.1. Relaciones de recurrencia	194
7.4.2. La parametrización de \mathcal{P}	197

7.5.	Los polinomios de periodicidad y semiperiodicidad	201
7.5.1.	Algunas propiedades de los polinomios p_n y q_n	204
7.5.2.	Los polinomios φ_n y ψ_n	207
7.6.	Las circunferencias de Poncelet	209
IV	El rango numérico	221
8.	El campo de valores de un operador lineal	223
8.1.	Introducción	223
8.2.	Definición y propiedades básicas	224
8.3.	Ejemplos; el lema de la elipse	225
8.3.1.	Matrices diagonales	225
8.3.2.	Matrices normales y unitarias	226
8.3.3.	Circunferencias y elipses	227
8.3.4.	Lema de la elipse	230
8.4.	Resultados clásicos	231
8.4.1.	Convexidad; el teorema de Toeplitz-Hausdorff	231
8.4.2.	Compacidad	232
8.4.3.	Contención espectral	232
8.5.	El radio numérico	233
8.6.	Cómo dibujar el rango numérico	234
8.6.1.	Matrices hermitianas	234

8.6.2. Proyección real	235
8.6.3. Algoritmo	236
8.6.4. Algunas imágenes	238
9. Curvas de Poncelet	245
9.1. Introducción	245
9.2. Construcción principal	247
9.2.1. Caso particular	247
9.2.2. Generalización	250
9.2.3. Galería	254
9.3. Suavidad de las curvas	269
9.3.1. Puntos afilados	269
9.3.2. Eigenvalores normales	270
9.4. Los polígonos interinscritos	273
9.5. Epílogo	275
9.6. Invitación	276
Apéndices	278
A. Automorfismos del toro	281
A.1. Curvas en superficies de Riemann	282
A.1.1. Homotopía	283
A.1.2. Teoremas de levantamiento	284

A.2. Caracterización de los automorfismos	287
B. La función modular	289
B.1. Las funciones g_2, g_3	289
B.2. La función modular J	290
B.3. El grupo modular Γ	291
B.4. Región fundamental para Γ	292
B.5. La serie de Fourier de J	294
B.6. Los valores de J	297
B.7. Solución al problema de inversión	301
C. Programa para graficar el rango numérico de una matriz	303
C.1. Código	304
C.2. El radio numérico	305

Índice de figuras

1.1. Circunferencia circunscrita.	3
1.2. Circunferencia inscrita.	3
1.3. Las circunferencias circunscrita e inscrita a un hexágono regular.	4
1.4. La construcción del hexágono puede repetirse para cualquier punto de la circunferencia exterior.	4
1.5. Las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo.	5
1.6. ¿Una infinidad de soluciones?.	5
1.7. Un pentágono interinscrito a un par de curvas.	6
1.8. Triángulo inicial	7
1.9. Construcciones auxiliares	7
1.10. Trazando un nuevo triángulo	9
1.11. Un cuadrilátero bicéntrico	11
1.12. Un porismo de Poncelet	11
1.13. Cuadrilátero bicéntrico	12
1.14. Calculando un lugar geométrico	13

1.15. Construyendo el círculo que circunscribe a los cuadriláteros	14
1.16. El porismo de Poncelet para circunferencias y cuadriláteros	16
1.17. Dando coordenadas a la figura original del problema de Fuss	17
1.18. Las circunferencias punteadas son inversas respecto a la original con centro en I . . .	18
1.19. Prueba alternativa de la identidad de Fuss	19
1.20. El triángulo rectángulo formado con los triángulos semejantes de la figura 1.17 . . .	20
2.1. La transformación de Poncelet	25
2.2. Iteración de la transformación T_{C_2}	26
2.3. Podemos suponer que la elipse en que están inscritos los polígonos es una circunferencia	27
2.4. Traslación por un complejo	28
2.5. Dilatación	29
2.6. Rotación	29
2.7. La transformación $z \mapsto 1/z$	30
2.8. Un automorfismo en \mathbb{D}	32
2.9. Otra forma de determinar el automorfismo	32
2.10. M_a actuando en $\partial\mathbb{D}$	34
2.11. Teorema 2.1	35
2.12. Primer caso del Teorema 2.1	35
2.13. Segundo caso del Teorema 2.1	36
2.14. $(M_a^\theta)^{\circ 3}$ es la identidad en la circunferencia unitaria	38

2.15. Las cevianas del Teorema de Marden	42
2.16. Chaple-Euler	46
2.17. toda elipse que es 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ debe ser de Marden-Blaschke .	47
2.18. la cuerda $[p, T_C(p)]$ es tangente a \mathcal{C}	50
2.19. Las funciones $M(p)$ y $\rho(p)$	51
2.20. calculando $f'(\varphi)$	52
2.21. Calculando $\rho(p_1)$ y $\rho(p)$	53
2.22. $[p, T(p)]$ es tangente a \mathcal{D} en m	56
2.23. $\Delta p'np \sim \Delta p_1p'_1n$	57
2.24. Llevando al caso anterior	59
2.25. Un automorfismo preservador de orientación con dos puntos fijos que no es la identidad.	61
2.26. $[x, T(x)]$ tangente a \mathcal{D}	65
2.27. $\theta(T) = \frac{1}{5}$	67
2.28. $\theta(T) = \frac{2}{5}$	67
3.1. La hipérbola γ en el plano real	83
4.1. Una recta y una cónica con intersección vacía en \mathbb{R}^2	89
4.2. No es posible trazar una tangente a la elipse desde P	91
4.3. Una estructura proyectiva para la cónica.	94
4.4. Ejemplo 4.1.	98
4.5. Proposición 4.4.	99

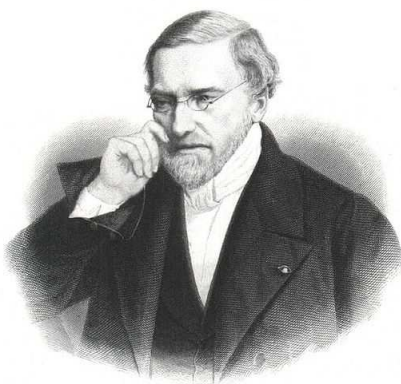
4.6.	Un haz no-degenerado en el plano afín con cuatro puntos base	108
4.7.	Tabla de tipos de multiplicidad y cónicas degeneradas.	110
4.8.	La transformación η	116
4.9.	Una nueva parametrización para C	119
5.1.	Cartas analíticamente compatibles en una variedad	126
5.2.	Los conjuntos \mathcal{B}_C , \mathcal{B}_{D^*} y \mathcal{F}	133
5.3.	El conjunto D	136
5.4.	La latiz generada por w_1 y w_2	138
5.5.	Un paralelogramo fundamental.	139
6.1.	El 1- toro.	151
6.2.	La gráfica de f	152
6.3.	El paralelogramo fundamental P_α	154
6.4.	Algunos ejemplos de partes afines de curvas elípticas reales.	171
6.5.	$p_3 = p_1 + p_2$	173
6.6.	$\eta(x, \xi) = (x', \xi')$	181
6.7.	Dos pentágonos interinscritos a una hipérbola y una elipse.	183
6.8.	Dos cuadriláteros interinscritos a una elipse y una parábola.	184
6.9.	Dos triángulos interinscritos a una hipérbola y una circunferencia.	184
7.1.	La simetría σ	189
7.2.	Parametrización de C	198

8.1. El rango numérico de la matriz A'	228
9.1. Un ejemplo de una curva de Poncelet obtenida con la construcción de Mirman.	245
9.2. La 4-curva de Poncelet de la figura 9.1.	246
9.3. Construyendo un caso particular para triángulos.	247
9.4. El rango numérico de la matriz construida T	249
9.5. La 3-curva de Poncelet de la figura previa.	249
9.6. Un polígono de 4 lados inscrito en la circunferencia unitaria.	252
9.7. La curva $\partial\Omega(T)$ definida por el polígono y el vector w elegidos.	253
9.8. Otra 4-curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria.	253
9.9. $k = 4$, ejemplo 1(1).	254
9.10. $k = 4$, ejemplo 1(2).	254
9.11. $k = 4$, ejemplo 2(1).	255
9.12. $k = 4$, ejemplo 2(2).	255
9.13. $k = 4$, ejemplo 3(1).	256
9.14. $k = 4$, ejemplo 3(2).	256
9.15. $k = 4$, ejemplo 4(1).	257
9.16. $k = 4$, ejemplo 4(2).	257
9.17. $k = 4$, ejemplo 5(1).	258
9.18. $k = 4$, ejemplo 5(2).	258
9.19. $k = 5$, ejemplo 1(1).	259

9.20. $k = 5$, ejemplo 1(2).	259
9.21. $k = 5$, ejemplo 2(1).	260
9.22. $k = 5$, ejemplo 2(2).	260
9.23. $k = 5$, ejemplo 3(1).	261
9.24. $k = 5$, ejemplo 3(2).	261
9.25. $k = 5$, ejemplo 4(1).	262
9.26. $k = 5$, ejemplo 4(2).	262
9.27. $k = 5$, ejemplo 5(1).	263
9.28. $k = 5$, ejemplo 5(2).	263
9.29. $k = 6$, ejemplo 1(1).	264
9.30. $k = 6$, ejemplo 1(2).	264
9.31. $k = 6$, ejemplo 2(1).	265
9.32. $k = 6$, ejemplo 2(2).	265
9.33. $k = 6$, ejemplo 3(1).	266
9.34. $k = 6$, ejemplo 3(2).	266
9.35. $k = 6$, ejemplo 4(1).	267
9.36. $k = 6$, ejemplo 4(2).	267
9.37. $k = 6$, ejemplo 5(1).	268
9.38. $k = 6$, ejemplo 5(2).	268
A.1. Dos curvas homotópicas en el plano.	283

B.1. La región fundamental F	293
B.2. El contorno C	298
B.3. El contorno modificado C'	299
B.4. La modificación del contorno C en el último caso.	300

Prefacio



Jean Victor Poncelet (1788-1867) fue un ingeniero militar y matemático francés considerado uno de los fundadores de la geometría proyectiva tal como la conocemos hoy. Siendo aliado de Napoleón en su guerra contra el Imperio Ruso en 1812 fue hecho prisionero en Saratoff donde sorprendentemente desarrolló las ideas que más tarde publicaría en su obra *Traité des propriétés projectives des figures* en la que, entre otras cosas, estudia los polos y polares asociados a las cónicas lo cual lo lleva no solo a establecer el principio de dualidad punto-recta en la geometría proyectiva sino a descubrir uno de los resultados más bonitos del área que actualmente es llamado casi siempre *porismo de Poncelet*.

El porismo de Poncelet habla sobre la existencia de polígonos que están inscritos a una cónica y circunscritos a otra, afirmando que en caso de existir uno de estos, existen entonces una infinidad, todos con el mismo número de lados (el enunciado preciso puede encontrarse desde el primer capítulo de esta tesis). Existe una enorme cantidad de trabajos relacionados con este resultado, que ha llamado la atención de los matemáticos incluso hasta hoy, no sólo por su belleza intrínseca sino por el hecho de que su enunciado es peculiarmente fácil de comprender, en contraste con sus demostraciones conocidas, ninguna de ellas elemental, hecho

que favorece el que en su estudio, uno pueda aprender una muy diversa gama de tópicos en matemáticas que interactúan naturalmente entre sí.

El término porismo hace alusión a que en el enunciado del mismo se garantiza la existencia de una infinidad de polígonos que tienen cierta propiedad, en caso de comprobarse la hipótesis de que exista uno de ellos; no se dice sin embargo cómo saber explícitamente cuándo se satisface dicha hipótesis. A pesar de ello, a lo largo de los años, matemáticos como Euler, Fuss, Jacobi, Steiner, entre otros, estudiaron casos particulares para los cuales fueron capaces de dar condiciones necesarias y suficientes para cubrir el requerimiento del resultado de Poncelet.

El objetivo técnico de este trabajo se desprende de lo mencionado previamente; entre los muchos trabajos relacionados con el porismo de Poncelet se distingue una versión del mismo en el plano proyectivo complejo, cuya demostración hace uso de la teoría de curvas elípticas complejas y permite en última instancia resolver completamente uno de los problemas que me han interesado: determinar explícitamente cuándo un par de cónicas satisface el porismo de Poncelet, estos trabajos se deben principalmente a una versión moderna de Griffiths y Harris de un teorema de Cayley. Una vez resuelto el determinar dichas cónicas, un segundo problema que surgió naturalmente fue investigar si existen otro tipo de curvas además de las cónicas que cumplen el porismo de Poncelet, la respuesta resultó afirmativa y dio origen al concepto conocido hoy como curva de Poncelet, que da título a la tesis. Así, en esta obra me propongo principalmente exponer la demostración del porismo de Poncelet debida a Griffiths y Harris, para de aquí, haciendo uso de las propiedades de ciertas funciones elípticas, exhibir una manera de determinar en particular, todas las circunferencias que satisfacen el porismo descubierta por Dominique Hullin y finalizar con la construcción de una infinidad de curvas de Poncelet no-cónicas debida en gran parte a Boris Mirman.

Por otro lado, tuve siempre el objetivo central de que estas páginas representaran lo que personalmente me parece adecuado para una tesis de este nivel académico; un trabajo de autocontenido para cualquier estudiante que haya cubierto los cursos obligatorios de la licenciatura que he cursado, (en la UNAM) con el reto adicional de que se introdujera además, un problema no elemental que raramente es conocido por el alumno promedio de la carrera. Me gustaría mucho que esto pudiera ser leído por otros estudiantes de licenciatura y sirviera como un ejemplo real de la aplicación del conocimiento adquirido en clase y de la interacción no trivial entre áreas del conocimiento aparentemente desconexas como lo son por ejemplo, la geometría euclideana elemental, el análisis complejo, el álgebra lineal y la teoría de la medida.

Puedo decir que yo mismo he encontrado estimulante lo antes mencionado, para emprender estudios de especialización con motivos distintos en esencia a los que se desprenden de la inercia social de avanzar en grados académicos y puestos laborales, móviles que en mi opinión resultan nocivos en exceso para el matemático, en particular en nuestro país.

Debido a lo que recién menciono en relación al deseo de que esta tesis no suponga conocimiento alguno del lector, más allá del obtenido a partir de los cursos obligatorios del plan de estudios actual de la licenciatura en matemáticas en esta Facultad de Ciencias, la extensión de la misma es considerable, por lo que he dividido el material en 4 partes:

- I) **El plano euclideo.**
- II) **El plano proyectivo complejo.**
- III) **Variable Compleja.**
- IV) **El rango numérico.**

Cada una de las cuales cuenta al principio con una guía que indica los temas cubiertos, incluye sugerencias de omisión de ciertas secciones o capítulos para el lector avanzado y citas a la bibliografía incluida al final de la tesis.

Cada parte está a la vez dividida en capítulos, los cuales están titulados y tratan brevemente como se muestra a continuación:

1. **Introducción.**

Se presentan los casos más básicos del porismo de Poncelet en su versión del plano euclideo utilizando principalmente herramientas de geometría sintética elemental con el fin de ilustrar las definiciones y resultados principales de la tesis; porismo y curvas de Poncelet. Se introduce en particular el problema de determinar cuándo un par de circunferencias satisfacen el porismo de Poncelet y se hace al final un plan de trabajo para el resto de los capítulos.

2. El porismo de Poncelet en \mathbb{R}^2 .

En este capítulo se replantea el porismo de Poncelet en términos de dinámica y se dan demostraciones y ejemplos para casos especiales, comenzando a hacer uso de herramientas de análisis complejo como las transformaciones de Möbius y los productos de Blaschke, se exponen ciertas generalizaciones de resultados vistos en el capítulo inicial y finalmente se da una demostración del caso real del porismo debida a Jacobi.

3. Nociones básicas de geometría proyectiva.

Un curso de geometría proyectiva no es obligatorio en la licenciatura en matemáticas que se imparte actualmente en nuestra Universidad, de manera que incluí este capítulo que junto con el siguiente cubren el material necesario referente a geometría proyectiva para entender la versión compleja del porismo de Poncelet de Griffiths y Harris que me interesa para poder resolver los problemas que se plantean en la introducción. Se revisan conceptos básicos como el plano proyectivo, el plano afín, el principio de dualidad, transformaciones proyectivas y curvas algebraicas.

4. Las cónicas.

Una vez introducido el espacio en que se trabajará, se exponen las curvas que aparecen en la versión compleja del porismo de Poncelet; las cónicas proyectivas complejas, se estudian sus duales, sus intersecciones con rectas y con otras cónicas y al final del capítulo se presenta la generalización mencionada del resultado de Poncelet, misma en que aparece de manera natural un objeto geométrico hasta aquí desconocido; la variedad de Poncelet.

5. Superficies de Riemann.

La clave para la demostración de Griffiths y Harris de la versión compleja del porismo está en observar que la variedad de Poncelet es una curva elíptica, para comprender este hecho es necesario manejar los conceptos de superficie de Riemann e isomorfismo entre superficies. En este capítulo se expone dicho material además de que se argumenta intuitivamente el por qué la variedad de Poncelet es topológicamente un toro, lo cual lleva al estudio detallado del mismo y finalmente a la demostración del porismo, quedando como detalle pendiente a cubrir en el siguiente capítulo, la exposición precisa de un isomorfismo entre un toro y la variedad de Poncelet.

6. Funciones y curvas elípticas.

El detalle pendiente de la demostración del capítulo anterior se cubre utilizando el concepto de función elíptica, en particular las propiedades de la función \wp de Weierstrass, esta permite dar un mapeo biyectivo y analítico entre un toro y la variedad de Poncelet, mostrando que se trata de un caso particular de una curva elíptica. El estudio de las funciones elípticas permite además caracterizar los puntos de torsión de ciertos toros, lo cual da pie a la demostración de un teorema de Cayley que da una condición necesaria y suficiente para que un par de cónicas complejas satisfaga el porismo de Poncelet, dicho teorema es establecido al final de este capítulo.

7. Polinomios y circunferencias de Poncelet.

El teorema de Cayley resulta difícil de utilizar en la práctica, sin embargo, un estudio un poco más detallado de ciertas funciones elípticas permite dar una versión mejorada para el caso de dos cónicas cuyas partes afines son un par de circunferencias. Dominique Hullin publicó un trabajo en el año 2007 en el cual expone esta versión, definiendo los llamados polinomios de Poncelet; funciones de tres variables que se pueden calcular mediante una recursión sorprendentemente sencilla y dan condiciones necesarias y suficientes para que el par de circunferencias mencionado satisfaga el porismo de Poncelet, ligando con el material expuesto desde el primer capítulo y culminando la obra de Fuss, Euler y Steiner. En este capítulo se exponen estos resultados y se construyen al final ejemplos de circunferencias de Poncelet que hubieran resultado muy difíciles de hallar con las herramientas utilizadas en los primeros dos capítulos de la tesis.

8. El campo de valores de un operador lineal.

La herramienta utilizada para resolver el problema final de construir curvas no-cónicas que cumplen el porismo de Poncelet es el rango numérico o campo de valores de un operador lineal. En este capítulo se expone el material necesario para mostrar la existencia de tales curvas; la definición del rango numérico, los ejemplos más sencillos que ligan su estudio con los objetos geométricos que aparecen en la versión real del porismo, (polígonos y elipses) propiedades básicas del rango; para los casos que nos interesan éste resulta ser un conjunto compacto y convexo del plano. Se muestra también un método para graficar este nuevo ente geométrico.

9. **Curvas de Poncelet.**

En el capítulo final se demuestra la existencia de curvas de Poncelet no-cónicas, éstas resultan ser fronteras de rangos numéricos de ciertos operadores entre espacios vectoriales complejos de dimensión finita con el producto interno usual. Se estudian algunas de sus propiedades y se ilustran ejemplos varios. Este capítulo está basado en la obra de Boris Mirman.

Se realizaron además apéndices que contienen ciertos detalles mencionados en algunos de los capítulos que consideré importantes, pero inconvenientes para mantener la continuidad y fluidez de las ideas del trabajo en caso de incluirlos en el espacio en que son requeridos.

He elaborado una buena cantidad de imágenes con el fin de ilustrar conceptos geométricos interesantes y auxiliar la comprensión de algunas demostraciones, incluí también una lista con los símbolos matemáticos de uso más frecuente en el trabajo, considero al mismo una primera aproximación de una introducción a los temas tratados y no descarto modificarlo en el futuro buscando mejoras, cualquier error es responsabilidad (irresponsabilidad) mía.

Juan Salvador Garza Ledesma

Lista de símbolos utilizados frecuentemente

$\{x \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$.- El conjunto de elementos x que tienen la propiedad P .

$\#(X)$.- El cardinal del conjunto X .

\mathbb{N} .- El conjunto de los números naturales.

\mathbb{Z} .- El conjunto de los números enteros.

\mathbb{Q} .- El conjunto de los números racionales.

\mathbb{R} .- El conjunto de los números reales.

\mathbb{C} .- El conjunto de los números complejos.

\bar{z} .- El conjugado del número complejo z .

$|z|$.- El módulo del número complejo z .

$\arg(z)$.- El argumento del número complejo z .

$\operatorname{Re} z$.- La parte real del número complejo z .

$\operatorname{Im} z$.- La parte imaginaria del número complejo z .

\mathbb{N}^* .- El conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

\mathbb{C}^* .- El conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

\mathbb{R}^+ .- El conjunto de los reales no negativos.

$\widehat{\mathbb{C}}$.- El plano complejo extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

\mathbb{R}^2 , \mathbb{C}^2 , $\widehat{\mathbb{C}}^2$, etc.- El producto cartesiano correspondiente.

\mathbb{P}_1 , \mathbb{P}_2 .- La recta y el plano complejos proyectivos respectivamente.

\mathbb{P}_2^* .- El dual del plano proyectivo complejo.

A_2 .- El plano complejo afín.

\mathbb{D} .- El disco unitario $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

\mathbb{H} .- En el apéndice B: el semiplano superior $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

\mathbb{H} .- En el capítulo 8: un espacio de Hilbert sobre \mathbb{C} cualquiera.

$L_{\mathbb{K}}(X)$.- El conjunto de combinaciones lineales con coeficientes en el campo \mathbb{K} de los elementos del conjunto X .

\vec{e}_j .- El j -ésimo vector de la base canónica del espacio vectorial \mathbb{R}^n ó \mathbb{C}^n .

$\text{Conv}(X)$.- El casco convexo del conjunto X .

$M_{m \times n}(X)$.- El espacio de matrices de m por n con entradas en X .

A^t .- La transpuesta de la matriz A .

A^* .- La adjunta (el adjunto) de la matriz (del operador) A .

$\det A$.- El determinante de la matriz A .

$\text{Rango}(A)$.- El rango de la matriz A .

$A|_X$.- La restricción de la matriz u operador A al subespacio X .

$\sigma(A)$.- El conjunto de valores propios de la matriz u operador A .

$\Omega(A)$.- El rango numérico de la matriz u operador A .

$\omega(A)$.- El radio numérico de la matriz u operador A .

Id .- La matriz identidad del espacio en que se esté trabajando.

Diag($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).- La matriz diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.- El anillo de polinomios en las variables x_1, x_2, \dots, x_n con coeficientes en el campo \mathbb{K} .

$gr(p)$.- El grado del polinomio p .

$ord(p)$.- El orden del polinomio p .

∂X .- La frontera del conjunto X .

Int X .- El interior del conjunto X .

Ext X .- El exterior del conjunto X .

\bar{X} .- La cerradura del conjunto X .

$f^{\circ n}$.- La función f compuesta n veces con si misma.

$[A, B]$.- El segmento de recta que une los puntos A y B .

\widehat{xy} .- Un arco de circunferencia que une los puntos x y y .

$\angle A$.- El ángulo A .

$\angle ABC$.- El ángulo dirigido definido por los puntos A , B y C .

$\triangle ABC$.- El triángulo de vértices A , B , C .

$\mathcal{P}(P_1, P_2, \dots, P_n)$.- El polígono formado por los segmentos $[P_j, P_{j+1}]$, $1 \leq j \leq n$, con $P_{n+1} := P_1$.

$\ell(A, B)$.- La recta del plano euclideo que pasa por los puntos A y B .

$I_p(C, D)$.- El número o multiplicidad de intersección de las curvas C y D en el punto p .

$C \odot D$.- El conjunto de pares (p_i, m_i) , $1 \leq i \leq k$, donde los p_i y m_i son los puntos intersección y multiplicidades correspondientes de intersección de las curvas C y D .

\wp .- La función elíptica de Weierstrass.

$\text{div}(f)$.- El divisor de la función elíptica f .

Parte I

El plano euclideo

Guía para la parte I

Las subsecciones de cada capítulo están nombradas de manera que no haya confusión acerca de dónde se encuentra cada resultado o definición citado a continuación, para más detalle consúltese el índice general.

Los cursos básicos que suelen cubrirse en una licenciatura en matemáticas son suficientes para comprender esta parte de la tesis, se sugiere leer ambos capítulos en el orden presentado.

Capítulo 1

Objetivo. Presentar una introducción general de la tesis; formular la versión real del porismo de Poncelet y definir curva de Poncelet.

Material expuesto.

1. Triángulos inscritos y circunscritos; la fórmula de Chaple-Euler.
2. Cuadriláteros bicéntricos; el problema de Fuss.
3. Formulación del porismo de Poncelet para circunferencias.
4. Plan de trabajo para el resto de capítulos.
 - a) La versión real del porismo de Poncelet.
 - b) La versión compleja.
 - c) Conexión con la teoría de curvas elípticas.
 - d) Generalización de los problemas de Fuss y Steiner.
 - e) Curvas de Poncelet.

Capítulo 2

Objetivo. Formular convenientemente la versión real del porismo de Poncelet y dar una demostración.

Material expuesto.

1. Reformulación del porismo de Poncelet como un problema de dinámica; la transformación de Poncelet.
2. Transformaciones de Möbius complejas.
 - a) Transformaciones que preservan el disco unitario.
 - b) Conexión con el porismo de Poncelet.

3. Productos de Blaschke.
 - a) Un caso especial del porismo de Poncelet para elipses.
 - b) Generalización de la fórmula de Chaple presentada en el primer capítulo.
4. Demostración del porismo de Poncelet para circunferencias (Jacobi).
5. Extensión de la demostración de Jacobi para elipses.
6. Conexión con medidas invariantes y rotaciones en la circunferencia unitaria.

Bibliografía

Este material está basado en los textos de L. Ahlfors [1], P. Colwell [3], J. Garnett [8], A. Lascrain [14] y [15] y T. Needham [18]. Así como en el artículo [4] de Daep, Gorkin y Mortini.

Capítulo 1

Introducción

Un problema clásico que encontramos desde los primeros cursos en geometría euclídea plana es, dado un triángulo, encontrar si es posible, un par de circunferencias tales que:

Contiene una a sus 3 vértices:

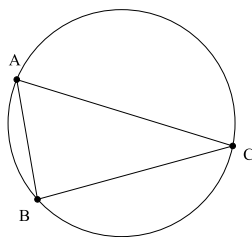


Figura 1.1: Circunferencia circunscrita.

Es tangente la otra a sus 3 lados:

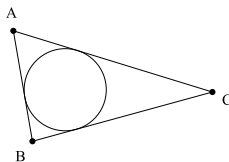


Figura 1.2: Circunferencia inscrita.

Demostramos entonces la concurrencia de las llamadas mediatrices y bisectrices respectivamente del triángulo y vemos que en efecto, siempre existen tales circunferencias y son

únicas.

Si ahora nos preguntamos qué sentido puede tener pensar en un problema inverso al previamente citado, es decir: ¿Dado un par de circunferencias, \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 con $\mathcal{C}_2 \subset \text{Int}(\mathcal{C}_1)$, es posible hallar un triángulo cuyas circunferencias circunscrita e inscrita sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente? Intuitivamente salta a la vista que hay muchos casos donde la respuesta es no, construyamos por ejemplo un hexágono regular junto con sus circunferencias circunscrita e inscrita (concéntricas por supuesto), es claro que en este caso el problema del triángulo enunciado previamente no tiene solución pues por simetría siempre que intentáramos tomar un punto en la circunferencia exterior como vértice y trazáramos tangentes a la circunferencia interior, terminaríamos reproduciendo de nuevo al hexágono regular:

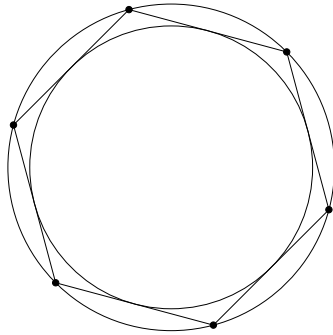


Figura 1.3: Las circunferencias circunscrita e inscrita a un hexágono regular.

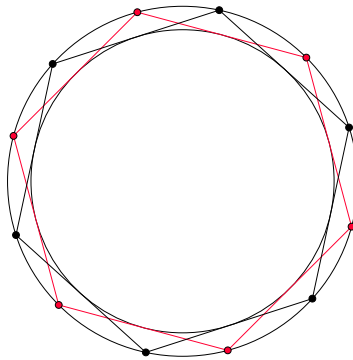


Figura 1.4: La construcción del hexágono puede repetirse para cualquier punto de la circunferencia exterior.

Este es precisamente nuestro primer ejemplo (trivial) de una curva de Poncelet: La circunferencia inscrita al hexágono será llamada una **6-curva de Poncelet** respecto a la circunscrita, pues dado cualquier punto en esta última, existe un polígono de 6 lados con vértice en dicho punto cuyos 6 lados son tangentes a la circunferencia interior y tiene sus 6 vértices en la

exterior, este es claramente el mismo caso para un n -ágono regular en general, $n \geq 3$. Más adelante formalizaremos este concepto, por ahora volvamos a la pregunta original:

Hemos visto que el problema no siempre tiene solución, ¿Qué sucedería ahora si tomáramos el par de circunferencias del triángulo de las figuras 1.1 y 1.2 excluyendo al triángulo?

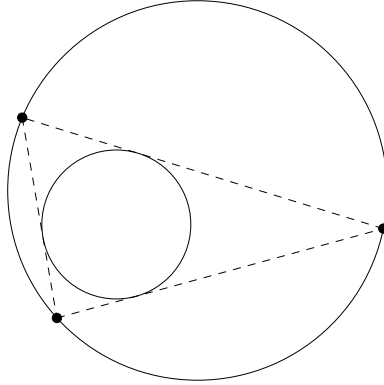


Figura 1.5: Las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo.

Imaginando que tenemos solamente las circunferencias es tan claro que el problema tiene solución si empezamos a trazar tangentes a la circunferencia interior desde uno de los puntos que eran vértice del triángulo original, como que el tener la suerte de, al azar, tomar uno de estos puntos es imposible... y sin embargo uno puede hacer el experimento y asombrarse al descubrir que el problema en este caso también tiene solución sin importar el punto que elijamos como vértice inicial:

Esta sorprendente propiedad es un caso particular del llamado **porismo de Poncelet**.

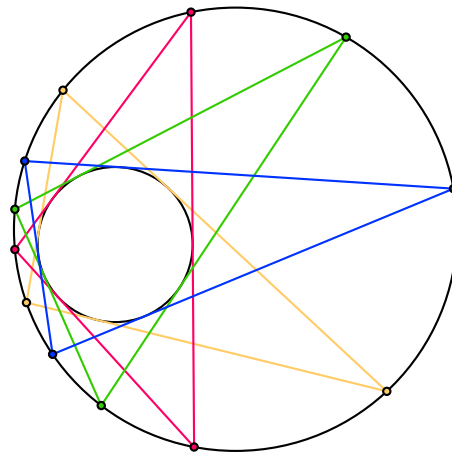


Figura 1.6: ¿Una infinidad de soluciones?.

1.1. La fórmula de Chaple-Euler

En esta sección demostraremos el caso particular que hemos mencionado anteriormente, para ello definamos rápidamente lo que entenderemos por un polígono interinscrito a un par de curvas, denotaremos por $[A, B]$ al segmento de recta que une los puntos A y B y por $\mathcal{P}(P_1, P_2, \dots, P_n)$ al polígono: $\bigcup_{j=1}^n [P_j, P_{j+1}]$ donde $P_{n+1} := P_1$:

Definición 1.1. *Polígonos interinscritos en \mathbb{R}^2 .* Dadas un par de curvas $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ cerradas simples y de clase C^1 con $\Gamma_2 \subset \text{int}(\Gamma_1)$, diremos que el polígono $\mathcal{P}(P_1, P_2, \dots, P_n)$ está interinscrito al par ordenado (Γ_1, Γ_2) si $P_j \in \Gamma_1$ y $[P_j, P_{j+1}]$ es tangente a Γ_2 para $j = 1, 2, \dots, n$

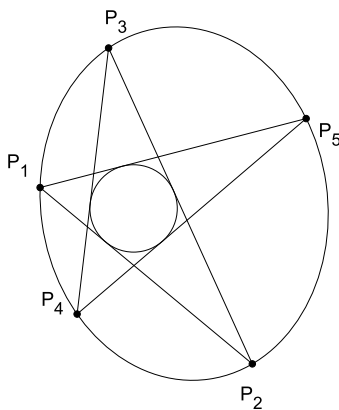


Figura 1.7: Un pentágono interinscrito a un par de curvas.

El descubrimiento de Poncelet fue el siguiente:

Teorema 1.1. De Poncelet para circunferencias y triángulos. *Si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son un par de circunferencias con \mathcal{C}_2 en el interior de \mathcal{C}_1 para las cuales existe un triángulo interinscrito a $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$; entonces hay una infinidad de tales triángulos, uno de cuyos vértices puede ser elegido arbitrariamente en \mathcal{C}_1 .*

Este resultado dice que el que sea posible dibujar triángulos interinscritos a un par de circunferencias es una propiedad que depende únicamente de la posición relativa de las mismas, no del punto que elijamos como vértice para comenzar a trazar la figura. Dado que dicha posición depende exclusivamente de tres parámetros; los radios y la distancia entre los centros, debe existir una condición necesaria y suficiente que los relacione para que existan

triángulos interinscritos.

La relación buscada fue encontrada originalmente por Chaple aunque se le conoce casi siempre como una fórmula más de Euler por ser el primer matemático en publicar una prueba. A continuación deduciremos esta relación y veremos que es suficiente para poder trazar triángulos interinscritos eligiendo arbitrariamente uno de sus vértices, probando así el teorema anterior. Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita respectivamente del triángulo $\triangle ABC$, con centros en los puntos O e I y d la distancia entre estos puntos:

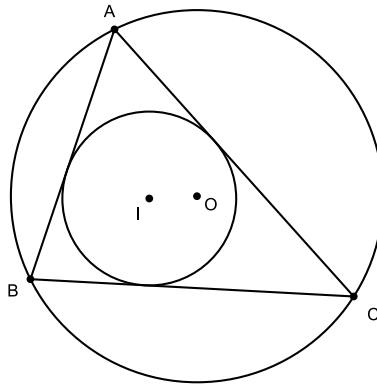


Figura 1.8: Triángulo inicial

Auxiliariamente prolonguemos $[A, I]$ hasta tocar de nuevo al circuncírculo en J y a $[O, J]$ y $[O, I]$ para obtener los dos diámetros $[J, K]$ y $[P, Q]$ respectivamente, finalmente S es el punto de tangencia de $[A, B]$ con el incírculo:

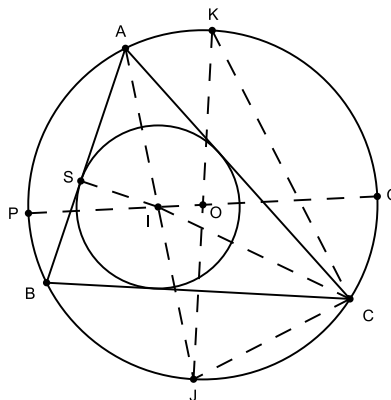


Figura 1.9: Construcciones auxiliares

Nota: Escribiremos $[A, B]$ indistintamente para denotar al segmento o a su longitud, quedando siempre claro a qué nos referimos por el contexto

Ahora, siendo $[A, J]$ y $[P, Q]$ dos cuerdas con un punto en común I tenemos:

$$[A, I] \cdot [I, J] = [P, I] \cdot [I, Q] \iff [A, I] \cdot [I, J] = (R - d)(R + d) \quad (1.1)$$

Por ser S punto de tangencia $\angle ASI = \frac{\pi}{2}$, el ángulo $\angle JCK$ también es recto al ser opuesto a un diámetro. $\angle IAS = \angle CAJ$ por ser $[A, I]$ bisectriz de $\angle A$ y $\angle CAJ = \angle CKJ$ por subtender ambos la misma cuerda, así pues $\triangle ASI \sim \triangle KJC$, de donde:

$$\frac{[I, A]}{[S, I]} = \frac{[K, J]}{[J, C]} \iff [S, I] \cdot [K, J] = [I, A] \cdot [J, C] \iff 2Rr = [I, A] \cdot [J, C] \quad (1.2)$$

Por último, siendo $\angle CIJ$ externo al triángulo $\triangle AIC$: $\angle CIJ = \frac{\angle A + \angle C}{2}$
Y $\angle JCI = \angle JCB + \angle BCI = \angle JCB + \frac{\angle C}{2}$ pero $\angle JCB = \frac{\angle A}{2}$ por subtender la misma cuerda, por lo que $\frac{\angle A + \angle C}{2} = \angle JCI = \angle CIJ$, es decir, el triángulo $\triangle IJC$ es isósceles, por lo tanto:

$$[I, J] = [J, C] \quad (1.3)$$

Sustituyendo 1.3 en 1.2 y luego en 1.1 se obtiene finalmente el siguiente:

Resultado 1.1. Fórmula de Chaple-Euler. Si $\mathcal{C}_R, \mathcal{C}_r$ son circunferencias con radios R y r respectivamente, $\mathcal{C}_r \subset \text{Int}(\mathcal{C}_R)$ ($r < R$) y distancia entre sus centros $d \geq 0$ tales que $(\mathcal{C}_R, \mathcal{C}_r)$ admite un triángulo interinscrito, entonces:

$$2Rr = R^2 - d^2 \quad (1.4)$$

Como comentamos anteriormente, debe bastar tomar un par de circunferencias como las del resultado 1.1 para garantizar que si tomamos cualquier punto en \mathcal{C}_R y trazamos desde el dos cuerdas tangentes a \mathcal{C}_r los extremos de las mismas que no son el punto del que comenzamos deben ser extremos también de una tercera cuerda tangente a \mathcal{C}_r .

Tomemos pues un punto A' distinto a A en la misma circunferencia y tracemos las dos tangentes a la circunferencia de radio r $[A', B']$ y $[A', C']$. De nuevo prolongamos $[A', I]$ hasta tocar de nuevo a la circunferencia exterior en J' y luego $[J', O']$ hasta el punto K' ; S' es el punto de tangencia de $[A', B']$ con la circunferencia interior:

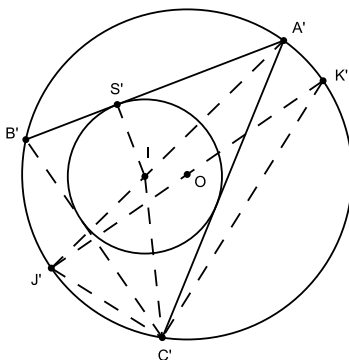


Figura 1.10: Trazando un nuevo triángulo

De la misma manera en que probamos la fórmula de Chaple-Euler se deduce que $[A', I] \cdot [I, J'] = R^2 - d^2$ pero esta vez sabemos que $R^2 - d^2 = 2Rr$ luego

$$[A', I] \cdot [I, J'] = 2Rr \quad (1.5)$$

Obsérvese ahora que $\Delta A'S'I$ sigue siendo semejante a $\Delta K'J'C'$ y de aquí se obtiene

$$[A', I] \cdot [J', C'] = 2Rr \quad (1.6)$$

así, por 1.5 el triángulo $\Delta IJ'C'$ es de nuevo isósceles y como $\angle C'IJ' = \frac{\angle A'}{2} + \angle A'C'I$ y $\angle J'C'B' = \angle J'A'B' = \frac{\angle A'}{2}$ se debe tener $\angle B'C'I = \angle A'C'I$ lo cual fuerza a que, en efecto, I sea el incentro de $\Delta A'B'C'$, $[B', C']$ es tangente a la circunferencia de radio r . Hemos probado el Teorema 1.1.

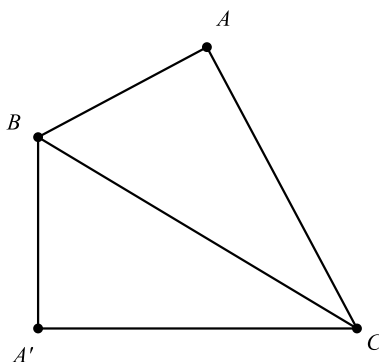
En la siguiente sección veremos cómo es posible extender lo que hemos visto hasta ahora para el caso de cuadriláteros.

1.2. Cuadriláteros bicéntricos

A diferencia de los triángulos, los cuadriláteros convexos no suelen estudiarse con tanta profundidad en los cursos de geometría plana básica, por lo que antes de hablar formalmente del problema que nos interesa ahora, veremos un ejemplo.

En un cuadrilátero convexo no siempre es posible trazar una circunferencia inscrita ni circunscrita, se intuye entonces que el hecho de que existan ambas simultáneamente es aun más excepcional. Por supuesto un caso inmediato se tiene al considerar cualquier cuadrado, sin embargo, existen muchos otros casos no triviales como el que mostraremos a continuación con el fin de motivar la discusión general que haremos posteriormente.

Tómese $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo no isósceles y su reflejado $\triangle BA'C$ respecto a la hipotenusa $[B, C]$:



Por construcción $\angle CAB + \angle BA'C = \pi$, por lo que el cuadrilátero resultante $ABA'C$ es cíclico.

Si se intersecan ahora la diagonal $[B, C]$ y la bisectriz del ángulo $\angle CAB$ se obtiene un punto O que por definición de bisectriz equidista de los lados $[A, B]$ y $[C, A]$; lo mismo sucede con $[B, A']$ y $[A', C]$ por la simetría de la construcción, por lo tanto el punto O es centro de una circunferencia que es tangente a los cuatro lados del cuadrilátero.

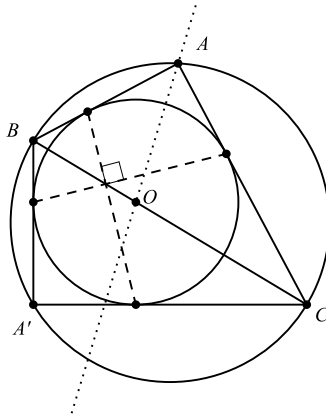


Figura 1.11: Un cuadrilátero bicéntrico

Es claro que las sumas de las longitudes de lados opuestos del cuadrilátero que acabamos de construir coinciden entre sí, puede observarse además que las cuerdas que unen puntos opuestos de tangencia con la circunferencia inscrita son perpendiculares. Es fácil probar que estas propiedades son ciertas para cualquier cuadrilátero cíclico que admita además una circunferencia inscrita, este tipo de cuadriláteros son llamados **bicéntricos**.

Al tener un ejemplo no trivial de un cuadrilátero bicéntrico, discutiremos ciertas propiedades de los mismos a fin de investigar si al igual que en el caso de triángulos, puede darse una condición necesaria y suficiente para su existencia en términos de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y la distancia entre sus centros y más aún, probar que se cumple también en este caso un teorema análogo al 1.1, una vez construido un cuadrilátero bicéntrico, puede elegirse un punto arbitrariamente en la circunferencia que contiene a sus vértices y trazar sucesivamente cuerdas tangentes a la otra circunferencia hasta obtener uno nuevo.

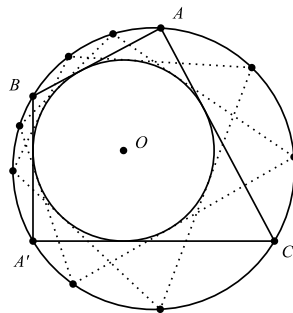


Figura 1.12: Un porismo de Poncelet

1.2.1. El Problema de Fuss

Antes de que Poncelet enunciara su resultado, en 1792 Fuss estudiaba la relación entre los radios y la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrilátero bicéntrico. Aquí encontraremos dicha relación siguiendo la idea de Fuss, posteriormente daremos una prueba distinta muy sencilla similar a la de la igualdad de Chaple-Euler y finalmente mostraremos una forma interesante de verificar también en este caso el porismo de Poncelet. Empecemos por observar una característica de los cuadriláteros bicéntricos:

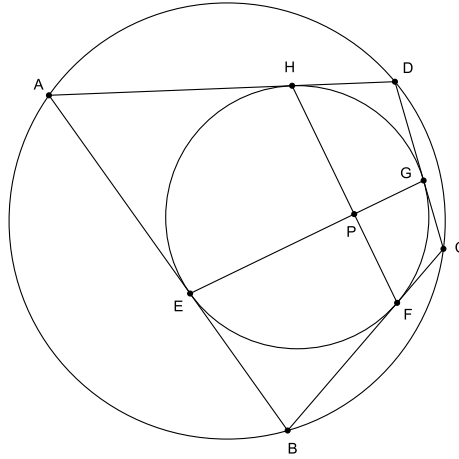


Figura 1.13: Cuadrilátero bicéntrico

En la figura 1.13 las cuerdas $[E, G]$ y $[H, F]$ unen los puntos de tangencia de la circunferencia con el cuadrilátero, formando así ángulos iguales en sus extremos; $\angle DHP = \angle PFC$, $\angle AEP = \angle PGD$, etc. En los cuadriláteros formados por los puntos $AEPH$ y $PFCG$ $\angle A + \angle C = \pi$ por ser $ABCD$ cíclico tenemos entonces sumando los ángulos interiores de ambos:

$$4\pi = \pi + 2\angle EPH + \angle AEP + \angle CGP + \angle PFC + \angle PHA \quad (1.7)$$

$$\iff 4\pi = \pi + 2\angle EPH + \angle AEP + \angle PEB + \angle DHP + \angle PHA \quad (1.8)$$

$$\implies 4\pi = 3\pi + 2\angle EPH \quad (1.9)$$

$$\implies \frac{\pi}{2} = \angle EPH = \angle FPE = \angle GPF = \angle HPG \quad (1.10)$$

Es decir, las cuerdas son ortogonales, de forma similar se puede probar que si en un cuadrilátero es posible inscribir una circunferencia y las cuerdas que unen puntos de tangencia de lados

opuestos son ortogonales, los ángulos de los vértices opuestos del cuadrilátero suman π y éste es por lo tanto bicéntrico.

En vista de lo anterior, Fuss se planteó el siguiente problema:

Dado un punto P dentro de un círculo con centro en I y radio r , hallar el lugar geométrico de la intersección de las tangentes a la circunferencia en los puntos X, Y donde $\angle XPY = \frac{\pi}{2}$. La idea es probar que si ciertos parámetros están ligados por una ecuación análoga a la que hallamos en la sección anterior para triángulos, dicho lugar es una circunferencia fija.

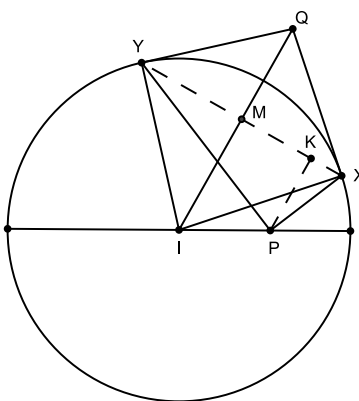


Figura 1.14: Calculando un lugar geométrico

Sean Q la intersección de las tangentes, $[I, P] = c$, $[I, Q] = x$ y $\angle PIQ = \theta$.

Queremos primero hallar una relación entre x y θ :

Sea M el punto medio de $[X, Y]$. Obsérvese que $\triangle QIX$ es rectángulo con $[M, X]$ la altura sobre su hipotenusa, luego $[I, M] \cdot [I, Q] = [I, X]^2$ o bien:

$$[I, M] = \frac{r^2}{x} \quad (1.11)$$

Véase ahora que $[P, K] = [I, M] - c \cos \theta = \frac{r^2}{x} - c \cos \theta$, $[K, X] = [M, X] - [M, K] = [M, X] - c \sin \theta$ y $[Y, K] = [M, X] + c \sin \theta$

Estas 3 cantidades están relacionadas por ser $\triangle YPX$ un triángulo rectángulo y $[P, K] \perp [X, Y]$ mediante

$$[P, K]^2 = [K, X] \cdot [Y, K] \quad (1.12)$$

Sustituyendo tenemos

$$\left(\frac{r^2}{x} - c \cos \theta\right)^2 = ([M, X] - c \sin \theta)([M, X] + c \sin \theta) = [M, X]^2 - c^2 \sin^2 \theta \quad (1.13)$$

y notando que $\triangle MIX$ es también rectángulo por Pitágoras $[M, X]^2 = [I, X]^2 - [I, M]^2 = r^2 - \frac{r^4}{x^2}$, lo cual finalmente da la relación buscada:

$$\left(\frac{r^2}{x} - c \cos \theta\right)^2 = r^2 - \frac{r^4}{x^2} - c^2 \sin^2 \theta \quad (1.14)$$

la cual puede reescribirse como

$$\frac{2r^4}{r^2 - c^2} = 2x \cdot \frac{cr^2}{r^2 - c^2} \cdot \cos \theta + x^2. \quad (1.15)$$

En esta última ecuación x y θ son variables que dependen del punto Q mientras que c y r son fijas una vez escogidas la circunferencia y el punto dentro de la misma.

Ahora tomemos un punto O dentro del diámetro de la circunferencia que pasa por P a la izquierda del centro I en la misma figura:

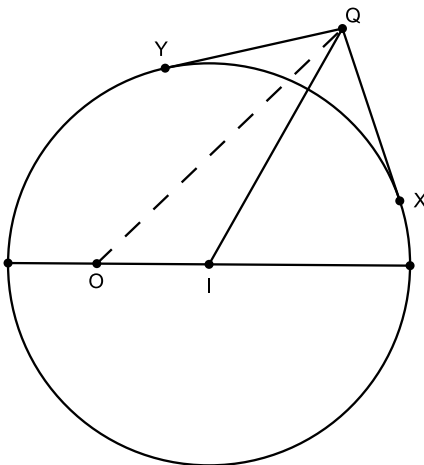


Figura 1.15: Construyendo el círculo que circunscribe a los cuadriláteros

Sea d la distancia entre I y el nuevo punto O . Aplicando la ley de los cosenos a $\triangle QOI$ se tiene

$$[O, Q]^2 = d^2 + x^2 + 2xd \cos \theta \quad (1.16)$$

Comparando 1.15 y 1.16 Fuss observó que si se coloca O a una distancia $d = \frac{cr^2}{r^2 - c^2}$ de I entonces

$$[O, Q]^2 = \left(\frac{cr^2}{r^2 - c^2}\right)^2 + x^2 + 2x \cdot \frac{cr^2}{r^2 - c^2} \cdot \cos \theta \quad (1.17)$$

que por 1.15 se simplifica a

$$[O, Q]^2 = \frac{r^4(2r^2 - c^2)}{(r^2 - c^2)^2} \quad (1.18)$$

Se ha resuelto entonces el problema del lugar geométrico que describe el punto Q , es posible hallar un punto O cuya distancia a Q permanece constante una vez fijos el radio de la circunferencia inicial y el punto P en su interior. Q describe una circunferencia de centro en O y radio

$$R^2 = \frac{r^4(2r^2 - c^2)}{(r^2 - c^2)^2}. \quad (1.19)$$

Elevando al cuadrado $d^2 = \frac{c^2 r^4}{(r^2 - c^2)^2}$ y restando miembro a miembro con 1.19 se tiene

$$R^2 - d^2 = \frac{2r^4}{r^2 - c^2} \quad (1.20)$$

Por otro lado sumando resulta

$$R^2 + d^2 = \frac{2r^6}{(r^2 - c^2)^2} \quad (1.21)$$

y finalmente dividiendo 1.21 miembro a miembro entre el cuadrado de 1.20 podemos eliminar c para hallar la análoga a la fórmula de Chaple-Euler para cuadriláteros:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2} \quad (1.22)$$

Resumiremos lo discutido previamente de esta forma:

Si dadas dos circunferencias \mathcal{C}_R y \mathcal{C}_r de radios R y r respectivamente con \mathcal{C}_r en el interior de \mathcal{C}_R tomamos un punto $P_1 \in \mathcal{C}_R$, trazamos una cuerda tangente a \mathcal{C}_r que la interseca en su otro extremo P_2 , repetimos el proceso desde P_2 y así sucesivamente hasta volver a P_1 después de haber trazado 4 cuerdas (obteniendo un cuadrilátero interinscrito al par $(\mathcal{C}_R, \mathcal{C}_r)$), entonces la distancia d entre sus centros satisface la ecuación

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} \quad (1.23)$$

(solución al problema de Fuss) y el proceso de obtener un cuadrilátero de tal característica puede realizarse sin importar la elección del punto $P_1 \in \mathcal{C}_R$.

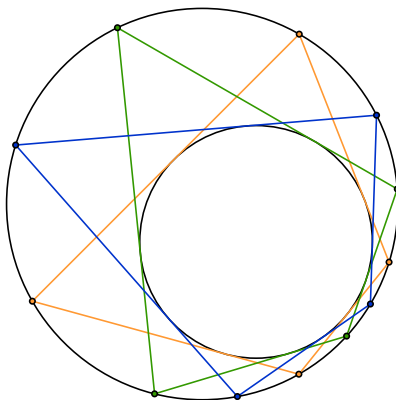


Figura 1.16: El porismo de Poncelet para circunferencias y cuadriláteros

Naturalmente, con el paso del tiempo se fueron descubriendo formas más sencillas de resolver el problema de Fuss, hemos presentado la anterior además de por ser interesante el método de la descripción del lugar geométrico, por seguir la idea original. Antes de formalizar las ideas ilustradas en esta introducción mencionaremos una solución alternativa.

Según la ecuación 1.11:

$$[I, M] \cdot [I, Q] = r^2 \quad (1.24)$$

(ver figura 1.14), esto es, los puntos Q y M son inversos respecto a la circunferencia. Mientras que P permanece fijo y movemos X y Y en la circunferencia de forma que el ángulo $\angle YPX$ permanezca recto, el punto Q describirá el inverso del lugar geométrico que describa M , quien es punto medio del segmento $[X, Y]$.

Si colocamos un sistema coordenado X_1X_2 con centro en P cuyos ejes contengan a los segmentos ortogonales $[Y, P]$ y $[P, X]$ la circunferencia siempre puede ser descrita por una ecuación de la forma $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$ donde (a, b) son las coordenadas del centro I :

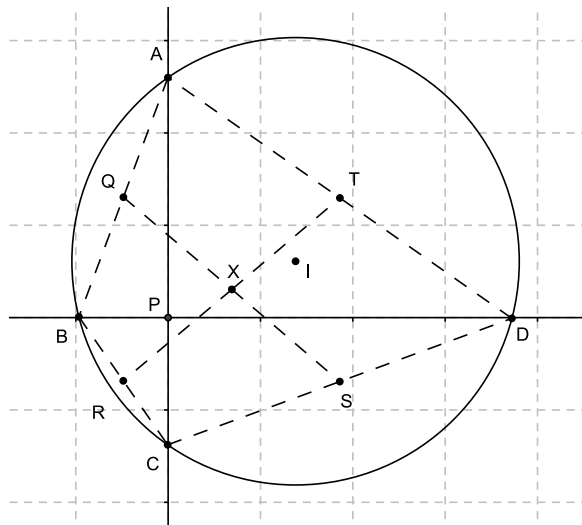


Figura 1.17: Dando coordenadas a la figura original del problema de Fuss

El cuadrilátero $ABCD$ se forma de las intersecciones de los ejes con la circunferencia, estamos interesados en saber si existe alguna relación entre los puntos medios de los lados de esta figura; Q, R, S y T con parámetros que no dependan de la elección del sistema ortogonal de referencia, es decir, que dependan solamente de la distancia del centro I al origen P a la cual denotamos previamente como c que en este caso tiene el valor $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Y en efecto, las coordenadas de A, B, C y D pueden obtenerse haciendo $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ en $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$ y son:

- $A: (0, b + \sqrt{r^2 - a^2})$
- $B: (a - \sqrt{r^2 - b^2}, 0)$
- $C: (0, b - \sqrt{r^2 - a^2})$
- $D: (a + \sqrt{r^2 - b^2}, 0)$

calculando los puntos medios correspondientes obtenemos las coordenadas de Q, R, S y T :

- $Q: \frac{1}{2}(a - \sqrt{r^2 - b^2}, b + \sqrt{r^2 - a^2})$
- $R: \frac{1}{2}(a - \sqrt{r^2 - b^2}, b - \sqrt{r^2 - a^2})$
- $S: \frac{1}{2}(a + \sqrt{r^2 - b^2}, b - \sqrt{r^2 - a^2})$
- $T: \frac{1}{2}(a + \sqrt{r^2 - b^2}, b + \sqrt{r^2 - a^2})$

y observamos que $X := \frac{1}{2}(a, b)$, el punto medio de $[P, I]$ equidista un valor $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2r^2 - c^2})$ de los cuatro.

De las observaciones anteriores concluimos que el lugar geométrico que describe el punto M de la figura 1.14 al moverse X y Y (permaneciendo $[Q, Y]$ y $[X, Q]$ tangentes y $\angle YPX$ recto con P fijo) es una circunferencia, de forma que su inverso Q debe trazar otra, la inversa respecto a la circunferencia original, que resulta ser aquella que contiene los vértices de los cuadriláteros bicéntricos:

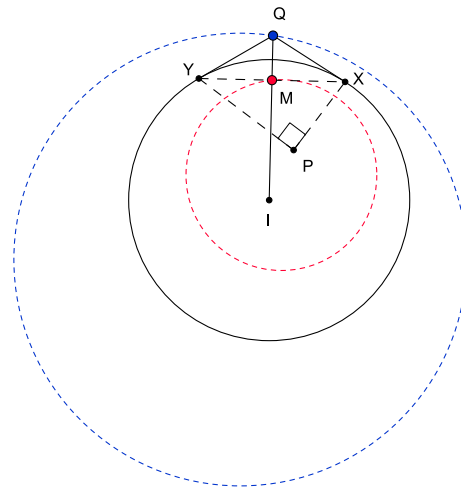


Figura 1.18: Las circunferencias punteadas son inversas respecto a la original con centro en I

De esta forma también es posible llegar a la conclusión de que existe una infinidad de cuadriláteros interinscritos a un par de circunferencias, siempre que exista al menos uno, hemos obtenido también información geométrica adicional interesante.

Otro camino para obtener la ecuación 1.23 que utiliza un par de resultados conocidos de geometría del triángulo y no involucra el cálculo de lugares geométricos es la siguiente:

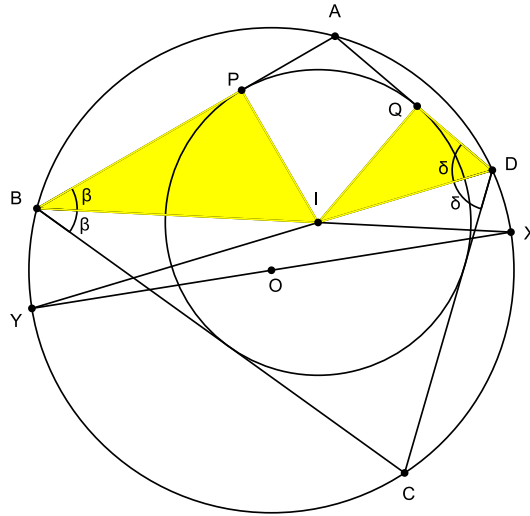


Figura 1.19: Prueba alternativa de la identidad de Fuss

En la figura 1.19 $ABCD$ está interinscrito al par de circunferencias que aparecen, la notación para sus centros y radios es la misma que hemos estado usando así como para la distancia entre sus centros. P y Q son puntos de tangencia y X, Y se obtienen prolongando $[B, I]$ y $[D, I]$ respectivamente hasta intersectar de nuevo a la circunferencia circunscrita.

Tomando la potencia del punto I respecto a la circunferencia de radio mayor primero con las cuerdas $[B, X]$ y $[D, Y]$ tenemos $[B, I] \cdot [I, X] = [D, I] \cdot [I, Y]$ que es igual esta vez tomando la cuerda que pasa por los centros de la circunferencia a $R^2 - d^2$. De $[B, I] \cdot [I, X] = [D, I] \cdot [I, Y] = R^2 - d^2$ se deduce que

$$\frac{1}{[B, I]^2} + \frac{1}{[D, I]^2} = \frac{[I, X]^2 + [I, Y]^2}{(R^2 - d^2)^2} \quad (1.25)$$

al ser I centro de la circunferencia tangente al polígono, $[B, I]$ y $[D, I]$ son bisecan los ángulos de los vértices B y D respectivamente los cuales suman π por tratarse de un cuadrilátero cíclico, luego $\beta + \delta = \frac{\pi}{2}$.

Por otro lado $\angle IPB = \angle BQI = \frac{\pi}{2}$ por formarse uniendo el centro del incírculo con puntos de tangencia en los lados del cuadrilátero correspondientes, esto implica en el triángulo ΔPBI que $\angle BIP + \beta = \frac{\pi}{2}$ por lo que $\angle BIP = \delta$ y análogamente $\angle QID = \beta$ deduciéndose entonces que los triángulos sombreados en la figura son semejantes y comparten un lado de longitud r , el radio del incírculo. Es posible entonces empalmarlos formando el siguiente triángulo rectángulo:

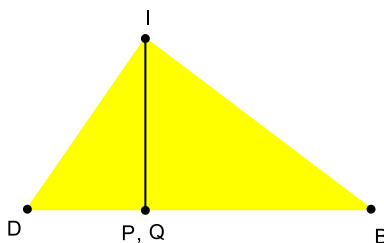


Figura 1.20: El triángulo rectángulo formado con los triángulos semejantes de la figura 1.17

En el cual, al ser $[I, P]$ (o bien $[I, Q]$) una altura de longitud r sobre la hipotenusa se cumple

$$\frac{1}{[B, I]^2} + \frac{1}{[D, I]^2} = \frac{1}{r^2} \quad (1.26)$$

Por último, de vuelta en la figura 1.19, los ángulos $\angle CDY$ junto con $\angle XBC$ subtienden el mismo arco que el ángulo central $\angle XOY$, de donde $\angle XOY = 2(\angle CDY + \angle XBC) = 2(\beta + \delta) = \pi$ y por tanto el centro del circuncírculo, O , es el punto medio del diámetro $[X, Y]$, pudiéndose aplicar entonces el toerema de Apolonio para la mediana $[I, O]$ del triángulo $\triangle IYX$: $[I, X]^2 + [I, Y]^2 = 2[I, O]^2 + \frac{[Y, X]^2}{2}$ que substituyendo los valores de R y d es

$$[I, X]^2 + [I, Y]^2 = 2(R^2 + d^2) \quad (1.27)$$

La ecuación $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$ se obtiene directamente de combinar (1.25), (1.26) y (1.27).

1.3. Generalización del problema y plan del trabajo

De lo expuesto anteriormente surge de manera natural la pregunta, ¿Existirán fórmulas que relacionen los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros de manera que pueda garantizarse la existencia de polígonos interinscritos para cualquier número de lados?. Steiner halló fórmulas análogas a las halladas por Fuss y Euler para $n = 5, 6$:

Número de lados	Fórmula de Steiner
$n = 5$	$r(R - a) = (R + a)[\sqrt{(R - r + a)(R - r - a)} + \sqrt{2R(R - r - a)}]$
$n = 6$	$3(R^2 - a^2)^4 = 4r^2(R^2 + a^2)(R^2 - a^2)^2 + 16r^4 R^2 a^2$

Sus demostraciones sin embargo se desconocen, es de esperarse que para cada una se requiriera una gran capacidad de cálculo y que no fuera posible distinguir una idea general que permitiera descubrir fórmulas para un número arbitrario de lados.

1.3.1. Porismo de Poncelet

Antes incluso de que pudiera resolverse completamente el problema atacado por Steiner, fue posible establecer el llamado porismo de Poncelet:

Teorema 1.2. *Si un par de circunferencias $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ con \mathcal{C}_2 contenida en el interior de \mathcal{C}_1 , admite un polígono de n lados interinscrito ($n \geq 3$), entonces cualquier punto de \mathcal{C}_1 es vértice de otro de estos polígonos.*

El resultado suele ser llamado **porismo** porque habla de la existencia de una infinidad de soluciones de un problema (hallar un polígono interinscrito a un par de circunferencias) siempre que uno pueda encontrar una solución inicial, no dice sin embargo explícitamente cuándo ésta existe.

A pesar de que este resultado fue establecido por el mismo Poncelet, su prueba fue casi de inmediato rechazada por varios matemáticos por considerarla informal y fue Jacobi quien finalmente replanteó el problema en términos analíticos y dio una demostración, que muestra además que si se parametriza \mathcal{C}_1 de manera adecuada, la transformación que mapea cada punto de ésta en el otro extremo de una de las cuerdas tangentes a \mathcal{C}_2 trazada desde él, es derivable y está relacionada naturalmente con una función elíptica.

La idea de Jacobi y los detalles de su demostración son presentados en el capítulo 2.

1.3.2. La versión compleja

El desarrollo de la geometría proyectiva permitió descubrir que el espacio donde naturalmente es válido el porismo de Poncelet es el plano proyectivo complejo. En este espacio

las cónicas siempre tienen 4 puntos de intersección (contando multiplicidad), cuando estos son distintos entre sí se dice que las cónicas están en posición general y se tiene la versión moderna del teorema 1.2:

Teorema 1.3. *Si un par de cónicas (C_1, C_2) en el plano proyectivo complejo están en posición general y admiten un polígono interinscrito de n lados ($n \geq 3$), entonces cualquier punto de C_1 es vértice de otro de estos polígonos.*

Por supuesto es necesario definir qué se entiende por polígono interinscrito en este caso así como extender y estudiar el concepto de cónica. Esto es expuesto en los capítulos 3 y 4.

1.3.3. Conexión con la teoría de curvas elípticas

Una vez introducidas las cónicas proyectivas complejas, surge de manera natural una variedad asociada a un par de ellas que consiste a grandes rasgos en todos los posibles polígonos interinscritos al par. Esta variedad por supuesto no es una cónica ni ninguno de los objetos estudiados en los capítulos 3 y 4. Es sin embargo una curva algebraica y la demostración del teorema 1.3 requiere del conocimiento de sus propiedades, de manera que es necesario introducir el concepto de superficie de Riemann (capítulo 5) para descubrir que esta variedad resulta ser una curva elíptica compleja, cuando las cónicas están en posición general.

En el capítulo 6 presentamos el material necesario para manejar el tipo de curva elíptica que nos interesa y que permite además comprender a detalle la prueba moderna del porismo de Poncelet.

1.3.4. De vuelta al problema de Fuss y Steiner

Una curva elíptica compleja es una variedad isomorfa como superficie de Riemann a un toro, pueden asociarse a sus puntos de manera natural una estructura de grupo abeliano y una parametrización utilizando la función elíptica \wp de Weierstrass, lo cual generaliza en cierto modo lo descubierto por Jacobi.

Al considerar la parametrización antes mencionada, puede verse que la existencia de polígonos interinscritos a cónicas está relacionada con ceros y polos de funciones elípticas

construidas a partir de la función \wp . Recientemente, Dominique Hullin [12] descubrió relaciones recursivas entre tales funciones que permiten en última instancia resolver de manera sencilla el problema de Steiner y por lo tanto, construir fácilmente una infinidad de ejemplos de circunferencias que cumplen el porismo de Poncelet para polígonos con cualquier número de lados.

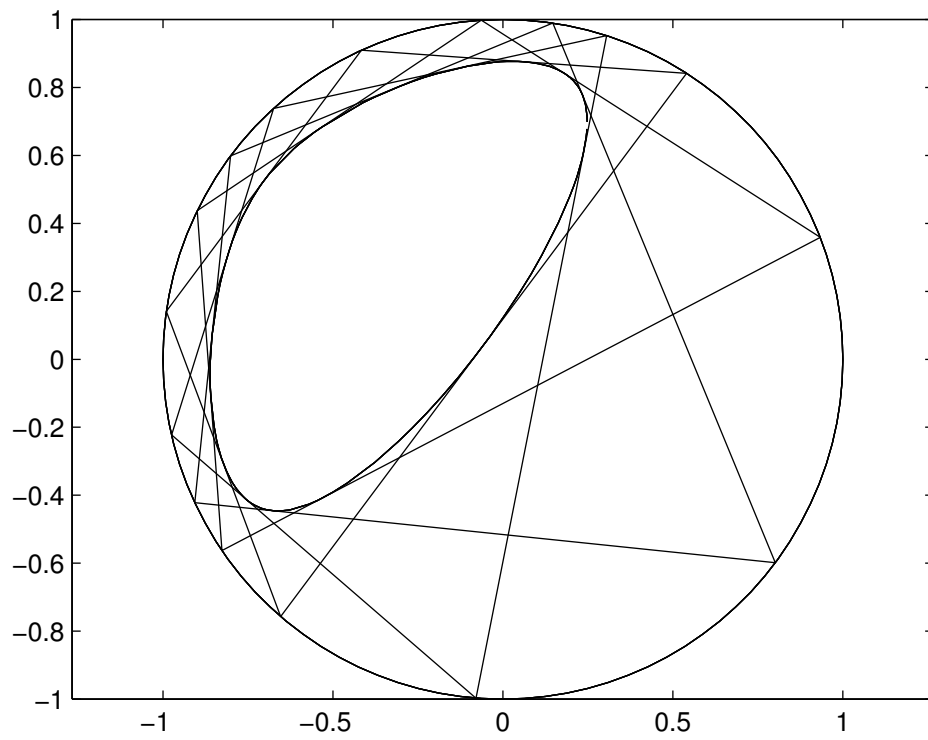
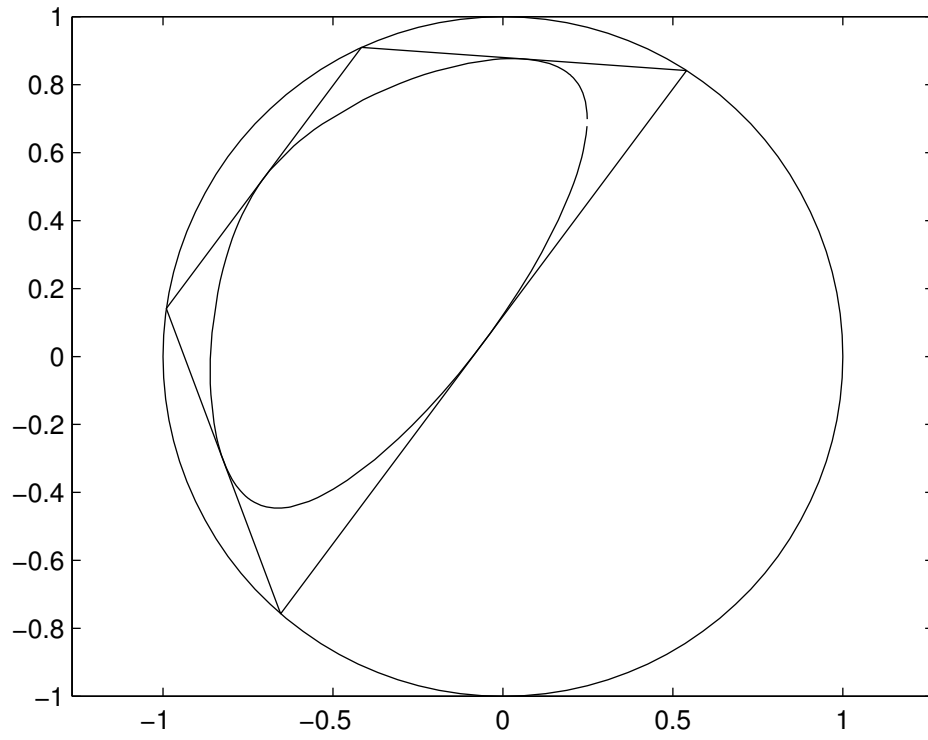
Más allá del valor histórico que tiene la versión moderna del porismo de Poncelet, los capítulos 3 al 6 son presentados para comprender el capítulo 7, en el que damos una introducción al trabajo de Dominique.

1.3.5. Curvas de Poncelet

Teniendo resuelto en las partes previas de la tesis el problema de determinar las cónicas que satisfacen el porismo de Poncelet, una generalización natural se presenta en la siguiente definición:

Definición 1.2. *De n -curva de Poncelet en \mathbb{R}^2* Sea (Γ_1, Γ_2) un par de curvas como en la definición 1.1. Γ_2 es una **n -curva de Poncelet** respecto a Γ_1 ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) si, siempre que exista un polígono de n lados interinscrito a (Γ_1, Γ_2) , puede garantizarse que existe otro de tales polígonos con uno de sus vértices elegido arbitrariamente en Γ_1 .

En la parte final del trabajo se introduce un objeto matemático conocido como **rango numérico** de una matriz cuadrada con coeficientes complejos. El rango numérico resulta ser un subconjunto compacto y convexo del plano complejo \mathbb{C} y para ciertas matrices de $(n-1) \times (n-1)$ es posible mostrar que su frontera es una n -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria; en general dicha curva no es una sección cónica y su construcción es sorprendentemente sencilla, en las siguientes imágenes se muestra un ejemplo con $n = 4$.



Capítulo 2

El porismo de Poncelet en \mathbb{R}^2

El objetivo de este capítulo es acercarnos a las ideas que sostienen la versión moderna del porismo de Poncelet que revisaremos en los capítulos siguientes.

¿Cómo podría replantearse el Teorema 1.2 de manera que sea más entendible el por qué Poncelet habla de la existencia de una infinidad de polígonos interinscritos en caso de haber uno, sin decir al menos si dichos polígonos para empezar existen en casos no triviales?.

Tomemos para empezar un par de circunferencias $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ con $\mathcal{C}_2 \subset \text{Int}(\mathcal{C}_1)$. Dado cualquier punto $p_0 \in \mathcal{C}_1$ existen dos posibles rectas tangentes a \mathcal{C}_2 que lo contienen y que intersecan de nuevo a \mathcal{C}_1 en otro punto. Pensemos que las circunferencias como curvas orientadas en sentido contrario a las manecillas del reloj para dar sentido al decir que de esas dos tangentes, una asocia a p_0 un punto más cercano al que asociaría la otra, siendo por supuesto dichos puntos los extremos de las cuerdas tangentes que se forman:

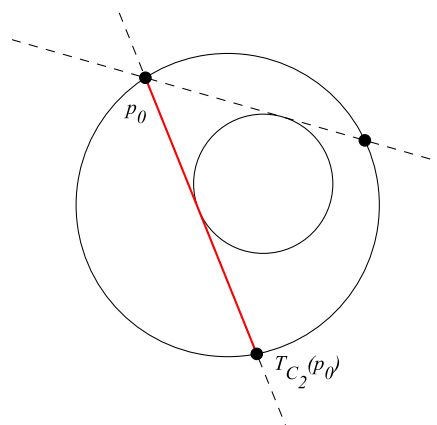


Figura 2.1: La transformación de Poncelet

La función definida de esta forma $T_{\mathcal{C}_2} : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$, que depende de cuál sea la circunferencia a la que trazamos tangentes desde el dominio, es llamada la *transformación de Poncelet de \mathcal{C}_1 respecto a \mathcal{C}_2* , claramente se trata de una biyección, más aún, después calcularemos explícitamente cómo varía $T_{\mathcal{C}_2}(p)$ en función de p concluyendo que es incluso un homeomorfismo.

En estos términos, podemos hablar de los vértices de un posible polígono interinscrito a $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ como iteraciones de $T_{\mathcal{C}_2}$ aplicadas a un punto inicial $p_0 \in \mathcal{C}_1$, denotaremos por $T_{\mathcal{C}_2}^n$ a $\underbrace{T_{\mathcal{C}_2} \circ T_{\mathcal{C}_2} \circ \cdots \circ T_{\mathcal{C}_2}}_{n\text{-veces}}$ y $p_n := T_{\mathcal{C}_2}^n(p_0)$:

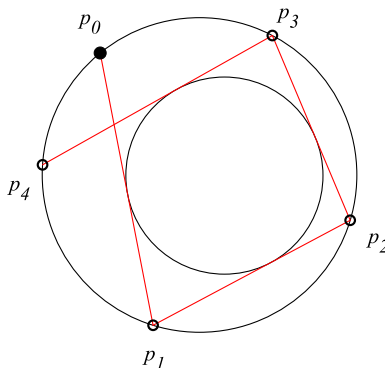


Figura 2.2: Iteración de la transformación $T_{\mathcal{C}_2}$

Para replantear el Teorema 1.2 diciendo que si existe $p_0 \in \mathcal{C}_1$ tal que $p_0 = p_n$ para algún natural $n \geq 3$ entonces $q_0 = q_n$ para cualquier otro $q_0 \in \mathcal{C}_1$. Dicho de otra forma, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ y $p_0 \in \mathcal{C}_1$ son tales que p_0 es un punto fijo de $T_{\mathcal{C}_2}^n$, entonces $T_{\mathcal{C}_2}^n$ es la identidad en \mathcal{C}_1 .

Es entonces que surge la idea de Poncelet, misma que fue retomada por Jacobi y posteriormente Cayley y varios otros matemáticos para dar cada uno sus demostraciones del porismo: Eurísticamente, si se representan las figuras adecuadamente, $T_{\mathcal{C}_2}^n$ puede ser vista como una función conocida previamente y tal que la existencia de ciertos puntos fijos, fuerza a que se trate de la identidad.

Claramente la construcción anterior puede extenderse al caso en que alguna o ambas circunferencias son reemplazadas por elipses. De hecho podría sólo probarse el porismo de Poncelet para una circunferencia y una elipse dentro de ella, pues en caso de tratarse de

dos elipses siempre es posible aplicar un cambio de escala (una transformación lineal biyectiva) que transforme la elipse mayor en una circunferencia y mapee rectas tangentes a la cónica interior en rectas tangentes a su imagen, que será en general una nueva elipse:

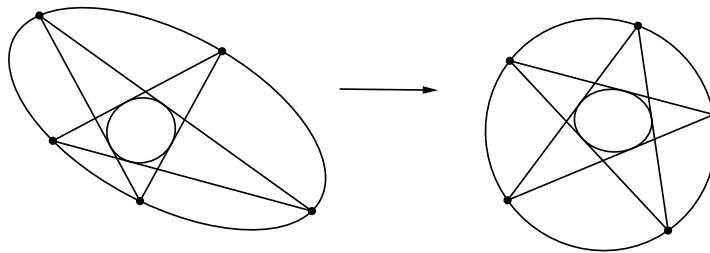


Figura 2.3: Podemos suponer que la elipse en que están inscritos los polígonos es una circunferencia

¿A qué nos referimos con representar las figuras adecuadamente?. Tenemos dos formas principales de trabajar con el plano euclideo de forma analítica:

- Asociando a cada punto un vector en \mathbb{R}^2 los cuales representaremos con letras en la forma $\vec{x}, \vec{p}, \vec{z}$, etc. o en términos de sus coordenadas ya sea como vectores renglón (x, y) o columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Asociando un número complejo $z \in \mathbb{C}$ mismos a los que también nos referiremos en términos de sus partes real e imaginaria; $z = x + iy$, $\text{Re}(z)=x$, $\text{Im}(z)=y$. Por motivos técnicos habrá que considerar más adelante al plano complejo extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ al cual denotaremos por $\widehat{\mathbb{C}}$

Mismas que nos permiten utilizar herramientas poderosas relacionadas con las funciones involucradas en cada caso para tratar las circunferencias, rectas tangentes, etc. y nos llevarán a mostrar nuevos vínculos entre ellas, motivados por las curvas de Poncelet. Comenzaremos entonces a citar estas herramientas, comunmente estudiadas en los cursos básicos de Cálculo y Variable Compleja.

2.1. Las transformaciones de Möbius complejas

Pasemos primero a revisar problemas similares a los tratados en la introducción, pero identificando el plano con puntos en el campo de los números complejos, es en este campo y más aún en $\widehat{\mathbb{C}}$ donde actúan de forma natural las llamadas transformaciones de Möbius complejas.

Estas funciones también llamadas transformaciones lineales fraccionarias, son de la forma

$$z \xrightarrow{\bar{T}} \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Donde la condición $ad - bc \neq 0$ es requerida para que la función no sea constante y se define también

- $\bar{T}(\infty) = \infty$ si $c = 0$
- $\bar{T}(\infty) = a/c$ y $\bar{T}(-b/c) = \infty$ si $c \neq 0$

Algunos casos particulares permiten interpretación geométrica inmediata:

- Traslaciones por un número $b \in \mathbb{C}$:

$$\bar{T}(z) = z + b$$

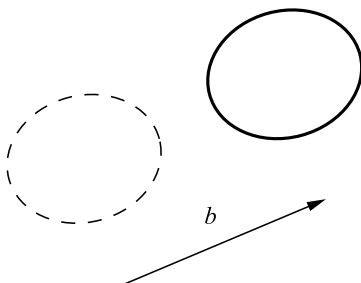


Figura 2.4: Traslación por un complejo

- Homotecias por un factor $a \in \mathbb{R}^+$ (dilataciones o contracciones según sea $a > 1$ ó $a < 1$):

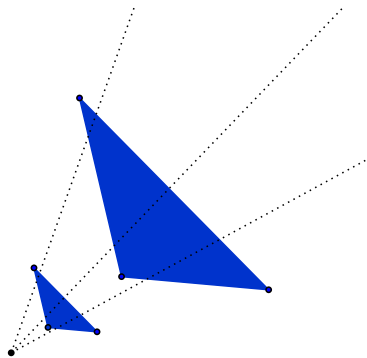


Figura 2.5: Dilatación

$$\bar{T}(z) = az$$

- Rotaciones por un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$\bar{T}(z) = e^{i\theta}z$$

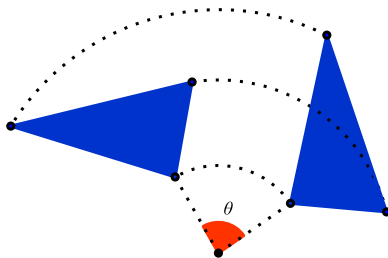


Figura 2.6: Rotación

- Rotaciones seguidas de homotecias (composición de las dos anteriores)

un ejemplo interesante adicional es la transformación $z \xrightarrow{\bar{T}} 1/z$. Para interpretar su efecto geométricamente podemos escribirla como la composición de $z \xrightarrow{f} 1/\bar{z}$ seguida de la función de conjugación $z \xrightarrow{g} \bar{z}$ que refleja respecto al eje real, ahora, f puede escribirse como $f(z) = z/|z|^2$ que claramente deja fija a la frontera del disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$; notando que $|z| \cdot |f(z)| = 1$ concluimos que f es entonces la inversión respecto a $\partial\mathbb{D}$ por lo que \bar{T} geométricamente invierte respecto a esta circunferencia y refleja luego en el eje real:

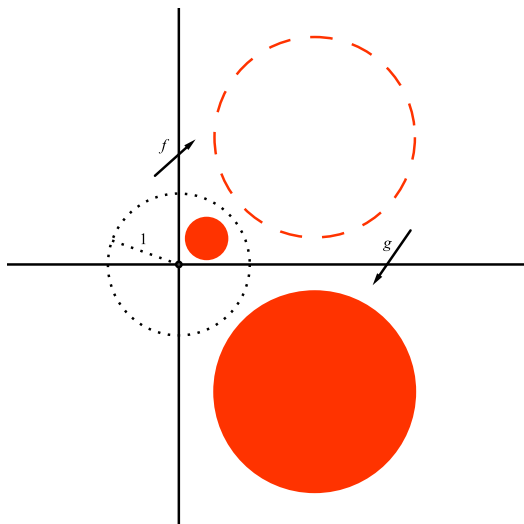


Figura 2.7: La transformación $z \mapsto 1/z$

Teniendo en cuenta estos ejemplos podemos deducir los que quizá sean los hechos geométricos más conocidos sobre las transformaciones de Möbius:

- Son conformes.
- Mapean círculos en círculos.
- Si dos puntos son inversos entre sí respecto a una circunferencia dada, sus imágenes bajo una transformación de Möbius también son inversas respecto a la circunferencia imagen de la anterior.

pues claramente toda transformación

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

puede escribirse según sea el caso (c nulo o no-nulo respectivamente) como

$$z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{o bien} \quad z \mapsto \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

que son ambas composiciones de algunas de las funciones que hemos mencionado como ejemplos anteriormente (traslaciones, homotecias, rotaciones, reflexiones e inversión), cuyo significado geométrico es conocido e implica el satisfacer las tres características mencionadas.

Se suele decir que el determinar una transformación de Möbius permite 6 grados de libertad, por el hecho de que dados 3 puntos distintos $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ existe una única transformación que los mapea a otra terna de puntos distintos $\{w_1, w_2, w_3\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ elegida arbitrariamente, cada uno de los cuales está determinado obviamente por 2 parámetros reales (partes real e imaginaria), para una prueba sencilla de esta propiedad y un estudio más profundo de las transformaciones de Möbius así como el papel fundamental que juegan en el estudio de la geometría hiperbólica analítica puede verse [15].

Aquí surge nuestro interés en estas funciones, probaremos un caso particular del porismo de Poncelet para ciertas elipses contenidas en el interior de una circunferencia, (sin pérdida de generalidad tomaremos a dicha circunferencia como $\partial\mathbb{D}$) elipses que surgen al estudiar el comportamiento geométrico de un subconjunto especial de transformaciones de Möbius; aquellas que mapean \mathbb{D} en sí mismo.

2.1.1. Transformaciones que preservan el disco unitario

Existen muchas razones técnicas que irán saliendo a flote conforme avancemos que hacen conveniente identificar a la elipse exterior del Teorema de Poncelet con el disco unitario. Dado, como vimos al principio del capítulo, que el enunciado del Teorema puede replantearse como probar que cierta transformación que actúa de la elipse exterior en sí misma tiene una propiedad específica, es natural estudiar posibles relaciones entre este problema y funciones que previamente conocemos que cumplen entre otras cosas con preservar $\partial\mathbb{D}$.

Construiremos entonces las transformaciones de Möbius que tienen esta propiedad, para ello mencionaremos un argumento geométrico interesante siguiendo [18], apoyándonos también en lo discutido al inicio de la sección y partiendo del hecho de que una transformación de este tipo queda determinada si sabemos a qué terna de puntos distintos mapea una terna dada previamente.

Definición 2.1. Se dice que una función $R \xrightarrow{f} R$ donde $R \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es una región es un automorfismo en ella si f es inyectiva y conforme.

Claramente las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{D} son automorfismos (de hecho son los únicos [15],[18]). Intuitivamente el problema de determinar uno de estos automorfis-

mos \bar{T} consiste en determinar 3 parámetros; podemos inscribir un triángulo ΔABC en $\partial\mathbb{D}$ y decidir las imágenes de cada vértice que formarán otro triángulo inscrito preservando la orientación $\Delta A'B'C'$, cada imagen requiere solamente un parámetro para definirse, por ejemplo el argumento del complejo asociado a cada punto.

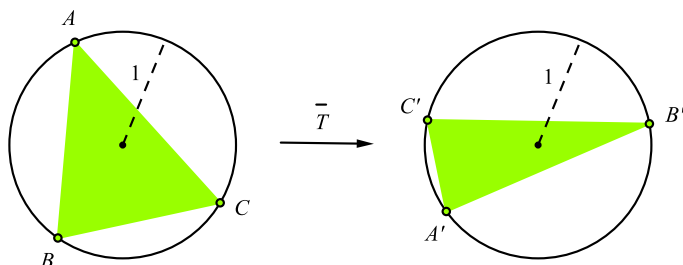


Figura 2.8: Un automorfismo en \mathbb{D}

Siguiendo con esta idea podemos replantear el determinar la transformación decidiendo dónde enviar un punto de la frontera de \mathbb{D} y un punto en su interior, pues éste requiere de dos parámetros para estar bien definido por lo que un automorfismo en \mathbb{D} quedaría determinado si, por ejemplo, están dadas la preimagen de $0 \in \text{Int}(\mathbb{D})$ y la imagen de $1 \in \partial\mathbb{D}$; sean a y p respectivamente:

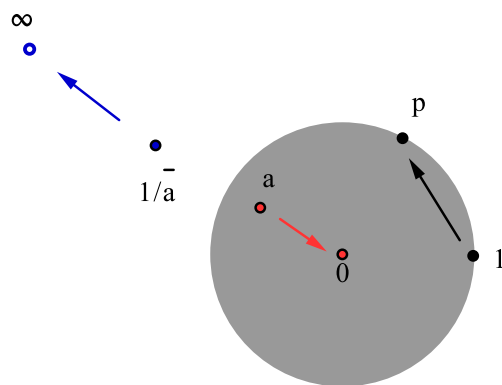


Figura 2.9: Otra forma de determinar el automorfismo

Como \mathbb{D} se mapea en sí mismo, puntos inversos respecto a su frontera se mapean en puntos inversos de nuevo respecto a ésta, por lo que $1/\bar{a}$ que como vimos anteriormente es el inverso

respecto a $\partial\mathbb{D}$ de a debe ir al inverso de $\bar{T}(a) = 0$ que es ∞ . Teniendo estos datos concluimos primeramente que \bar{T} es de la forma

$$z \mapsto k \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad \text{con alguna constante } k$$

y utilizando el hecho de que $\bar{T}(1) = p \in \partial\mathbb{D}$ tenemos

$$1 = |p| = |\bar{T}(1)| = |k| \frac{|1 - a|}{|\bar{a} - 1|} = |k| \implies k = e^{i\theta}.$$

La elección del punto p es entonces equivalente a la elección de un argumento $\theta \in [0, 2\pi)$, siguiendo la notación de [18] escribiremos los automorfismos de \mathbb{D} en la forma

$$M_a^\theta(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| \leq 1, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.1)$$

Notando que M_a^θ puede verse como M_a^0 seguida de una rotación por un ángulo θ es claro que entender la geometría de los automorfismos depende de entender el comportamiento de M_a^0 , por lo que a esta transformación en especial suele denotársele simplemente como

$$M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}. \quad (2.2)$$

La imagen de un punto $z \in \partial\mathbb{D}$ bajo M_a es fácil de visualizar, si $a = 0$ el automorfismo es la identidad, supongamos $a \neq 0$ y sea $\ell(z, a)$ la recta que une los puntos z y a , parametricémosle mediante la función $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\zeta(t) = z + t(a - z)$. Si resolvemos $\zeta(t) = M_a(z)$ para t tenemos

$$t = \left(\frac{z - a}{\bar{a}z - 1} - z \right) \frac{1}{a - z} = \frac{1}{1 - \bar{a}z} - \frac{z}{a - z} = \frac{-\bar{a}z^2 + 2z - a}{-\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a}$$

multiplicando y dividiendo por \bar{z} la última expresión puede escribirse como

$$t = \frac{2(1 - \operatorname{Re}(\bar{a}z))}{|z - a|^2}, \quad (2.3)$$

ahora, si adoptemos por un momento la notación vectorial $\vec{w} = (w_x, w_y)$ para el número complejo $w = w_x + iw_y$ siendo $|z| = 1$ tenemos $\langle \vec{z}, \vec{z} - \vec{a} \rangle = 1 - (z_x a_x + z_y a_y) = 1 - \operatorname{Re}(\bar{a}z)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior usual en \mathbb{R}^2 . Así 2.3 puede escribirse como sigue:

$$t = \frac{2\langle \bar{z}, \bar{z} - \bar{a} \rangle}{|z - a|^2}. \quad (2.4)$$

Lo cual nos permite interpretar geoméricamente: como $|a| \leq 1$, $\langle \bar{z}, \bar{z} - \bar{a} \rangle$ no puede ser nulo (implicaría que la recta $\ell(z, a)$ es tangente a $\partial\mathbb{D}$), por lo que $\ell(z, a)$ interseca a esta circunferencia en otro punto además de z , su imagen bajo M_a :

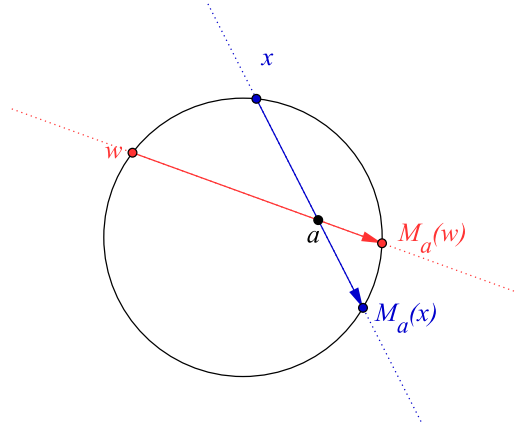


Figura 2.10: M_a actuando en $\partial\mathbb{D}$

Suele llamársele a M_a la perspectiva de $\partial\mathbb{D}$ sobre sí misma vía el punto a . En la siguiente sección nos gustaría obtener información geométrica acerca de M_a^θ , para ello probaremos una sorprendente propiedad acerca de las rectas $\ell(z, M_a^\theta(z))$ para $z \in \partial\mathbb{D}$. (en caso de que M_a^θ fijara a z definimos la recta anterior como la tangente en z a la frontera del disco unitario)

2.1.2. Conexión con el porismo de Poncelet

Teorema 2.1. *El conjunto de rectas $\{\ell(z, M_a^\theta(z)) \mid z \in \partial\mathbb{D}, \theta \neq 0\}$ es el formado por las tangentes a la cónica C_a^θ con excentricidad $|a|$, focos en a y $ae^{i\theta}$ y eje mayor de longitud $2\text{sen}(\theta/2)$.*

Observaciones 2.1. Para el caso $\theta = 0$ la cónica mencionada es degenerada y como vimos anteriormente, las rectas $\ell(z, M_a(z))$ concurren en a . La conexión con las curvas de Poncelet resulta ahora evidente.

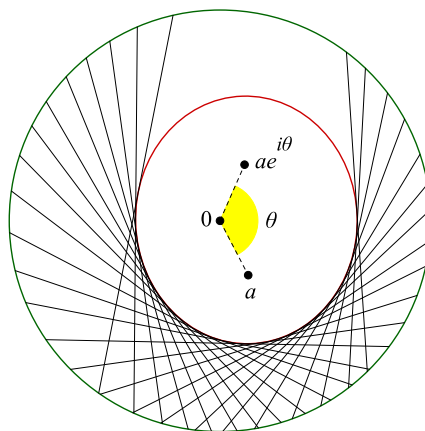


Figura 2.11: Teorema 2.1

Demostración. Sean $a \in \text{Int}(\mathbb{D})$, $b := ae^{i\theta}$ y $w := M_a^\theta(z)$, queremos probar que $\ell(z, w)$ es tangente a la elipse $\mathcal{E} := C_a^\theta$ descrita por la ecuación

$$|z - a| + |z - b| = 2 \text{sen}(\theta/2). \tag{2.5}$$

Supongamos primero el caso en que $w \neq z$, entonces como $\theta \in (0, 2\pi)$ los puntos z, w y $u := M_a(z)$ son distintos. Defínase v como $ze^{i\theta}$ y obsérvese que, como $w = ue^{i\theta}$, la recta $\ell(w, v)$ es la línea $\ell(u, z)$ rotada un ángulo θ respecto al origen. Luego, el punto b está en $\ell(w, v)$ y los triángulos Δwzv y Δwzu son congruentes:

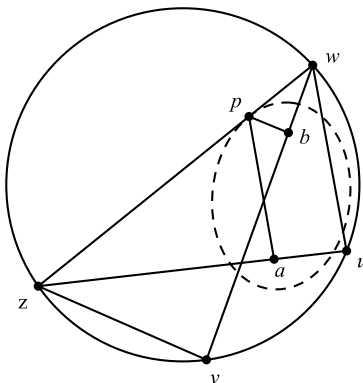


Figura 2.12: Primer caso del Teorema 2.1

Localicemos ahora un $p \in \ell(z, w)$ tal que $\ell(a, p)$ sea paralela a $\ell(u, w)$. De modo que Δzuw es semejante a Δzap y tenemos

$$\frac{|w-p|}{|w-z|} = \frac{|u-a|}{|u-z|} = \frac{|e^{i\theta}(u-a)|}{|e^{i\theta}(u-z)|} = \frac{|w-b|}{|w-v|}. \quad (2.6)$$

Igualando el primer y último cociente de 2.6 nos damos cuenta de que $\Delta wpb \sim \Delta wzv$ de aquí que $\ell(p, b)$ y $\ell(z, v)$ son paralelas y más aún; tenemos $\angle apz = \angle wpb$. Así las cosas si p está en la elipse \mathcal{E} , por la propiedad de reflexión en las elipses (un rayo que viaja desde un foco de una elipse a un punto en ella es reflejado por la misma con dirección al segundo foco) se tendría la tangencia de $\ell(z, w)$ con \mathcal{E} .

Para mostrar que p está en \mathcal{E} puede calcularse $|p-a| + |p-b|$ tomando las razones correspondientes entre los lados de los triángulos semejantes Δpza y Δwzu así como Δwpb y Δwzv obteniéndose

$$|p-a| + |p-b| = \frac{|p-z|}{|w-z|} |w-u| + \frac{|w-p|}{|w-z|} |z-v|.$$

Pero los puntos v y w han sido obtenidos a partir de z y u simplemente girándolos sobre $\partial\mathbb{D}$ un ángulo θ , por lo que $|w-u| = |z-v| = 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$; entonces

$$|p-a| + |p-b| = \frac{|p-z| + |w-p|}{|w-z|} 2 \operatorname{sen}(\theta/2) = 2 \operatorname{sen}(\theta/2).$$

$\therefore p \in \mathcal{E}$. Para el caso $w = M_a^\theta(z) = z$ mostraremos que la tangente a $\partial\mathbb{D}$ en z es también tangente a \mathcal{E} en z :

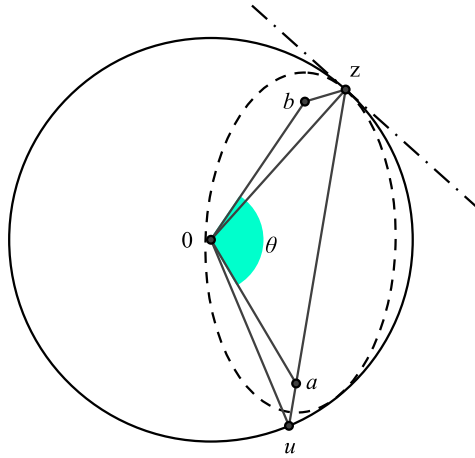


Figura 2.13: Segundo caso del Teorema 2.1

Definimos $u = M_a(z)$, de modo que $z = M_a^\theta(z) = ue^{i\theta}$. Pero $b = ae^{i\theta}$, lo que significa que $\Delta zb0$ es simplemente $\Delta ua0$ rotado un ángulo θ .

$$\implies |z - a| + |z - b| = |z - a| + |u - a| = |z - u| = 2 \operatorname{sen}(\theta/2),$$

mostrando que $z \in \mathcal{E}$. Por simetría $\angle az0 = \angle 0ua$, y por la congruencia de $\Delta zb0$ y $\Delta a0u$, $\angle 0ua = \angle 0zb$ dando ambas $\angle az0 = \angle 0zb$. Así, de nuevo por la propiedad de reflexión de rayos en las elipses, la tangente a \mathcal{E} en z coincide con aquella a $\partial\mathbb{D}$ en el mismo punto pues esta última es la normal a $\ell(0, z)$ en z .

Habiendo probado que $\ell(z, M_a^\theta(z))$ siempre es tangente a la cónica especificada, resta probar que toda tangente a ésta es de la forma $\ell(z, M_a^\theta(z))$ para algún $z \in \partial\mathbb{D}$, para lo cual usaremos un par de propiedades algebraicas bien conocidas de las transformaciones de Möbius que es el hecho de que todas aquellas distintas a la identidad, tienen uno o dos puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y que forman un grupo con la composición (puede verse de nuevo [18] ó [15]). Si M_a^θ fuera la identidad, $\mathcal{E} = \partial\mathbb{D}$ y el resultado es trivial. Supongamos entonces que M_a^θ tiene uno o dos puntos fijos únicamente, en tal caso cada punto de $\partial\mathbb{D}$ que no sea fijado por la transformación debe estar en el exterior de \mathcal{E} o no se cumpliría la propiedad de tangencia que hemos probado previamente, así las cosas, todos los puntos de $\partial\mathbb{D}$ son externos a la elipse excepto a lo más dos, por lo que $\mathcal{E} \subset \mathbb{D}$. Por lo tanto, si ℓ es una recta tangente a \mathcal{E} en un punto $z \in \mathcal{E} \cap \partial\mathbb{D}$ entonces z es punto fijo de M_a^θ , ℓ es tangente a $\partial\mathbb{D}$ y $\ell = \ell(z, M_a^\theta)$ por definición. Si ℓ es ahora una tangente a la elipse en un punto interior del disco unitario, por conexidad ℓ interseca a su frontera en dos puntos z_1 y z_2 de forma que $\ell = \ell(z_1, z_2)$. Existe también un tercer punto z_3 tal que $\ell(z_1, z_3)$ es tangente a \mathcal{E} y claramente ninguno de los 3 puede ser fijo bajo M_a^θ . Si $M_a^\theta(z_1) = z_2$ ó $M_a^\theta(z_2) = z_1$ no hay más que hacer. La única alternativa es entonces que $M_a^\theta(z_1) = z_3$ y $M_a^\theta(z_3) = z_1$, lo que implica que tanto z_1 como z_3 son puntos fijos de la transformación de Möbius $(M_a^\theta)^{\circ 2} := M_a^\theta \circ M_a^\theta$, pero por lo comentado anteriormente M_a^θ misma tiene al menos otro punto fijo distinto de z_1 y z_3 que claramente lo será también de $(M_a^\theta)^{\circ 2}$, implicando que esta última es la identidad lo cual no ocurre nunca si $\theta \in (0, 2\pi)$, (M_a^θ) no es su propia inversa, que de hecho es $M_b^{-\theta}$. \square

Notemos que el teorema anterior permite una fácil demostración de un caso particular del porismo de Poncelet; aquel en que el par de cónicas en donde están interinscritos los polígonos fuera $(\partial\mathbb{D}, C_a^\theta)$ para ciertos parámetros a y θ como los especificados en el teorema 2.1. De hecho hemos probado que si se da el primer caso de la demostración del teorema, $\{a, C_a^\theta\} \subset \operatorname{Int}(\mathbb{D})$, la transformación de Poncelet de $\partial\mathbb{D}$ asociada a C_a^θ puede ser vista como

M_a^θ que es de Möbius al igual que sus iteraciones que definen los vértices de los polígonos interinscritos y como bien sabemos, la única transformación de este tipo que admite 3 o más puntos fijos es la identidad, vale la pena establecer formalmente el resultado:

Resultado 2.1. porismo de Poncelet para $(\partial\mathbb{D}, C_a^\theta)$. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$ y supongamos que a y la elipse $\mathcal{E} := C_a^\theta$ están en el interior de \mathbb{D} . Si existe un $\mathcal{P}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ ($n \geq 3$) interinscrito a $(\partial\mathbb{D}, \mathcal{E})$ entonces \mathcal{E} es una n -curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$.

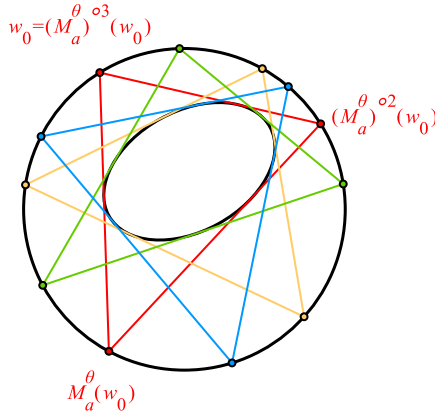


Figura 2.14: $(M_a^\theta)^{\circ 3}$ es la identidad en la circunferencia unitaria

Demostración. Denotemos por $(M_a^\theta)^{\circ n}$ a la transformación de Möbius obtenida luego de componer M_a^θ consigo misma n veces y definamos $z_n := z_0$. Por el teorema 2.1 en el lado $[z_0, z_1]$ del polígono interinscrito pasa que $M_a^\theta(z_0) = z_1$ o bien $M_a^\theta(z_1) = z_0$, supóngase que se han numerado los vértices de forma que se tenga la primera de estas posibilidades. De forma similar puede ser $M_a^\theta(z_1) = z_2$ ó $M_a^\theta(z_2) = z_1$, sin embargo la segunda se descarta porque M_a^θ es inyectiva, así $(M_a^\theta)^{\circ 2}(z_0) = z_2$ y por el mismo razonamiento en general $(M_a^\theta)^{\circ j}(z_0) = z_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$. El hecho entonces de que $z_n = z_0$ implica que $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ son puntos fijos de $(M_a^\theta)^{\circ n}$ y como $n \geq 3$ esta transformación debe ser la identidad.

Si ahora se toma cualquier otro punto $w_0 \in \partial\mathbb{D}$ por el teorema 2.1 $[w_0, M_a^\theta(w_0)]$ es tangente a \mathcal{E} y por el mismo razonamiento utilizado anteriormente $(M_a^\theta)^{\circ 2}(w_0) \neq M_a^\theta(w_0)$ y $[M_a^\theta(w_0), (M_a^\theta)^{\circ 2}(w_0)]$ es de nuevo tangente a \mathcal{E} , así sucesivamente puede entonces formarse un polígono interinscrito $\mathcal{P}(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ definiendo $w_j := (M_a^\theta)^{\circ j}(w_0)$ para $j = 1, 2, \dots, n-1$ observando que $(M_a^\theta)^{\circ n}(w_0) = w_0$ por ser $(M_a^\theta)^{\circ n}$ la identidad. \square

Por supuesto el teorema anterior no tiene la generalidad del porismo de Poncelet, más aún, no tenemos ningún ejemplo en que la circunferencia unitaria y una elipse en su interior admitan un polígono interinscrito, mucho menos uno en que dicha elipse sea del tipo C_a^θ . Sin embargo, en él queda clara la idea que comentamos al principio del capítulo así como también ejemplifica perfectamente el término *porismo*; un problema tiene una infinidad de soluciones siempre que tenga al menos una, pero no se dice si dichas soluciones puedan al menos existir ni cómo hallarlas, además de que da una conexión más con un tema conocido y muy estudiado en varias áreas como las transformaciones de Möbius.

Antes de afinar la idea de modo que demos una primera demostración general para el porismo de Poncelet, revisaremos justamente un ejemplo interesante de una familia de elipses que son 3-curvas de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ que generalizan lo discutido acerca de la Fórmula de Chaple, mismas que surgen al estudiar funciones que a diferencia de las de Möbius, no es común su mención en un primer curso de variable compleja, a pesar de que se trata de productos de estas últimas.

2.2. Productos de Blaschke finitos

Para construir ejemplos de 3-elipses de Poncelet, consideraremos un caso particular de productos de las transformaciones que hemos visto, preservan el disco unitario:

Definición 2.2. *Producto de Blaschke de grado n* Un producto de Blaschke de grado n es una función $B : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante

$$B(z) = \beta \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z},$$

donde $|\beta| = 1$ y $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \text{Int}(\mathbb{D})$

Estas funciones tienen ceros precisamente en $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, un cero que apareciera repetido m veces, como es usual, se dice que tiene tal multiplicidad de modo que el grado de $B(z)$ es el número de ceros contando multiplicidad. Nótese que si $|z| = 1$ entonces $z = 1/\bar{z}$ y se tiene

$$|B(z)| = \left| \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \right| = \prod_{j=1}^n \frac{|z - a_j|}{|1 - \bar{a}_j z|} = \prod_{j=1}^n \frac{|z - a_j|}{|\bar{z} - \bar{a}_j|} = 1,$$

así que estos productos también preservan $\partial\mathbb{D}$. Más aún, como consecuencia del teorema del módulo máximo ([14], p.125), $|B(z)| = 1 \iff |z| = 1$. Así las cosas, un producto de Blaschke de grado n es una función analítica en $\text{Int}(\mathbb{D})$, continua en \mathbb{D} , con módulo unitario en $\partial\mathbb{D}$ y tiene un número finito de ceros en $\text{Int}(\mathbb{D})$, puede mostrarse de hecho que estas propiedades determinan B salvo un factor constante de módulo unitario ([8], p.6). Estas funciones según Colwell ([3], p.3) surgieron en 1915 en un artículo de W. Blaschke, si se quiere profundizar acerca de de ellos puede consultarse el libro mismo de Colwell.

A nosotros nos bastará probar el siguiente lema técnico, cuya lectura puede omitirse para pasar al resultado geométrico interesante de esta sección:

Lema 2.1. *Sea B un producto de Blaschke de grado n de la forma $B(z) = z \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$, con ceros distintos entre sí, entonces:*

- a. *todo punto de $\partial\mathbb{D}$ tiene exactamente n preimágenes distintas en $\partial\mathbb{D}$ bajo B ;*
- b. *si tomamos $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ con $B(z_j) = \lambda$ para $j = 1, 2, \dots, n$ y*

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{z - z_j}, \quad (2.7)$$

entonces los m_j son reales que satisfacen

- i. $\sum_{j=1}^n m_j = 1$,
- ii. $m_j = \frac{\lambda}{z_j B'(z_j)}$,
- iii. $\frac{1}{m_j} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_j - a_k|^2}$,
- iv. $m_j \in (0, 1)$ para $j = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Para el inciso a. fijemos un punto $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Como B es una función racional de grado n la ecuación $B(z) = \lambda$ tiene n soluciones contando multiplicidad y al tenerse $|B(z)| = 1 \iff |z| = 1$, todas las preimágenes de λ están en $\partial\mathbb{D}$. Para ver que la multiplicidad de cada cero de $B(z) - \lambda$ es 1 veremos que $B'(z)$ no se anula en ningún punto de $\partial\mathbb{D}$ y por tanto en ninguna preimagen de λ .

Utilizando la regla de Leibnitz puede calcularse la derivada logarítmica de B :

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1 - |a_j|^2}{(1 - \bar{a}_j z)(z - a_j)},$$

donde $a_n = 0$, de la expresión anterior deducimos para $z \in \partial\mathbb{D}$ que

$$\left| \frac{B'(z)}{B(z)} \right| = \left| \frac{B'(z)}{\bar{z}B(z)} \right| = \sum_{j=1}^n \frac{1 - |a_j|^2}{|z - a_j|^2}.$$

De donde se sigue que $B'(z)$ no se anula para valores de módulo 1. Probemos ahora la parte b :

Multiplicando la ecuación 2.7 por z y haciendo tender z a infinito tenemos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{B(z) - \lambda} = \sum_{j=1}^n \lim_{z \rightarrow \infty} m_j \frac{z}{z - z_j} \implies \sum_{j=1}^n m_j = 1.$$

Para ver que se cumple (ii) obsérvese que

$$m_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)F(z) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{z - z_j}{B(z) - \lambda} \cdot (B(z)/z) = \frac{1}{B'(z_j)} \frac{\lambda}{z_j}.$$

Enseguida probamos (iii). Reescribamos la derivada logarítmica de B :

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{(1 - \bar{a}_k z)(z - a_k)},$$

evaluando en z_j y multiplicando por $1/\bar{z}_j = z_j$:

$$\frac{z_j B'(z_j)}{B(z_j)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{(\bar{z}_j - \bar{a}_k |z_j|^2)(z_j - a_k)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_j - a_k|^2}$$

pero $B(z_j) = \lambda$ y por (ii) $\frac{1}{m_j} = \frac{z_j B'(z_j)}{\lambda}$ lo que completa la prueba de (iii).

Finalmente (iv) es consecuencia inmediata de (iii). \square

El teorema que probaremos a continuación, está motivado por un resultado conocido como teorema de Marden que es en realidad el por qué del reciente interés de los geómetras en la relación entre las transformaciones de Möbius, los productos de Blaschke y las curvas de Poncelet y por tanto de la primera parte de este capítulo:

2.2.1. Las elipses de Marden-Blaschke

Teorema 2.2. Teorema de M. Marden Sean m_1, m_2, m_3 reales positivos tales que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ y sean a y b los ceros de

$$F(z) = \sum_{j=1}^3 m_j (z - z_j)^{-1} = \frac{(z - a)(z - b)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)},$$

donde z_1, z_2 y z_3 son cualesquiera complejos no colineales, entonces a y b son los focos de una elipse inscrita en el triángulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ y los puntos de tangencia son

$$\zeta_1 = \frac{m_2 z_3 + m_3 z_2}{m_2 + m_3}, \quad \zeta_2 = \frac{m_1 z_3 + m_3 z_1}{m_1 + m_3}, \quad \zeta_3 = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}.$$

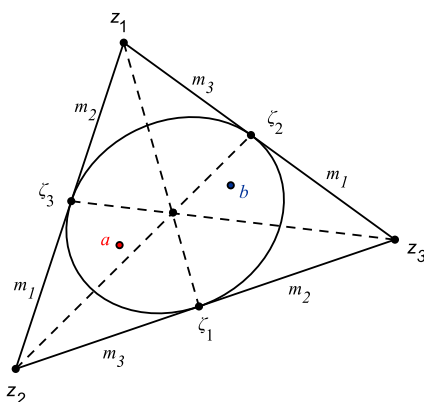


Figura 2.15: Las cevianas del Teorema de Marden

Por supuesto las rectas que unen los puntos de tangencia con el vértice opuesto del triángulo concurren en el centro de masas $\sum_{j=1}^3 m_j z_j$.

La versión que probaremos motivándonos con el anterior es esta:

Teorema 2.3. Elipses de Marden-Blaschke *Considérese el siguiente producto de Blaschke de grado 3 con ceros distintos:*

$$B(z) = z \left(\frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \right) \left(\frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \right).$$

Para $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, sea $\{z_1, z_2, z_3\} = B^{-1}(\{\lambda\})$ y escribábase

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3}.$$

Entonces la línea $\ell(z_1, z_2)$ es tangente a la elipse

$$\mathcal{E} : |w - a_1| + |w - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2| \quad (2.8)$$

en el punto $\zeta_3 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$. Y viceversa, todo punto de \mathcal{E} es el punto de tangencia de \mathcal{E} con una recta que pasa por dos puntos distintos de la circunferencia unitaria z_1 y z_2 para los cuales $B(z_1) = B(z_2)$.

Demostración. Probemos primero que $\zeta_3 \in \mathcal{E}$:

Como $F(a_j) = (B(a_j)/a_j)/(B(a_j) - \lambda) = 0$ para $j = 1, 2$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = F(a_j) &= \frac{m_3}{a_j - z_3} + \frac{(m_1 + m_2)a_j - (m_1 z_2 + m_2 z_1)}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)} \\ &= \frac{m_3}{a_j - z_3} + \frac{a_j - \zeta_3}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)}(m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Por el lema 2.1 $m_j \in (0, 1)$ y $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Por lo tanto

$$m_3 \left| \frac{1}{a_j - z_3} \right| = (1 - m_3) \left| \frac{a_j - \zeta_3}{(a_j - z_1)(a_j - z_2)} \right|.$$

Podemos sumar estas igualdades para $j = 1, 2$ y reagrupar para obtener

$$\frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_1| + \frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_2| = \frac{m_3}{1 - m_3} \left(\left| \frac{(a_1 - z_1)(a_1 - z_2)}{(1 - \bar{a}_1 a_2)(a_1 - z_3)} \right| + \left| \frac{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)}{(1 - \bar{a}_1 a_2)(a_2 - z_3)} \right| \right). \quad (2.9)$$

Ahora, recordando que $\{z_1, z_2, z_3\} = B^{-1}(\{\lambda\})$, $B(z) - \lambda$ puede factorizarse como

$$B(z) - \lambda = \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{(1 - \bar{a}_1 z)(1 - \bar{a}_2 z)}.$$

Pero $B(a_1) = B(a_2) = 0$, entonces

$$1 = |\lambda| = \left| \frac{(a_1 - z_1)(a_1 - z_2)(a_1 - z_3)}{(1 - \bar{a}_1 a_1)(1 - \bar{a}_1 a_2)} \right| = \left| \frac{(1 - |a_1|^2)(1 - \bar{a}_1 a_2)}{(a_1 - z_1)(a_1 - z_2)(a_1 - z_3)} \right|$$

y análogamente

$$1 = \left| \frac{(1 - |a_2|^2)(1 - \bar{a}_2 a_1)}{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)(a_2 - z_3)} \right|.$$

Multiplicando por estos unos los sumandos del lado derecho de la ecuación 2.9 obtenemos

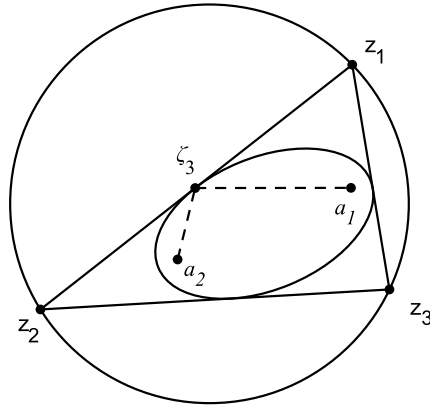
$$\frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_1| + \frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_2| = \frac{m_3}{1 - m_3} \left(\frac{1 - |a_1|^2}{|a_1 - z_3|^2} + \frac{1 - |a_2|^2}{|a_2 - z_3|^2} \right).$$

Por último aplicamos el inciso (iii) del lema 2.1:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_1| + \frac{1}{|1 - \bar{a}_1 a_2|} |\zeta_3 - a_2| \\ &= \frac{m_2}{1 - m_3} \left(\left[1 + \frac{1 - |a_1|^2}{|a_1 - z_3|^2} + \frac{1 - |a_2|^2}{|a_2 - z_3|^2} \right] - 1 \right) \\ &= \left(\frac{m_3}{1 - m_3} \right) \left(\frac{1}{m_3} - 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

$\therefore |\zeta_3 - a_1| + |\zeta_3 - a_2| = |1 - \bar{a}_1 a_2| \iff \zeta_3 \in \mathcal{E}$.

Hasta ahora sabemos $\zeta_3 \in \mathcal{E} \cap \ell(z_1, z_2)$, para probar la tangencia usemos de nuevo la propiedad de la reflexión del rayo a través de los focos de la elipse; probaremos la igualdad de los ángulos $\angle z_1 \zeta_3 a_1$ y $\angle a_2 \zeta_3 z_2$ de la figura siguiente:



Ello implicará que $\ell(z_1, z_3)$ es exterior al triángulo $\Delta_{\zeta_3 a_2 a_1}$ y hace ángulos iguales con sus lados $[\zeta_3, a_2]$ y $[a_1, \zeta_3]$ y como ninguna otra línea cumple tal propiedad (excepto por supuesto la mediatriz de $[a_2, a_1]$ pero no es externa al triángulo) salvo la tangente, habremos terminado de probar la primer parte del teorema.

Notemos primero que ζ_3 es el cero de la función $z \mapsto m_1/(z - z_1) + m_2/(z - z_2)$. Por lo tanto,

$$\frac{m_3}{\zeta_3 - z_3} = F(\zeta_3) = \frac{B(\zeta_3)/\zeta_3}{B(\zeta_3) - \lambda} = \frac{(\zeta_3 - a_1)(\zeta_3 - a_2)}{(\zeta_3 - z_1)(\zeta_3 - z_2)(\zeta_3 - z_3)}. \quad (2.10)$$

Utilizando esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} \angle z_1 \zeta_3 a_1 - \angle a_2 \zeta_3 z_2 &= \arg \left[\frac{a_1 - \zeta_3}{z_1 - \zeta_3} \right] + \arg \left[\frac{a_2 - \zeta_3}{z_2 - \zeta_3} \right] = \arg \left[\frac{(a_1 - \zeta_3)(a_2 - \zeta_3)}{(z_1 - \zeta_3)(z_2 - \zeta_3)} \right] \\ &= \arg[(\zeta_3 - z_3)F(\zeta_3)] = \arg \left[(\zeta_3 - z_3) \frac{m_3}{\zeta_3 - z_3} \right] = \arg(m_3) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, si dibujamos cualquier otra tangente ℓ a \mathcal{E} en ζ por conexidad existen dos puntos distintos $\{z_1, z_2\} = \ell \cap \partial\mathbb{D}$, por el inciso (a) del lema 2.1 hay exactamente dos puntos en $\partial\mathbb{D}$: w_1 y w_2 , para los cuales $B(z_1) = B(w_1) = B(w_2)$. Pero existen sólo dos tangentes a la elipse desde z_1 , ℓ debe ser una de ellas al igual, por lo que probamos anteriormente, que $\ell(z_1, w_1)$ y $\ell(z_1, w_2)$ lo cual implica $z_2 = w_1$ ó $z_2 = w_2$. \square

Claramente el teorema anterior implica que la elipse mencionada \mathcal{E} es una 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$. Llamaremos a este tipo de curvas *elipses de Marden-Blaschke* asociadas al producto B de grado 3.

2.2.2. Generalización de la fórmula de Chaple-Euler

En esta subsección mostraremos cómo lo expuesto hasta ahora generaliza al caso de elipses lo que presentamos en el primer capítulo para circunferencias. Explícitamente, queremos mostrar que las elipses que describe el teorema 2.3 son todas las posibles 3-elipses de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ y que la fórmula de Chaple-Euler:

$$2Rr = R^2 - d^2 \quad (2.11)$$

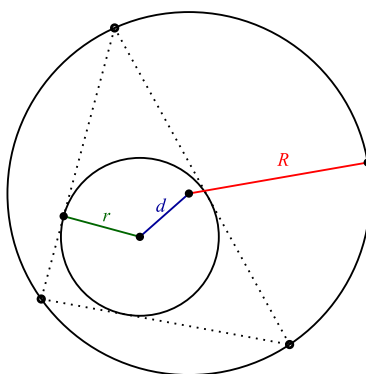


Figura 2.16: Chaple-Euler

determina circunferencias que son casos particulares de elipses de Marden-Blaschke. Empecemos por mostrar esto último:

En la ecuación (2.8), hagamos $a_1 = a_2$:

$$|z - a| + |z - a| = |1 - a\bar{a}|.$$

Como $|a| < 1$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$2 \cdot 1 \cdot |z - a| = 1 - a\bar{a}. \quad (2.12)$$

Observemos que si en las circunferencias determinadas por la ecuación (2.11) identificamos a la de radio R con $\partial\mathbb{D}$ y suponemos que el centro de la de radio r está en el punto determinado por a , entonces todos sus puntos z están dados por la ecuación

$$|z - a| = r,$$

de manera que si sustituimos en la fórmula de Chaple-Euler $R = 1$, $r = |z - a|$ y $d^2 = |a|^2 = a\bar{a}$ obtenemos precisamente (2.12). Por tanto toda circunferencia que sea 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ es un caso particular contemplado en el teorema 2.3.

Finalmente estableceremos formalmente el hecho de que toda elipse que sea 3-curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria es una elipse de Marden-Blaschke.

Teorema 2.4. *Toda elipse en el interior del disco unitario que es además 3-curva de Poncelet respecto a su frontera, es una elipse de Marden-Blaschke.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subset \text{Int}(\mathbb{D})$ una elipse que es 3-curva de Poncelet respecto a su frontera y tiene focos en a_1 y a_2 y supóngase que no es de Blaschke, por el teorema 2.3 existe también una de tal tipo \mathcal{E} que tiene los mismos focos y eje mayor de longitud $|1 - \bar{a}_1 a_2|$. Como estos parámetros caracterizan por completo a la elipse, el eje mayor de \mathcal{F} es mayor o menor que el de \mathcal{E} , supongamos que fuera mayor (el otro caso admite un argumento análogo). Es claro entonces, si pensamos en la definición de una elipse en términos de la suma de la distancia a los focos siendo constante, que \mathcal{E} está en el interior de \mathcal{F} :

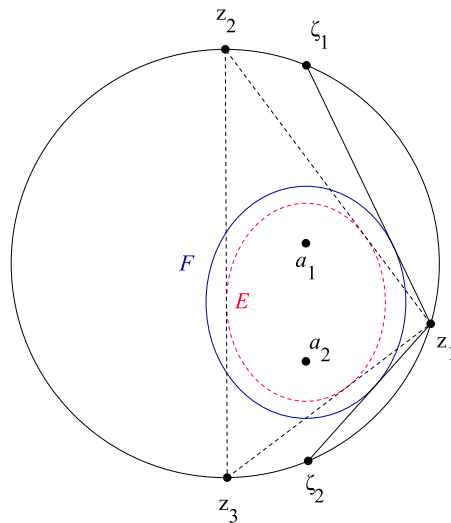


Figura 2.17: toda elipse que es 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ debe ser de Marden-Blaschke

Si interinscribimos un triángulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ a $(\partial\mathbb{D}, \mathcal{E})$ con $[z_2, z_3]$ vertical como en la figura y tomamos las cuerdas de la circunferencia unitaria $[z_1, \zeta_1]$ y $[z_1, \zeta_2]$ tangentes a \mathcal{F} , es claro que $\ell(\zeta_1, \zeta_2)$ está a la derecha de $\ell(z_2, z_3)$, lo cual le impediría ser tangente a \mathcal{F} cosa que a la vez impide que ésta sea 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$. \square

Lo anterior nos permite finalmente dar un ejemplo donde aplica el resultado 2.1 (encontrar una elipse del tipo C_a^θ tal que $(\partial\mathbb{D}, C_a^\theta)$ admite un polígono interinscrito), podemos hacerlo en el caso de triángulos:

Escribamos los focos de C_a^θ como $a_1 := a = re^{i\alpha}$, lo que obliga al segundo a ser $a_2 = re^{i(\alpha+\theta)}$ donde $r \in (0, 1)$. Requerimos solamente entonces que la longitud que hallamos para el eje mayor, $(2 \operatorname{sen}(\theta/2))$, satisfaga

$$(2 \operatorname{sen}(\theta/2))^2 = |1 - \bar{a}_1 a_2|^2. \quad (2.13)$$

Como $(2 \operatorname{sen}(\theta/2))^2 = 2 - 2 \cos \theta$ y $\bar{a}_1 a_2 = r^2 e^{i\theta}$, 2.13 se vuelve una ecuación cuadrática en r^2 que puede fácilmente ser resuelta para obtener como soluciones $r^2 = 1$ y $r^2 = 2 \cos \theta - 1$. Claramente debemos descartar la primera y concluir que C_a^θ es una elipse de Marden-Blaschke si y sólo si $|a| = \sqrt{2 \cos \theta - 1}$, teniéndose al fin un ejemplo para el teorema 2.1.

2.3. Primeros comentarios

En esta primera parte del capítulo hemos ligado el estudio de ciertas cónicas de Poncelet con la teoría básica de funciones de variable compleja, nuestro plan en los siguientes capítulos de la tesis es presentar una extensión del porismo de Poncelet al plano proyectivo complejo; esta extensión involucra detalles técnicos relacionados con las ideas que se han ejemplificado, así como con las que discutiremos para concluir este capítulo, que pueden resultar engorrosos y no intuitivos si se estudian de manera directa, por lo que consideramos importante haber hecho este primer acercamiento.

Otro detalle a destacar, que quedará en evidencia mucho más fuertemente en la última parte de la tesis (El rango numérico), es la influencia recíproca que han tenido los desarrollos por un lado de las matemáticas puras y por otro el de la tecnología y la aplicación de las mismas. Lo hasta ahora expuesto era desconocido hasta que un grupo de matemáticos (U.

Daepf, P. Gorkin y R. Mortini), en 2002 estudiaba productos de Blaschke relacionados con ciertos problemas de interpolación, accidentalmente redescubrió el teorema de M. Marden luego de experimentar con las gráficas de los productos reproducidas en Mathematica. El vínculo entonces de éstos con el porismo y las curvas de Poncelet hubiera sido en el mejor de los casos descubierto mucho más tarde sin el desarrollo que ha tenido el cómputo en los últimos tiempos.

2.4. La demostración de Jacobi

Concluimos este capítulo dando una primer demostración al porismo de Poncelet que extienda el caso particular estudiado previamente (teorema 2.1), comenzaremos por probarlo para circunferencias y generalizaremos luego el argumento para elipses. La idea principal es la misma del inicio del capítulo; dar parametrizaciones a las figuras que, mediante el uso de propiedades analíticas conocidas de ciertas funciones de cálculo, permitan comprender fácilmente la transformación de Poncelet. En este segundo acercamiento, siguiendo una idea de Jacobi, observaremos un vínculo entre las curvas que nos interesan y una ecuación diferencial ordinaria separable cuya solución por cuadraturas involucra una integral elíptica famosa.

2.4.1. Dos circunferencias

Tomemos \mathcal{C} una circunferencia de radio r en el interior de \mathbb{D} de forma que su centro a esté sobre el eje real, sea $d = |a|$.

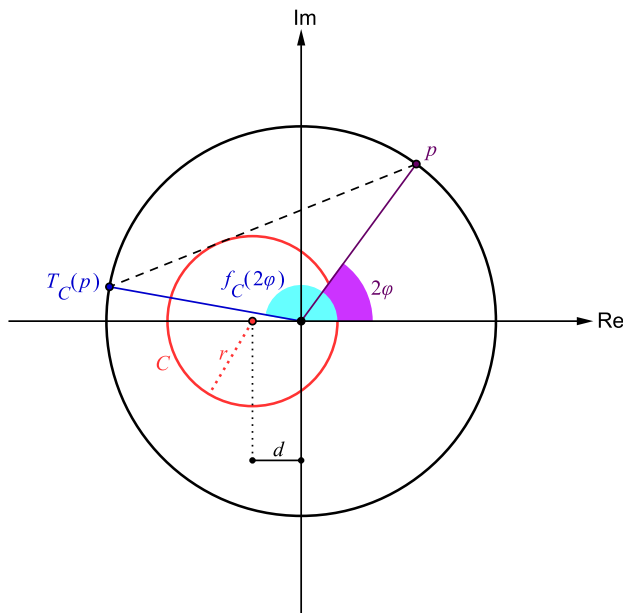


Figura 2.18: la cuerda $[p, T_{\mathcal{C}}(p)]$ es tangente a \mathcal{C}

Pensamos a $\partial\mathbb{D}$ como una curva orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj para que la transformación de Poncelet como la construimos al principio del capítulo esté bien

definida, podemos pensar a los puntos en términos únicamente del ángulo que forman con la parte positiva del eje real que por motivos técnicos, haremos que tome valores de la forma $2\varphi \in [0, 2\pi)$. De esta manera la transformación de Poncelet en $\partial\mathbb{D}$ respecto a \mathcal{C} , $T_{\mathcal{C}}$, está determinada por una función real $f_{\mathcal{C}} : [0, \pi) \rightarrow [0, \pi)$ tal que $T_{\mathcal{C}}(p) = (\gamma \circ f \circ \gamma^{-1})(p)$ donde γ es la parametrización de la circunferencia unitaria $\gamma : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(\varphi) = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$ que obviamente es de clase C^∞ , por lo que la propiedad de $T_{\mathcal{C}}$ de ser un homeomorfismo que mencionábamos al iniciar el capítulo depende de que $f_{\mathcal{C}}$ sea continua, probaremos que es incluso diferenciable.

Estudiaremos entonces $f_{\mathcal{C}}$, específicamente queremos medir exactamente cómo varía respecto a φ .

Para cada punto $p \in \partial\mathbb{D}$ y su transformado bajo $T_{\mathcal{C}}$, sean $M_{\mathcal{C}}(p)$ el punto de tangencia de $[p, T_{\mathcal{C}}(p)]$ con \mathcal{C} y $\rho_{\mathcal{C}}(p)$ la longitud de $[p, M_{\mathcal{C}}(p)]$, por la simetría de \mathcal{C} ; $\rho_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{C}}(p))$ está dada por la longitud de $[M_{\mathcal{C}}(p), T_{\mathcal{C}}(p)]$:

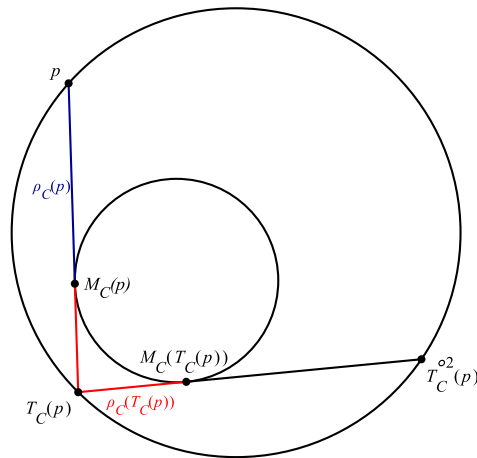


Figura 2.19: Las funciones $M(p)$ y $\rho(p)$

En lo subsecuente, por comodidad, omitiremos el subíndice \mathcal{C} y denotaremos por p_n a $T^{\circ n}(p)$ para cualquier p en la circunferencia unitaria. El paso fundamental ahora es probar que

$$f'(\varphi) = \frac{\rho(p_1)}{\rho(p)} \quad (2.14)$$

Dado un ε pequeño sean p^ε la rotación de $p = e^{i\varphi}$ de ε radianes, ($p^\varepsilon = e^{i(\varphi+\varepsilon)}$) y $x = [p, p_1] \cap [p^\varepsilon, p_1^\varepsilon]$:

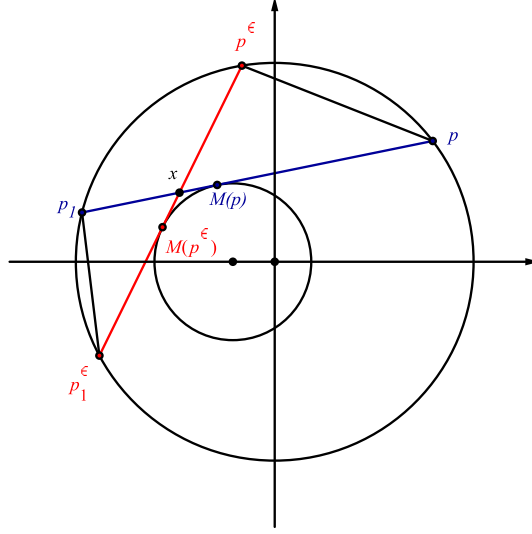


Figura 2.20: calculando $f'(\varphi)$

En la figura 2.4.1, los triángulos $\Delta p^\varepsilon xp$ y $\Delta p_1 p_1^\varepsilon x$ son semejantes, por lo que

$$\frac{[p_1, p_1^\varepsilon]}{[p, p^\varepsilon]} = \frac{[x, p_1]}{[p^\varepsilon, x]}. \quad (2.15)$$

Las longitudes de los arcos de circunferencia unitaria (recorridos en sentido positivo) $\widehat{pp^\varepsilon}$ y $\widehat{p_1 p_1^\varepsilon}$ son respectivamente $2[(\varphi + \varepsilon) - \varphi]$ y $2[f(\varphi + \varepsilon) - f(\varphi)]$, y por la suavidad de $\partial\mathbb{D}$ tenemos

$$f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varphi + \varepsilon) - f(\varphi)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{p_1 p_1^\varepsilon}}{\widehat{pp^\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[p_1, p_1^\varepsilon]}{[p, p^\varepsilon]}.$$

Pero por el lado derecho de la ecuación 2.15:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[p_1, p_1^\varepsilon]}{[p, p^\varepsilon]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[x, p_1]}{[p^\varepsilon, x]} = \frac{[M(p), p_1]}{[p, M(p)]} = \frac{\rho(p_1)}{\rho(p)},$$

lo cual establece 2.14.

Resta calcular $\rho(p_1)$ y $\rho(p)$ en términos de φ , véamos la siguiente figura:

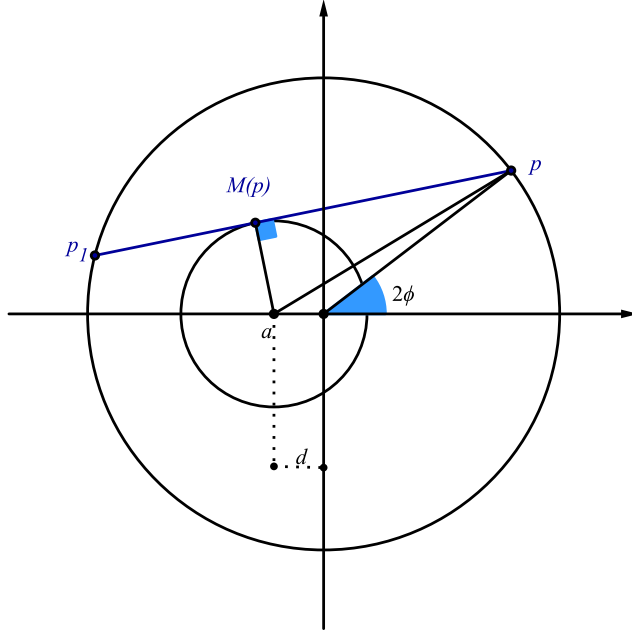


Figura 2.21: Calculando $\rho(p_1)$ y $\rho(p)$

Aplicando la ley de los cosenos a $\Delta pa0$ tenemos

$$\begin{aligned}
 [p, a]^2 &= 1^2 + d^2 + 2d \cos 2\varphi \\
 &= (1 + d^2)(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) + 2d(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \\
 &= (1 + d)^2 \cos^2 \varphi + (1 - d)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \\
 &= (1 + d)^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) + (1 - d)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \\
 &= (1 + d)^2 - 4d \operatorname{sen}^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Y por el teorema de Pitágoras en $\Delta M(p)ap$:

$$\rho(p) = [p, M(p)]^2 = \sqrt{[p, a]^2 - r^2} = \sqrt{(1 + d)^2 - r^2 - 4d \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Introduciendo la constante $k^2 = \frac{4d}{(1 + d)^2 - r^2}$, podemos escribir finalmente

$$\rho(p) = \sqrt{(1 + d)^2 - r^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}. \quad (2.16)$$

Análogamente puede calcularse

$$\rho(p_1) = \sqrt{(1+d)^2 - r^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 f(\varphi)}. \quad (2.17)$$

De los cálculos anteriores concluimos que la función f que define la transformación de Poncelet de $\partial\mathbb{C}$ respecto a \mathcal{C} , satisface la siguiente ecuación diferencial de variables separadas:

$$f'(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 f(\varphi)}}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad (2.18)$$

misma que podemos reescribir como

$$\frac{f'(\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 f(\varphi)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0.$$

La ecuación anterior nos permite concluir por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, que:

$$\int_{\varphi}^{f(\varphi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \omega \quad (2.19)$$

para alguna constante real ω positiva. (Basta derivar la función del lado izquierdo de (2.19) respecto a φ utilizando los resultados de cálculo elemental mencionados previamente).

Como 2.19 es válida para cualquier φ , podemos iterar f pensando en construir los vértices de un n -ágono interinscrito a $(\partial\mathbb{D}, \mathcal{C})$ y se tienen las igualdades

$$\int_{f^{\circ j}(\varphi)}^{f^{\circ(j+1)}(\varphi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \omega; \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.20)$$

Que sumadas nos permiten concluir

$$\int_{\varphi}^{f^{\circ n}(\varphi)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = n\omega. \quad (2.21)$$

Obsérvese que el integrando es estrictamente positivo, por lo cual la función $x \mapsto \int_{\varphi}^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$ es creciente y en particular, inyectiva.

Ahora supongamos que existe un n -ágono interinscrito, es decir, existe un p en la circunferencia unitaria correspondiente a un ángulo $\varphi \in [0, \pi)$ tal que $p_n = p$, o bien $2f^{\circ n}(\varphi) = 2\varphi + 2m\pi$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces por 2.21 tenemos

$$\int_{\varphi}^{\varphi+m\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = n\omega. \quad (2.22)$$

Démonos cuenta de que esta condición es también suficiente para que exista un n -ágono interinscrito, en efecto, si 2.22 se cumple, por 2.21 se llega a

$$n\omega = \iota(\varphi + m\pi) = \iota(f^{\circ n}(\varphi)),$$

que por la inyectividad de ι implica que $\varphi + m\pi = f^{\circ n}(\varphi)$ que equivale a $p_n = p$, lo que asegura la existencia del polígono buscado.

En resumen, hemos probado el siguiente

Teorema 2.5. *Sean \mathcal{C} una circunferencia con centro en a ($|a| = d$) y radio r contenida en el interior de \mathbb{D} y $T_{\mathcal{C}}$ la transformación de Poncelet de $\partial\mathbb{D}$ respecto a \mathcal{C} . Defínase $k^2 = \frac{4d}{(1+d)^2 - r^2}$ y una función $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$J(x, y) = \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}.$$

Entonces, dado un punto $p = e^{2\varphi i} \in \partial\mathbb{D}$ y su transformado $p_1 = T_{\mathcal{C}}(p) = e^{2\varphi_1 i}$, el par $(\partial\mathbb{D}, \mathcal{C})$ admite un polígono interinscrito de n lados con vértices en p y p_1 si y sólo si:

$$J(\varphi, \varphi + m\pi) = n\omega \text{ para algún natural } m, \text{ donde } \omega = J(\varphi, \varphi_1).$$

Y por supuesto de aquí se sigue:

Corolario 2.5.1. *Porismo de Poncelet para circunferencias: Si un par de circunferencias $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ admite un polígono interinscrito de n lados, entonces \mathcal{C}_2 es n -curva de Poncelet respecto a \mathcal{C}_1 .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{C}_1 es la circunferencia unitaria, de modo que el corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior y del hecho de que el valor de $J(\varphi, \varphi + m\pi)$ no depende de φ , al ser $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$ una función π -periódica. \square

2.4.2. Reinterpretación: Una medida invariante

La demostración anterior es interesante por muchas cosas, hemos dado un primer paso para comprender que el comportamiento de la transformación de Poncelet está ligado a una

función elíptica y sin embargo hemos requerido únicamente conceptos básicos de cálculo para desarrollarla.

Pareciera a primera vista que el argumento es distinto al dado en el caso particular que discutimos previamente relacionado con transformaciones de Möbius complejas, que a grandes rasgos se basa en identificar la transformación de Poncelet con una función que está obligada a ser la identidad en caso de tener ciertos puntos fijos. Veremos sin embargo que la prueba de Jacobi puede replantearse utilizando conceptos básicos de Teoría de la Medida que permiten dejar de lado detalles técnicos para observar que en realidad la idea principal es la misma: ciertas transformaciones son en esencia equivalentes a otras para las que es inmediato darse cuenta de que el hecho de que tengan un punto fijo, permite deducir que se tratan de la identidad; la de Poncelet por supuesto incluida.

En el camino, comentaremos cómo extender la prueba que hemos visto a un par de elipses.

Resumamos lo hecho anteriormente de la siguiente forma:

Tenemos dos circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{D} con \mathcal{D} en el interior de \mathcal{C} orientadas en sentido contrario a las manecillas del reloj, así definimos geoméricamente un homeomorfismo preservador de orientación $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ y una función $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\rho(p)$ la longitud del segmento $[p, m]$ como se muestra en la figura siguiente:

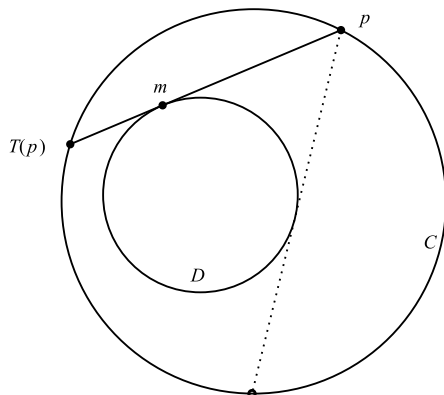
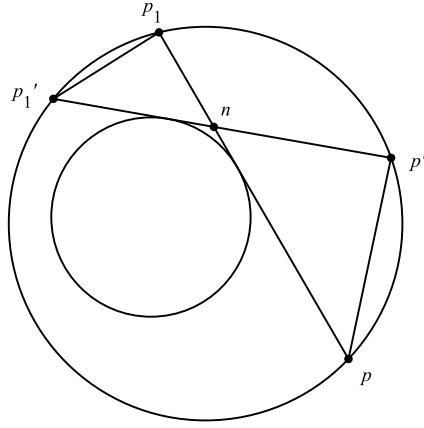


Figura 2.22: $[p, T(p)]$ es tangente a \mathcal{D} en m

Fijemos un punto de origen en \mathcal{C} para introducir el parámetro s de longitud de arco que se incrementa siguiendo la orientación establecida. Sean $p_1 = T(p)$ y s, s_1 los respectivos valores de la longitud de arco en p y p_1 . Si p' es un punto del arco $\widehat{pp_1}$ distinto de sus extremos y $p'_1 = T(p')$, las cuerdas $[p, p_1]$ y $[p', p'_1]$ se intersecan en un punto n tal que los triángulos $\Delta p'np$ y $\Delta p_1p'_1n$ son semejantes:

Figura 2.23: $\Delta p' n p \sim \Delta p_1 p_1' n$

Por lo cual

$$\frac{[p_1, p_1']}{[p, p']} = \frac{[p_1, n]}{[p', n]}.$$

De aquí fijamos p y hacemos $p' \rightarrow p$; entonces $p_1' \rightarrow p_1$ y $n \rightarrow m$ y usamos el hecho de que \mathcal{C} es suave para evaluar el límite siguiente:

$$\frac{ds_1}{ds} = \lim \frac{\widehat{p_1 p_1'}}{\widehat{pp'}} = \lim \frac{[p_1, p_1']}{[p, p']} = \lim \frac{[p_1, n]}{[p', n]} = \frac{[p_1, m]}{[p, m]} = \frac{[p_1, m]}{\rho(p)}.$$

Recordando que $[p_1, m] = \rho(p_1)$ por la simetría de \mathcal{D} , obtuvimos la ecuación diferencial

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho(p_1)}{\rho(p)},$$

misma que puede reescribirse como

$$\frac{ds_1}{\rho(p_1)} = \frac{ds}{\rho(p)}. \quad (2.23)$$

Esto sugiere definir una medida en la σ -álgebra de Borel de \mathcal{C} , $\mu : \mathbf{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\mu(A) = \int_A \frac{ds}{\rho},$$

pues por la ecuación 2.23, μ es T -invariante.

En términos de μ la demostración de Jacobi puede ser escrita de la siguiente forma:

Demostración. (Del porismo de Poncelet para dos circunferencias)

Sean p y $p_j = T^{\circ j}(p)$ para $j = 1, 2, \dots, n$ los vértices de un polígono interinscrito a $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ con $p = p_n$. Tomemos cualquier otro punto $q \in \mathcal{C}$ y definamos similarmente $q_j = T^{\circ j}(q)$ para $j = 1, 2, \dots, n$, al ser μ T -invariante, tenemos las siguientes igualdades para las medidas de los arcos que se indica:

$$\mu(\widehat{p, q}) = \mu(\widehat{p_1, q_1}) = \mu(\widehat{p_2, q_2}) = \dots = \mu(\widehat{p_n, q_n}).$$

Pero por hipótesis $\mu(\widehat{p_n, q_n}) = \mu(\widehat{p, q_n})$, por lo tanto

$$\mu(\widehat{p, q}) = \mu(\widehat{p, q_n}). \quad (2.24)$$

Si $q_n \neq q$, debería suceder que $\widehat{pq_n} \subsetneq \widehat{pq}$ o bien $\widehat{pq} \subsetneq \widehat{pq_n}$ pero estas posibilidades implicarían respectivamente que $\mu(\widehat{pq_n}) < \mu(\widehat{pq})$ ó $\mu(\widehat{pq}) < \mu(\widehat{pq_n})$. Ambas desigualdades contradicen la ecuación 2.24, por lo que concluimos $q = q_n$, es decir $\mathcal{P}(q, q_1, \dots, q_n)$ es un polígono interinscrito a $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y \mathcal{D} es n -curva de Poncelet respecto a \mathcal{C} . \square

2.4.3. Dos elipses

Con algunas modificaciones, podemos repetir la obtención de una medida T -invariante para el caso en que $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es un par de elipses y dar el mismo argumento para concluir también en este caso el porismo de Poncelet. Usaremos el hecho de que las funciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectivas mapean cónicas en cónicas, preservan tangencia de rectas con estas curvas y preservan también razones entre magnitudes de segmentos. (Definimos de forma análoga la orientación en las elipses, la transformación de Poncelet T correspondiente y la función ρ).

Si aplicamos una de las funciones lineales antes mencionadas podemos suponer que \mathcal{D} es una circunferencia, coloquemos ejes coordenados x_1 y x_2 que pasen por el centro de \mathcal{C} y

contengan sus ejes de simetría de forma que tenga por ecuación una de la forma $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ para algunos a y b positivos.

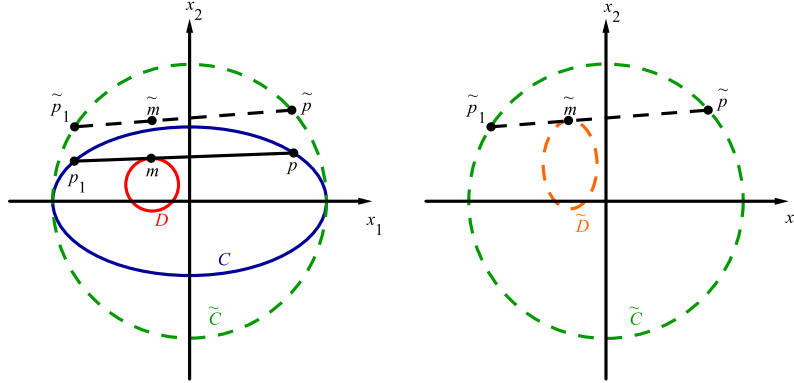


Figura 2.24: Llevando al caso anterior

Usando ahora la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{U} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \frac{b}{a}\tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

La elipse \mathcal{C} se mapea en la circunferencia $\tilde{\mathcal{C}}$ con ecuación $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = a^2$ y en general \mathcal{D} en una nueva elipse $\tilde{\mathcal{D}}$. El segmento $[p, p_1]$ que era tangente a \mathcal{D} en m es transformado en $[\tilde{p}, \tilde{p}_1]$ que es tangente a $\tilde{\mathcal{D}}$ en \tilde{m} , donde $\tilde{p} = U(p)$, $\tilde{p}_1 = U(p_1)$ y $\tilde{m} = U(m)$.

El parámetro \tilde{s} de longitud de arco en $\tilde{\mathcal{C}}$ como lo introdujimos en el caso anterior, también sirve como parámetro de longitud en \mathcal{C} asignando a cada $q \in \mathcal{C}$ el valor \tilde{s} que toma su transformado $\tilde{q} = U(q)$.

Ahora imitemos la construcción previa de μ reemplazando \mathcal{C} y \mathcal{D} por $\tilde{\mathcal{C}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}$ respectivamente hasta obtener la ecuación

$$\frac{d\tilde{s}_1}{d\tilde{s}} = \frac{[\tilde{p}_1, \tilde{m}]}{[\tilde{p}, \tilde{m}]} \quad (2.25)$$

(Obsérvese que en la subsección anterior se utiliza solamente una propiedad de semejanza de triángulos que aquí sigue cumpliéndose al ser $\tilde{\mathcal{C}}$ una circunferencia).

Por ser U preservadora de razones entre magnitudes de segmentos tenemos

$$\frac{[\tilde{p}_1, \tilde{m}]}{[\tilde{p}, \tilde{m}]} = \frac{[p_1, m]}{[p, m]}. \quad (2.26)$$

Pero $\rho(p) = [p_1, m]$ es igual a $\rho(p_1)$ por ser \mathcal{D} una circunferencia, por lo tanto de las ecuaciones 2.25 y 2.26 se sigue que

$$\frac{d\tilde{s}}{\rho(p)} = \frac{d\tilde{s}_1}{\rho(p_1)}.$$

Resultado que nos permite obtener una medida T -invariante también en este caso y repetir la prueba del porismo de Poncelet.

2.5. Conjugación topológica

En la demostración de Jacobi hemos concluido que la transformación de Poncelet iterada n veces es la identidad siempre que exista al menos un punto fijo apoyándonos en la existencia de una medida μ invariante bajo T . El porismo de Poncelet implica que en caso de que \mathcal{D} en el interior de \mathcal{C} estuviera colocada de tal forma que no pudiéramos obtener ningún n -ágono interinscrito, el conjunto $\mathcal{O}_T(p) := \{p, p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $p_1 = T(p)$ y $p_j = T(p_{j-1})$ para $j \geq 2$ sería infinito para cualquier $p \in \mathcal{C}$, en Sistemas Dinámicos $\mathcal{O}_T(p)$ suele llamarse la órbita de p bajo T ; si existe n tal que $p_n = p$ se dice que la órbita es periódica, con periodo n en caso de ser éste el mínimo natural posible con tal propiedad. En estos términos hemos probado que si T admite a un punto con órbita de periodo n , entonces todos los puntos de su dominio tienen igualmente órbitas n -periódicas, por otro lado, si un punto tiene órbita infinita, esta característica es compartida por el resto de puntos. Esto hace recordar una situación familiar que encontramos con un tipo especial de automorfismos en una circunferencia (homeomorfismos de la circunferencia en sí misma), preservadores de orientación: Las rotaciones por un ángulo dado.

Pensemos en una circunferencia en el plano complejo centrada en el origen y de perímetro unitario, denotémosle por K . Las rotaciones mencionadas son de la forma $z \xrightarrow{\rho_\alpha} e^{i2\pi\alpha} z$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, en este ejemplo al igual que en el porismo de Poncelet las órbitas bajo ρ_α son todas de periodo n si y sólo si α es de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n primos relativos o bien todas son infinitas para α irracional. Surge entonces el interés de investigar el problema de aparear de

alguna forma las transformaciones de Poncelet con las rotaciones en una circunferencia dada, si fuera posible hallar una analogía, tendríamos una mejor idea de qué tan poco común es la existencia de polígonos interinscritos en términos probabilísticos, dada la numerabilidad de los racionales, su medida cero en la recta real. De igual forma nos daríamos cuenta de lo extraordinario del porismo; eurísticamente, es casi imposible que exista un polígono interinscrito a un par de cónicas, pero de existir, hay una infinidad.

Sin embargo, hay automorfismos preservadores de orientación en las elipses que no pueden ser identificados con rotaciones en una circunferencia, por ejemplo, nombremos f_1 y f_2 a sus focos y asignemos a cada punto p su reflejado en la elipse $S(p)$ luego de lanzar un rayo de p con dirección a f_1 como muestra la figura siguiente:

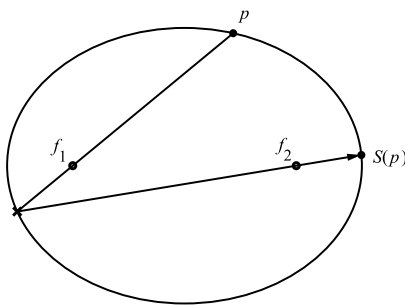


Figura 2.25: Un automorfismo preservador de orientación con dos puntos fijos que no es la identidad.

Entonces claramente S fija las intersecciones de la elipse con su eje mayor sin ser la transformación identidad, propiedad que no comparte con una rotación como las antes mencionadas. ¿Qué tendrá entonces de especial la transformación de Poncelet que pudiera permitir la identificación que hemos insinuado?, sabemos que es posible en su caso dar una medida invariante con ciertas propiedades adicionales. Aclaremos estas ideas introduciendo algunas definiciones para concluir el capítulo y tener un panorama más claro de cara a la generalización que emprenderemos en los capítulos siguientes.

Comenzaremos con identificar a la circunferencia K con el intervalo $[0, 1)$ y a cada rotación por un ángulo $2\pi\alpha$ con la traslación $\rho_\alpha : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$; $\rho_\alpha(x) = x \oplus \alpha$, donde \oplus es la suma módulo 1.

De regreso a la elipse \mathcal{C} , U será cualquier automorfismo preservador de orientación y diremos que una medida $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es *buena* si y sólo si cumple lo siguiente:

- $\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in \mathcal{C}$. (Las medidas que cumplen esta propiedad se llaman *no-atómicas*.)
- $\mu(\widehat{pq}) > 0$ para todo arco $\widehat{pq} \subset \mathcal{C}$ de longitud positiva.

Las medidas que obtuvimos en las demostraciones del porismo son ejemplos de buenas medidas, otro ejemplo de una buena medida en K (o cualquier circunferencia) es la que asigna a cada punto $x \in [0, 1)$ el valor $\lambda(x) = x$, es decir la longitud del arco medido desde el punto $1 + 0i$ que fue identificado con 0. Estas últimas son invariantes bajo rotaciones en los círculos.

En estos términos, formalizamos el apareamiento que mencionamos entre los automorfismos U y las rotaciones ρ_α en K en la siguiente:

Definición 2.3. *Equivalencia topológica.* Diremos que el automorfismo U es topológicamente equivalente a la rotación ρ_α si y sólo si existe un homeomorfismo preservador de orientación $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow K$ tal que $\rho_\alpha = \varphi \circ U \circ \varphi^{-1}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{U} & \mathcal{C} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K & \xrightarrow{\rho_\alpha} & K \end{array}$$

A la función φ se le llama *conjugación topológica* de U a ρ_α y al número $\theta(U) := \alpha$, *número de rotación* de U .

Y esto nos llevará a establecer el teorema de esta sección:

Teorema 2.6. *De conjugación topológica.* *La transformación U tiene una medida buena e invariante si y sólo si es equivalente topológicamente a una rotación en K .*

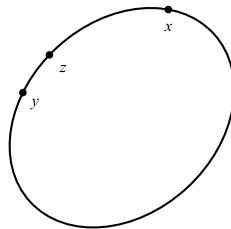
El cual usaremos para interpretar geoméricamente las transformaciones de Poncelet en términos de la rotación equivalente correspondiente y que además conjunta las ideas utilizadas en las demostraciones del capítulo, en especial exhibe que en cierto sentido la prueba de Jacobi es equivalente a la primer prueba que mostramos para el caso especial en que la transformación podía ser vista como una de Möbius.

En la demostración es necesario un lema previo:

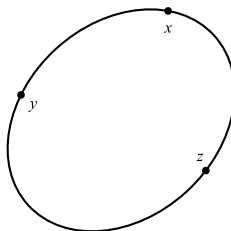
Lema 2.2. *Si μ es una medida finita ($\mu(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}^+$), no-atómica y U -invariante, entonces $\mu(\widehat{xU(x)})$ es constante para todo $x \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que las medidas finitas son medidas de probabilidad $\mu(\mathcal{C}) = 1$. Si tomamos cualesquiera 3 puntos x, y, z en la elipse tenemos 2 posibles casos:

1. z está en el interior de \widehat{xy} :



2. z está fuera del mismo arco:



(Todos los arcos son recorridos en sentido positivo, contrario a las manecillas del reloj). En el primer caso $\widehat{xz} \cup \widehat{zy} = \widehat{xy}$ y como $\widehat{xz} \cap \widehat{zy} = \{z\}$ y μ es no-atómica tenemos:

$$\mu(\widehat{xz}) + \mu(\widehat{zy}) = \mu(\widehat{xy}),$$

y análogamente

$$\mu(\widehat{yx}) + \mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{yz}),$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
& \mu(\widehat{xz}) + \mu(\widehat{zy}) + \mu(\widehat{yx}) + \mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{xy}) + \mu(\widehat{yz}) \\
\iff & \mu(\mathcal{C}) + \mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{xy}) + \mu(\widehat{yz}) \\
\iff & 1 + \mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{xy}) + \mu(\widehat{yz}) \\
\iff & \mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{xy}) \oplus \mu(\widehat{yz}).
\end{aligned}$$

En el segundo caso se sigue inmediatamente que $\mu(\widehat{xz}) = \mu(\widehat{xy}) + \mu(\widehat{yz}) = \mu(\widehat{xy}) \oplus \mu(\widehat{yz})$. Ahora, por ser μ U -invariante obtenemos usando lo anterior que

$$\mu(\widehat{yU(y)}) \oplus \mu(\widehat{U(y)x}) = \mu(\widehat{yx}) = \mu(\widehat{U(y)U(x)}) = \mu(\widehat{U(y)x}) \oplus \mu(\widehat{xU(x)}).$$

De donde se sigue que $\mu(\widehat{xU(x)}) = \mu(\widehat{yU(y)})$. □

Podemos ahora dar una demostración del teorema 2.6:

Demostración. Del teorema de conjugación topológica.

Sea φ una conjugación de U a alguna rotación ρ_α . Para todo boreliano A de \mathcal{C} definimos $\mu(A) = \lambda[\varphi(A)]$, puede verse fácilmente que μ cumple los requerimientos siguientes:

a. μ es una buena medida finita:

- i. $\mu(A) \geq 0$, $\mu(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}^+$ y $\mu(\emptyset) = 0$ son consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes de λ .
- ii. Si E_1, E_2, \dots es una colección numerable de borelianos disjuntos de \mathcal{C} , por ser φ biyectiva, la colección $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $F_j := \varphi(E_j)$ también disjunta y por la continuidad de φ^{-1} son además borelianos de K , por lo que la propiedad de σ -aditividad de μ es también heredada de la de λ .
- iii. Para cualquier punto $p \in \mathcal{C}$, claramente $\varphi(\{p\})$ consta de un solo punto x en K , por lo que $U(\{p\}) = \lambda(\{x\}) = 0$. Similarmente, por ser φ homeomorfismo, todo arco de longitud positiva $\widehat{ab} \subset \mathcal{C}$ tiene como imagen bajo φ un segmento $[x, y]$ en K de longitud positiva lo que implica $\mu(\widehat{ab}) = \lambda([x, y]) > 0$.

b. μ es T -invariante; en efecto, por definición de conjugación topológica: $\rho_\alpha \circ \varphi = \varphi \circ U$, por lo que para todo boreliano $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ se tiene $\mu[U(A)] = \lambda[(\varphi \circ U)(A)] = \lambda[(\rho_\alpha \circ \varphi)(A)] = \lambda[\varphi(A)] = \mu(A)$ por ser λ una medida ρ_α -invariante.

Viceversa, sea μ una buena medida finita y U -invariante. Recordemos que suponemos además sin pérdida de generalidad que μ es de probabilidad. Fijemos un punto $x \in \mathcal{C}$ y sean

$$\varphi(y) := \mu(\widehat{xy}) \text{ para } y \in \mathcal{C} \text{ y } \alpha := \mu(\widehat{xU(x)}).$$

φ es un homeomorfismo preservador de orientación de \mathcal{C} a K debido a las propiedades de μ y aplicando el lema 2.2 resulta finalmente:

$$(\rho_\alpha \circ \varphi)(y) = \mu(\widehat{xy}) \oplus \mu(\widehat{xU(x)}) = \mu(\widehat{xy}) \oplus \mu(\widehat{yU(y)}) = \mu(\widehat{xU(y)}) = (\varphi \circ U)(y).$$

Lo que muestra que φ es una conjugación topológica de U a ρ_α y más aún, $\theta(U) = \mu(\widehat{xU(x)})$. \square

En virtud del teorema 2.6 podemos dar una segunda reinterpretación la demostración de Jacobi que la hace aún más clara:

Corolario 2.6.1. Porismo de Poncelet en \mathbb{R}^2 .

Sean $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ un par de elipses en \mathbb{R}^2 con \mathcal{D} en el interior de \mathcal{C} y T la transformación de Poncelet correspondiente:

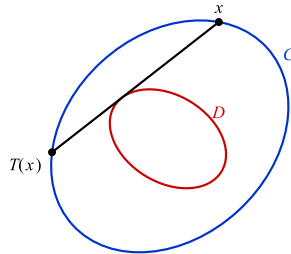


Figura 2.26: $[x, T(x)]$ tangente a \mathcal{D} .

Entonces si para algún natural $n \geq 3$, T^{on} tiene un punto fijo, puede concluirse que T^{on} es la identidad.

Demostración. Como T tiene una medida finita, buena e invariante, por el teorema 2.6 existe una rotación ρ_α en la circunferencia de longitud unitaria K que es topológicamente equivalente a T , por lo cual existe $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow K$, un homeomorfismo preservador de orientación tal que:

$$\rho_\alpha^{on} \circ \varphi = \varphi \circ T^{on}.$$

De donde $q = \varphi(p)$ es un punto fijo de ρ_α^{on} , pero esta función es de nuevo una rotación en la circunferencia K , como las rotaciones con puntos fijos necesariamente son la identidad tenemos:

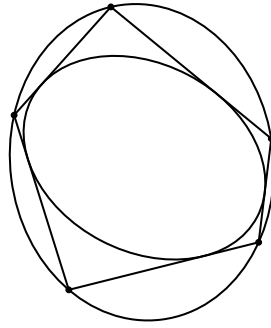
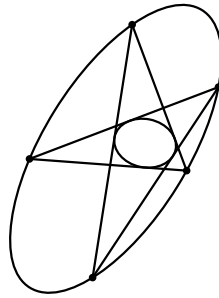
$$\begin{aligned} Id_K \circ \varphi &= \varphi \circ T^{on} \\ \iff \varphi^{-1} \circ \varphi &= T^{on} \\ \iff Id_C &= T^{on}. \end{aligned}$$

□

Obsérvese que independientemente de la existencia de puntos fijos, las transformaciones de Poncet son equivalentes topológicamente a una rotación, lo que permite una interpretación geométrica interesante respecto al número de rotación correspondiente que hemos denotado como $\theta(T)$, hay dos grandes casos:

1. $\theta(T) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: En este caso no hay puntos fijos; todas las órbitas bajo T son infinitas y forman vértices de poligonales que nunca cierran.
2. $\theta(T) \in \mathbb{Q}$: el número de rotación entonces puede escribirse en la forma $\frac{m}{n}$ con m y n . La interpretación geométrica es inmediata si se piensa en la circunferencia K y la rotación equivalente correspondiente; la órbita de un punto cualquiera da m vueltas alrededor de K para regresar a su posición inicial luego de n iteraciones. De vuelta en \mathcal{C} y la transformación de Poncelet, para números de rotación con $m = 1$ se tienen siempre polígonos interinscritos convexos, para $m \geq 2$ tenemos el caso interesante de polígonos estrellados y deducimos que estos son posibles a partir de $n = 5$, a saber, para número de rotación $\frac{2}{5}$. Obsérvese que no hay transformaciones de Poncelet con números de rotación $\frac{3}{5}$ ni $\frac{4}{5}$, pues son necesarias por lo menos 3 iteraciones para dar una vuelta en \mathcal{C} ; en otras palabras, los polígonos interinscritos del porismo de Poncelet como lo hemos estado viendo deben por lo menos tener 3 lados, esto se debe claramente a que probamos que toda transformación de Poncelet es equivalente a una rotación, no viceversa.

El primer caso así como en general el estudio de las cuartetos $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu, T)$ donde $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}), \mu)$ es un espacio de medida finita con μ T -invariante es visto a detalle en la Teoría Ergódica. Invitamos a profundizar sobre los resultados que hemos presentado en esta parte final del capítulo en [19]. Concluiremos con un par de figuras que ejemplifican la relación de los polígonos interinscritos con el número de rotación.

Figura 2.27: $\theta(T) = \frac{1}{5}$ Figura 2.28: $\theta(T) = \frac{2}{5}$

2.6. Comentarios

El desarrollo de la geometría proyectiva permitió no sólo comprender que el espacio natural donde es válido el porismo de Poncelet es el plano proyectivo complejo, sino utilizar las herramientas que permiten su estudio para volver al caso real que hemos explorado en este capítulo y obtener nuevos resultados y ejemplos como insinuamos en el capítulo de introducción. En las siguientes dos partes de la tesis presentamos el material necesario para entender la versión compleja del teorema de Poncelet, hemos incluido al principio de cada parte una guía con los resultados principales establecidos en cada capítulo a fin de que el lector familiarizado con la teoría básica de geometría proyectiva, superficies de Riemann y curvas elípticas pueda elegir qué secciones omitir, facilitando la lectura de la tesis.

Parte II

El plano proyectivo complejo

Guía para la parte II

Las subsecciones de cada capítulo están nombradas de manera que no haya confusión acerca de dónde se encuentra cada resultado o definición citado a continuación, para más detalle consúltese el índice general.

Al lector avanzado se le sugiere pasar directamente a la sección 4.5.

Capítulo 3

Objetivo. Aquí introducimos el espacio en el que trabajaremos, el plano proyectivo complejo y objetos geométricos básicos; punto-recta, curva algebraica y proyectividad.

Material expuesto.

1. Plano proyectivo complejo, plano afín y plano complejo extendido.
2. Rectas y principio de dualidad
3. Transformaciones proyectivas, determinación vía la imagen de 4 puntos.
4. Curvas algebraicas.

Capítulo 4

Objetivo. Estudiar las cónicas, sus intersecciones y formular la versión compleja del porismo de Poncelet.

Material expuesto.

1. Definición de cónica; cónicas degeneradas y no-degeneradas y preservación de las mismas bajo proyectividades.
2. El dual de una cónica y su ecuación.
3. Intersección de rectas y cónicas, tangencia.
4. Ecuación reducida de una cónica y parametrización.
5. Intersección de dos cónicas.
 - a) El número de intersección y el teorema de Bezout.
 - b) Tipos de intersección, posición general de dos cónicas.
 - c) Haces de cónicas.

- d)* Relación entre el tipo de intersección de dos cónicas y las cónicas degeneradas del haz correspondiente.
- 6. La versión compleja del porismo de Poncelet, definición de la variedad de Poncelet y su ecuación.

Bibliografía

Este material está basado en las obras de L. Flatto [6] y P. Samuel [20]. Para un tratamiento más profundo de los conceptos de curvas algebraicas, puede consultarse el libro de R. Hartshorne [10].

Capítulo 3

Nociones básicas de geometría proyectiva

Después de que Jacobi diera una prueba del porismo de Poncelet basada en propiedades de ciertas funciones elípticas, en tiempos recientes (1977-1978) Phillip Griffiths y Joe Harris generalizaron sus ideas dando una nueva prueba que utiliza técnicas algebraico-geométricas modernas que permitieron dar una versión del porismo de Poncelet en el plano proyectivo complejo. Este nuevo enfoque ha permitido el desarrollo de muchos trabajos recientes sobre el tema y muestra una vez más una conexión entre varios temas de las matemáticas, muchos incluso de interés actual por lo que consideramos conveniente presentar aquí algunos detalles.

Trabajaremos con cónicas en el plano proyectivo complejo \mathbb{P}_2 , un curso de geometría proyectiva comunmente no es obligatorio para un estudiante de licenciatura, por lo cual incluiremos aquí algunos conceptos y resultados necesarios para comprender parte del resto de la tesis. Comenzaremos por recordar cómo se define analíticamente \mathbb{P}_2 .

Definición 3.1. Dados un par de vectores x, y distintos del vector cero en \mathbb{C}^3 , se dice que x está relacionado con y , $x \sim y$ si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Siendo \sim claramente una relación de equivalencia, denotaremos a la clase de equivalencia de un vector por $\pi(x)$ y \mathbb{P}_2 se define de la siguiente forma:

Definición 3.2. El plano proyectivo complejo \mathbb{P}_2 es el conjunto de clases de equivalencia $\{\pi(x) \mid x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}\}$. Las clases de equivalencia son llamadas los puntos de \mathbb{P}_2 .

Dado $\pi(x) \in \mathbb{P}_2$ con $x = (x_1, x_2, x_3)$, los complejos x_i son llamados coordenadas ho-

homogéneas del punto, claramente un punto tiene una infinidad de coordenadas homogéneas difiriendo estas entre sí sólo por un factor de proporcionalidad complejo no nulo. A menos que sea posible confundirse, escribiremos simplemente x para referirnos al punto $\pi(x)$, así, x y y denotarán el mismo punto siempre que $x \sim y$.

El conjunto de puntos $p = \pi(x)$ del plano proyectivo en los cuales la tercer coordenada x_3 es no nula es llamado el **plano afín** A_2 . Todo punto del plano afín con coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) tiene también coordenadas $(X_1, X_2, 1)$ donde $X_1 = x_1/x_3$ y $X_2 = x_2/x_3$. El par (X_1, X_2) está formado por las llamadas **coordenadas afines** del punto correspondiente. De esta forma es posible identificar a A_2 con el plano complejo \mathbb{C}^2 , el conjunto de puntos $\mathbb{P}_2 \setminus A_2$ está formado por los llamados **puntos al infinito**.

De manera similar se define la recta afín \mathbb{P}_1 . Cada uno de sus puntos es una clase de equivalencia de vectores en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ siendo dichos vectores equivalentes si tienen coordenadas proporcionales, etc. Los puntos afines $\pi(x_1, x_2)$ de \mathbb{P}_1 son aquellos para los cuales $x_2 \neq 0$, los vectores de la forma (x_1, x_2) constituyen una sola clase $\pi(x_1, 0)$, la del llamado **punto al infinito**.

Los vectores (x_1, x_2) de una clase de equivalencia están unívocamente determinados por el número $t = x_1/x_2$ definiendo $t := \infty$ para el punto al infinito. La variable t varía toma valores en el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ y permite identificar a éste con la recta afín \mathbb{P}_1 , t suele llamarse un **radio coordenado homogéneo** en \mathbb{P}_1 lo cual abreviaremos simplemente como **r.c.h.**, un concepto que posteriormente será muy útil pues permitirá visualizar rectas y curvas en el plano complejo proyectivo como copias de $\widehat{\mathbb{C}}$.

3.1. Rectas y principio de dualidad

Para hablar de curvas de Poncelet en el plano proyectivo complejo evidentemente hay que introducir el concepto de recta para posteriormente dar una *euclidización* y definir de manera analítica qué significa ser tangente a una cónica y poder extender los resultados que hemos discutido en los capítulos anteriores. Una de las ventajas de trabajar en este espacio es que la representación analítica de punto y recta es para fines prácticos la misma, esto quedará claro un poco más adelante cuando hablemos del principio de dualidad.

Dados vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, sea $a \cdot x := a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$. Las rectas en \mathbb{P}_2 se definen de la manera siguiente:

Definición 3.3. Para $a \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, el conjunto $\ell_a = \{p = \pi(x) \mid a \cdot x = 0\}$ es llamado una recta en el plano proyectivo complejo

Observación 3.1. La definición de recta es correcta en el sentido de que un punto $p = \pi(x)$ pertenece a la recta ℓ_a independientemente del vector representante elegido x , pues claramente si $x \sim y$, $a \cdot y = \lambda a \cdot x = 0$.

Observación 3.2. Los puntos al infinito forman una recta ℓ_a con $a = (0, 0, 1)$, la llamada **recta al infinito** que suele denotarse por ℓ_∞ .

Si tomamos $a, b \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ con $a \sim b$, es decir $b = \lambda a$ para algún $\lambda \neq 0$; ℓ_a y ℓ_b son la misma recta pues es posible dividir la ecuación de ℓ_b entre λ para obtener la de ℓ_a . Por otro lado si $a \not\sim b$, $\{a, b\}$ es un conjunto linealmente independiente de \mathbb{C}^3 y sabemos por álgebra lineal que el sistema de ecuaciones $a \cdot x = 0$, $b \cdot x = 0$ que forman las ecuaciones de las rectas correspondientes tiene una única solución salvo un factor de proporcionalidad, esto es, las rectas se intersecan en un solo punto de \mathbb{P}_2 . Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema:

Teorema 3.1. Sean $a, b \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

i) Si $a \sim b$, entonces $\ell_a = \ell_b$.

ii) Si $a \not\sim b$, entonces ℓ_a y ℓ_b se intersecan en exactamente un punto.

De aquí observamos que las rectas están en correspondencia biunívoca con los puntos del plano proyectivo complejo formando ellas a su vez un plano proyectivo conocido como el **dual** de éste que suele denotarse por \mathbb{P}_2^* . Obviamente se toma como coordenadas homogéneas de una recta ℓ a aquellas de los vectores a para los que $\ell = \ell_a$, las coordenadas homogéneas en \mathbb{P}_2^* son llamadas las duales de las de \mathbb{P}_2 .

De la misma manera en que se habló de puntos en una recta en \mathbb{P}_2 , podemos hablar de rectas en un haz en el plano dual \mathbb{P}_2^* :

Definición 3.4. El conjunto de rectas en \mathbb{P}_2 que pasan por un punto dado $p \in \mathbb{P}_2$ es llamado **haz** y será denotado por p_* .

Si $p = \pi(x)$, el haz p_* consiste de las rectas para las que $a \cdot x = 0$, comparando ésto con la definición de recta podemos interpretar cada haz como una *recta* en \mathbb{P}_2^* . Aprovechando que la forma de entender analíticamente puntos y rectas es la misma se concluye el llamado **principio de dualidad** de la geometría proyectiva que establece a grandes rasgos que es posible intercambiar los términos *punto* y *recta* en los resultados demostrados para obtener nuevos igualmente válidos, el ejemplo más básico se tiene en el siguiente teorema, el dual del teorema anterior:

Teorema 3.2. Sean $a, b \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

- i) Si $a \sim b$, entonces ambos vectores definen el mismo haz (aquel de las rectas que pasan por el punto $\pi(a) = \pi(b)$).*
- ii) Si $a \not\sim b$, entonces los haces $\pi(a)_*$ y $\pi(b)_*$ tienen una única recta en común, dicho de otra forma, existe precisamente una recta que pasa por dos puntos dados.*

3.2. Transformaciones proyectivas

Son de gran importancia a la hora de probar un gran número de resultados, incluido el porismo de Poncelet, un tipo especial de funciones en el plano proyectivo llamadas **transformaciones proyectivas** o **proyectividades**; éstas tienen, entre otras, la propiedad de transformar rectas en rectas y como veremos más adelante, no sólo también cónicas en cónicas sino rectas tangentes a las mismas en rectas tangentes a las imágenes correspondientes. Poncelet de hecho explotó estas propiedades para dar una prueba de su teorema sabiendo que después de ciertas transformaciones de este tipo, todo caso puede llevarse al particular de dos circunferencias no concéntricas.

Como veremos enseguida, el álgebra lineal permite definir y dar propiedades inmediatas acerca de las proyectividades:

Definición 3.5. Dada una matriz de 3×3 no-singular con entradas complejas, sea

$$T(\pi(x)) := \pi(Ax), \quad \text{para } x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}. \quad (3.1)$$

T es una proyectividad de \mathbb{P}_2 .

T está bien definida en el sentido de que no depende de las coordenadas homogéneas x que se elijan para el punto, esto se sigue de la linealidad de la transformación $x \mapsto Ax$. Dado

que A es no-singular, T es una biyección en \mathbb{P}_2 , se dice así, que una ecuación del tipo $y = Ax$ con tales matrices, define una proyectividad y se suele interpretar también como un cambio de coordenadas homogéneas en \mathbb{P}_2 .

Observación 3.3. Directamente de la definición se tiene que las proyectividades en el plano proyectivo complejo forman un grupo con la composición.

Continuamos esta sección con las propiedades básicas de las proyectividades que mencionaremos como teoremas a continuación:

Teorema 3.3. *Sean A y B matrices complejas cuadradas de orden 3 no-singulares. Entonces $y = Ax$ y $y = Bx$ definen una misma proyectividad si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $B = \lambda A$*

Demostración. Si $B = \lambda A$ entonces $Bx = \lambda(Ax)$ y $\pi(\lambda(Ax)) = \pi(Ax)$ así que Ax y Bx son coordenadas homogéneas de un mismo punto por lo que $y = Ax$ y $y = Bx$ definen la misma proyectividad.

Viceversa, si $y = Ax$ y $y = Bx$ son la misma proyectividad, para cada $x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ Ax y Bx son coordenadas homogéneas de un mismo punto por lo que debe existir una constante correspondiente $\lambda(x) \neq 0$ con $Bx = \lambda(x)Ax$. Mostremos que $\lambda(x)$ es constante. Sea $C = A^{-1}B$, entonces

$$Cx = \lambda(x)x. \quad (3.2)$$

Sea $\{x, y\} \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Si el conjunto es linealmente independiente, entonces x, y y $x + y$ son vectores no-nulos y tenemos

$$\begin{aligned} \lambda(x+y)x + \lambda(x+y)y &= \lambda(x+y)(x+y) \\ &= C(x+y) = C(x) + C(y) \\ &= \lambda(x)x + \lambda(y)y. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De lo anterior y la independencia lineal se tiene en este caso que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Si el conjunto fuera linealmente dependiente existiría una constante no nula a tal que $y = ax$ y

$$\lambda(x)y = a\lambda(x)x = aC(x) = C(y) = \lambda(y)y, \quad (3.4)$$

lo que implica de nuevo $\lambda(x) = \lambda(y)$, por lo tanto $B = \lambda A$. \square

El siguiente hecho a destacar es como mencionabamos al principio de la sección el que las proyectividades mapeen rectas en rectas. Para ser más específicos, dada una matriz A si A^t denota la matriz transpuesta correspondiente y $A^* := (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, tenemos el siguiente

Teorema 3.4. *La proyectividad definida por $y = Ax$ mapea la recta ℓ_a en la recta ℓ_b con $b = A^*a$.*

Demostración. La ecuación de la recta ℓ_a vista en y -coordenadas es $a \cdot A^{-1}y = 0$ que es equivalente a $A^*a \cdot y = 0$ o bien $b \cdot y = 0$ que es la ecuación de la recta ℓ_b . \square

Así, la proyectividad $y = Ax$ en \mathbb{P}_2 induce la proyectividad $b = A^*a$ en \mathbb{P}_2^* .

Otra de las propiedades más utilizadas referente a este tipo de transformaciones es el hecho de que están determinadas si se conocen las imágenes de 4 puntos(rectas) en *posición general*, un conjunto de puntos(rectas) está en posición general si no hay entre ellos(ellas) 3 colineales(concurrentes). En términos de álgebra lineal, al pedir posición general pedimos que las coordenadas homogéneas de cualesquiera 3 puntos distintos del conjunto formen un conjunto de vectores linealmente independiente. Establecemos este resultado a continuación:

Teorema 3.5. *Sean $\{p^i\}$ y $\{q^i\}$, $1 \leq i \leq 4$, dos cuartetos de puntos en posición general de \mathbb{P}_2 . Existe una y sólo una transformación proyectiva que mapea p^i en q^i para $1 \leq i \leq 4$.*

Demostración. Mostremos primero la existencia de una de tales transformaciones. Sean x^i y y^i vectores de coordenadas homogéneas para los puntos p^i y q^i respectivamente. Por estar los puntos en posición general, $\{x^1, x^2, x^3\}$ es una base de \mathbb{C}^3 , por lo cual existen constantes λ_i tales que

$$x^4 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x^i. \quad (3.5)$$

Todas las constantes λ_i han de ser no-nulas debido de nuevo a la posición general de los puntos, así que $\{\lambda_1 x^1, \lambda_2 x^2, \lambda_3 x^3\}$ es también una base de \mathbb{C}^3 . Análogamente,

$$y^4 = \sum_{i=1}^3 \mu_i y^i, \quad (3.6)$$

para ciertas constantes no nulas μ_i y $\{\mu_1 y^1, \mu_2 y^2, \mu_3 y^3\}$ es también base de \mathbb{C}^3 .

Si A es la matriz no-singular para la cual

$$A(\lambda_i x^i) = \mu_i y^i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (3.7)$$

obtenemos por la linealidad de la transformación $y = Ax$ y las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) que

$$A(x^4) = y^4. \quad (3.8)$$

Concluimos por las ecuaciones (3.7) y (3.8) que $y = Ax$ define una proyectividad que mapea p^i en q^i para $1 \leq i \leq 4$.

Para la unicidad, sea B una matriz no-singular tal que la proyectividad definida por $y = Bx$ mapea p^i en q^i para $1 \leq i \leq 4$. Entonces existen constantes no-nulas $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ tales que

$$B(\lambda_i x^i) = \theta_i \mu_i y^i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (3.9)$$

y

$$B(x^4) = \theta_4 y^4. \quad (3.10)$$

Pero $B(x^4) = B(\sum_{i=1}^3 \lambda_i x^i) = \sum_{i=1}^3 B(\lambda_i x^i) = \sum_{i=1}^3 \theta_i \mu_i y^i$. Por otro lado $B(x^4) = \theta_4 y^4$ y $y^4 = \sum_{i=1}^3 \mu_i y^i$, así que podemos concluir

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i \mu_i y^i = \sum_{i=1}^3 \theta_4 \mu_i y^i. \quad (3.11)$$

Al ser $\{\mu_i y^i\}$, $1 \leq i \leq 3$ una base de \mathbb{C}^3 , (3.11) implica que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 tienen un valor común que denotaremos por θ y obtenemos por las ecuaciones (3.7) y (3.9) que $B(\lambda_i x^i) = \theta A(\lambda_i x^i)$ para $1 \leq i \leq 3$. Como $\{\lambda_i x^i\}$, $i \leq i \leq 3$ es una base de \mathbb{C}^3 se tiene finalmente $B = \theta A$ y por lo tanto la unicidad de la transformación mencionada. \square

3.2.1. Proyectividades en la recta

Las proyectividades en la recta proyectiva compleja se definen de manera análoga a las que hemos revisado para el plano, en términos de coordenadas homogéneas consideremos la proyectividad $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$ donde

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + bx_2, \\ y_2 &= cx_1 + dx_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Con $ad - bc \neq 0$.

En términos de los r.c.h. $t = x_1/x_2$ y $t' = y_1/y_2$, (3.12) se puede ver como una transformación de Möbius:

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}. \quad (3.13)$$

El significado de esta última ya sea cuando i) $t = -d/c$, $c \neq 0$ ó ii) $t = \infty$ se obtiene refiriéndose a (3.12). En el caso i), $y_2 = 0$, así que $t' = \infty$. En el caso ii), $x_2 = 0$, así que $t' = a/c$ si $c \neq 0$ y $t' = \infty$ si $c = 0$. Con tales convenciones, la ecuación (3.13) define a partir de la biyección de \mathbb{P}_1 en \mathbb{P}_2 , la correspondiente biyección de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Será de utilidad más adelante poder identificar de igual forma ciertas curvas en \mathbb{P}_2 con algún subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$, dar parametrizaciones. Para ejemplificar esto tomemos el caso más sencillo, rectas en el plano.

Sean $\ell \subset \mathbb{P}_2$ una recta y $\pi(a)$, $\pi(b)$ puntos distintos de la misma. La recta ℓ consiste entonces de los puntos de la forma $\pi(\lambda_1 a + \lambda_2 b)$ con $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Tenemos $\pi(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \pi(\lambda'_1 a + \lambda'_2 b)$ si y sólo si $(\lambda_1, \lambda_2) \sim (\lambda'_1, \lambda'_2)$ de modo que el vector $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2)$ funciona para dar coordenadas homogéneas a la recta ℓ .

A la totalidad de coordenadas homogéneas obtenidas de tal manera se le conoce como la **estructura proyectiva** de la recta ℓ . Observamos que tal estructura es la misma si se toman las coordenadas $\mu = A\lambda$ donde A es cualquier matriz de 2×2 no-singular.

Para λ_1, λ_2 coordenadas homogéneas en la recta ℓ , sea $t = \lambda_1/\lambda_2$. Entonces ℓ consiste en los puntos de la forma $\pi(\lambda_2(ta + b))$, $t \in \widehat{\mathbb{C}}$, definiendo $ta + b := a$ cuando $t = \infty$. Así t es un r.c.h. en ℓ y la función $t \mapsto \pi(\lambda_2(ta + b))$ es una biyección entre la recta y $\widehat{\mathbb{C}}$.

Podemos nombrar proyectividades entre dos rectas del plano, ℓ y ℓ' con r.c.h. t y t' respectivamente, a aquellas biyecciones que al expresarse en términos de estos radios sean una transformación de Möbius. Esta definición claramente no depende de la elección de los radios coordenados homogéneos. Una vez definido esto es natural tener el teorema siguiente:

Teorema 3.6. *Si T es una proyectividad en \mathbb{P}_2 que mapea la recta ℓ en la recta ℓ' y T_ℓ es la restricción de T a ℓ , entonces T_ℓ es una proyectividad entre ℓ y ℓ' .*

Demostración. Si T está dada por $y = Ax$ con A no-singular y $\pi(a)$, $\pi(b)$ son puntos distintos en ℓ , entonces $\pi(Aa)$ y $\pi(Ab)$ son puntos distintos de ℓ' . La recta ℓ consiste de los puntos de la forma $\pi(\lambda_2(ta + b))$ y ℓ' de los puntos $\pi(\lambda'_2(t'Aa + Ab))$ con $t, t' \in \widehat{\mathbb{C}}$. Como

$$T_\ell \circ \pi(\lambda_2(ta + b)) = \pi(\lambda'_2(t'Aa + Ab)), \quad t \in \widehat{\mathbb{C}}, \quad (3.14)$$

concluimos que en términos de t y t' , T_ℓ está dada simplemente por $t' = t$ y por tanto es una proyectividad entre las rectas mencionadas. \square

3.3. Curvas algebraicas

Nos interesa introducir el concepto de curva de Poncelet en \mathbb{P}_2 , aunque en los casos que trataremos aquí (cónicas) será posible dar parametrizaciones, la manera más fácil de entenderlas será en un principio como soluciones de ciertas ecuaciones polinómicas. Presentaremos pues, las definiciones principales y propiedades básicas que nos serán de ayuda más adelante.

Las curvas que veremos están ya sea en el plano afín o en el plano proyectivo complejos, para definir las es necesaria cierta terminología acerca de polinomios.

3.3.1. Polinomios

Recordamos que polinomio $p(x)$ en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ es una combinación lineal de los monomios de la forma $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, donde los índices i_j son enteros no-negativos definiéndose $x_j^{i_j} := 1$ cuando $i_j = 0$. Aquí utilizaremos combinaciones lineales sobre el campo de los complejos, naturalmente se define como el polinomio 0 a la combinación lineal cuyos coeficientes son todos nulos. La suma de polinomios y la multiplicación de los mismos por una constante se definen de la forma usual, el conjunto de estos polinomios suele denotarse por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

El grado (orden respectivamente) de un polinomio no nulo se define como el máximo (mínimo respectivamente) de los grados de los monomios que aparecen en él. En el caso del polinomio 0 el orden suele definirse como ∞ . El grado y orden de un polinomio p se denotarán respectivamente por $gr(p)$ y $ord(p)$.

Un polinomio P es llamado homogéneo de grado d o bien una forma de grado d si todos sus monomios son de grado d o equivalentemente si para toda constante λ se tiene $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$. Los polinomios homogéneos de grados 1 y 2 son llamados formas lineales y cuadráticas respectivamente.

Si $p = q \cdot r$, donde $p, q, r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, se dice que q y r son divisores de p y se escribe $q \mid p$ y similarmente el que q no sea divisor de p se denota por $q \nmid p$. Un polinomio se llama

irreducible si el hecho de que $p = q \cdot r$ implica que q ó r son polinomios constantes.

El conjunto $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tiene estructura algebraica de **dominio de factorización única**, es decir, cada polinomio es factorizable en polinomios irreducibles de forma única salvo un múltiplo constante y permutación en el orden de los factores.

3.3.2. Curvas en el plano afín y proyectivo

Una curva algebraica en \mathbb{C}^2 , llamada una **curva afín**, es el conjunto de puntos (x_1, x_2) tales que $p(x_1, x_2) = 0$ para un polinomio p de grado positivo. Una curva algebraica en el plano proyectivo complejo, llamada también simplemente **curva proyectiva**, es el conjunto de clases $\pi(x)$ tales que $P(x) = 0$ con P un polinomio de grado positivo d y homogéneo; observemos que la condición de homogeneidad garantiza que no haya dificultad con la elección del vector de coordenadas homogéneas del punto, pues si tomamos un vector equivalente $y = \lambda x$, se tiene $P(y) = P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ que se anulará siempre que se anule $P(x)$.

Las curvas afines y proyectivas están relacionadas de la siguiente manera: Si γ es una curva proyectiva con ecuación $P(x_1, x_2, x_3) = 0$, entonces la parte de γ en el plano afín A_2 , γ' , tiene ecuación $p(x_1, x_2) := P(x_1, x_2, 1) = 0$. Como se mencionó al principio del capítulo, A_2 puede ser identificado con el plano complejo, bajo esta identificación, γ' se convierte en una curva afín. Y viceversa, si γ' es una curva afín con ecuación $p(x_1, x_2) = 0$ y $d = \text{gr}(p)$ entonces $P(x_1, x_2, x_3) := x_3^d p(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ es un polinomio homogéneo de grado d y se tiene $p(x_1, x_2) = P(x_1, x_2, 1)$. Luego de identificar A_2 con \mathbb{C}^2 , la curva γ' se convierte en la parte afín de la curva proyectiva γ con ecuación $P(x_1, x_2, x_3) = 0$; γ es llamada la **completación proyectiva** de γ' . Esta completación consiste de γ' más los puntos al infinito $\pi(x_1, x_2, 0)$ que satisfacen $P(x_1, x_2, 0) = 0$.

Como era natural pensarse, las rectas tangentes a una curva algebraica se definen en términos de las derivadas parciales de los polinomios que las definen. Dado un polinomio p , su derivada parcial respecto a la variable x_i suele denotarse ya sea por $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, p_{x_i} o simplemente p_i . Concretamente la definición es la siguiente:

Definición 3.6. i) Sean γ una curva proyectiva con ecuación $P(x) = 0$ y $\pi(a) \in \gamma$. Si las derivadas parciales $P_i(a)$, $1 \leq i \leq 3$ no son todas 0, se dice que γ es no-singular o simple en $\pi(a)$ y se define la recta tangente a ella en tal punto mediante la ecuación

$$\sum_{i=1}^3 P_i(a)x_i = 0.$$

ii) Similarmente si $a = (a_1, a_2)$ es un punto de la curva $\gamma' \subset \mathbb{C}^2$ definida por $p(x_1, x_2) = 0$, γ' es no-singular (simple) en a siempre que las derivadas parciales $p_1(a)$ y $p_2(a)$ no sean ambas nulas y la ecuación de la recta tangente correspondiente es en este caso

$$\sum_{i=1}^2 p_i(a)(x_i - a_i) = 0.$$

Observación 3.4. En la definición de recta tangente para curvas proyectivas no hay problema con la elección del vector de coordenadas homogéneas a ; esto se sigue de que si el polinomio P es homogéneo de grado d , cada parcial P_i es un nuevo polinomio también homogéneo de grado $d - 1$.

Cuando una curva consta solamente de puntos simples se llama **suave**.

Las definiciones anteriores son consistentes, si $\gamma \subset \mathbb{P}_2$ es una curva algebraica con ecuación $P(x_1, x_2, x_3) = 0$ y γ' es la parte afín correspondiente dada por $p(x_1, x_2) = P(x_1, x_2, 1) = 0$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.7. i) Sea $\pi(a_1, a_2, 1) \in \gamma$. La curva γ es simple en $\pi(a_1, a_2, 1)$ si y sólo si γ' es simple en (a_1, a_2) .

ii) De ser así, la recta tangente a γ' en (a_1, a_2) es la parte afín de la recta tangente a γ en $\pi(a_1, a_2, 1)$.

Una demostración sencilla de este teorema utiliza el siguiente:

Lema 3.1. Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio homogéneo de grado d , entonces:

$$\sum_{i=1}^n x_i P_i(x) = dP(x). \quad (3.15)$$

Demostración. Por hipótesis tenemos:

$$P(tx_1, \dots, tx_n) = t^d P(x_1, \dots, x_n). \quad (3.16)$$

Podemos usar la regla de la cadena para derivar (3.16) respecto a t y obtener

$$\sum_{i=1}^n x_i P_i(tx_1, \dots, tx_n) = dt^{d-1} P(x_1, \dots, x_n). \quad (3.17)$$

Haciendo $t = 1$ en (3.17) se tiene el resultado. \square

Demostración. (del teorema 3.7).

i) Tenemos

$$P_i(x_1, x_2, 1) = p_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (3.18)$$

Utilizando esto junto con el lema anterior y el hecho de que $P(a_1, a_2, 1) = 0$ se tiene

$$P_3(a_1, a_2, 1) = -a_1 p_1(a_1, a_2) - a_2 p_2(a_1, a_2). \quad (3.19)$$

De las ecuaciones (3.18) y (3.19) concluimos que $p_i(a_1, a_2) = 0$, $1 \leq i \leq 2$, es equivalente a $P_i(a_1, a_2, 1) = 0$ para $1 \leq i \leq 3$. Por tanto γ' es no singular en (a_1, a_2) si y sólo si γ lo es en $\pi(a_1, a_2, 1)$.

ii) La tangente a γ en $\pi(a_1, a_2, 1)$ tiene ecuación

$$\sum_{i=1}^3 P_i(a_1, a_2, 1)x_i = 0.$$

La ecuación para la parte afín correspondiente se obtiene haciendo $x_3 = 1$ y por (3.18) y (3.19), esta ecuación es idéntica con la de la tangente a γ' en (a_1, a_2) .

\square

Los conceptos presentados anteriormente pueden resultar abstractos pero han sido introducidos en su tiempo en base a la intuición geométrica más natural, los hemos mostrado de esta forma por tratarse de herramientas técnicas que necesitaremos para presentar las cónicas de Poncelet generalizadas que ahora nos interesan. Un ejemplo sencillo que permite visualizar lo discutido previamente puede construirse restringiéndonos a coordenadas reales, (cada definición es análoga intercambiando papeles entre \mathbb{C} y \mathbb{R}) como se exhibe a continuación:

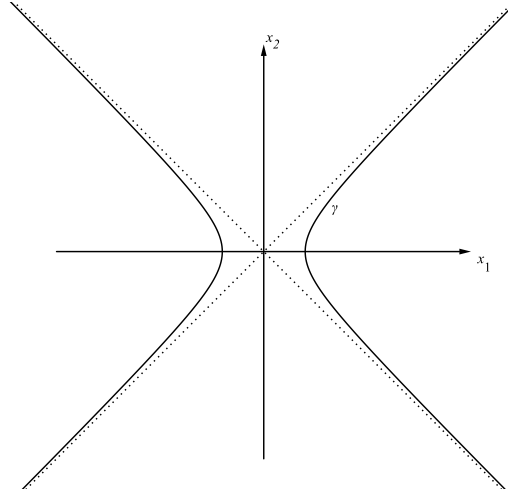


Figura 3.1: La hipérbola γ en el plano real

Ejemplo 3.1. Consideremos la hipérbola $\gamma' := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\}$. La completación proyectiva correspondiente γ está definida por la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$. Esta última curva contiene dos puntos al infinito; $\pi(1, 1, 0)$ y $\pi(1, -1, 0)$. Las rectas tangentes correspondientes tienen ecuaciones $x_2 = x_1$ y $x_2 = -x_1$ respectivamente, las asíntotas de la hipérbola original.

Antes de pasar a estudiar en específico la familia de curvas que nos interesa, veremos como se mencionó al inicio del capítulo, que las proyectividades se *comportan bien* respecto a la tangencia entre rectas y curvas algebraicas. Formalmente nos referimos al siguiente y último teorema de esta sección:

Teorema 3.8. *Sean $\gamma \subset \mathbb{P}_2$ una curva algebraica, $y = Ax$ una transformación proyectiva y $\bar{\gamma}$ la imagen de γ bajo dicha transformación. Entonces $\bar{\gamma}$ también es una curva algebraica proyectiva y la proyectividad mapea puntos simples y rectas tangentes de γ en puntos simples y rectas tangentes de $\bar{\gamma}$ respectivamente.*

Demostración. (Ver la notación y el resultado del teorema 3.4).

El hecho de que $\bar{\gamma}$ sea una curva algebraica es inmediato; sea $P(x) = 0$ la ecuación de γ donde P es un polinomio de grado positivo homogéneo en las variables $x = (x_1, x_2, x_3)$, entonces $\bar{\gamma}$ tiene ecuación $Q(y) := P(By) = 0$ con $B = A^{-1}$. Claramente Q es un polinomio homogéneo del mismo grado que P , así que $\bar{\gamma}$ es también una curva algebraica.

Sea ahora $\pi(a)$ un punto simple de γ , entonces $\nabla P(a) := (P_1(a), P_2(a), P_3(a)) \neq 0$. Veamos que si $b = Aa$ entonces $\pi(b)$ es un punto simple de $\bar{\gamma}$. Derivando con la regla de la cadena tenemos

$$\nabla Q(y) = \nabla(P(By)) = \nabla P(By)B = B^t(\nabla P(By)). \quad (3.20)$$

Evaluando lo anterior en $b = Aa$ resulta:

$$\nabla Q(b) = B^t(\nabla P(BAa)) = A^*(\nabla P(a)). \quad (3.21)$$

Como $\nabla P(a) \neq 0$ y A^* es no-singular, obtenemos que $\nabla Q(b) \neq 0$ y por tanto $\pi(b)$ es un punto simple de $\bar{\gamma}$.

Por definición, la ecuación de la recta tangente a $\bar{\gamma}$ en $\pi(b)$ es $\nabla Q(b) \cdot y = 0$, de la expresión que obtuvimos para $\nabla Q(b)$ en la ecuación (3.21) en términos de la matriz A y del teorema 3.4 se sigue que $y = Ax$ mapea la tangente a γ en $\pi(a)$ a la tangente a $\bar{\gamma}$ en $\pi(b)$. \square

3.3.3. Curvas en $\widehat{\mathbb{C}}^2$

Por razones técnicas a veces es necesario considerar también curvas en este espacio, de igual manera se llama curva algebraica a aquellos puntos $(x, y) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$ que satisfacen una ecuación del tipo $p(x, y) = 0$, donde p es un polinomio de grado positivo, definiendo esto de manera especial cuando x ó y son ∞ .

Sean $m = gr_x(p)$ y $n = gr_y(p)$ los grados del polinomio original p visto como polinomio en x y y respectivamente y defínanse los siguientes polinomios auxiliares:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= x^m p\left(\frac{1}{x}, y\right), \\ r(x, y) &= y^n p\left(x, \frac{1}{y}\right), \\ s(x, y) &= x^m y^n p\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Entonces el significado de $p(x, y) = 0$ cuando alguna de las variables es ∞ es el siguiente:

$$\begin{cases} p(\infty, y) = 0, & \text{si } y \neq \infty \text{ y } q(0, y) = 0, \\ p(x, \infty) = 0, & \text{si } x \neq \infty \text{ y } r(x, 0) = 0, \\ p(\infty, \infty) = 0, & \text{si } s(0, 0) = 0; \end{cases}$$

y estos puntos son llamados los *puntos infinitos* de la curva correspondiente.

Por otro lado, los puntos singulares se definen como sigue: Si a y b son distintos de ∞ entonces (a, b) es singular siempre que $p_x(a, b) = p_y(a, b) = 0$. Si $a = \infty$ y $b \neq \infty$, (a, b) es singular si $q_x(0, b) = q_y(0, b) = 0$. Definiciones similares se hacen para los casos $a \neq \infty$, $b = \infty$ y $a = b = \infty$.

En el contexto de lo expuesto hasta ahora, dedicaremos un capítulo a estudiar la familia de curvas algebraicas que nos interesará primeramente, una vez que entendamos qué es una cónica en \mathbb{P}_2 estaremos listos para proponer una versión del porismo de Poncelet en este espacio.

Capítulo 4

Las cónicas

Las cónicas en \mathbb{P}_2 presentan algunas diferencias con sus similares en el plano real como veremos en esta sección, contrario a lo que pudiera pensarse estas diferencias muchas veces se traducen en propiedades que facilitan entender y profundizar sobre las ideas que hemos presentado en el capítulo 2.

Una cónica como veremos en seguida, es simplemente una curva algebraica dada por una ecuación de grado 2.

Definición 4.1. Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz simétrica de 3×3 distinta de la matriz cero y $Q(x)$ la forma cuadrática asociada $x^t Ax = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} x_i x_j$, donde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Una curva algebraica $C \subset \mathbb{P}_2$ con ecuación $Q(x) = 0$ es llamada **cónica**.

Se puede probar, y de hecho lo haremos más adelante, que la matriz A determina la cónica salvo un factor constante.

Al igual que en el caso real se dice que la cónica es degenerada si la matriz correspondiente es singular, entre las propiedades preservadas por las proyectividades de las cónicas, la más elemental sea quizá la de ser degenerada o no serlo:

Proposición 4.1. *Toda proyectividad $y = Tx$ mapea cónicas degeneradas en cónicas degeneradas y no-degeneradas en no-degeneradas.*

Demostración. Si C es una cónica con ecuación $a^t Ax = 0$ entonces $T(C) = D$ donde D es la cónica con ecuación $y^t By = 0$ y $B = (T^{-1})^t AT^{-1}$. Tenemos entonces $\det B = \frac{\det A}{(\det T)^2}$ (recordemos que por definición T es no-singular), así que $\det A = 0$ si y sólo si $\det B = 0$. \square

Desde el punto de vista geométrico, la principal diferencia entre cónicas degeneradas y no-degeneradas está en la existencia de puntos singulares de las mismas. Las cónicas no-degeneradas son suaves, tienen una recta tangente para todo punto como muestra el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Una cónica es no-degenerada si y sólo si todos sus puntos son no-singulares.*

Demostración. Sea C una cónica con ecuación $Q(x) = x^t Ax = 0$, donde las entradas de la matriz A son $[a_{ij}]$, entonces:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (4.1)$$

Obsérvese que el sistema formado por las 3 ecuaciones anteriores es idéntico a $Ax = 0$, así que un punto singular de la cónica es todo aquel cuyo vector de coordenadas cumpla $Q(x) = 0$ y $Ax = 0$. Si A es no-singular entonces 0 es el único vector solución a las ecuaciones anteriores, mismo que no es representante de ningún punto. Por otro lado si A es singular, es posible hallar soluciones no nulas de las ecuaciones, es decir, puntos singulares de C . \square

Por otro lado, es sabido de álgebra lineal que una forma cuadrática $Q(x) = x^t Ax$ es irreducible siempre que A sea no-singular. Mientras que si A es singular entonces Q es el producto de dos formas lineales proporcionales cuando $\text{Rango}(A) = 1$ y no-proporcionales cuando $\text{Rango}(A) = 2$, de aquí se desprenden las siguientes observaciones:

- Observaciones 4.1.*
- i) Si $\text{Rango}(A) = 1$ entonces la cónica correspondiente es una recta (suele decirse que contada dos veces) y todos sus puntos son singulares.
 - ii) Si $\text{Rango}(A) = 2$ entonces la cónica es un par de rectas distintas que se cortan en un punto que es el único punto singular de la misma.

El siguiente paso importante pensando en Poncelet es hablar de las posibles situaciones en que pueden interactuar una recta y una cónica en el espacio proyectivo, estas de hecho marcan una primer diferencia con sus similares en el plano real.

4.1. Intersección con rectas

En el capítulo pasado definimos el concepto de recta tangente para curvas algebraicas en general, un nuevo objeto que es fundamental es el conjunto de todas las rectas tangentes a una cónica suave dada C , dicho subconjunto del plano dual \mathbb{P}_2^* es llamado naturalmente el *dual* de la cónica y denotado por C^* .

De la prueba del teorema 4.1 vemos que si una cónica suave C tiene ecuación $x^t Ax = 0$, la recta tangente en un punto $\pi(x) \in C$ está dada por ℓ_y donde $y = Ax$, de modo que una ecuación para la cónica dual C^* puede obtenerse sustituyendo $x = A^{-1}y$ en la ecuación de C :

$$(A^{-1}y)^t A(Ay) = 0 \iff y^t (A^t)^{-1} y = 0. \quad (4.2)$$

Como A es simétrica la anterior ecuación es $y^t A^{-1}y = 0$. De aquí se desprende el siguiente:

Resultado 4.1. *Si $C \subset \mathbb{P}_2$ es una cónica suave con ecuación $x^t Ax = 0$ entonces $C^* \subset \mathbb{P}_2^*$ es una cónica suave con ecuación $y^t A^{-1}y = 0$.*

Observemos cómo el hecho de que podamos manejar de igual manera rectas y puntos anaíticamente en este espacio, permite entender de forma más cómoda ciertos objetos, como es el caso del conjunto de rectas tangentes a una cónica.

A diferencia del plano real, en donde podía darse el caso en que una recta y una cónica no-degenerada no tuvieran puntos en común:

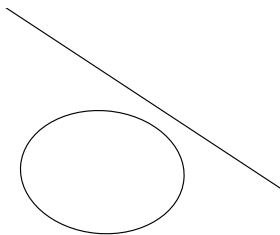


Figura 4.1: Una recta y una cónica con intersección vacía en \mathbb{R}^2

El tratar con puntos con coordenadas complejas nos da la siguiente *ventaja*:

Teorema 4.2. *Una cónica suave y una recta en el plano proyectivo complejo se intersecan siempre en 2 puntos, excepto cuando dicha recta es tangente a la cónica en cuyo caso solamente tienen el punto de tangencia en común.*

Demostración. Mediante una proyectividad podemos suponer que la recta mencionada, ℓ , tiene ecuación $x_3 = 0$. Sea $Q(x) = 0$ la ecuación de la cónica suave C , escribiremos Q en la forma:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + x_3L, \quad (4.3)$$

donde L es una forma lineal en las 3 variables x_i . Como observamos anteriormente, al ser C suave, la forma Q es irreducible, luego, a, b, c no son todos nulos pues de serlo $x_3 \mid Q$. Los puntos en $C \cap \ell$ satisfacen:

$$Q(x_1, x_2, 0) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0. \quad (4.4)$$

Por álgebra elemental $Q(x_1, x_2, 0)$ puede factorizarse en 2 formas lineales de alguna de las maneras siguientes:

$$Q(x_1, x_2, 0) = (\alpha x_1 + \beta x_2)^2, \quad \text{donde } (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \quad (4.5)$$

o bien:

$$Q(x_1, x_2, 0) = (\alpha x_1 + \beta x_2)(\gamma x_1 + \delta x_2), \quad \text{donde } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (4.6)$$

En el primer caso $(-\beta, \alpha, 0)$ corresponde al único punto de la intersección $C \cap \ell$. Claramente $\frac{\partial Q}{\partial x_1}(-\beta, \alpha, 0) = \frac{\partial Q}{\partial x_2}(-\beta, \alpha, 0) = 0$, por lo que ℓ es la tangente a C en $(-\beta, \alpha, 0)$.

Si se da (4.6), entonces $(-\beta, \alpha, 0)$ y $(-\delta, \gamma, 0)$ son los únicos puntos (distintos), de la intersección $C \cap \ell$. Calculando las parciales de Q y evaluándolas en $(-\beta, \alpha, 0)$ obtenemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \alpha(\alpha\delta - \beta\gamma), \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \beta(\alpha\delta - \beta\gamma). \quad (4.7)$$

Como $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, estas derivadas parciales no pueden ser ambas nulas, por lo tanto ℓ no es tangente a C en $(-\beta, \alpha, 0)$. Análogamente se prueba que ℓ no es tangente a C en $(-\delta, \gamma, 0)$. \square

Vale la pena establecer el dual del teorema que hemos probado, cuya validez se sigue obviamente del principio de dualidad:

Teorema 4.3. Dual del teorema 4.2 *Dado un punto y una cónica suave, existen 2 tangentes a la misma que pasan por dicho punto, a menos que éste pertenezca a la cónica, en cuyo caso existe una sola de tales rectas.*

Obviamente al igual que su dual, este teorema falla en \mathbb{R}^2 , pues no es posible hallar una tangente por ejemplo a una elipse, que pase por un punto en su interior:

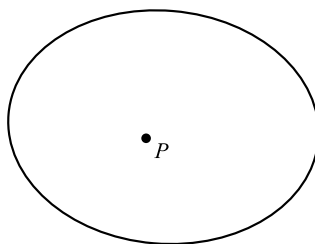


Figura 4.2: No es posible trazar una tangente a la elipse desde P

4.1.1. La ecuación reducida

Como una aplicación de las propiedades mencionadas hasta el momento, veremos cómo la ecuación de una cónica suave en \mathbb{P}_2 (a las que nos referiremos a veces simplemente como cónicas proyectivas) puede reducirse siempre a una forma sencilla módulo una transformación proyectiva. Esto no sólo mostrará una diferencia más respecto a las cónicas del plano real, sino que facilitará futuros cálculos:

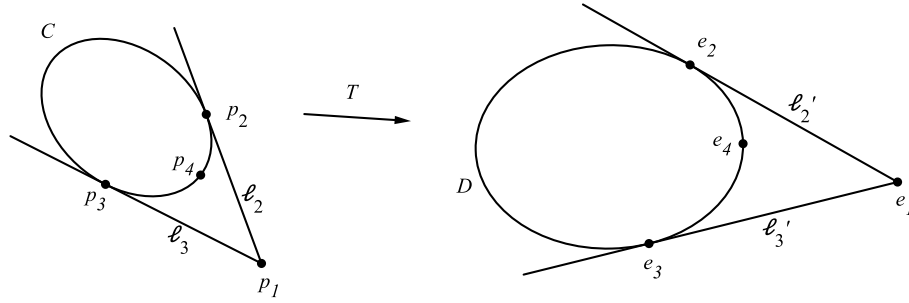
Proposición 4.2. *Dada una cónica suave C existe una proyectividad $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $T(C) = D$ donde D es una cónica con ecuación en (x, y, z)*

$$x^2 - yz = 0. \quad (4.8)$$

Demostración. Sean e_i , $1 \leq i \leq 3$ los vectores de la base canónica de \mathbb{C}^3 y $e_4 = \sum_{i=1}^3 e_i$. Claramente estos 4 vectores representan a 4 puntos distintos y en posición general en el plano proyectivo complejo, pensaremos en ellos en adelante como dichos puntos. Es evidente también que $e_i \in D$ para $2 \leq i \leq 4$.

Sean $p_2, p_3, p_4 \in C$ 3 puntos distintos y ℓ_2, ℓ_3 las tangentes a C en p_2 y p_3 respectivamente. Si $p_1 := \ell_2 \cap \ell_3$, por ser C suave y por los teoremas 4.2 (4.3), la cuarteta $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ está en posición general al igual que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; sea entonces T la proyectividad tal que $T(p_i) = e_i, 1 \leq i \leq 4$.

Como vimos anteriormente, $T(C) = D'$ donde D' debe ser también una cónica suave que contenga a los puntos e_i . Sea $Q(x, y, z) = 0$ una ecuación para D' donde



$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz.$$

Como D' contiene a e_2, e_3 y e_4 , tenemos:

$$Q(e_2) = b = 0, \quad Q(e_3) = c = 0, \quad Q(e_4) = a + b + c + d + e + f = 0. \quad (4.9)$$

Sean ℓ'_2 y ℓ'_3 las imágenes bajo T de ℓ_2 y ℓ_3 respectivamente, entonces ℓ'_2 y ℓ'_3 son tangentes a D' en e_2 y e_3 y se intersecan en e_1 . Como las z -coordenadas de e_1 y e_2 son nulas, ℓ'_2 tiene ecuación $z = 0$ y análogamente ℓ'_3 debe tener ecuación $y = 0$.

Por otro lado calculando directamente las derivadas parciales Q_x, Q_y, Q_z y evaluándolas en e_2 y e_3 obtenemos que ℓ'_2 y ℓ'_3 también tienen las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$dx + 2by + fz = 0, \quad ex + fy + 2cz = 0.$$

Por tanto

$$b = c = d = e = 0 \quad (4.10)$$

Concluimos de la última ecuación y de (4.9) que D' tiene ecuación $a(x^2 - yz) = 0$ que es equivalente a (4.8) y de aquí se sigue la proposición. \square

Observación 4.2. Como las proyectividades forman un grupo con la composición, el resultado anterior implica que toda cónica suave puede ser llevada a cualquier otra suave también, mediante una proyectividad. Esto marca otra gran diferencia con las cónicas suaves en el plano real, mismas que se clasificaban en elipses, parábolas e hipérbolas.

Como consecuencia de la anterior proposición, podemos por fin probar que la matriz que define una cónica es única módulo un factor de proporcionalidad, esto se establece formalmente en el siguiente teorema:

Teorema 4.4. Sean P y Q formas cuadráticas no-nulas en x, y, z . Las ecuaciones $P(x, y, z) = 0$ y $Q(x, y, z) = 0$ definen una misma cónica proyectiva si y sólo si existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $P = cQ$.

Demostración. Es claro que si $P = cQ$ la cónica en ambos casos es la misma.

Supongamos pues que ambas ecuaciones definen la misma cónica, distinguiamos dos casos:

- i *Ambas formas son reducibles.* Entonces existen formas lineales L_i , $1 \leq i \leq 4$ tales que $P(x, y, z) = L_1(x, y, z)L_2(x, y, z)$ y $Q(x, y, z) = L_3(x, y, z)L_4(x, y, z)$, si ℓ_i es la recta correspondiente a la ecuación $L_i(x, y, z) = 0$, la igualdad entre las cónicas implica

$$\ell_1 \cup \ell_2 = \ell_3 \cup \ell_4.$$

De aquí y del teorema 3.1 se sigue que los pares (ℓ_1, ℓ_2) y (ℓ_3, ℓ_4) son iguales y por lo tanto los pares de formas correspondientes (L_1, L_2) y (L_3, L_4) son proporcionales, lo que implica $P = cQ$ para algún $c \neq 0$.

- ii *Alguna de las formas es irreducible.* Sin pérdida de generalidad supongamos que lo es P , por la proposición anterior, mediante un cambio de coordenadas proyectivo podemos suponer $P = x^2 - yz$. Sean

$$P_*(x, y) = P(x, y, 1) = x^2 - y, \quad Q_*(x, y) = Q(x, y, 1).$$

Como $P_*(x, y) = 0$ y $Q_*(x, y) = 0$ definen la parte afín de una misma curva y $P_*(x, x^2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$, se debe cumplir lo mismo para Q_* :

$$Q_*(x, x^2) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}.$$

Aplicando el algoritmo de la división tenemos

$$Q_*(x, y) = P_*(x, y)R(x, y) + S(x, y), \quad (4.11)$$

donde R y S son polinomios. Haciendo $y = x^2$ en (4.11) obtenemos $S(x, x^2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$ lo cual implica $S = 0$ y $P_* \mid Q_*$. Como $gr(P_*) = 2$ y $gr(Q_*) \leq 2$ concluimos que $Q_* = cP_*$ para algún $c \in \mathbb{C}$ no-nulo, pero entonces también se tendrá al fin:

$$Q(x, y, z) = z^2 Q_*\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = cz^2 P_*\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = cP(x, y, z).$$

□

4.2. Estructura proyectiva y parametrización

Como comentamos anteriormente y como era natural pensarse, siendo una cónica suave una curva algebraica en \mathbb{P}_2 , es posible dar una identificación de la misma con $\widehat{\mathbb{C}}$ mediante una parametrización, como en el caso de las rectas. De igual forma podemos utilizar algunos de los resultados vistos hasta el momento para asociar a cada cónica suave, una estructura proyectiva:

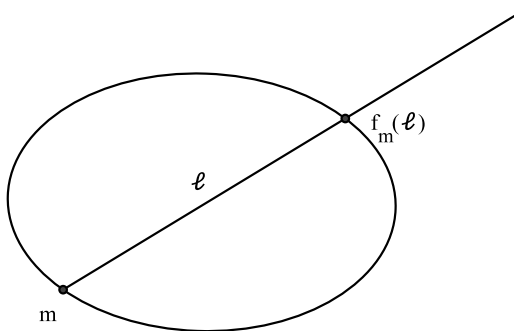


Figura 4.3: Una estructura proyectiva para la cónica.

Sean C una cónica suave, $m \in C$ y m_* el haz de rectas correspondiente. Como vimos anteriormente y se exhibe en la figura anterior, a excepción de la recta tangente a C en m , el resto de elementos de m_* intersecan a C en exactamente otro punto además de m , ese punto es denotado por $f_m(\ell)$ para cada recta $\ell \in m_*$ mientras que el valor de f_m para la recta tangente a C en m es precisamente m .

Así las cosas es posible dar una biyección entre m_* y C , también se pueden definir parametrizaciones para la cónica mediante la parametrización del haz m_* , es decir, si t es un r.c.h. en el haz m_* se puede hacer la parametrización de C en la forma $x(t) = f_m(\ell_{at+b})$; $t \in \widehat{\mathbb{C}}$, donde ℓ_a, ℓ_b son un par de rectas en m_* .

En la práctica puede hacerse lo siguiente:

Recordemos que toda cónica suave puede transformarse mediante una proyectividad en una nueva cónica D con ecuación

$$xz - y^2 = 0.$$

Es sencillo dar una parametrización en este caso, proponemos la función, $q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow D$ dada por:

$$q(t) = \begin{cases} (1, t, t^2) & \text{si } t \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{si } t = \infty. \end{cases} \quad (4.12)$$

Observaciones 4.3. i) $q(t)$ es inyectiva.

ii) $q(t)$ satisface $xz - y^2 = 0$ para todo $t \in \widehat{\mathbb{C}}$.

iii) Dado $\pi(x, y, z) \in D$ hay dos casos:

- $x = 0$. Entonces la ecuación de D implica $y = 0$ por lo que las coordenadas homogéneas de los puntos que se encuentran en la cónica son de la forma $(0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$ que es justo la clase de equivalencia de $q(\infty)$.
- $x \neq 0$. Entonces un punto de la cónica puede verse en términos de un vector de coordenadas homogéneas de la forma $(1, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^2})$ que claramente está en la imagen de la función q tomando $t = \frac{y}{x}$.

Por lo anterior q es una biyección entre D y $\widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, si se quiere dar una parametrización para una cónica suave cualquiera, basta encontrar una matriz no-singular A

tal que la proyectividad asociada $y = Ax$ mapee la cónica D en la cónica deseada, esto puede lograrse simplemente tomando 4 puntos distintos en D y sus correspondientes imágenes en la cónica a tratar para determinar, salvo por un factor de proporcionalidad, la matriz A de acuerdo a lo que se discutió en el teorema 3.5.

Las parametrizaciones que trataremos serán entonces de la forma

$$x(t) = Aq(t), \tag{4.13}$$

donde A es una matriz no-singular, q es la función definida previamente y $t \in \widehat{\mathbb{C}}$.

4.3. Intersección de dos cónicas

Nos hemos encontrado ya con el fenómeno de que toda recta interseca a una cónica, cuando hablamos de curvas de Poncelet consideramos siempre hasta ahora un par de cónicas reales con intersección vacía, resulta obvio esperar que esto no suceda en \mathbb{P}_2 . Nos gustaría entonces estudiar con cierto detalle las posibles intersecciones entre cónicas suaves antes de pensar en que puedan de alguna forma ser curvas de Poncelet entre sí.

Como es de esperarse algo similar ocurre al intersecar 2 cónicas, este hecho que resulta intuitivo, es consecuencia de un teorema más general muy conocido en geometría algebraica; el **teorema de Bezout**. Éste afirma que si $E(x) = 0$ y $F(x) = 0$ son un par de curvas algebraicas en \mathbb{P}_2 , cuyos polinomios no tienen factores en común, entonces el número de puntos de intersección es igual a $gr(E) \cdot gr(F)$ contando multiplicidades.

Así las cosas un par de cónicas suelen intersecarse en un total de 4 puntos, disminuyendo éstos cuando hay casos de tangencia entre ellas, pero manteniéndose en general si contamos multiplicidades. Desarrollaremos la herramienta necesaria para probar este hecho en este caso que nos interesa.

4.3.1. Números de intersección

El número de intersección entre dos curvas es una herramienta algebraica que eurísticamente informa *qué tan tangentes* son un par de curvas en un punto común, si bien la definición pudiera resultar muy técnica, contraintuitiva, resulta de gran ayuda rápidamente.

Comenzaremos por definirlos para curvas afines; sean $\mathbb{C}[x, y]$ el conjunto de polinomios con coeficientes complejos en x, y y $\mathbb{C}(x, y)$ el conjunto de funciones racionales $r(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$, donde $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ y $g(x, y)$ no es estrictamente cero.

Definición 4.2. *El anillo local de un punto.* Sea $p = (a, b) \in A_2$, se define el anillo local de p como sigue:

$$\mathcal{O}_p := \left\{ r = \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(x, y) \mid g(p) \neq 0 \right\}.$$

Observación 4.4. \mathcal{O}_p es en efecto, un anillo, para ello basta escribir la suma y el producto de dos formas racionales del supuesto anillo respectivamente como $\frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}$ y $\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$ y observar que éstas están bien definidas por ser $g_1(p) \neq 0$ y $g_2(p) \neq 0$.

Considérese ahora el ideal generado por dos polinomios $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y]$;

$$(f_1, f_2)_p := \{f_1 r_1 + f_2 r_2 \mid r_1, r_2 \in \mathcal{O}_p\}.$$

Vistos estos conjuntos; \mathcal{O}_p y $(f_1, f_2)_p$, como espacios vectoriales sobre \mathbb{C} , considérese el espacio cociente

$$\mathcal{O}_p / (f_1, f_2)_p.$$

Estamos listos ahora para definir el número de intersección de un par de curvas afines:

Definición 4.3. *Número de intersección de 2 curvas afines.* Sean $C_1, C_2 \subset A_2$ curvas afines con ecuaciones $f_1(x, y) = 0$ y $f_2(x, y) = 0$ respectivamente. El número o multiplicidad de intersección del par de curvas en el punto p está dado por:

$$I_p(C_1 \cap C_2) := \dim \mathcal{O}_p / (f_1, f_2)_p.$$

Observaciones 4.5. i) La definición anterior es simétrica respecto a las curvas mencionadas.

ii) La definición depende de las ecuaciones elegidas, es decir, el número puede variar por ejemplo entre tomar $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ y $f_1^2 = 0$, $f_2^2 = 0$. A pesar de que geoméricamente se trate del mismo objeto.

¿Qué información geométrica se consigue con el uso de este número?, quizá el hecho más elemental y que debía esperarse es el siguiente:

Proposición 4.3. *Con la notación de la definición anterior: $I_p(C_1 \cap C_2) > 0 \iff p \in C_1 \cap C_2$.*

Demostración. Utilizamos el hecho de que $\dim \mathcal{O}_p / (f_1, f_2)_p = 0$ si y sólo si $(f_1, f_2)_p = \mathcal{O}_p$. Si $p \in C_1 \cap C_2$ entonces $f_1(p) = f_2(p) = 0$, lo que implica $r(p) = 0$ para cualquier $r \in (f_1, f_2)_p$, así, $(f_1, f_2)_p$ es un subconjunto propio de \mathcal{O}_p , pues por ejemplo, el polinomio constante 1 está en $\mathcal{O}_p \setminus (f_1, f_2)_p$. Esto implica $\dim \mathcal{O}_p / (f_1, f_2)_p > 0$.

Si $p \notin C_1 \cap C_2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \notin C_1$, esto es $f_1(p) \neq 0$. Entonces $1 = f_1 \cdot \frac{1}{f_1} \in (f_1, f_2)_p$, así que para cualquier $r \in \mathcal{O}_p$; $r = 1 \cdot r \in (f_1, f_2)_p$, por lo que $\mathcal{O}_p = (f_1, f_2)_p$ y se sigue que $\dim \mathcal{O}_p / (f_1, f_2)_p = 0$. \square

Veamos un ejemplo sencillo:

Ejemplo 4.1. Sean C_1 y C_2 las curvas con respectivas ecuaciones $x = 0$ y $y = 0$, calculemos $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2)$, aquí denotamos por $\bar{0}$ al origen $(0, 0)$:

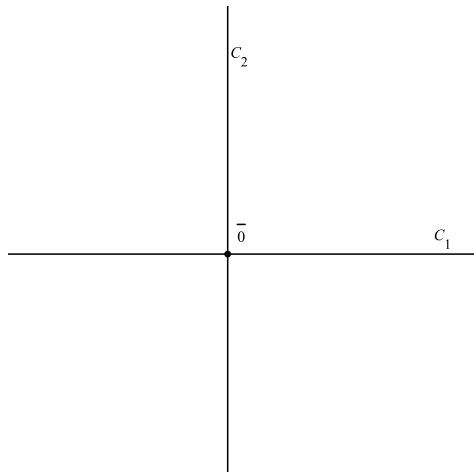


Figura 4.4: Ejemplo 4.1.

Como $\bar{0} \in C_1 \cap C_2$, tenemos por la proposición anterior $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) \geq 1$. Sospechamos que $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) = 1$, para obtener $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) \leq 1$ mostraremos que el polinomio constante 1 genera a $\mathcal{O}_{\bar{0}}$ mód $(x, y)_{\bar{0}}$:

Escribiremos a cada elemento $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{\bar{0}}$ en la siguiente forma:

$$\frac{f}{g} = \frac{f(\bar{0})}{g(\bar{0})} + \frac{h}{g \cdot g(\bar{0})}, \quad \text{donde } h := g(\bar{0})f - f(\bar{0})g. \quad (4.14)$$

Como $h(\bar{0}) = 0$, todos los monomios de h deben contener como factor ya sea a x ó y . Luego

$$h = h_1x + h_2y, \quad \text{con } h_1, h_2 \in \mathbb{C}[x, y], \quad (4.15)$$

así que $h \cdot \frac{1}{g \cdot g(\bar{0})} \in (x, y)_{\bar{0}}$. De las dos ecuaciones anteriores obtenemos $\frac{f}{g} = \frac{f(\bar{0})}{g(\bar{0})} \cdot 1$ mód $(x, y)_{\bar{0}}$, por lo tanto $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) = 1$.

El ejemplo anterior puede generalizarse de la siguiente forma:

Proposición 4.4. *Dadas dos curvas afines C_1, C_2 . $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) = 1$ si y sólo si C_1 y C_2 se intersecan transversalmente en $\bar{0}$, esto es, son suaves en este punto y con tangentes distintas en el mismo.*

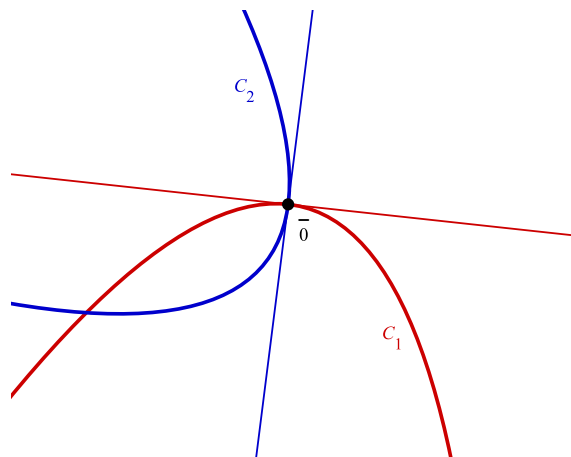


Figura 4.5: Proposición 4.4.

Demostración. Sean $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ecuaciones de C_1 y C_2 respectivamente. Como $f_1(\bar{0}) = 0$, se tiene $f_1 = ax + by + \Upsilon$, donde a, b son constantes y Υ denota a los términos de orden superior; al contener Υ monomios de grado por lo menos 2, éstos son divisibles ya sea por x^2 , y^2 ó xy , por lo que existen polinomios $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}[x, y]$ tales que $\phi_1(\bar{0}) = \phi_2(\bar{0}) = 0$ y $\Upsilon = x\phi_1 + y\phi_2$. Observaciones análogas aplican para f_2 , de manera que podemos escribir

$$\begin{aligned} f_1 &= (a + \phi_1)x + (b + \phi_2)y \\ f_2 &= (c + \psi_1)x + (d + \psi_2)y, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $\phi_1(\bar{0}) = \phi_2(\bar{0}) = \psi_1(\bar{0}) = \psi_2(\bar{0}) = 0$.

Supongamos que C_1 y C_2 son transversales en $\bar{0}$, esto es, sus tangentes que tienen ecuaciones respectivas $ax + by = 0$ y $cx + dy = 0$ se cortan en un solo punto, o sea $ad = bc \neq 0$. Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones (4.16) para x y y obtenemos:

$$x = \frac{(d + \psi_2)f_1 - (b + \phi_2)f_2}{\Delta}, \quad y = \frac{-(c + \psi_1)f_1 + (a + \phi_1)f_2}{\Delta}, \quad (4.17)$$

donde $\Delta = (a + \phi_1)(d + \psi_2) - (b + \phi_2)(c + \psi_1)$.

De (4.16) vemos que $f_1, f_2 \in (x, y)_{\bar{0}}$ y como $\Delta(\bar{0}) = ad - bc \neq 0$, obtenemos de (4.17) que $x, y \in (f_1, f_2)_{\bar{0}}$. Así concluimos $(f_1, f_2)_{\bar{0}} = (x, y)_{\bar{0}}$, que junto con el ejemplo 4.1 implican $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) = 1$.

Supongamos ahora que C_1 y C_2 no son transversales en $\bar{0}$, es decir $ad - bc = 0$; esto implica que alguna de las ecuaciones de las rectas tangentes es proporcional a la otra, sin pérdida de generalidad supondremos que $cx + dy = k(ax + by)$ para algún $k \in \mathbb{C} \setminus 0$. Sea $J := (x^2, y^2, xy, ax + by)_{\bar{0}}$ el ideal de $\mathcal{O}_{\bar{0}}$ generado por tales elementos, (4.16) nos permite concluir entonces que

$$(f_1, f_2)_{\bar{0}} \subset J.$$

Escogiendo un polinomio $\alpha x + \beta y$ no proporcional a $ax + by$, basta probar que $\{1, \alpha x + \beta y\}$ es linealmente independiente módulo $(f_1, f_2)_{\bar{0}}$ para obtener $I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) \geq 2$. Supongamos entonces que existen constantes complejas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 + c_2(\alpha x + \beta y) \in (f_1, f_2)_{\bar{0}}.$$

Como $(f_1, f_2)_{\bar{0}} \subset J$, tenemos

$$c_1 + c_2(\alpha x + \beta y) = \frac{rx^2 + sy^2 + txy + u(ax + by)}{v}, \quad (4.18)$$

donde $r, s, t, u, v \in \mathbb{C}[x, y]$ y $v(\bar{0}) \neq 0$. Haciendo $x = y = 0$ en (4.18) se tiene $c_1 = 0$.

Ahora multiplicamos por v en (4.18) y tenemos

$$c_2v(\alpha x + \beta y) = rx^2 + sy^2 + txy + u(ax + by).$$

Los términos lineales de los lados izquierdo y derecho de la ecuación anterior son respectivamente $c_2v(\bar{0})(\alpha x + \beta y)$ y $u(\bar{0})(ax + by)$, por lo que se tiene la igualdad:

$$c_2v(\bar{0})(\alpha x + \beta y) = u(\bar{0})(ax + by).$$

De la última expresión concluimos $c_2 = 0$, pues de lo contrario se contradice el que $ax + by$ no es proporcional a $\alpha x + \beta y$. Esto termina la prueba. \square

Lo que nos interesa ahora es extender la definición del número de intersección para curvas proyectivas para luego probar una versión especial del teorema de Bezout para cónicas, para ello será necesario un resultado con el que terminaremos esta subsección, para su demostración es necesario el siguiente:

Lema 4.1. *Toda $\psi \in \mathcal{O}_{\bar{0}}$ puede escribirse en la forma $\psi = H + \frac{K}{L}$; donde $H, K, L \in \mathbb{C}[x, y]$, $L(\bar{0}) \neq 0$ y $\text{ord}(K) \geq n$ para cualquier entero $n > 0$.*

Demostración. Observemos que dada ψ , podemos probar que se tiene la descomposición deseada si logramos hacerlo para $k\psi$, donde k es cualquier constante, por lo cual si $\psi = \frac{f}{g}$, podemos suponer $g(\bar{0}) = 1$. Sea entonces $t = 1 - g$, escribamos ψ de la manera siguiente:

$$\psi = \frac{f}{1-t} = f \cdot (1 + t + \cdots + t^{n-1}) + \frac{f \cdot t^n}{g}. \quad (4.19)$$

Como $t(\bar{0}) = 0$, $\text{ord}(t) \geq 1$, por lo cual $\text{ord}(f \cdot t^n) \geq n$ y se tiene en (4.19) una descomposición como la buscada. \square

El resultado calcula el número de intersección en $\bar{0}$ de una curva afín con la curva con ecuación $y = f(x)$, donde $f \in \mathbb{C}[x]$. Un argumento análogo prueba el resultado en general para cualquier punto p de intersección.

Teorema 4.5. Sean C_1 y C_2 curvas afines que se intersecan en $\bar{0}$ con ecuaciones $P(x, y) := y - f(x) = 0$ y $Q(x, y) = 0$ respectivamente. Si $P \nmid Q$, entonces $h_Q(x) := Q(x, f(x))$ no es idénticamente cero, y

$$I_{\bar{0}}(C_1 \cap C_2) = n$$

donde $n = \text{ord}(h_Q)$.

Demostración. Probemos primero que $h_Q \neq 0$. Consideremos Q como un polinomio en y con coeficientes en $\mathbb{C}[x]$ y dividamos entre $y - f(x)$ para obtener

$$Q(x, y) = R(x, y) \cdot (y - f(x)) + h_Q(x). \quad (4.20)$$

$h_Q(x)$ se obtiene al hacer en (4.20) $y = f(x)$, de aquí obtenemos debido a que $P \nmid Q$ que h_Q no es idénticamente cero y que $h_Q(0) = Q(0, 0) = 0$, lo cual implica que $n = \text{ord}(h_Q) > 0$.

Afirmamos ahora lo siguiente:

i) $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ genera $\mathbb{C}[x, y]$ mód $(P, Q)_{\bar{0}}$

Prueba: Como $n = \text{ord}(h_Q)$, $h_Q(x) = x^n \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es un polinomio con $\varphi(0) \neq 0$.

De la ecuación (4.20) obtenemos

$$x^n = \frac{Q - RP}{\varphi} \in (P, Q)_{\bar{0}}.$$

Luego

$$x^m \in (P, Q)_{\bar{0}}, \quad \text{para } m \geq n. \quad (4.21)$$

Sea $H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, podemos repetir la división de (4.20) con este nuevo polinomio para obtener

$$H(x, y) = R_H(x, y)P(x, y) + h_H(x), \quad (4.22)$$

donde R_H depende de H y

$$h_H(x) := H(x, f(x)). \quad (4.23)$$

Sea

$$h_H(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \Upsilon,$$

donde Υ de nuevo denota términos de orden superior. Entonces de (4.21) y (4.22) obtenemos

$$H = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \quad \text{mód } (P, Q)_{\bar{0}}. \quad (4.24)$$

ii) $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ **genera también** $\mathcal{O}_{\bar{0}}$ mód $(P, Q)_{\bar{0}}$

Prueba: Sea $\psi \in \mathcal{O}_{\bar{0}}$, usemos la descomposición del lema 4.1 para ψ con $n = \text{ord}(h_Q)$. Usando la misma notación, como $h_K(x) = K(x, f(x))$ y $\text{ord}(K) \geq n$, $\text{ord}(f) \geq 1$, tenemos $\text{ord}(h_K) \geq n$. Entonces por (4.21):

$$h_K = 0 \quad \text{mód } (P, Q)_{\bar{0}}. \quad (4.25)$$

Reemplazando H por K en la división de (4.22) y usando (4.25), obtenemos $K = 0$ mód $(P, Q)_{\bar{0}}$. Por lo tanto también se tiene

$$\frac{K}{L} = 0 \quad \text{mód } (P, Q)_{\bar{0}}. \quad (4.26)$$

Las ecuaciones (4.24) y (4.26) implican finalmente

$$\psi = H + \frac{K}{L} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \quad \text{mód } (P, Q)_{\bar{0}}.$$

iii) $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ **es linealmente independiente** mód $(P, Q)_{\bar{0}}$

Prueba: Supongamos que existen constantes c_i tales que $\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 0$ mód $(P, Q)_{\bar{0}}$, esto es, existen $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y]$ con $C(\bar{0}) \neq 0$ de manera que

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = \frac{(y-f)A + QB}{C}.$$

Multiplicando por C y haciendo $y = f(x)$, con la notación utilizada hasta ahora se tiene:

$$h_C(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = h_Q(x)h_B(x) = x^n \varphi(x)h_B(x). \quad (4.27)$$

Si no se tuviera $c_i = 0$ para todo i , sea j el índice más pequeño para el cual $c_j \neq 0$. El coeficiente de x^j en el lado izquierdo de la ecuación (4.27) es $h_C(0)c_j = C(\bar{0})c_j \neq 0$. Como $j < n$, el lado izquierdo de (4.27) no es divisible entre x^n mientras que el lado derecho claramente sí lo es, una contradicción. Concluimos que $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$, lo cual completa la demostración del inciso, que junto con el anterior implican la conclusión del teorema.

□

4.3.2. Un caso especial del teorema de Bezout

La definición de número de intersección puede extenderse fácilmente a el caso de curvas proyectivas convirtiendo coordenadas afines X, Y a coordenadas homogéneas x, y, z de la siguiente forma:

Sean $F(x, y, z)$ y $G(x, y, z)$ polinomios homogéneos del mismo grado. Una función racional de grado cero es de la forma $R(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{G(x, y, z)}$, el conjunto de todas estas funciones que denotaremos por $\mathbb{C}_0(x, y, z)$ resulta tener estructura de campo. $\mathbb{C}_0(x, y, z)$ y $\mathbb{C}(X, Y)$ pueden identificarse mediante las igualdades $X = \frac{x}{z}$ y $Y = \frac{y}{z}$.

Si tomamos $r = \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(X, Y)$, sea $n = \max(\text{gr}(f), \text{gr}(g))$; entonces $z^n f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ y $z^n g(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ son polinomios homogéneos de grado n en x, y, z y

$$r(X, Y) = \frac{f(X, Y)}{g(X, Y)} = \frac{z^n f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})}{z^n g(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})} \in \mathbb{C}_0(x, y, z). \quad (4.28)$$

Y viceversa, tomando $R = \frac{F}{G} \in \mathbb{C}_0(x, y, z)$, si $n = \text{gr}(F) = \text{gr}(G)$, entonces

$$R(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{G(x, y, z)} = \frac{z^n F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)}{z^n G(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)} = \frac{F(X, Y, 1)}{G(X, Y, 1)} \in \mathbb{C}(X, Y). \quad (4.29)$$

De aquí continuamos definiendo de la misma manera que para curvas afines; dado un punto $p \in \mathbb{P}^2$, se dice que una función $R = \frac{F}{G} \in \mathbb{C}_0(x, y, z)$ está definida en p si $G(p) \neq 0$, denotamos también por \mathcal{O}_p al anillo local en p ; el formado por todas las funciones racionales definidas en dicho punto.

Dados dos polinomios homogéneos F_1, F_2 en x, y, z , el ideal $(F_1, F_2)_p$ se define de manera ligeramente distinta;

$$(F_1, F_2)_p := \left\{ \frac{F}{G} \in \mathcal{O}_p \mid F = F_1 H_1 + F_2 H_2, \text{ con } H_1 \text{ y } H_2 \text{ polinomios homogéneos} \right\},$$

para llegar a la siguiente:

Definición 4.4. *Número de intersección de 2 curvas proyectivas.* Sean C_1 y C_2 curvas proyectivas con ecuaciones respectivas $F_1(x, y, z) = 0$ y $F_2(x, y, z) = 0$. El número de intersección de éstas en un punto p es

$$I_p(C_1 \cap C_2) = \dim \mathcal{O}_p / (F_1, F_2)_p.$$

Observación 4.6. Mediante las igualdades (4.28) y (4.29), dadas constantes a, b podemos identificar $\mathcal{O}_{(a,b,1)}$ con $\mathcal{O}_{(a,b)}$ y $(F_1, F_2)_{(a,b,1)}$ con $(f_1, f_2)_{(a,b)}$; donde $f_i := F_i(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ para $i = 1, 2$. Esto hace coincidir la definición anterior con la análoga para curvas afines, en los puntos de la forma $(a, b, 1)$.

Observación 4.7. El número de intersección de la definición 4.4 es invariante bajo transformaciones proyectivas, es decir, si T es una matriz de 3×3 no-singular con entradas complejas, entonces

$$I_p(C_1 \cap C_2) = I_{Tp}(T(C_1) \cap T(C_2)).$$

Esto se sigue del hecho de que el cambio de coordenadas homogéneas $x = T^{-1}y$ transforma polinomios homogéneos en x en polinomios homogéneos en y del mismo grado e induce mapeos biyectivos entre \mathcal{O}_p y \mathcal{O}_{Tp} , así como entre $(F_1, F_2)_p$ y $(G_1, G_2)_{Tp}$; donde $F_i = 0$ es una ecuación para la curva C_i y $G_i := F_i(T^{-1}(y))$ es una ecuación para su transformada bajo la proyectividad, con $i = 1, 2$.

El caso particular del teorema de Bezout que mencionamos habla de la suma de los números de intersección entre un par de cónicas, una de las cuales es suave, si bien el teorema original es mucho más general, para nuestros fines será suficiente la versión que a continuación presentamos.

Teorema 4.6. Sean $C, D \subset \mathbb{P}_2$ cónicas con C suave. La suma de las multiplicidades de los puntos de intersección de C y D es 4.

Demostración. Sean $p \in C$ y $q \in C \setminus D$, por la proposición 4.2 podemos elegir coordenadas de manera que $p = (0, 0, 1)$, $q = (0, 1, 0)$ y C tenga ecuación

$$yz - x^2 = 0.$$

Por otro lado sea $Q(x, y, z) = 0$ la ecuación de D , donde

$$Q = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz.$$

Claramente q es el único punto al infinito de C , por lo que $C \cap D$ debe consistir únicamente de puntos afines $(x, y, 1)$, por estar en C se tiene $y = x^2$, sustituyendo en la ecuación de D obtenemos una nueva expresión de la forma $h(x) = 0$, donde

$$h(x) := Q(x, x^2, 1) = bx^2 + dx^3 + (a + f)x^2 + ex + c.$$

El coeficiente principal de h es $b = Q(0, 1, 0)$ que es no nulo, pues $(0, 1, 0) = q \notin D$ por hipótesis, así que h es un polinomio de grado 4, factorizándolo tenemos

$$h(x) = \alpha \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i}, \quad \alpha \neq 0,$$

donde x_i son los k ceros de h con sus correspondientes multiplicidades m_i . Así, $\sum_{i=1}^k m_i = \text{gr}(h) = 4$.

Sean $p_i = (x_i, x_i^2, 1)$, $1 \leq i \leq k$ los puntos de intersección. Por el teorema 4.5, $I_{p_i}(C \cap D) = m_i$, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^k I_{p_i}(C \cap D) = \sum_{i=1}^k m_i = 4.$$

□

Suele llamársele *tipo de multiplicidad* al conjunto de multiplicidades o números de intersección de un par de cónicas, por el teorema anterior existen tantas como particiones de 4:

$$I = (1, 1, 1, 1), \quad II = (2, 1, 1), \quad III = (2, 2), \quad IV = (3, 1), \quad V = (4).$$

En la siguiente sección interpretaremos geoméricamente estos casos en términos del *haz de cónicas* generado por el par dado, en especial nos referiremos a ciertos elementos del mismo, sus cónicas degeneradas.

El primer caso es llamado genérico y se dice que las cónicas están en *posición general*, por lo que vimos anteriormente, aquí las curvas se intersecan transversalmente en cuatro puntos, mientras que en el resto de casos, no-genéricos, hay tangencia en los puntos con número de intersección mayor a 1. El porismo de Poncelet suele enunciarse para dos cónicas en posición general, aunque resulta cierto también en los demás casos con ciertas observaciones.

4.4. Haces de cónicas

Dadas dos cónicas distintas con ecuaciones $C(x) = 0$ y $D(x) = 0$, es natural construir nuevas curvas a partir de ellas simplemente tomando combinaciones lineales para tener ecuaciones de la forma $aC(x) + bD(x) = 0$ con $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Debido a que un par de formas cuadráticas determinan una misma cónica si y sólo si éstas son proporcionales entre sí, cada nueva cónica de la forma $aC(x) + bD(x) = 0$ es distinta a otra $cC(x) + dD(x) = 0$ si y sólo si (a, b) y (c, d) no son proporcionales, esto sugiere al igual que para los puntos de una recta o las rectas de un haz, asociar a cada elemento de esta nueva familia de curvas, un valor correspondiente de un r.c.h; en vez de pensar en $aC(x) + bD(x) = 0$, podemos tomar $\lambda C(x) + D(x) = 0$ con $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}}$, definiendo $\lambda C(x) + D(x) = C(x)$ para $\lambda = \infty$. Basados en lo anterior hacemos la siguiente:

Definición 4.5. Dadas un par de cónicas distintas con ecuaciones en $x = (x_1, x_2, x_3)$; $C(x) = 0$ y $D(x) = 0$, definimos el haz generado por las mismas, denotado por $\{C, D\}$ como sigue:

$$\{C, D\} := \{aC(x) + bD(x) = 0 \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}\},$$

o equivalentemente:

$$\{C, D\} = \{\lambda C(x) + D(x) = 0 \mid \lambda \in \widehat{\mathbb{C}}; \lambda C(x) + D(x) = C(x) \text{ si } \lambda = \infty\}.$$

Observaciones 4.8. 1. Los puntos $C \cap D$ claramente pertenecen a toda cónica de $\{C, D\}$, a éstos se les llama *puntos base* del haz.

2. Si $C_1, D_1 \in \{C, D\}$ son dos cónicas distintas, entonces $\{C, D\} = \{C_1, D_1\}$; cada par de cónicas con tal propiedad es llamado un *generador* del haz.

Existen haces de cónicas formados exclusivamente por cónicas degeneradas, por ejemplo el generado por $x^2 = 0$ y $y^2 = 0$. A nosotros nos interesa hablar de polígonos interinscritos a un par de estas curvas, por lo que consideraremos en adelante solamente haces que no estén formados únicamente por este tipo de cónicas, tales haces obviamente son llamados no-degenerados.

Reunimos en la siguiente proposición algunas de sus propiedades básicas:

Proposición 4.5. *Sea $\{C, D\}$ un haz no-degenerado. Entonces:*

- i) Los puntos base así como sus números de intersección son los mismos para cualquier par de generadores.*
- ii) Todo punto del plano que no sea punto base está contenido en precisamente un elemento del haz.*

Por otro lado, si p_i , $1 \leq i \leq 4$ son puntos en posición general, el conjunto de cónicas que los contienen forma un haz no-degenerado.

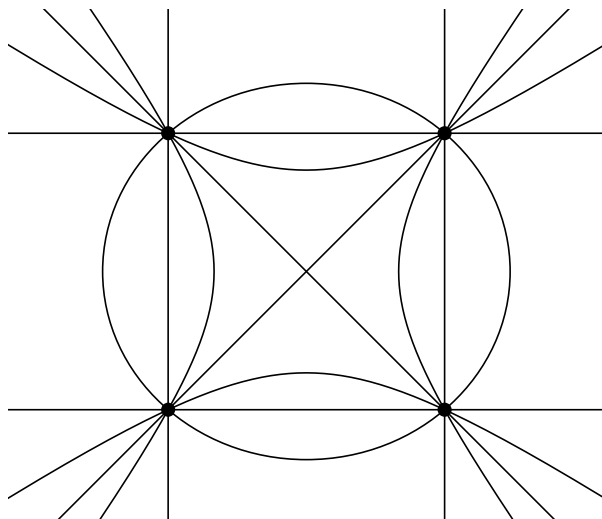


Figura 4.6: Un haz no-degenerado en el plano afín con cuatro puntos base

Demostración. i) Esto se sigue de que si C, D y C_1, D_1 son dos pares de generadores, entonces C_1 y D_2 como formas cuadráticas son combinaciones lineales de C y D y viceversa, por lo que los ideales $(C, D)_p$ y $(C_1, D_1)_p$ son iguales para cualquier $p \in \mathbb{P}_2$, lo que implica:

$$I_p(C \cap D) = I_p(C_1 \cap D_1).$$

- ii) Si p no es punto base, entonces $C(p)$ y $D(p)$ no son ambas nulas, por lo que la ecuación $aC(p) + bD(p) = 0$ tiene una solución para $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ salvo por un factor de proporcionalidad. Por lo tanto sólo una cónica de $\{C, D\}$ contiene a p .

Para la parte final, podemos hacer un cambio de coordenadas homogéneas de forma que $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0)$, $p_3 = (0, 0, 1)$ y $p_4 = (1, 1, 1)$. Sea $Q(x, y, z) = 0$ una ecuación

para una cónica que contenga estos 4 puntos, al ser $Q(p_i) = 0$ para $1 \leq i \leq 3$, Q debe ser de la forma

$$Q = dxy + exz + fyz.$$

Pero como también $Q(p_4) = 0$, tenemos $d = -(e + f)$. Por lo tanto el conjunto de cónicas que contienen estos puntos está determinado por las ecuaciones:

$$ex(z - y) + fy(z - x) = 0, \quad (e, f) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}. \quad (4.30)$$

La familia anterior puede verse como el haz generado por las cónicas con ecuaciones $x(z - y) = 0$ y $y(z - x) = 0$. El determinante asociado a la forma cuadrática definida por (4.30) resulta $\frac{1}{4}ef(e + f)$, por lo que el haz contiene únicamente 3 cónicas degeneradas correspondientes a los casos $e = 0$, $f = 0$ y $e + f = 0$. \square

4.4.1. Elementos degenerados de un haz

Como se mencionó al final de la sección anterior, los tipos de multiplicidad de dos cónicas están relacionados con las cónicas degeneradas del haz que determinan. Terminaremos esta sección mostrando la relación que existe.

En lo subsecuente nos referiremos a la cónica con ecuación $x^t C x = 0$ simplemente como C , es decir, denotaremos por C tanto a la curva como a la matriz de la forma cuadrática asociada, quedando claro por el contexto a qué nos referimos.

Como dijimos antes, centraremos nuestra atención en haces no-degenerados, lo primero que hay que preguntarse entonces es cuántas cónicas degeneradas pueden contener; si C y D son generadores, (podemos suponer $\det C \neq 0$ al tratarse de un haz no-degenerado) las posibles cónicas degeneradas del haz correspondiente deben tener ecuaciones de la forma

$$\lambda x^t C x + x^t D x = x^t (\lambda C + D)x = 0, \quad \text{para cierto } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Éstas serán degeneradas siempre que $\det(\lambda C + D) = 0$, ecuación que es un polinomio cúbico en λ , pues el coeficiente principal es $\det C \neq 0$, mismo que tiene por lo menos una y a lo más 3 soluciones. Resumimos lo aquí discutido en el siguiente:

Resultado 4.2. *Todo haz no-degenerado contiene por lo menos una y a lo más tres cónicas degeneradas.*

Vamos a introducir ahora una notación para un par de cónicas suaves C y D :

$$C \odot D := \{(p_i, m_i), 1 \leq i \leq k\},$$

donde p_i son los puntos de $C \cap D$ y m_i sus respectivas multiplicidades.

Por otro lado, dados puntos $a, b \in \mathbb{P}_2$:

- ℓ_{ab} es la recta que une a y b .
- Si $a \in C \cap D$ es un punto donde las cónicas se intersecan de manera no transversal, t_a denotara la recta tangente común en dicho punto.
- 2ℓ es la recta ℓ contada dos veces.

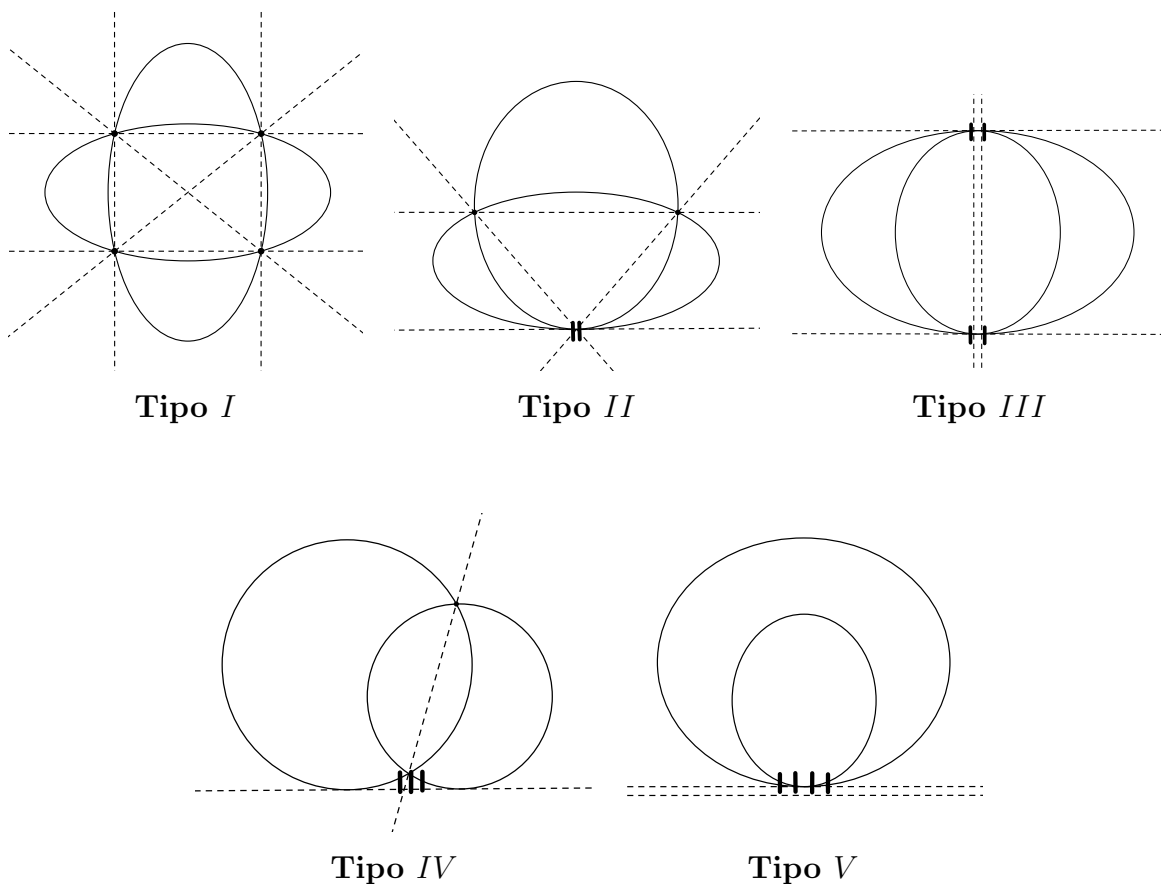
Afirmamos entonces que las cónicas degeneradas en $\{C, D\}$ dependen del tipo de multiplicidad y de $C \odot D$, según la siguiente tabla:

Tipo	$C \odot D$	Cónicas degeneradas en $\{C, D\}$
<i>I</i>	$(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)$	$\ell_{ab} \cup \ell_{cd}, \ell_{ac} \cup \ell_{bd}, \ell_{ad} \cup \ell_{bc}$
<i>II</i>	$(a, 2), (b, 1), (c, 1)$	$\ell_{ab} \cup \ell_{ac}, t_a \cup \ell_{bc}$
<i>III</i>	$(a, 2), (b, 2)$	$t_a \cup t_b, 2\ell_{ab}$
<i>IV</i>	$(a, 3), (b, 1)$	$\ell_{ab} \cup t_a$
<i>V</i>	$(a, 4)$	$2t_a$

Figura 4.7: Tabla de tipos de multiplicidad y cónicas degeneradas.

Observación 4.9. Para el caso genérico, la afirmación se sigue de la proposición 4.5 y del resultado 4.2; en efecto, si C y D se intersecan en cuatro puntos, éstos están en posición general pues toda línea interseca a una cónica suave en a lo más dos puntos. El haz que contiene a dichos puntos entonces es precisamente $\{C, D\}$. Como cada uno de los pares de rectas listados en la tabla contiene a a, b, c y d , por el resultado 4.2 éstos deben ser las cónicas degeneradas de $\{C, D\}$.

Éste y el resto de casos de la tabla se representan simbólicamente en la siguiente figura:



Para corroborar el resto de casos de la tabla hacen falta algunos resultados, el primero es una propiedad del par ordenado $C \odot D$ que introdujimos anteriormente:

Proposición 4.6. Sean C una cónica suave y D_1, D_2 cónicas distintas a C . Entonces $D_2 \in \{C, D_1\}$ si y sólo si $C \odot D_1 = C \odot D_2$.

Demostración. Si $D_2 \in \{C, D_1\}$, por el primer inciso de la proposición 4.5 se tiene $C \odot D_1 = C \odot D_2$.

Recíprocamente, sean D_1, D_2 cónicas distintas a C con $C \odot D_1 = C \odot D_2$. Podemos hacer un cambio de coordenadas homogéneas de manera que C tenga la ecuación reducida $x^2 - yz = 0$ y los puntos de la intersección $C \cap D_1$, (que son los mismos que $C \cap D_2$) estén en el plano afín.

Sean $D_i(x, y, 1) = 0$ ecuaciones para las partes afines de las cónicas D_i , $i = 1, 2$. Siguiendo la

demostración del teorema 4.6, podemos escribir

$$D_i(x, y, 1) = D_i(x, x^2, 1) = c_i \prod_{j=1}^k (x - x_j)^{m_j}, \quad c_i \neq 0, \quad (4.31)$$

donde $(x_j, x_j^2, 1)$, $1 \leq j \leq k$, son los puntos de intersección $C \cap D_1 = C \cap D_2$ de correspondientes multiplicidades m_j . Sea $D(x, y, z) = D_2(x, y, z) - \frac{c_2}{c_1} D_1(x, y, z)$. Por (4.31) tenemos

$$D(x, x^2, 1) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}. \quad (4.32)$$

Repitiendo el argumento de la prueba del teorema 4.4, podemos concluir a partir de (4.32) que existe una constante λ de manera que $D = D_2 - \frac{c_2}{c_1} D_1 = \lambda C$; por lo tanto $D_2 = \lambda C + \frac{c_2}{c_1} D_1$, es decir $D_2 \in \{C, D_1\}$. \square

Por supuesto también hace falta manejar los números de intersección entre una cónica suave y una degenerada; al consistir esta última siempre de una o dos rectas, el problema es básicamente conocer los posibles números de intersección entre una cónica suave y una recta. Por lo discutido en este capítulo sabemos ya que este número es cero si tomamos un punto que no esté en la intersección de las curvas y que es 1 si el punto se encuentra en la intersección y la recta no es tangente a la cónica en él.

Para el caso de una recta ℓ tangente a la cónica suave C en p , siempre es posible aplicar una proyectividad de forma que p sea el punto afín $(0, 0)$ y la ecuación de la parte afín de C sea $y - x^2 = 0$ (ver la proposición 4.2). Siendo que ℓ es tangente a C en p , debe tener ecuación $y = 0$, así que aplicando el teorema 4.5 con $P = y - x^2$ y $Q = y$ obtenemos $I_p(C \cap \ell) = 2$. Hemos probado el siguiente

Resultado 4.3. *Dadas una cónica C y una recta ℓ , tenemos para cualquier punto p :*

$$I_p(C \cap \ell) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \notin C \cap \ell \\ 1, & \text{si } \ell \text{ y } C \text{ se intersecan transversalmente en } p \\ 2, & \text{si } \ell \text{ es tangente a } C \text{ en } p \end{cases}$$

Esto nos permitirá conocer los números de intersección entre una cónica suave y una degenerada:

Proposición 4.7. *Si C es una cónica suave y D degenerada con $D = \ell_1 \cup \ell_2$, donde ℓ_1 y ℓ_2 son rectas no necesariamente distintas, tenemos para cualquier punto p :*

$$I_p(C \cap D) = I_p(C \cap \ell_1) + I_p(C \cap \ell_2)$$

Demostración. Si el punto no está en la cónica, por el resultado anterior se cumple la igualdad, ambos lados son cero. Pensemos entonces que $p \in C$ y elijamos coordenadas afines de manera que el punto sea $(0, 0)$ y la parte afín de la cónica tenga ecuación $y = x^2$. Para las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 tomemos respectivamente

$$L_1(x, y) := a_0 + a_1x + a_2y = 0, \quad L_2(x, y) := b_0 + b_1x + b_2y = 0,$$

con $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Así las cosas D debe tener ecuación $L_1 \cdot L_2 = 0$. Sean

$$h_i(x) := L_i(x, x^2), \quad i = 1, 2 \quad \text{y} \quad h(x) = h_1(x)h_2(x).$$

Por el teorema 4.5 tenemos

$$I_p(C \cap \ell_i) = \text{ord}(h_i) \quad i = 1, 2 \quad \text{y} \quad I_p(C \cap D) = \text{ord}(h). \quad (4.33)$$

Como $\text{ord}(h) = \text{ord}(h_1) + \text{ord}(h_2)$, la proposición se sigue en este caso de las ecuaciones (4.33). \square

Para así poder justificar cada caso incluido en la tabla de la figura 4.7, revisemos por ejemplo el tipo *III*, el resto se verifica de forma análoga:

Usando la misma notación, sean C y D con $C \odot D = \{(a, 2), (b, 2)\}$, donde $\{a, b\} = C \cap D$. Por la proposición 4.6 una cónica degenerada D_1 pertenece al haz $\{C, D\}$ si y sólo si

$$C \odot D_1 = \{(a, 2), (b, 2)\},$$

lo anterior equivale a

$$I_a(C \cap D_1) = I_b(C \cap D_1) = 2. \quad (4.34)$$

Combinando finalmente el resultado 4.3 y la proposición 4.7, concluimos que D_1 satisface la ecuación (4.34) si y sólo si $D_1 = t_a \cup t_b$ ó $D_1 = 2\ell_{ab}$ como se afirma en la tabla; la información de la misma puede usarse para determinar finalmente, el tipo de multiplicidad de dos cónicas suaves en los términos que estableceremos en el último teorema de esta sección.

Teorema 4.7. *Sean C y D cónicas suaves, M su tipo de multiplicidad y n el número de soluciones distintas de la ecuación*

$$p(\lambda) := \det(\lambda C + D).$$

Entonces

$$M = \begin{cases} I & \text{si } n = 3 \\ II \text{ ó } III & \text{si } n = 2 \\ IV \text{ ó } V & \text{si } n = 1 \end{cases} . \quad (4.35)$$

Además los tipos de los casos $n = 2$ y $n = 1$ se deciden como sigue:

- i) Si $n = 2$, entonces $M = II$ si $\text{Rango}(\lambda C + D) = 2$ para ambas soluciones de $p(\lambda) = 0$ y $M = III$ si $\text{Rango}(\lambda C + D)$ toma los valores 1 y 2 en las soluciones de $p(\lambda) = 0$.*
- ii) Si $n = 1$, entonces $M = IV$ si $\text{Rango}(\lambda C + D) = 2$ en la solución de $p(\lambda) = 0$ y $M = V$ si $\text{Rango}(\lambda C + D) = 1$ en la solución de $p(\lambda) = 0$.*

Demostración. Sea m el número de cónicas degeneradas del haz $\{C, D\}$. Según la tabla de la figura 4.7 la ecuación (4.35) se cumple si se sustituye n con m , pero siguiendo el razonamiento que nos llevo a concluir el resultado 4.2 sabemos que $m = n$. Los incisos *i* y *ii* se siguen de la información dada en la tabla mencionada y de las observaciones 4.1. \square

4.5. El replanteamiento del porismo de Poncelet

Habiendo estudiado esta generalización de las cónicas del plano real, estamos listos para presentar una versión *compleja* del porismo de Poncelet. Hemos de tener en cuenta las diferencias encontradas; la más clara, en la versión del plano real teníamos una curva contenida en el interior de otra. En el plano proyectivo complejo como hemos visto, todo par de cónicas tiene intersección no vacía, aunque pareciera estar en conflicto con la versión real (puede ahora llamársele también afín), debe resultar claro que en aquella, las extensiones proyectivas de

las cónicas involucradas se intersecan también, en puntos al infinito.

El extender el concepto de curva de Poncelet a este espacio no es con simple afán de generalizar lo más posible lo que hemos estudiado antes, sino profundizar en ello mismo; como hemos visto, toda cónica proyectiva tiene su parte afín donde tienen validez las ideas y resultados que discutimos en los primeros dos capítulos, sin embargo, las herramientas algebraicas y analíticas que permiten manejar las cónicas proyectivas complejas son más poderosas, y como veremos en los siguientes capítulos, permitirán no sólo entender con más claridad la prueba del porismo, sino dar condiciones necesarias y suficientes para que suceda el fenómeno de que una cónica sea n -curva de Poncelet respecto a otra. Así las cosas, la versión *moderna* del porismo de Poncelet que ahora estudiaremos es la siguiente:

Teorema 4.8. Porismo de Poncelet en \mathbb{P}_2 .

Sean C y D dos cónicas suaves en posición general. Si existe un polígono de n lados interinscrito al par (C, D) , entonces D es n -curva de Poncelet respecto a C .

Por supuesto los conceptos de polígono interinscrito y n -curva de Poncelet se definen de forma idéntica que sus análogos en el plano afín; un polígono de n lados con vértices $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{P}_2$ está interinscrito al par (C, D) si $p_i \in C$ para $1 \leq i \leq n$ y las rectas determinadas por los pares de puntos $(p_1, p_2), (p_2, p_3), \dots, (p_n, p_1)$, pertenecen a la cónica dual D^* . Por otro lado, D es n -curva de Poncelet respecto a C si para todo $p \in C$ existe uno de los polígonos descritos previamente con vértice en p .

Al igual que hicimos en el caso real, es conveniente reformular el teorema 4.8 como sigue. Sean

$$\mathcal{P} := \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*, x \in \xi\},$$

y $\sigma, \tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ dadas por

$$\sigma(x, \xi) = (x', \xi), \quad \tau(x', \xi) = (x', \xi'),$$

donde x' es la otra intersección de ξ con C y ξ' la otra tangente a D desde x' .

Los mapeos σ y τ son llamados *involuciones* (por tener periodo dos; $\sigma^2 := \sigma \circ \sigma = \tau \circ \tau = Id$) y su composición:

$$\eta := \tau \circ \sigma, \quad \eta(x, \xi) = (x', \xi'),$$

que es una biyección de \mathcal{P} , nos permite replantear el teorema como sigue.

Replanteamiento del teorema 4.8. *Si η^n tiene un punto fijo, entonces η^n es la identidad en \mathcal{P} .*

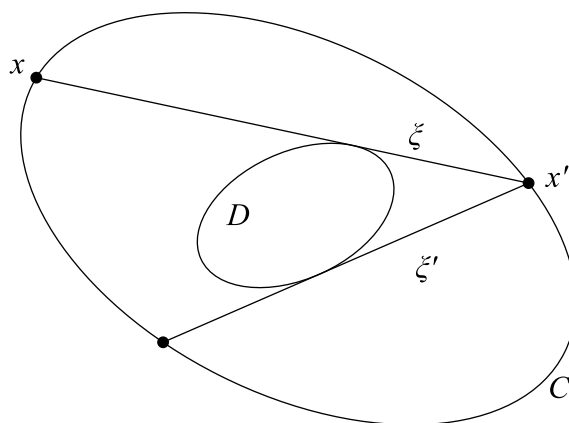


Figura 4.8: La transformación η .

Llamaremos mapeo de Poncelet a la función η . El objeto que comenzaremos a estudiar ahora, y al que incluso dedicaremos el capítulo siguiente, es \mathcal{P} .

4.5.1. La variedad de Poncelet

El conjunto \mathcal{P} suele llamarse correspondencia o curva de Poncelet, para evitar confusión con el concepto de n -curva de Poncelet, lo llamaremos simplemente como indica esta subsección. El entender las propiedades de \mathcal{P} nos llevará a los objetivos que mencionamos al principio de la sección; la comprensión más a fondo de la demostración del porismo de Poncelet y el saber cuándo un par de cónicas admite un polígono interinscrito.

Se puede asociar una ecuación algebraica a la variedad de Poncelet que la deja ver como una curva en $\widehat{\mathbb{C}}^2$. Recordemos que la función $q(t)$ de la sección 4.2 definida como

$$q(t) = \begin{cases} (1, t, t^2) & \text{si } t \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{si } t = \infty \end{cases}, \quad (4.36)$$

nos permite parametrizar las cónicas C y D^* como sigue:

$$x = x(r) := Aq(r), \quad r \in \widehat{\mathbb{C}}, \quad (4.37)$$

$$\xi = \xi(s) := Bq(s), \quad s \in \widehat{\mathbb{C}}, \quad (4.38)$$

donde A y B son ciertas matrices no-singulares de 3×3 con entradas complejas, las ecuaciones (4.37) y (4.38) dan biyecciones entre $\widehat{\mathbb{C}}$, y C y D^* respectivamente. Como $(x, \xi) \in \mathcal{P}$ si y sólo si $x \cdot \xi = 0$, la variedad puede identificarse con la curva $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ con ecuación $P(r, s) = 0$, donde

$$P(r, s) = x(r) \cdot \xi(s) = Aq(r) \cdot Bq(s) = B^t Aq(r) \cdot q(s). \quad (4.39)$$

Sea $T = [t_{ij}] := B^t A$, entonces

$$P(r, s) = \sum_{i=0}^2 T_i(r) s^i, \quad \text{donde } T_i(r) = \sum_{j=0}^2 t_{ij} r^j.$$

Los valores de $T_i(\infty)$ y $P(r, \infty)$ están dados por (4.36):

$$T_i(\infty) = t_{i2}, \quad 0 \leq i \leq 2, \quad (4.40)$$

$$P(r, \infty) = T_2(r), \quad r \in \widehat{\mathbb{C}}. \quad (4.41)$$

Observaciones 4.10. Nótese que $Tq(r) = (T_0(r), T_1(r), T_2(r))$ y como T es una matriz no-singular, los tres polinomios $T_i(r)$ no pueden anularse para un $r \in \widehat{\mathbb{C}}$ en común. Se sigue que al menos un polinomio tiene grado 2, de lo contrario, por (4.40), ∞ es un cero común.

Vamos a introducir a continuación una función que será fundamental más adelante.

Proposición 4.8. *Con la notación introducida anteriormente, sea $\Delta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la función dada por*

$$\Delta(r) = T_1^2(r) - 4T_0(r)T_2(r).$$

Entonces $x(r) \in C \cap D$ si y sólo si $\Delta(r) = 0$.

Demostración. Siempre que $x(r) \in C \setminus D$, existen dos tangentes a D que lo contienen, por lo que $x(r) \in C \cap D$ es equivalente a

$$P(r, s) = x(r) \cdot \xi(s) = 0 \quad \text{para un solo valor de } s \in \widehat{\mathbb{C}}. \quad (4.42)$$

Probaremos que (4.42) es equivalente a $\Delta(r) = 0$ distinguiendo dos casos:

i) $T_2(r) \neq 0$.

Entonces las raíces de $P(r, s) = 0$ para un r fijo están dadas por

$$s = \frac{-T_1(r) + \sqrt{\Delta(r)}}{2T_2(r)}$$

y se sigue la conclusión deseada.

ii) $T_2(r) = 0$.

Entonces $\Delta(r) = T_1^2(r)$ y hace falta probar que (4.42) equivale a $T_1(r) = 0$. Por (4.41) tenemos ya que $P(r, s)$ se anula para $s = \infty$, si fuera $T_1(r) \neq 0$ entonces $P(r, s) = 0$ también para $s = -T_0(r)/T_1(r)$.

Viceversa, si $T_1(r) = 0$, entonces $P(r, s) = T_0(r)$ que es distinto de cero para $s \neq \infty$, pues por las observaciones 4.10, los polinomios $T_i(r)$, $0 \leq i \leq 2$, no pueden anularse todos en un mismo r .

□

De lo anterior se sigue que $\Delta(r)$ tiene 4 raíces distintas, pues C y D están en posición general.

Es claro que la ecuación de \mathcal{P} dada por $P(r, s) = 0$, depende de las parametrizaciones elegidas para las cónicas C y D^* . Muchas veces detectar la propiedad que nos interesa de cierta curva depende de dar una parametrización adecuada, vamos a mostrar una parametrización que hace que $\Delta(r) = k \det(rC + D)$, para una constante k distinta de cero.

Sean $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ los puntos base del haz $\{(C, D)\}$, al cual describiremos como sigue

$$D_r = \{x \mid rC(x) + D(x) = 0\}, \quad r \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Las líneas ξ_r tangentes a cada cónica D_r forman un haz dado por las siguientes ecuaciones

$$r(Cx_0 \cdot x) + (Dx_0 \cdot x) = 0, \quad r \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Sea $x(r)$ la otra intersección de la recta ξ_r con C , variando r obtenemos una nueva parametrización para C , es decir, existe una matriz A determinada módulo una constante tal que

$$x(r) = Aq(r), \quad r \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

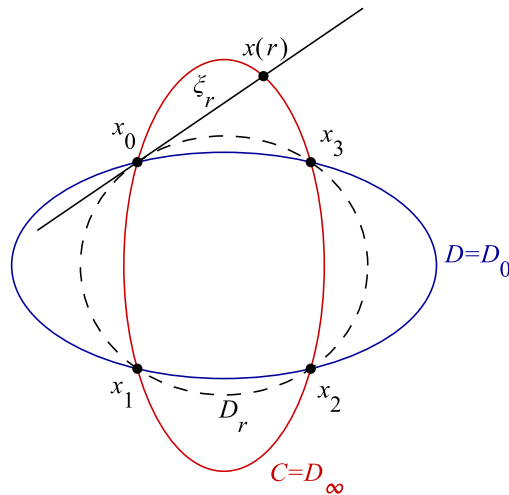


Figura 4.9: Una nueva parametrización para C .

Luego obtendremos la ecuación de \mathcal{P} de la misma forma que antes, afirmando que $\Delta(r)$ tiene la forma que mencionamos previamente.

En efecto, pensemos en los valores de r que corresponden a los cuatro puntos base x_0, x_1, x_2, x_3 del haz D_r . Como ξ_∞ es tangente a $D_\infty = C$ en x_0 , tenemos

$$x_0 = x(\infty).$$

Ahora bien, el haz D_r contiene las tres cónicas degeneradas D_{r_i} , $1 \leq i \leq 3$, donde los r_i son las raíces complejas de $\det(rC + D) = 0$. Tales cónicas degeneradas son los tres pares de rectas que contienen a los puntos base. Numeremos los r_i de manera que ℓ_i , la recta que une los puntos x_0 y x_i , esté contenida en D_{r_i} . Así las cosas $\ell_i = \xi_{r_i}$, entonces

$$x_i = x(r_i), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Sabemos por la proposición 4.8, que

$$x(r) \in C \cap D = \{x_0, \dots, x_3\} \text{ si y sólo si } \Delta(r) = 0.$$

Lo anterior nos deja ver que los polinomios $\Delta(r)$ y $\det(rC + D)$ tienen los mismos ceros, estableciéndose así el siguiente resultado.

Resultado 4.4. *Las cónicas suaves C y D pueden parametrizarse de forma que*

$$\Delta(r) = \det(rC + D).$$

Observación 4.11. De lo discutido antes se tiene en general que $\Delta(r) = k \det(rC + D)$ para cierto $k \in \mathbb{C}$, podemos tener $k = 1$ si en vez de tomar la matriz A tomamos $\frac{1}{\sqrt{k}}A$; esto reemplaza $\Delta(r)$ por $\frac{1}{k}\Delta(r)$.

Para entender las propiedades que nos interesan de la variedad de Poncelet, es necesario utilizar el concepto de *superficie riemanniana*. Más en detalle, necesitamos visualizar a \mathcal{P} de una manera sencilla; formalizando la idea de isomorfismo entre variedades riemannianas nos daremos cuenta que la curva \mathcal{P} es isomorfa a aquella con ecuación $u^2 = \Delta(r)$, que por el resultado anterior, escogiendo una parametrización adecuada, es $u^2 = \det(rC + D)$.

En los siguientes capítulos podremos mostrar finalmente que ciertas funciones (las funciones elípticas), permiten parametrizar curvas de la forma $y^2 = k \det(xC + D)$. Esto a su vez

las hace isomorfas a un toro, que es el espacio donde naturalmente opera una función elíptica.

Nos acercaremos entonces a una prueba del teorema 4.8 y a las ideas detrás de varios de los trabajos más recientes acerca del porismo de Poncelet.

Parte III

Variable Compleja

Guía para la parte III

Las subsecciones de cada capítulo están nombradas de manera que no haya confusión acerca de dónde se encuentra cada resultado o definición citado a continuación, para más detalle consúltese el índice general.

Al lector avanzado se le sugiere pasar directamente a la sección 5.4, de ahí pasar a la sección 6.5 y continuar hasta el capítulo 7.

Capítulo 5

Objetivo. Exponer el concepto de superficie de Riemann para identificar la variedad de Poncelet que surgió al final del capítulo 4. Presentar la demostración de la versión compleja del porismo de Poncelet.

Material expuesto.

1. Superficie de Riemann.
2. La variedad de Poncelet \mathcal{P} como superficie riemanniana.
3. Intuición acerca de por qué \mathcal{P} es topológicamente un toro.
4. El toro.
 - a) Construcción y estructura compleja.
 - b) Caracterización de los isomorfismos y automorfismos entre toros.
5. La demostración del porismo de Poncelet de Griffiths y Harris (1977).
Queda como detalle pendiente mostrar formalmente un isomorfismo entre un toro y la variedad de Poncelet.

Capítulo 6

Objetivo. Cubrir el detalle pendiente de la demostración del porismo de Poncelet del capítulo previo, introducir el teorema de Cayley y cubrir el material sobre funciones elípticas necesario para el capítulo 7.

Material expuesto.

1. Definición de función elíptica; propiedades básicas de ceros y polos.
2. La función \wp de Weierstrass.
3. Determinación de una función elíptica conociendo sus ceros y polos.
4. Ecuación diferencial de la función \wp .

- a) El discriminante modular asociado.
 - b) El problema de inversión, dado un discriminante no-negativo, existe una latiz cuya función \wp tiene asociado tal discriminante.
5. Isomorfismo entre el toro y la variedad de Poncelet; curvas elípticas complejas.
 6. Los puntos de torsión de una curva elíptica.
 7. El teorema de Cayley.

Capítulo 7

Objetivo. Exponer el trabajo de Dominique Hullin [12] (2007) que liga la versión de Griffiths y Harris del porismo de Poncelet con las versiones clásicas de los casos particulares estudiados por Chaple, Fuss, Steiner, etc. refinando en cierto sentido el teorema de Cayley presentado al final del capítulo previo.

Material expuesto.

1. El automorfismo en la variedad de Poncelet inducido por la simetría respecto a la línea de los centros en el caso de dos circunferencias.
2. El otro porismo de Poncelet.
3. Las condiciones necesarias y suficientes para que se satisfagan los porismos de Poncelet.
4. Ecuaciones de recursividad entre los polinomios del inciso anterior.
5. Determinación de las circunferencias de Poncelet, imágenes de ejemplos.

Bibliografía

El material referente a superficies de Riemann, funciones y curvas elípticas está basado en las obras de Apostol [2], Flatto [6] y Lang [13]. El capítulo 7 en el artículo de Hullin [12].

Capítulo 5

Superficies de Riemann

En muchas ramas de las matemáticas es necesario generalizar los objetos que se estudian abstrayendo algunas de sus propiedades e identificarlos entre sí mediante funciones que preserven la estructura que los caracteriza. La variedad de Poncelet introducida al final del capítulo anterior claramente no es una cónica y por tanto no tenemos información suficiente acerca de ella, es por eso que damos las definiciones de superficie de Riemann y de funciones analíticas definidas en y entre ellas, con el fin de identificarla con algún otro objeto geométrico que nos sea familiar.

Utilizaremos algunos conceptos básicos de topología general que suelen presentarse incluso en un primer curso de análisis matemático, pueden estudiarse en los primeros capítulos de [5].

5.1. Definición y ejemplos

Definición 5.1. Un espacio de Hausdorff M es llamado *variedad de dimensión 2* si cada punto $p_0 \in M$ está contenido en un abierto U que es homeomorfo a un abierto $V \subset \mathbb{C}$.

Sea $\varphi : U \rightarrow V$ dicho homeomorfismo. Tanto (U, φ) como φ suelen llamarse *cartas* en M o bien *coordenadas* ó *parámetros locales* respecto a p_0 . Sea $z_0 = \varphi(p_0)$. Para $r > 0$ suficientemente chico, $D = \{z : |z - z_0| < r\} \subset V$. Entonces $D' = \varphi^{-1}(D)$ es un abierto en

M que contiene a p_0 que es llamado un *disco paramétrico* respecto a p_0 .

Definición 5.2. Una variedad de dimensión 2, M , es llamada *superficie riemanniana* si para ella existe una colección de cartas (U_i, φ_i) con i variando en algún conjunto de índices I , que satisface las siguientes propiedades:

- i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- ii) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un mapeo conforme.
- iii) La colección $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ es maximal respecto a las dos propiedades anteriores.

Una colección que cumple 1) es llamada una *cubierta abierta* de M . Si las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) satisfacen 2) se dice que son *analíticamente compatibles* y el mapeo $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es la función de transición entre ellas:

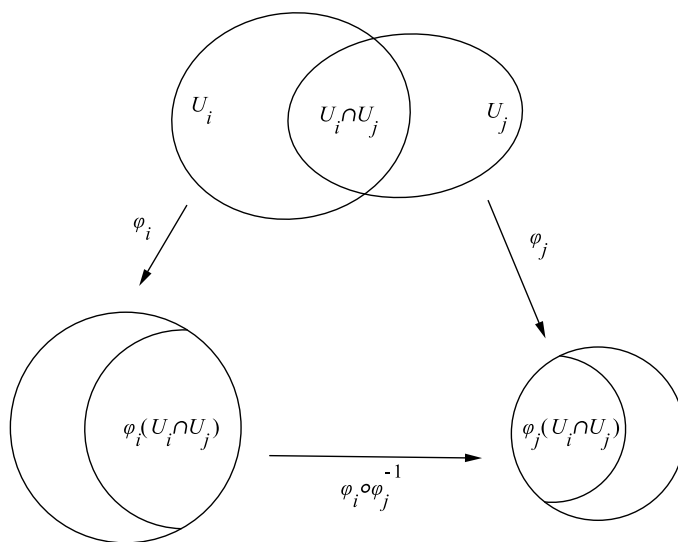


Figura 5.1: Cartas analíticamente compatibles en una variedad

Una colección de cartas que satisface las 3 propiedades anteriores es llamada *estructura compleja* en M . A veces nos encontramos con colecciones que satisfacen solamente las primeras 2 propiedades, éstas son llamadas *atlas analíticos*. Un atlas analítico Φ siempre puede ser aumentado a una estructura compleja Φ' añadiendo todas las cartas analíticamente compatibles a las de Φ . Se dice entonces que el atlas analítico Φ define la estructura

compleja Φ' en M . Dos atlas analíticos Φ_1 y Φ_2 definen la misma estructura compleja en M si y sólo si todas las cartas de Φ_1 son analíticamente compatibles a aquellas de Φ_2 .

Dada una superficie M y un subconjunto abierto $O \subset M$, la topología relativa de O consiste de los abiertos de M contenidos en O . La estructura compleja de O consiste de todas las cartas (U, φ) en la estructura de M para las cuales $U \subset O$. Así O puede verse también como una superficie de Riemann.

5.1.1. Funciones analíticas e isomorfismos

El siguiente paso es definir el concepto de isomorfismo entre superficies, pues entenderemos la variedad de Poncelet como una superficie de Riemann y debemos identificarla más adelante con otra más fácil de manejar. Para ello primero extenderemos los conceptos de función analítica y meromorfa.

Definición 5.3. i) Sea M una superficie de Riemann. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en $p_0 \in M$ si para alguna coordenada local φ respecto a p_0 , $f \circ \varphi^{-1}$ es analítica en $z_0 = \varphi(p_0)$.

ii) La función f del inciso anterior es meromorfa en p_0 si $f \circ \varphi^{-1}$ lo es, (si tiene un polo en z_0).

Definición 5.4. Dadas superficies riemannianas M_1 y M_2 , una función g que mapea M_1 en M_2 es analítica (meromorfa respec.) en $p_0 \in M_1$ si para algunas coordenadas locales (U, ϕ) y (V, ψ) respecto a p_0 y $q_0 = g(p_0)$, $\psi \circ g \circ \phi^{-1}$ es analítica (meromorfa) en $z_0 = \phi(p_0)$.

Observación 5.1. En la definición anterior va implícito el requisito de que exista una vecindad U_0 de p_0 tal que $U_0 \subset U$ y $f(U_0) \subset V$. Podemos satisfacer el requerimiento pidiendo que f sea continua en p_0 .

La composición $w = f \circ \varphi^{-1}$ es llamada *representación* de la función f en términos de la coordenada local respecto a p_0 , φ . Similarmente, $w = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es la representación del mapeo g en términos de las coordenadas locales φ de p_0 y ψ de q_0 .

Del hecho de que la composición de funciones analíticas sea analítica, se tiene que la definición de analiticidad anterior no depende de la elección particular de las coordenadas

locales respecto a los puntos p_0 y q_0 . Así, uno puede reemplazar las palabras *para algunas coordenadas locales* por *para todas las coordenadas locales*.

Ahora diremos cuando dos superficies son isomorfas entre sí.

Definición 5.5. Dos superficies M_1 y M_2 son isomorfas si existe una biyección $M_1 \xrightarrow{g} M_2$ analítica entre ellas. Escribiremos este hecho poniendo $M_1 \sim M_2$. Los isomorfismos de una variedad en sí misma son llamados *automorfismos*.

Un resultado clásico de variable compleja:

Teorema 5.1. *Sea $f(z)$ analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, existen vecindades U de z_0 y V de $f(z_0)$ tales que $U \xrightarrow{f} V$ es una biyección analítica si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$. Además en tal caso, el mapeo inverso $V \xrightarrow{f^{-1}} U$ es analítico también.*

Cuya demostración puede hallarse en [14].

Algunas consecuencias del teorema anterior son:

1. Si $z = z(p)$ es una coordenada local respecto a un punto $p_0 \in M$ y $f(z)$ es una función compleja analítica en $z_0 = z(p_0)$ para la que $f'(z_0) \neq 0$ entonces $f \circ z(p)$ también es una coordenada local respecto a p_0 .
2. Se dice que una función entre dos superficies $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ es un isomorfismo local en $p \in M_1$ si existen vecindades U de p y V de $q = \varphi(p)$ tales que $U \xrightarrow{\varphi} V$ es un isomorfismo. Con esa definición, si z y w son coordenadas locales respecto a p y q respectivamente y $w = f(z)$ es la función de representación de φ en términos de las mismas. Entonces φ es un isomorfismo local en p si y sólo si $\frac{dw}{dz}(z(p)) \neq 0$.

El teorema 5.1 junto con el hecho de que la composición de funciones continuas es continua nos permiten también, darle estructura de grupo al conjunto

$$A(M) := \{g : M \longrightarrow M \mid g \text{ es un automorfismo}\},$$

de automorfismos en una variedad, con la composición de funciones. Es claro también que la isomorfía entre superficies de Riemann es una relación de equivalencia.

Lo que haremos más adelante será dar un isomorfismo entre la variedad de Poncelet y un toro, así como identificar al mapeo de Poncelet η introducido en la sección 4.5 con un automorfismo en dicha variedad, nos interesa por tanto ver qué ocurre al componer uno de tales automorfismos con un isomorfismo entre superficies, es por ello que probamos el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sean M_1 y M_2 superficies riemannianas isomorfas, $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ un isomorfismo. Para $f \in A(M_1)$, sea $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Entonces*

1. $f \mapsto \tilde{f}$ es un isomorfismo de grupos entre $A(M_1)$ y $A(M_2)$. Es decir, una biyección que satisface

$$\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}, \quad \text{para } f, g \in A(M_1).$$

2. Sea $f \in A(M_1)$. Entonces φ mapea puntos fijos de f en puntos fijos de \tilde{f} .

Demostración. 1. \tilde{f} es automorfismo se sigue de que f lo es, φ es isomorfismo y la composición de funciones analíticas es analítica. Ahora,

$$\widetilde{f \circ g} = \varphi \circ (f \circ g) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) = \tilde{f} \circ \tilde{g}.$$

Finalmente, dado $g \in A(M_2)$ claramente $f := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi \in A(M_1)$, cumple que $\tilde{f} = g$ y se tiene la suprayectividad, mientras que si existen $f_1, f_2 \in A(M_1)$ tales que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ tenemos

$$\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f_2 \circ \varphi^{-1},$$

y por ser φ una biyección, podemos cancelar en ambos lados de la ecuación para tener $f_1 = f_2$.

2. Sean $f \in A(M_1)$, $p \in M_1$ con $f(p) = p$ y $q = \varphi(p)$. Entonces

$$\tilde{f}(q) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(q) = (\varphi \circ f)[\varphi^{-1}(q)] = \varphi[f(p)] = \varphi(p) = q.$$

□

5.1.2. Ejemplos

Existe una infinidad de ejemplos interesantes no solamente de superficies sino más generalmente de variedades riemannianas, (ver [21]). Nosotros requerimos visualizar de esta forma los objetos que a continuación citaremos.

1. El plano complejo \mathbb{C} .

\mathbb{C} es un espacio conexo de Hausdorff. Podemos definir una estructura compleja simplemente tomando el atlas de una sola carta (\mathbb{C}, Id) .

- Un hecho conocido desde un primer curso de variable compleja es que los automorfismos de \mathbb{C} están dados por funciones de la forma

$$\varphi(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

2. El plano agujerado \mathbb{C}^* .

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dándole a este conjunto la topología inducida por la topología usual de \mathbb{C} , podemos tomar como estructura compleja la formada por las cartas de estos abiertos junto con la función identidad.

- Algo quizá menos mencionado son los automorfismos de \mathbb{C}^* , éstos son funciones de la forma

$$\varphi(z) = az, \quad \text{o bien} \quad \varphi(z) = \frac{a}{z}, \quad \text{en ambos casos con } a \neq 0.$$

Demostración. Es claro que las funciones de la forma citada son automorfismos. Recíprocamente, sean $\varphi(z)$ un automorfismo y $\varepsilon = \inf_{w=1} |\varphi^{-1}(w)|$. Entonces $\varphi(z) \neq 0$ para $z \in D := \{z \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$.

Como D es conexo, su imagen bajo φ también lo es. Luego, se tiene alguno de los dos casos siguientes, para $z \in D$:

- i) $|\varphi(z)| < 1$.
- ii) $|\varphi(z)| > 1$.

Suponiendo cierto el primer caso, por el teorema de la singularidad removible de Riemann, φ tiene una extensión analítica $\tilde{\varphi}$ a \mathbb{C} . Probaremos que $\tilde{\varphi}(0) = 0$, ésto implica que la extensión es un automorfismo de \mathbb{C} y el resultado se sigue del primer ejemplo.

Supóngase que $b := \tilde{\varphi}(0) \neq 0$. Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^*$ una sucesión con $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Entonces $w_n = \varphi(z_n)$ es una sucesión en \mathbb{C}^* con $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b$. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \varphi^{-1}(b) \neq 0$. Una contradicción.

Si se cumple el segundo caso, basta repetir el argumento anterior con $\psi(z) := \frac{1}{\varphi(z)}$, para $z \in \mathbb{C}^*$. Claramente ψ es también un automorfismo de \mathbb{C}^* que cumple $|\psi(z)| < 1$ para $z \in D$. Concluimos por lo anterior que $\psi(z) = cz$ en \mathbb{C}^* para algún $c \neq 0$. Luego $\varphi(z) = \frac{a}{z}$, $a = \frac{1}{c}$. □

3. La esfera $\widehat{\mathbb{C}}$.

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si dotamos a este conjunto con la topología consistente en los abiertos de \mathbb{C} junto con los complementos en $\widehat{\mathbb{C}}$ de los conjuntos compactos de \mathbb{C} , se convierte en un espacio de Hausdorff compacto y conexo.

Un ejemplo de un atlas analítico aquí, surge al tomar las dos cartas $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$. Donde $U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1(z) = z$ y $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$. Claramente φ_i es un homeomorfismo de U_i a \mathbb{C} para $i = 1, 2$. Por otro lado tenemos $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, y $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \frac{1}{z}$, que como vimos anteriormente, es un automorfismo de \mathbb{C}^* .

- Es también conocido el hecho de que los automorfismos en $\widehat{\mathbb{C}}$ son precisamente las transformaciones de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

4. Las cónicas.

Aquí tenemos una estructura compleja heredada de aquella de $\widehat{\mathbb{C}}$, gracias a la parametrización dada en la sección 4.2. Ésto se sigue del siguiente:

Resultado 5.1. *Si f es una biyección de la superficie de Riemann M al conjunto X , podemos equipar a X con la topología y estructura compleja heredadas vía f de la siguiente forma:*

- i) $U \subset X$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U) \subset M$ lo es.*
- ii) (U, φ) es una carta en X si y sólo si $(f^{-1}(U), \varphi \circ f)$ es una carta en M .*

Convirtiéndose X en una superficie riemanniana isomorfa a M vía f .

De manera que toda cónica suave es una superficie de Riemann isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$.

5. Curvas algebraicas.

En el caso general de curvas algebraicas tenemos la dificultad de no contar siempre con parametrizaciones adecuadas, sin embargo esto puede resolverse fácilmente haciendo uso del teorema de la función implícita.

Sea $\gamma \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica suave con ecuación $P(z, w) = 0$. Para cualquier punto $(a, b) \in \gamma$, ($P(a, b) = 0$). Se tiene ya sea $P_w(a, b) \neq 0$ ó $P_z(a, b) \neq 0$. Si se da el primer caso, por el teorema citado anteriormente, existen vecindades Z y W de a y b respectivamente y una función analítica $w = g(z) : Z \rightarrow W$ tales que la condición $(z, w) \in U := \gamma \cap Z \times W$ es equivalente a $w = g(z)$. Claramente U es una vecindad del

punto (a, b) en la curva y el mapeo $\varphi(z, w) = z$ es un homeomorfismo de U a Z con inversa $\varphi^{-1}(z) = (z, g(z))$.

Análogamente si $P_z(a, b) \neq 0$, existen vecindades U' de (a, b) en γ y W' de b tales que $\psi(z, w) = w$ es un homeomorfismo de U' a W' con inversa $\psi^{-1}(w) = (h(w), w)$ donde h es una función analítica en W' .

Puede definirse ahora un atlas analítico con cartas de la forma (U, φ) ó (U', ψ) , pues las funciones de transición son ya sea la identidad, $\psi \circ \varphi^{-1}(z) = g(z)$ ó $\varphi \circ \psi^{-1}(w) = h(w)$.

Para curvas $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ basta tomar las mismas cartas que en el caso anterior para los puntos de $\gamma \cap \mathbb{C}^2$ y añadir ciertos parámetros locales para los puntos al infinito, por ejemplo:

Supongamos que γ tiene un punto de la forma (a, ∞) con $a \neq \infty$. Podemos transformar γ mediante la función $T : (z, w) \mapsto (z, w')$, donde $w' = w^{-1}$, en la nueva curva γ' con ecuación

$$w'^n P(z, \frac{1}{w'}) = 0,$$

donde $P(z, w) = 0$ es la ecuación de la curva original y $n = gr_w(P)$.

T mapea (a, ∞) a $(a, 0)$. Podemos ahora tomar un parámetro local φ en γ' respecto a $(a, 0)$ y $\varphi \circ T$ será un parámetro local en γ respecto a (a, ∞) . Algo similar se puede hacer para los puntos de las formas (∞, b) e (∞, ∞) .

Una diferencia inmediata topológicamente entre curvas en \mathbb{C}^2 y en $\widehat{\mathbb{C}}^2$ es la compacidad. En el primer caso al tratarse de conjuntos no acotados no se tiene esta propiedad, en cambio las curvas en $\widehat{\mathbb{C}}^2$ son compactas, al tratarse de subconjuntos cerrados de un espacio compacto.

5.2. La variedad \mathcal{P}

Nuestro siguiente ejemplo es por supuesto la variedad de Poncelet mencionada al final del capítulo previo. Recordemos que \mathcal{P} es una curva en $\widehat{\mathbb{C}}^2$ que como veremos primeramente, es suave cuando las cónicas utilizadas para definirla están en posición general. Ésto permite verla como una superficie riemanniana como se indica en el último inciso de la sección anterior.

5.2.1. \mathcal{P} es suave

Sean C y D dos cónicas suaves en posición general y

$$\mathcal{P} := \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*, x \in \xi\}$$

la variedad de Poncelet correspondiente, cuya ecuación $P(r, s) = 0$, escribiremos utilizando la notación del capítulo anterior:

$$P(r, s) = T_2(r)s^2 + T_1(r)s + T_0(r),$$

$$\Delta(r) = T_1^2(r) - 4T_0(r)T_2(r).$$

Al igual que en la subsección 3.3.3, introducimos las funciones auxiliares correspondientes para trabajar con los puntos infinitos de \mathcal{P} :

$$Q(r', s) = r'^2 P(1/r', s),$$

$$R(r, s') = s'^2 P(r, 1/s'),$$

$$S(r', s') = r'^2 s'^2 P(1/r', 1/s').$$

Y vamos a distinguir también a los posibles puntos singulares de la curva, sean

$$\mathcal{B}_C := \{(x, \xi) \in \mathcal{P} \mid x \in C \cap D\}, \quad \mathcal{B}_{D^*} := \{(x, \xi) \in \mathcal{P} \mid \xi \in C^* \cap D^*\} \text{ y}$$

$$\mathcal{F} := \mathcal{B}_C \cap \mathcal{B}_{D^*}.$$

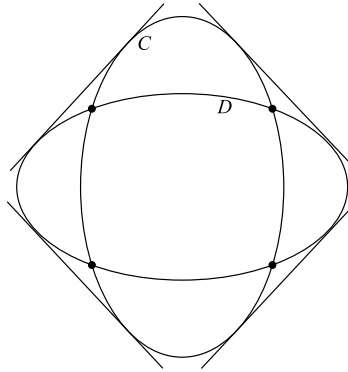


Figura 5.2: Los conjuntos \mathcal{B}_C , \mathcal{B}_{D^*} y \mathcal{F} .

Ahora probaremos la siguiente

Proposición 5.1. *Sea $(a, b) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$. Entonces $(x(a), \xi(b)) \in \mathcal{B}_C$ si y sólo si*

$$I) P = P_s = 0 \text{ en } (a, b), \text{ si } a, b \neq \infty,$$

$$II) Q = Q_s = 0 \text{ en } (0, b), \text{ si } a = \infty \text{ y } b \neq \infty,$$

$$III) R = R_{s'} = 0 \text{ en } (a, 0), \text{ si } a \neq \infty \text{ y } b = \infty,$$

$$IV) S = S_{s'} = 0 \text{ en } (0, 0), \text{ si } a = b = \infty.$$

Demostración. Basta probar el caso $I)$, pues los casos $II) - IV)$ pueden llevarse a $I)$ mediante los respectivos cambios de variable: $r' = 1/r$, $s' = 1/s$, $r' = 1/r$ y $s' = 1/s$. Por la proposición 4.8, $(x(a), \xi(b)) \in \mathcal{B}_C$ si y sólo si

$$P(a, b) = \Delta(a) = 0. \quad (5.1)$$

Veamos que (5.1) es equivalente a $I)$. Tenemos

$$P(a, b) = T_2(a)b^2 + T_1(a)b + T_0(a),$$

$$P_s(a, b) = 2T_2(a)b + T_1(a),$$

de donde

$$P_s^2(a, b) - 4T_2(a)P(a, b) = \Delta(a).$$

De esta última ecuación se sigue que $I)$ y (5.1) son equivalentes. \square

Corolario 5.2.1. *Una equivalencia análoga se tiene para $(x(a), \xi(b)) \in \mathcal{B}_{D^*}$. Reemplazando en la proposición anterior $P_s, Q_s, R_{s'}, S_{s'}$, por $P_r, Q_{r'}, R_r, S_{r'}$, respectivamente.*

Demostración. En la prueba anterior, basta cambiar los papeles de r y s . \square

Para finalizar esta subsección, recordemos que por lo visto en la sección de haces de cónicas, C y D están en posición general si y sólo si $\mathcal{F} = \emptyset$. Como $\mathcal{F} = \mathcal{B}_C \cap \mathcal{B}_{D^*}$, la proposición y el corolario anteriores implican que $(x(a), \xi(b)) \in \mathcal{F}$ si y sólo si (a, b) es un punto singular de la curva con ecuación $P(r, s) = 0$. Así, podemos concluir que \mathcal{P} es una curva suave en $\widehat{\mathbb{C}}^2$ si y sólo si C y D están en posición general.

5.2.2. \mathcal{P} es un toro (versión intuitiva)

Sean $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ la curva algebraica con ecuación

$$y^2 = \Delta(x), \quad y$$

$$\mathcal{E}' = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid x \neq \infty \text{ y } T_2(x) \neq 0\}.$$

Puede verificarse que la función $f : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{P}$ dada por

$$f(x, y) = \left(x, \frac{-T_1(x) + y}{2T_2(x)} \right),$$

es inyectiva y analítica en términos de los parámetros locales que indicamos para curvas algebraicas, más aún, puede extenderse continuamente a una biyección entre las curvas \mathcal{E} y \mathcal{P} tomando los límites correspondientes,

$$f(p) = \lim_{(x,y) \rightarrow p} f(x, y),$$

para los puntos de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$. Lo anterior permite utilizar el teorema de la singularidad removible de Riemann para concluir que f es un isomorfismo entre \mathcal{E} y \mathcal{P} .

Formalmente la variedad de Poncelet \mathcal{P} es un objeto distinto a la curva γ con ecuación $P(r, s) = 0$, sin embargo podemos verla como una superficie de Riemann isomorfa a esta última mediante la función $m : \{(r, s) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid x(r) \cdot \xi(s) = 0\} \rightarrow \mathcal{P}$, dada simplemente por

$$m(r, s) = (x(r), \xi(s)),$$

donde $x(r)$ y $\xi(s)$ son parametrizaciones de las cónicas C y D^* , respectivamente. Ésta curva es a la vez isomorfa a \mathcal{E} y como observamos en el capítulo anterior, $x(r)$ y $\xi(s)$ pueden tomarse de tal forma que

$$\Delta(r) = \det(rC + D).$$

En adelante, nos referiremos a cualquiera de las curvas isomorfas hasta ahora mencionadas, como variedad de Poncelet, por ahora, la consideraremos como $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ dada por

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid y^2 = \det(xC + D)\}.$$

Además, al estar C y D en posición general, $\det(xC + D)$, puede escribirse en la forma

$$\det(xC + D) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$

con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ distintos, así que consideraremos la ecuación

$$y = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}.$$

Los puntos $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$, $(a_3, 0)$ y (∞, ∞) son llamados **puntos de ramificación** de \mathcal{E} . Observemos que para cualquier valor $x \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, \infty\}$, existen dos valores de y , (negativos uno respecto al otro), tales que el punto (x, y) pertenece a \mathcal{E} , el resto de puntos de la curva son llamados **puntos regulares**.

Si definimos $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mediante

$$\pi(x, y) = x,$$

podemos observar que para cualquier p , punto de ramificación, existe un disco paramétrico D tal que π es un mapeo 2 a 1 en $D \setminus \{p\}$. Por otro lado para cualquier punto regular hay un disco en el que π es un mapeo uno a uno. Se dice que \mathcal{E} es una **superficie cubriente de 2 hojas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$** y suele visualizarse geoméricamente como se ilustra a continuación:

Tomemos los puntos $\{a_1, a_2, a_3, \infty\}$ y hagamos cortes disjuntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, uniendo a_1 con a_2 y a_3 con ∞ marcando los dos bordes del corte como muestra la figura:

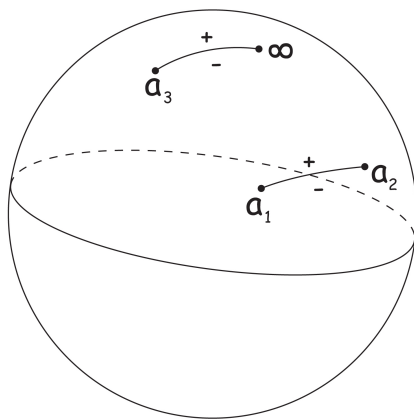


Figura 5.3: El conjunto D .

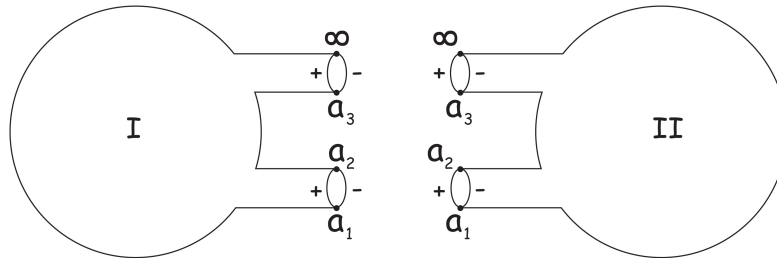
Sea D la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ menos los cortes. Existen dos funciones analíticas $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f_1(x) = -f_2(x)$ y para todo $x \in D$:

$$f_j^2(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

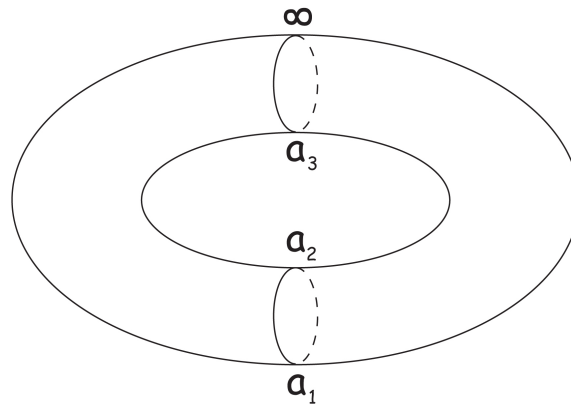
Cada f_j puede extenderse analíticamente a los bordes de cada corte y podemos escribir

$$\{(x, y) \in \mathcal{E} \mid x \in D\} = \bigcup_{j=1}^2 \{(x, f_j(x)) \mid x \in D\}.$$

Imaginemos a \mathcal{E} tomando 2 copias de D , las cuales estiramos de cada corte y rotamos:



Para pegar los bordes $+$ con los correspondientes bordes $-$ de la otra copia, obteniendo un toro:



En términos de la variedad de Poncelet que consideramos originalmente, podemos decir que se trata de una doble cubierta ya sea de la cónica C o de D^* cuyos 4 puntos de ramificación vienen dados por los cuatro puntos en común de C y D o bien las 4 rectas comunes de C^* y D^* .

Lo que viene a continuación es idear cómo dar un isomorfismo explícito entre \mathcal{P} (o equivalentemente \mathcal{E}) y un toro, así que en la siguiente sección definiremos formalmente este espacio y estudiaremos algunas de sus propiedades, indicando el por qué se intuye que serán de ayuda en la comprensión del problema original de Poncelet.

5.3. El toro

Existen muchas formas de definir un toro, nosotros lo haremos introduciendo cierta relación de equivalencia en el plano complejo, ésto traerá más adelante la ventaja de poder utilizar la estructura algebraica de grupo aditivo de \mathbb{C} , así como heredar ciertas propiedades topológicas.

5.3.1. Construcción mediante una latiz

Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ dos números tales que $w_1 \neq 0$ y $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$, (es decir, tomemos una base de \mathbb{C} visto como espacio vectorial real). Denotaremos por $\{w_1, w_2\}$ al conjunto

$$\Lambda := \{mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Λ se conoce como la latiz generada por la base que forman w_1 y w_2 .

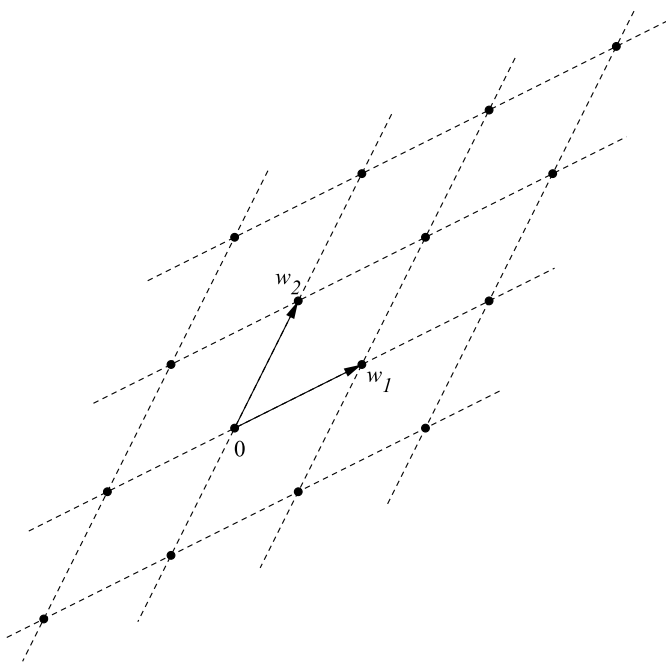


Figura 5.4: La latiz generada por w_1 y w_2 .

Dada una latiz Λ , definimos la siguiente relación \sim en \mathbb{C} :
 Para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \sim z_2$ si y sólo si $z_2 - z_1 \in \Lambda$, es claro que \sim es de equivalencia.
 Si $z_1 \sim z_2$, se dice que ambos números son equivalentes módulo Λ y se escribe

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\Lambda}.$$

Denotaremos por $\pi(z)$ a la clase de equivalencia de z módulo Λ :

$$\pi(z) = \{z + w \mid w \in \Lambda\}.$$

El mapeo $z \mapsto \pi(z)$ suele llamarse la proyección natural de \mathbb{C} al espacio cociente

$$\mathbb{C}/\Lambda = \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \pi(z).$$

Topológicamente, el espacio \mathbb{C}/Λ es un toro. Podemos visualizarlo restringiendo a la proyección natural π a uno de los llamados *paralelogramos fundamentales*, por ejemplo R , formado por los vértices $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$:

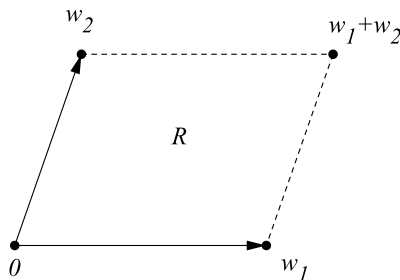
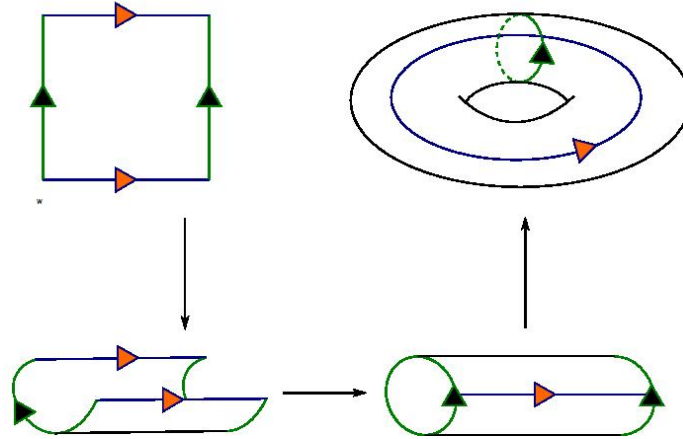


Figura 5.5: Un paralelogramo fundamental.

Es claro que la restricción de π a R es suprayectiva en \mathbb{C}/Λ e inyectiva excepto en la frontera, donde ocurre que $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ si z_1 y z_2 están en lados opuestos de R y difieren entre sí por w_1 ó w_2 . Así, podemos visualizar a \mathbb{C}/Λ pegando pares de lados opuestos de R , obteniéndose primero un cilindro y luego un toro:



5.3.2. La proyección natural π

Cabe hacer algunas observaciones sobre la proyección natural que introdujimos anteriormente, pues ilustra los conceptos de cubierta y mapeo cubriente.

La función π tiene claramente la propiedad de que para todo punto $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ existe una vecindad U de x tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$, donde los conjuntos V_i son una cantidad numerable de abiertos disjuntos de \mathbb{C} que π mapea conformemente a U . Este tipo de funciones suelen llamarse **mapeos cubrientes**, dado $p \in \mathbb{C}/\Lambda$, la preimagen $\pi^{-1}(p)$ es denominada la **fibra** de π sobre p , cualquier punto $z \in \pi^{-1}(p)$ se conoce como punto sobre p . Puede probarse que todas las fibras correspondientes a un mapeo cubriente tienen la misma cardinalidad n , que puede ser finita o infinita. Si n fuera finito la superficie de dominio de la función cubriente se denominaría una cubierta de n hojas de la superficie imagen, en este ejemplo, cada fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene una cantidad numerable de puntos, se dice entonces simplemente que \mathbb{C} es una cubierta de infinidad de hojas del toro \mathbb{C}/Λ .

Un ejemplo de una cubierta finita surge si consideramos un par de latices $\Lambda = \{w_1, w_2\}$ y $\Lambda' = \{jw_1, kw_2\}$, con j y k enteros positivos. Claramente $\Lambda' \subset \Lambda$. La proyección

$$\pi : \mathbb{C}/\Lambda' \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda, \quad \text{dada por} \quad \pi(z + \Lambda') = z + \Lambda,$$

es un mapeo cubriente cuyas fibras para cada punto $z + \Lambda$ consisten en las $j \times k := n$ clases de equivalencia distintas de la forma $z + rw_2 + sw_2 + \Lambda'$, donde $r = 0, 1, \dots, j - 1$ y $s = 0, 1, \dots, k - 1$. El toro \mathbb{C}/Λ' es entonces una cubierta de n hojas de \mathbb{C}/Λ .

5.3.3. Estructura compleja

Una vez definido el toro, nos interesa por supuesto poder verlo como una superficie de Riemann para posteriormente establecer formalmente un isomorfismo entre éste y la curva \mathcal{P} . Comencemos por observar algunas propiedades topológicas heredadas gracias a la proyección π .

El toro \mathbb{C}/Λ puede topologizarse estableciendo que $O \subset \mathbb{C}/\Lambda$ sea abierto siempre que $\pi^{-1}(O)$ sea abierto en \mathbb{C} . Esto hace que π sea una función continua. \mathbb{C}/Λ es entonces imagen continua bajo π del paralelogramo R , luego, el toro es un espacio conexo y compacto. Puede verificarse fácilmente que es también de Hausdorff.

Observemos además, que π es un mapeo abierto, pues dado $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, tenemos

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{z \in \Lambda} (z + U).$$

Cada conjunto $z + U$ claramente es abierto en \mathbb{C} , por lo tanto su unión también lo es, así que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto, luego por definición $\pi(U)$ también.

Ahora, para construir un atlas analítico, sea

$$\delta = \min_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} |w|.$$

Para cada $a \in \mathbb{C}$, sea $D_a = \{z : |z - a| < \delta/4\}$. Obsérvese que cada clase de equivalencia módulo Λ interseca a D_a en a lo más un punto, se sigue que $\pi : D_a \rightarrow \pi(D_a)$ es un homeomorfismo, (es continua y abierta), escribamos $U_a = \pi(D_a)$. Sea ϕ_a el homeomorfismo inverso; afirmamos entonces que las cartas (U_a, ϕ_a) forman un atlas analítico.

Dados $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, sean $S = \phi_a(U_a \cap U_b)$ y

$$w : S \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{definida mediante } w(z) = \phi_b \circ \phi_a^{-1}(z).$$

Como $\pi(w(z)) = \pi(z)$, si definimos $\omega(z) := w(z) - z$ tenemos $\pi(\omega(z)) = 0 + \Lambda$, es decir, $\omega(z) \in \Lambda$ para todo $z \in S$.

Sean $z_1, z_2 \in S$. Entonces $z_1, z_2 \in D_a$ y $w(z_1), w(z_2) \in D_b$, así que, utilizando la desigualdad del triángulo tenemos:

$$|\omega(z_1) - \omega(z_2)| \leq |w(z_1) - w(z_2)| + |z_1 - z_2| < \delta. \quad (5.2)$$

Pero como $\omega(z_1) - \omega(z_2) \in \Lambda$, se sigue de (5.2) que $\omega(z_1) = \omega(z_2)$. Por lo tanto $\omega(z)$ es constante en S y $w(z)$ debe ser de la forma $z \mapsto z + c$, para cierto $c \in \mathbb{C}$, que claramente es analítica, lo cual demuestra la afirmación.

5.3.4. Isomorfismos y automorfismos

Si llegamos a dar un isomorfismo entre la variedad de Poncelet \mathcal{P} y algún toro \mathbb{C}/Λ , digamos $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{P}$, es claro que las involuciones σ y τ introducidas en la sección 4.5 inducirán correspondientes involuciones σ' y τ' en el toro; $\sigma' = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$, $\tau' = \phi^{-1} \circ \tau \circ \phi$. Nuestra intención es estudiar con detalle las involuciones del toro, pues en caso de ser éstas automorfismos, podremos usar el teorema 5.2 para llevar a cabo la demostración del porismo de Poncelet en un objeto mucho más simple que la variedad \mathcal{P} , pues recordemos que hemos hecho un replanteamiento que lo relega a investigar los puntos fijos de la composición de las dos involuciones antes mencionadas.

Lo primero que haremos será identificar de cierta forma los isomorfismos en toros con los automorfismos del plano complejo, el resultado preciso se presenta en la siguiente:

Proposición 5.2. *Sean $T_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$, $i = 1, 2$ un par de toros y π_i las correspondientes proyecciones naturales de \mathbb{C} en T_i respectivamente. Suóngase que existe un isomorfismo*

$\varphi : T_1 \rightarrow T_2$, tal que $\varphi(p_1) = p_2$. Sean $z_i \in \mathbb{C}$ puntos sobre p_i , $i = 1, 2$. Entonces existe un único automorfismo ψ de \mathbb{C} tal que $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ y

$$\varphi \circ \pi_1(z) = \pi_2 \circ \psi(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.3)$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2. \end{array}$$

La prueba requiere algunos resultados previos que pudieran desviar la atención del objetivo que estamos persiguiendo ahora, por lo que hemos incluido los detalles en el primer apéndice. Ahora podemos dar una expresión analítica para los isomorfismos entre toros, y por tanto, de los automorfismos.

Teorema 5.3. *Con la misma notación que en el resultado anterior, $T_1 \sim T_2$ si y sólo si*

$$\Lambda_1 = \alpha\Lambda_2 \quad \text{para algún } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

Los isomorfismos $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ son de la forma

$$\varphi(z + \Lambda_1) = \alpha z + \beta + \Lambda_2, \quad (5.5)$$

donde α cumple la ecuación (5.4) y β es una constante compleja cualquiera.

Demostración. Dado un isomorfismo φ , sea ψ un automorfismo de \mathbb{C} que satisface la ecuación (A.1) de la proposición anterior, ψ es de la forma $z \mapsto \alpha z + \beta$ para algunas constantes complejas, con $\alpha \neq 0$, (ver primer ejemplo de la subsección 5.1.2). Esto implica que φ satisface (5.5). Veamos que α cumple (5.4):

Tomando primero $z \in \Lambda_1$ y luego $z = 0$ en (5.5), se obtendrá respectivamente:

$$\begin{aligned} \varphi(\Lambda_1) &= \alpha z + \beta + \Lambda_2, \\ \varphi(\Lambda_1) &= \beta + \Lambda_2. \end{aligned}$$

Igualando estas expresiones, concluimos que $\alpha z \in \Lambda_2$, cuando $z \in \Lambda_1$, es decir, $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$.

Para la otra contención, aplíquese φ^{-1} en ambos lados de (A.1) reemplazando z por $\psi^{-1}(z) = z/\alpha - \beta/\alpha$. Se tiene entonces

$$\varphi^{-1} \circ \pi_2(z) = \pi_1 \circ \psi^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

De aquí se sigue de manera análoga que $\alpha^{-1}\Lambda_2 \subset \Lambda_1$, que es equivalente a la contención que necesitábamos probar.

Ahora supongamos que existe α no nula tal que $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$. Sea φ el mapeo definido por la ecuación (5.5), es claro que φ es analítico, verifiquemos que es también una biyección:

- 1) φ es uno a uno. Sea $\varphi(z_1 + \Lambda_1) = \varphi(z_2 + \Lambda_1)$, es decir, $\alpha z_1 + \beta + \Lambda_2 = \alpha z_2 + \beta + \Lambda_2$. Como se cumple (5.4), la última ecuación equivale a $\alpha(z_1 + \Lambda_1) + \beta = \alpha(z_2 + \Lambda_1) + \beta$, que a su vez equivale a $z_1 + \Lambda_1 = z_2 + \Lambda_1$.
- 2) φ es sobre. Dado cualquier $w \in \mathbb{C}$, claramente $\varphi\left(\frac{w-\beta}{\alpha} + \Lambda_1\right) = w + \Lambda_2$.

□

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del teorema:

Corolario 5.3.1. *Los automorfismos de un toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$ están dados por funciones de la forma*

$$\varphi(z + \Lambda) = \alpha z + \beta + \Lambda, \quad (5.6)$$

donde α satisface $\alpha\Lambda = \Lambda$ y β es cualquier constante.

Observación 5.2. Nos interesan como mencionamos al principio de la sección, los posibles puntos fijos de los automorfismos de un toro, de su expresión analítica podemos concluir que aquellos que no fijan ningún punto son exactamente de la forma

$$\varphi(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda. \quad (5.7)$$

Esto es claro por la ecuación (5.6) del corolario; si se tuviera $\alpha \neq 1$, φ fijaría $\frac{\beta}{1-\alpha} + \Lambda$. Por otro lado, un automorfismo como el de la ecuación (5.7), no fija punto alguno a no ser que $\beta = 0$, en cuyo caso se trata de la función identidad.

Hasta ahora la única información que tenemos acerca de la transformación o correspondencia η en la variedad de Poncelet, es que está definida mediante la composición de dos involuciones que fijan ciertos puntos, (revisaremos esto en la última sección de este capítulo). El dato mencionado será suficiente para probar el porismo, en lo que respecta a las propiedades más básicas de los toros, requeriremos finalmente el siguiente teorema:

Teorema 5.4. *Si ι es un automorfismo de $T = \mathbb{C}/\Lambda$ con la propiedad $\iota \circ \iota = \text{Id}$, (una involución conforme del toro), y con al menos un punto fijo, entonces existe una constante β tal que para todo $z \in \mathbb{C}$*

$$\iota(z + \Lambda) = -z + \beta + \Lambda. \quad (5.8)$$

Y viceversa, si ι está dada por (5.8), entonces se trata de una involución conforme con cuatro puntos fijos.

Demostración. Para la primera parte, por ser ι un automorfismo, por el teorema previo se tiene

$$\iota(z + \Lambda) = \alpha z + \beta + \Lambda, \quad \text{donde } \alpha \text{ satisface } \alpha\Lambda = \Lambda. \quad (5.9)$$

Iterando (5.9) obtenemos

$$\iota^2(z + \Lambda) = \alpha^2 z + \beta(\alpha + 1) + \Lambda, \quad (5.10)$$

por ser ι una involución resulta

$$z \equiv \alpha^2 z + \beta(\alpha + 1) \pmod{\Lambda},$$

se sigue que

$$f(z) := (\alpha^2 - 1)z + \beta(\alpha + 1) \in \Lambda \quad \text{para } z \in \mathbb{C}. \quad (5.11)$$

Si se tuviera $\alpha^2 \neq 1$, f sería suprayectiva en \mathbb{C} , lo que contradice $f(z) \in \Lambda$, por tanto $\alpha = \pm 1$.

El caso $\alpha = 1$ debe descartarse, pues por la observación al corolario 5.3.1, ι no podría fijar ningún punto, o bien sería la función identidad. Así las cosas $\iota(z + \Lambda) = -z + \beta + \Lambda$.

Viceversa, dada $z + \Lambda \xrightarrow{\iota} -z + \beta + \Lambda$, se sigue del corolario 5.3.1 que ι es un automorfismo y sustituyendo $\alpha = -1$ en la ecuación (5.10), tenemos

$$\iota^2(z + \Lambda) = z + \Lambda.$$

Finalmente si $\Lambda = \{w_1, w_2\}$, un cálculo sencillo deja ver que ι fija exactamente a los puntos de la forma

$$\frac{1}{2}(\beta + mw_1 + nw_2) + \Lambda, \quad (m, n) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}.$$

□

Obsérvese que como consecuencia de este último teorema, la composición de dos involuciones del toro con al menos un punto fijo, es una función de la forma

$$z + \Lambda \mapsto z + \beta' + \Lambda,$$

para algún β' constante.

5.4. Demostración del porismo de Poncelet

Como comentábamos al probar la versión del porismo para el plano euclideo, luego de desarrollada la herramienta necesaria para generalizar los conceptos de cónica, segmento tangente, etc. la idea de la demostración se mantendría. Podemos ahora observar como a grandes rasgos, lo que dice Poncelet puede reducirse al hecho de que una traslación con un punto fijo de un toro, es la identidad.

5.4.1. Un breve resumen

Coleccionamos a continuación algunos resultados vistos hasta el momento:

Un par de cónicas proyectivas suaves C y D , están en posición general si y solamente si $y(x) = \det(xC + D)$ tiene 3 raíces complejas distintas.

Si lo anterior ocurre y definimos

$$\mathcal{P} = \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*\}.$$

Existen parametrizaciones $x(r) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow C$ y $\xi(t) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow D^*$, tales que la función

$$m : \gamma \rightarrow \mathcal{P}, \quad \text{dada por } m(r, s) = (x(r), \xi(s)),$$

donde $\gamma = \{(r, s) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid x(r) \cdot \xi(s) = 0\}$. Es un isomorfismo entre variedades de Riemann, siendo γ una curva suave que a la vez es isomorfa a la curva

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid y^2 = \det(xC + D)\}.$$

Tenemos así un rompecabezas de variedades riemannianas e isomorfismos:

$$\mathcal{P} \xrightarrow{m^{-1}} \gamma \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E} \xrightarrow{?} \mathbb{C}/\Lambda.$$

Con una pieza faltante, aunque hemos observado al menos de forma intuitiva que la curva \mathcal{E} parece ser un toro.

Definimos también las involuciones σ, τ de \mathcal{P} y su composición $\eta = \tau \circ \sigma$, (véase sección 4.5). Podemos conjugar con el isomorfismo m , definiendo

$$\sigma_* = m^{-1} \circ \sigma \circ m, \quad \tau_* = m^{-1} \circ \tau \circ m,$$

que resultan involuciones en γ con por lo menos un punto fijo, (los inducidos ya sea por alguno de los 4 puntos de intersección de C y D para τ_* , ó alguna de las rectas comunes de C^* y D^* para σ_*).

De manera similar podemos inducir las correspondientes involuciones en \mathcal{E} y de completarse nuestra cadena de isomorfismos, en \mathbb{C}/Λ . Debe resultar claro ahora que si verificamos en alguna de las variedades \mathcal{P} , γ ó \mathcal{E} , que estas involuciones son automorfismos, podremos utilizar los teoremas 5.2 y 5.4 para dar una prueba sencilla del porismo de Poncelet.

5.4.2. σ y τ son automorfismos

Veremos que las involuciones correspondientes definidas anteriormente en γ son automorfismos.

Recordemos que se definieron:

$$\mathcal{B}_C = \{(x, \xi) \in \mathcal{P} \mid x \in C \cap D\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{D^*} = \{(x, \xi) \in \mathcal{P} \mid \xi \in C^* \cap D^*\}.$$

Sean entonces $\mathcal{B}_r := m^{-1}(\mathcal{B}_C)$, $\mathcal{B}_s := m^{-1}(\mathcal{B}_{D^*})$ y $\pi_1(r, s) = r$, $\pi_2(r, s) = s$ para $(r, s) \in \gamma$. Se sigue de lo visto en la subsección 5.2.1 y la manera en que dimos estructura de variedad riemanniana a las curvas algebraicas en $\widehat{\mathbb{C}}^2$, que:

- i) Dado $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_r$; π_1 ($1/\pi_1$ respectivamente) es un parámetro local en (a, b) si $a \neq \infty$ ($a = \infty$ respectivamente).
- ii) Dado $(a, b) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_s$; π_2 ($1/\pi_2$ respectivamente) es un parámetro local en (a, b) si $b \neq \infty$ ($b = \infty$ respectivamente).

Utilizando estas coordenadas locales es posible probar que σ^* y τ^* son automorfismos de γ . Veremos esto para σ^* , pues puede hacerse lo mismo con la otra involución de forma análoga. Por lo visto en el capítulo de cónicas, resulta evidente que σ^* es una biyección en γ que deja

fijos únicamente los puntos de \mathcal{B}_s . Sean $p_0 = (r_0, s_0), q_0 = (r'_0, s_0) \in \gamma \setminus \mathcal{B}_s$ con $\sigma^*(p_0) = q_0$. Por ser π_2 una coordenada local, podemos escoger vecindades disjuntas U y U' de p_0 y q_0 respectivamente así como una vecindad V de s_0 tales que tanto U como U' son homeomorfas a V vía π_2 . (U, π_2) y (U', π_2) son entonces cartas respecto a los puntos p_0 y q_0 y claramente σ^* está representada por la función identidad en V en términos de π_2 , que es analítica.

Por otro lado, σ^* es continua en \mathcal{B}_s , de lo contrario, dado un punto $(r_*, s_*) \in \mathcal{B}_s$ existirían una sucesión $\{(r_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma$ y una vecindad V de (r_*, s_*) tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n, s_n) = (r_*, s_*)$ y $(r'_n, s_n) := \sigma^*(r_n, s_n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como γ es una curva compacta, existe una subsucesión $\{(r'_{n_k}, s_{n_k})\} \subset \{(r'_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $(r'_*, s_*) \in \gamma$, para algún $r'_* \neq r_*$. Tanto (r_*, s_*) como (r'_*, s_*) están en la curva, lo cual es imposible pues $(r_*, s_*) \in \mathcal{B}_s$.

Al ser σ^* analítica en $\gamma \setminus \mathcal{B}_s$ y continua en \mathcal{B}_s , se sigue del teorema de la singularidad removible su analiticidad en γ y por tanto, que se trate de un automorfismo.

5.4.3. η es una traslación

Una vez sabiendo que σ^* y τ^* son automorfismos en γ , (y por tanto σ y τ en \mathcal{P}), es claro que el teorema 5.2 nos permite aterrizar el problema del porismo de Poncelet a algún toro, \mathbb{C}/Λ , siempre que podamos hallar un isomorfismo explícito entre esta variedad y \mathcal{E} , de la siguiente forma;

Sea $\psi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{P}$ un isomorfismo, por el teorema 5.2, $\iota_1 := \psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi$ y $\iota_2 := \psi^{-1} \circ \tau \circ \psi$ son involuciones conformes del toro con al menos un punto fijo, mismas que por el teorema 5.4 podemos escribir como

$$\iota_1(z + \Lambda) = -z + \beta_1 + \Lambda,$$

$$\iota_2(z + \Lambda) = -z + \beta_2 + \Lambda.$$

Queremos probar que si $\eta = \tau \circ \sigma$ es tal que η^n tiene un punto fijo, entonces η^n es la identidad en \mathcal{P} , (ver el replanteamiento del teorema 4.8). De nuevo el teorema 5.2 hace que esto sea equivalente a probar lo correspondiente para $\hat{\eta} := \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi$. Pero por las ecuaciones anteriores

$$\hat{\eta}(z + \Lambda) = (\iota_2 \circ \iota_1)(z + \Lambda) = z + b + \Lambda, \quad \text{donde } b = \beta_2 - \beta_1.$$

Por lo cual

$$\hat{\eta}^n = z + \underbrace{b + b + \cdots + b}_{n \text{ veces}} + \Lambda = z + nb + \Lambda.$$

Ahora, dado z_0 tal que $\hat{\eta}^n(z_0 + \Lambda) = z_0 + \Lambda$, se tiene

$$z_0 + \Lambda = z_0 + nb + \Lambda,$$

lo cual implica $nb \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ y

$$\hat{\eta}^n(z + \Lambda) = z + \Lambda, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

De esta manera, hemos probado el porismo de Poncelet, salvo encontrar el isomorfismo ψ mencionado anteriormente. La razón por la que hemos escogido este camino para dar una prueba, es precisamente que construir la función ψ en este contexto nos llevara al estudio de una familia muy importante de funciones de variable compleja, las llamadas funciones elípticas, y recientemente se descubrió que a través de la aplicación de algunas de sus propiedades, uno puede dar condiciones explícitas para la existencia de polígonos interinscritos en el problema geométrico original.

En el siguiente capítulo desarrollamos la herramienta necesaria para entender esto más a fondo.

Capítulo 6

Funciones y curvas elípticas

6.1. Motivación

Quizá sin darnos cuenta en tales términos, geometría plana elemental, observamos que la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ definida como

$$\gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2, r > 0\},$$

es isomorfa como variedad de dimensión 1 al toro obtenido de la siguiente forma:

Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\Lambda := \{a\} = \{ka \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; defínase la relación $r_1 \sim r_2$ si y sólo si $r_1 - r_2 \in \Lambda$. Claramente \sim es de equivalencia y el espacio cociente de clases, $T := \mathbb{R}/\Lambda$, puede visualizarse geoméricamente pegando los extremos de cualquier *segmento fundamental* de la forma $[r, r + a]$.

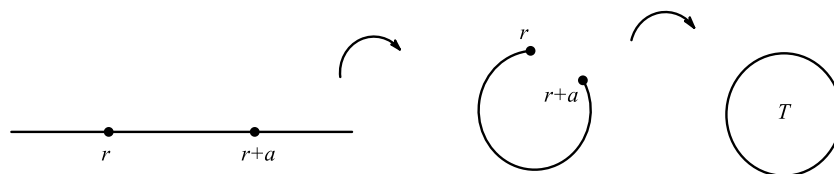


Figura 6.1: El 1- toro.

La manera de establecer este hecho (el isomorfismo entre las variedades), implicaba estudiar funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que naturalmente actúan en un espacio de la forma de T ; las funciones periódicas. En especial nos referimos a las funciones trigonométricas,

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = f'(x) = \cos x.$$

Las cuales satisfacen además de ser de clase C^∞ , que $f(x) = f(y)$ si y sólo si $x \sim y$ con $\Lambda = \{2\pi\}$, (lo mismo ocurre con f'). Por lo que basta estudiar sus restricciones a alguno de los segmentos de la forma $[r, r + 2\pi)$.

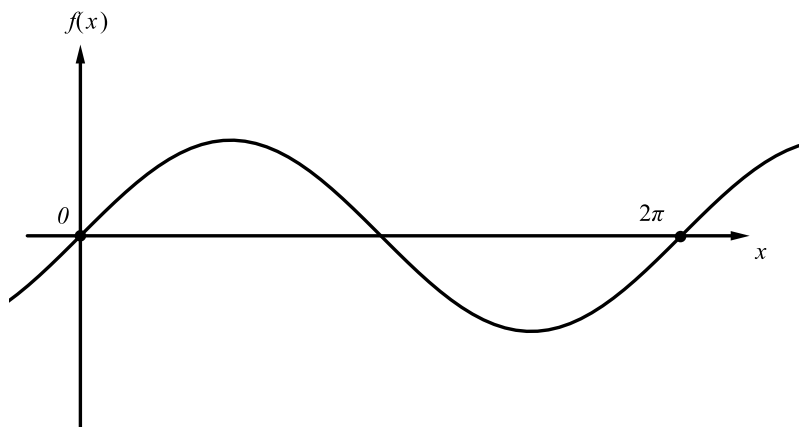


Figura 6.2: La gráfica de f .

Entre otras propiedades, se encuentra también la siguiente relación algebraica entre f y su derivada,

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Lo cual claramente sugiere la parametrización $\varphi : \mathbb{R}/\Lambda \rightarrow \gamma$, dada por

$$\varphi(x + \Lambda) = (r \cdot f(x), r \cdot f'(x)).$$

Misma que si se les da estructura de variedad (de manera similar a como lo hemos hecho con el toro en el capítulo anterior) a \mathbb{R}/Λ y γ , pueden completarse detalles técnicos para comprobar que se trata de un isomorfismo.

Lo anterior motiva entonces, a introducir funciones cuyo dominio natural sea \mathbb{C} módulo una latiz, es decir, funciones con una doble periodicidad (esto se formalizará a continuación),

así como buscar entre ellas ejemplos particulares interesantes y estudiar las relaciones algebraicas que satisfagan, análogas a lo visto con las funciones trigonométricas y la ecuación (6.1).

6.2. Funciones elípticas

Las funciones elípticas deben su nombre a que históricamente, los primeros ejemplos que se encontraron provinieron de estudiar funciones inversas relacionadas con integrales que surgen de calcular la longitud de un arco de elipse. Daremos la definición formal y deduciremos sus propiedades básicas, tómese $\Lambda = \{w_1, w_2\}$, la latiz generada por w_1, w_2 con $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$.

6.2.1. Definición y propiedades básicas

Definición 6.1. Sea $f(z)$ una función meromorfa en \mathbb{C} . f es elíptica con periodos w_1, w_2 si

$$f(z) = f(z + w_1) = f(z + w_2), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

Algunos hechos claros que se siguen de la definición son los siguientes:

1. Las funciones constantes son elípticas.
2. Si f y g son elípticas, también lo son:
 - i) $f \pm g$.
 - ii) $f \cdot g$
 - iii) Si g no es idénticamente cero, f/g .
 - iv) La derivada f' .

Es claro también que (6.2) es equivalente a

$$f(z) = f(z + w), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ y todo } w \in \Lambda.$$

Así, cada elemento de la latiz es un periodo de la función y ésta es constante en clases de congruencia módulo Λ .

Recordemos que para $\alpha \in \mathbb{C}$, el conjunto

$$P_\alpha := \{\alpha + t_1 w_1 + t_2 w_2 \in \mathbb{C} \mid 0 \leq t_i < 1, i = 1, 2\},$$

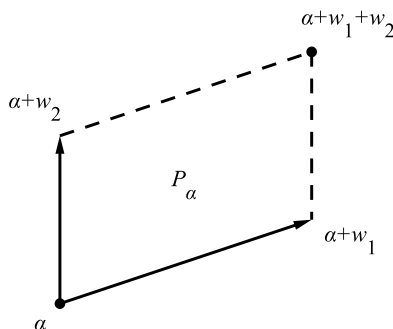


Figura 6.3: El paralelogramo fundamental P_α .

es llamado un **paralelogramo fundamental** o bien **de periodicidad** de la latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$ con respecto a tal base. Hemos tomado la desigualdad estricta de los parámetros t_i a la derecha para tener la ventaja de contar con representantes únicos de cada clase de \mathbb{C}/Λ . Cada clase de congruencia módulo Λ interseca entonces a P_α en precisamente un punto, entonces, f está determinada por sus valores en P_α , o bien en el toro \mathbb{C}/Λ .

De especial interés son los ceros y polos de f . Por definición, los polos de f no son densos, luego, sólo puede haber una cantidad finita de los mismos en P_α . Lo mismo aplica para los ceros de f siempre que ésta no sea idénticamente cero.

Cuando hagamos mención de los ceros y polos de f , pensaremos en un conjunto completo de los mismos, no congruentes entre sí. Esto significa que todo cero de f es congruente con alguno de los ceros mencionados, los cuales se cuentan junto con sus multiplicidades. Consideraciones similares aplican para los polos. Los conjuntos completos de ceros y polos de la función están contenidos en cualquier paralelogramo de periodicidad P_α .

En el siguiente teorema reuniremos información básica que concierne al tipo de puntos que mencionamos.

Teorema 6.1. *Sea f una función elíptica de periodos w_1, w_2 , no-constante. Entonces*

i) f tiene polos.

ii) La suma de los residuos en los polos de f es cero.

iii) f tiene el mismo número de ceros que de polos.

iv) Los ceros a_1, a_2, \dots, a_n y polos b_1, b_2, \dots, b_n de f satisfacen la siguiente congruencia

$$\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{j=1}^n b_j \pmod{\Lambda}.$$

Demostración. i) Si f no tiene polos, es continua en la cerradura de P_α para algún paralelogramo fundamental, luego, debe ser acotada en este conjunto y por periodicidad, en todo \mathbb{C} . Entonces, por el teorema de Liouville, f es constante, una contradicción.

ii) Sea P_α un paralelogramo de periodicidad de f , P_α contiene un conjunto completo de polos de f . Por el teorema del residuo, la suma de los residuos de f en dicho paralelogramo es igual a $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_\alpha} f(z) dz$, con ∂P_α orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj. Sean Γ_j , $1 \leq j \leq 4$ las aristas consecutivas según la orientación mencionada de ∂P_α , siendo Γ_1 el segmento que une α con $\alpha + w_1$. Entonces

$$\int_{\partial P_\alpha} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

Γ_3 se obtiene trasladando Γ_1 con w_2 y cambiando la orientación. Entonces, por periodicidad

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = - \int_{\Gamma_1} f(z + w_2) dz = - \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Algo similar ocurre con Γ_2 y Γ_4 . Por tanto, las integrales a lo largo de lados opuestos de P_α se cancelan y se tiene ii).

iii) Esto se sigue de observar que los ceros y polos de f son precisamente los polos de la derivada logarítmica f'/f , que es también una función elíptica con periodos w_1 y w_2 ; supongamos que f tiene un polo de orden k en z_0 . Entonces existe una vecindad de z_0 en la cual podemos escribir

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z),$$

donde $g(z)$ es holomorfa y no nula, calculando la derivada logarítmica tenemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (-k(z - z_0)^{-k-1} g(z) + (z - z_0)^{-k} g'(z)) \cdot \frac{(z - z_0)^k}{g(z)} = \frac{-k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

De aquí se sigue que f'/f tiene un polo simple con residuo $-k$ en z_0 . Similarmente se puede ver que si f tiene un cero de orden k en z_0 , f'/f tiene un polo simple con residuo k en tal punto. El resultado entonces se sigue aplicando el inciso anterior a f'/f .

iv) Del inciso anterior tenemos para z_0 , un polo de orden k de f , que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = -k$, de aquí se sigue que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) z \frac{f'(z)}{f(z)} = -kz_0$, es decir, $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0 con residuo $-kz_0$. Una observación similar se tiene para los ceros de f , así que aplicando el teorema del residuo a la función $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ en el paralelogramo fundamental P_α , tenemos

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz. \quad (6.3)$$

Siguiendo de forma análoga al segundo inciso

$$\int_{\Gamma_3} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{\Gamma_1} (z + w_2) \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right] \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = - \frac{w_2}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

La integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ es igual al número de vueltas respecto a 0 de la curva $f(\Gamma_1)$.

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} \right] \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = s w_2, \quad \text{para algún } s \in \mathbb{Z}. \quad (6.4)$$

Análogamente se prueba que

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} \right] \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = r w_2, \quad \text{para algún } r \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

El resultado se sigue de las ecuaciones (6.3), (6.4) y (6.5).

□

Corolario 6.1.1. *Una función elíptica no constante toma, en cualquier paralelogramo de periodicidad, todos los valores el mismo número de veces. Este número se llama **orden** de f .*

Demostración. Basta sustituir f por $f_c(z) = f(z) - c$ en el teorema anterior, los polos de f y f_c coinciden y los ceros de f_c son los puntos preimagen de c de f . □

6.2.2. La función \wp de Weierstrass

El ejemplo que veremos ahora de una función elíptica no constante es fundamental en lo subsecuente, (nos permitirá entre otras cosas, parametrizar la variedad de Poncelet correspondiente a 2 cónicas suaves en posición general). Por el teorema 6.1, tales funciones deben

tener polos y no pueden ser de orden uno, porque la suma de los residuos es nula. El ejemplo más sencillo debe ser entonces, una función con un polo de orden 2 en el toro ó con dos polos no congruentes módulo la latiz correspondiente. La función que definiremos a continuación ejemplificará la primer posibilidad.

Definición 6.2. Dada una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$, la función \wp de Weierstrass para Λ está dada por

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right). \quad (6.6)$$

Para probar que $\wp(z)$ converge en los puntos que no están en la latiz y posteriormente establecer las propiedades básicas de la función, necesitaremos del siguiente

Lema 6.1. Dada cualquier latiz Λ ,

$$\sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^r} < \infty, \quad \text{para cualquier real } r > 2.$$

Demostración. Si w_1, w_2 son generadores de Λ , defínanse para cualquier entero $k \geq 1$ los siguientes conjuntos:

$$A_k = \{mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}, |m| + |n| = k\},$$

$$S_k = \{xw_1 + yw_2 \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = k\}.$$

Se tiene

$$\#(A_k) = 4k. \quad (6.7)$$

Como $A_k \subset S_k$ y S_k puede obtenerse multiplicando S_1 por k , también se tiene

$$|w| \geq ck \quad \text{para } w \in A_k, \quad \text{donde } c = \min_{z \in S_1} |z| > 0. \quad (6.8)$$

Así, de las ecuaciones (6.7) y (6.8) obtenemos

$$\sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w \in A_k} \frac{1}{|w|^r} \leq \frac{4}{c^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{r-1}} < \infty.$$

□

Así las cosas, $\wp(z)$ tiene las propiedades básicas que se resumen enseguida.

Teorema 6.2. Sea $\wp(z)$ la función de Weierstrass correspondiente a la latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$. Entonces

- i) La serie que define a $\wp(z)$ converge uniformemente en cualquier compacto que no interseque a Λ .
- ii) $\wp(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ y cada punto de la latiz es un polo de orden 2.
- iii) $\wp(z)$ es una función par, elíptica con periodos w_1 y w_2 y de orden 2.
- iv) $\wp'(z)$ es impar y elíptica de orden 3.
- v) $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ si y sólo si $z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}$.

Demostración. i) Supondremos que $z \notin \Lambda$ y $w \in \Lambda \setminus \{0\}$, tenemos

$$\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{z(2w-z)}{(z-w)^2 w^2}. \quad (6.9)$$

Consideraremos los $w \in \Lambda$ con $|w| \geq 2|z|$, (para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ el resto de elementos de la latiz es únicamente una cantidad finita), se tiene entonces que

$$|2w-z| \leq \frac{5}{2}|w|, \quad |z-w| \geq \frac{w}{2}. \quad (6.10)$$

Se sigue pues, de (6.9) y (6.10) que

$$\left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{10|z|}{|w|^3}, \quad \text{para } |w| \geq 2|z|,$$

y podemos usar el lema 6.1 para concluir.

- ii) Que $\wp(z)$ sea analítica en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ se sigue del inciso anterior. Lo referente a los polos es inmediato a partir de la definición de la función y de polo.
- iii) $\wp(z)$ es par se sigue de que si w toma todos los valores de $\Lambda \setminus \{0\}$, también lo hace $-w$, y se tiene que

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \wp(z). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\wp(z) = \wp(z+w_1) = \wp(z+w_2)$. Derivando directamente en la definición dada en (6.6), se tiene para $z \notin \Lambda$, que

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}. \quad (6.11)$$

Entonces

$$\wp'(z+w_j) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-(w-w_j))^3}, \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Al variar w en toda Λ , también lo hace $w-w_j$, de aquí que para ambos periodos

$$\wp'(z+w_j) = \wp'(z). \quad (6.12)$$

Integrando en (6.12) nos permite concluir que existen constantes c_j , $j = 1, 2$ tales que

$$\wp(z+w_j) = \wp(z) + c_j.$$

Si en las últimas ecuaciones hacemos $z = \frac{-w_j}{2}$ y usamos el hecho de que \wp es par, probamos la doble periodicidad.

Finalmente \wp es de orden 2 por el corolario 6.1.1, ya que tiene un polo de orden 2 en cada paralelogramo fundamental.

iv) Tenemos, para cualquier $w \in \Lambda$:

$$\wp(z) = \wp(z+w),$$

por otro lado

$$\wp(z) = \wp(-z).$$

Derivando estas ecuaciones resulta

$$\wp'(z) = \wp'(z+w) \quad \forall w \in \Lambda \quad \text{y} \quad \wp'(z) = -\wp'(-z).$$

El hecho de que \wp' sea de orden 3 se sigue de la expresión obtenida en (6.11).

v) La necesidad se sigue del inciso iii). Viceversa, sean

$$\wp(z_1) = \wp(z_2) := c.$$

Si $c = \infty$, entonces $z_1, z_2 \in \Lambda$ y $z_1 \equiv z_2 \pmod{\Lambda}$.

Si $c \neq \infty$, sea $f(z) = \wp(z) - c$, de manera que $f(z_1) = f(z_2) = 0$.

Si $z_1 \not\equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$, entonces $\{z_1, -z_1\}$ es un conjunto completo de ceros de f , por lo que $z_2 \equiv \pm z_1 \pmod{\Lambda}$.

Si $z_1 \equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$, entonces $\wp'(z_1) = \wp'(-z_1) = -\wp'(z_1)$, de donde $\wp'(z_1) = 0$.

Por tanto, z_1 es un cero de f de multiplicidad 2 ó mayor, que como f tiene orden 2 al igual que \wp , debe ser precisamente 2. Entonces $\{z_1\}$ es un conjunto completo de ceros de f y se debe tener también en este caso $z_1 \equiv z_2 \pmod{\Lambda}$.

□

6.3. Otras funciones asociadas a una latiz

En el teorema 6.1 vimos que si f es una función elíptica con periodos en la latiz Λ , sus ceros a_1, \dots, a_n y polos b_1, \dots, b_n están relacionados entre sí de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{j=1}^n b_j \pmod{\Lambda}.$$

Es posible demostrar el resultado recíproco, el cual nos será útil más adelante para probar el teorema de Cayley, que da una condición necesaria y suficiente para que un par de cónicas como las que hemos estado estudiando, admita un polígono interinscrito. Esto puede lograrse introduciendo un par de funciones asociadas a una latiz, definidas de manera similar a la función \wp y que además resultan estar relacionadas con ésta de manera natural, revisaremos los detalles en esta sección.

Definición 6.3. Para una latiz $\Lambda \subset \mathbb{C}$, sean

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right), \quad (6.13)$$

$$\sigma(z) = z \prod_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w} \right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2}. \quad (6.14)$$

Entonces

Proposición 6.1. *i) $\zeta(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Los polos de ζ coinciden con Λ y son simples.*

ii) $\sigma(z)$ es entera. Los ceros de σ son simples y coinciden con Λ .

Demostración. i) La prueba es análoga a la del primer inciso del teorema 6.2.

ii) Lo referente a los ceros es claro de la definición.

Para la analiticidad, basta probar que el producto que aparece en (6.14) restringido a los w con $|w| > 2r$ converge uniformemente en $|z| < r$ a una función analítica sin ceros en tal región, lo anterior para cualquier real r positivo.

Sea

$$E_w(z) = \left(1 - \frac{z}{w} \right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2}.$$

Para $|z| < r$ y $|w| > 2r$, sea

$$\log E_w(z) := \log \left(1 - \frac{z}{w} \right) + \frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2, \quad (6.15)$$

en donde

$$\log \left(1 - \frac{z}{w} \right) := - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z/w)^k}{k}. \quad (6.16)$$

Entonces

$$|\log E_w(z)| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{z}{w} \right|^k = \frac{|z/w|^3}{1 - |z/w|} \leq \frac{2r^3}{|w|^3}. \quad (6.17)$$

De esta última ecuación y el lema 6.1 concluimos que $\sum_{|w|>2r} \log E_w(z)$ converge uniformemente para $|z| < r$ a una función acotada y analítica, $G_r(z)$.

Como la función exponencial es uniformemente continua en cualquier conjunto compacto, se tiene finalmente que

$$\prod_{2r < |w| < N} E_w(z) = \exp \left(\sum_{2r < |w| < N} \log E_w(z) \right)$$

converge uniformemente a $e^{G_r(z)}$ para $|z| < r$ cuando N tiende a ∞ .

□

6.3.1. Relación con la función \wp

La relación mencionada al principio de la sección se establece en el siguiente teorema:

Teorema 6.3. *Para cualquier latiz, las funciones correspondientes ζ , σ y \wp cumplen lo siguiente:*

- i) $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$.
- ii) $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

Demostración. i) Basta probar el resultado para cualquier disco D contenido en $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Sea $r > 0$ tal que el disco D esté contenido en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ y elijan $\log z$ y $\log E_w(z)$ analíticas en D para todo $w \in \Lambda \setminus \{0\}$, donde $E_w(z)$ está dada como en las ecuaciones (6.15) y (6.16) para $|w| > 2r$. De la demostración de la proposición anterior vemos que

$$\sigma(z) = \exp \left(\log z + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \log E_w(z) \right), \quad z \in D. \quad (6.18)$$

Como la serie $\sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \log E_w(z)$ converge uniformemente en D , podemos derivar miembro a miembro en (6.18) para obtener fácilmente la derivada logarítmica, ($z \in D$):

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{d}{dz} \log(\sigma(z)) = \frac{d}{dz} \left(\log z + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \log E_w(z) \right) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{E'_w(z)}{E_w(z)}. \quad (6.19)$$

Ahora,

$$E'_w(z) = \frac{1}{w} \left[E_w(z) \left(1 + \frac{z}{w} \right) - e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2} \right],$$

de donde

$$\frac{E'_w(z)}{E_w(z)} = \frac{1}{w} \left[1 + \frac{z}{w} + \frac{w}{z-w} \right] = \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}.$$

Por lo tanto, de (6.19) se sigue que

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z), \quad z \in D.$$

ii) Esto es claro si se deriva sumando a sumando $\zeta(z)$.

□

6.3.2. Ceros y polos de una función elíptica

El resultado principal de la sección es el siguiente:

Teorema 6.4. Sean $\Lambda = \{w_1, w_2\}$ y $\{a_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $\{b_j\}_{1 \leq j \leq n}$ tales que

$$\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{j=1}^n b_j \pmod{\Lambda}.$$

Entonces existe una función elíptica de periodos w_1, w_2 , determinada unívocamente salvo producto por una constante, cuyos ceros y polos son respectivamente $\{a_j\}_{1 \leq j \leq n}$ y $\{b_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

Construiremos la función utilizando la $\sigma(z)$ correspondiente a la latiz, pero para ello será necesario un lema previo:

Lema 6.2. *i) Existen constantes η_1 y η_2 tales que*

$$\zeta(z + w_j) = \zeta(z) + \eta_j, \quad j=1,2.$$

ii) La función $\sigma(z)$ satisface

$$\sigma(z + w_j) = -\sigma(z)e^{\eta_j(z + \frac{w_j}{2})}, \quad j=1,2.$$

Demostración. i) Como $\zeta'(z) = -\wp(z)$, tenemos, para $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y $j = 1, 2$, que

$$\frac{d}{dz} (\zeta(z + w_j) - \zeta(z)) = 0,$$

Integrando estas ecuaciones se prueba el primer inciso.

ii) Sea D un disco que no interseque a la latiz Λ , de manera que $\sigma(z)$ y $\sigma(z + w_j)$, $j = 1, 2$, no se anulen en D . Tómense también $\log z$ y $\log \sigma(z + w_j)$ analíticas en D y sea en este mismo disco

$$\log \frac{\sigma(z + w_j)}{\sigma(z)} := \log \sigma(z + w_j) - \log \sigma(z), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Por el primer inciso de este lema y el teorema 6.3, tenemos que

$$\frac{d}{dz} \left(\log \frac{\sigma(z + w_j)}{\sigma(z)} \right) = \frac{\sigma'(z + w_j)}{\sigma(z + w_j)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z + w_j) - \zeta(z) = \eta_j.$$

Integrando en la ecuación anterior nos lleva a

$$\log \frac{\sigma(z + w_j)}{\sigma(z)} = \eta_j z + d_j,$$

para algunas constantes d_j , $j = 1, 2$. Sean $c_j = e^{d_j}$, entonces

$$\sigma(z + w_j) = c_j e^{\eta_j z} \sigma(z). \quad (6.20)$$

Por el teorema de continuación analítica, la ecuación (6.20) se cumple para todo $z \in \mathbb{C}$. Para concluir, obsérvese que para cualquier latiz, $\Lambda = -\Lambda$, por lo cual se sigue de la ecuación (6.14) que define a $\sigma(z)$, que $\sigma(z) = -\sigma(-z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Así, haciendo $z = \frac{-w_j}{2}$ en (6.20) tenemos

$$c_j = -e^{\frac{\eta_j w_j}{2}},$$

lo que termina la prueba. □

Demostración. (Del teorema 6.4). Podemos suponer que $\sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=1}^n a_k = 0$. Proponemos

$$f(z) = \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k)}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k)}.$$

Es claro que f tiene los ceros y polos mencionados en el teorema. Ahora, por el inciso ii) del lema anterior, tenemos para $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} f(z + w_j) &= \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k + w_j)}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k + w_j)} = \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k) e^{\eta_j(z - a_k + \frac{3w_j}{2})}}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k) e^{\eta_j(z - b_k + \frac{3w_j}{2})}} = \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k) e^{\eta_j(-a_k + b_k)}}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k)} = e^{\eta_j(\sum_{k=1}^n (b_k - a_k))} \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k)}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^n \sigma(z - a_k)}{\prod_{k=1}^n \sigma(z - b_k)} = f(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es elíptica de periodos w_1, w_2 .

Por otro lado, si f y g son funciones elípticas (no constantes) con los mismos ceros y polos, claramente $h := \frac{f}{g}$ es otra función elíptica pero sin polos. Por el teorema 6.1 inciso i), h es constante, esto termina la prueba. \square

6.4. La ecuación diferencial de \wp

Quizá la propiedad más importante para nuestros fines de la función elíptica de Weierstrass, es que satisface una ecuación diferencial cuya forma sugiere una conexión con la ecuación algebraica de una curva que hallamos isomorfa a la variedad de Poncelet en el capítulo anterior de manera análoga a lo que sucede con la función seno y la circunferencia (ver ecuación (6.1)). En esta sección deducimos tal ecuación y algunas propiedades relacionadas con la misma.

Teorema 6.5. *La función \wp asociada a la latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$ satisface la ecuación diferencial*

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (6.21)$$

$$\text{Donde } g_2 = g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^3}, \quad \text{y} \quad g_3 = g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}.$$

Demostración. Obsérvese primero que por el lema 6.1 las series que definen a las constantes g_2 y g_3 convergen absolutamente.

Para establecer (6.21) calculamos *a fuerza bruta*, las expansiones de Laurent de las funciones involucradas, comencemos por tomar para $w \neq 0$ la expansión de Taylor siguiente:

$$\frac{1}{(z - w)^2} = \frac{1}{w^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{w^{n+2}}, \quad |z| < |w|. \quad (6.22)$$

Y sustituyendo (6.22) en la ecuación que define a \wp , (6.6), después de reagrupar términos obtenemos la serie de Laurent:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad 0 < |z| < r, \quad (6.23)$$

donde $r = \min_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} |w|$, y

$$a_n = (n+1) \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^{n+2}}. \quad (6.24)$$

Obsérvese que $a_n = 0$ para todo n impar, pues $\wp(z) = \wp(-z)$. Sean entonces

$$G_n = \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^{2n}}, \quad n > 1.$$

De (6.23) y (6.24) tenemos

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots,$$

derivando sumando a sumando:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_2 z + 20G_3 z^3 + \dots$$

Ahora calculamos los primeros términos de $[\wp'(z)]^2$ y $[\wp(z)]^3$, obteniéndose respectivamente:

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_2}{z^2} - 80G_3 + \dots,$$

y

$$[\wp(z)]^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_2}{z^2} + 15G_3 + \dots$$

De las expresiones anteriores se sigue que

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + g_2 \wp(z) = -g_3 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad (6.25)$$

para $0 < |z| < r$ y ciertas constantes $\alpha_k \in \mathbb{C}$.

Sean $f_1(z)$ y $f_2(z)$ las funciones de los lados izquierdo y derecho respectivamente de (6.25). Es claro que f_1 es elíptica y analítica salvo por un posible polo en $z = 0$, pero por otro lado, f_2 es analítica en tal punto y claramente $f_2(0) = -g_3$. Esto junto con el teorema 6.1, permite concluir que $f_1(z)$ es idénticamente $-g_3$. \square

Nota. A las constantes g_2 y g_3 se les llama *invariantes modulares* de la latiz correspondiente.

6.4.1. El discriminante modular

La variedad de Poncelet es isomorfa a la curva $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ con ecuación

$$y^2 = \prod_{j=1}^3 (x - a_j),$$

donde los 3 números a_j son las raíces (distintas) de $\det(xC + D)$.

Por otro lado, el teorema anterior deja ver que los puntos de la forma $(x = \wp(z), y = \wp'(z))$ están en la curva determinada por

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Surge entonces de manera natural la pregunta: ¿tiene el polinomio $p(t) := 4t^3 - g_2t - g_3$ raíces distintas?, y de ser así, ¿cómo están relacionadas con la latiz que define a las constantes g_2 y g_3 ? Responderemos estas preguntas a continuación.

Teorema 6.6. *Tómese una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\} \subset \mathbb{C}$ y sean $\wp(z)$ y g_2, g_3 la función elíptica de Weierstrass y los invariantes modulares correspondientes. Entonces los números*

$$e_1 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right).$$

Son distintos entre sí y son los ceros de $p(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$.

Demostración. Sea x cualquiera de los números $w_1/2, w_2/2, (w_1 + w_2)/2$. Como \wp es impar,

$$-\wp'(x) = \wp'(-x),$$

pero $x \equiv -x \pmod{\Lambda}$. Entonces $\wp'(-x) = \wp'(x)$, por tanto

$$-\wp'(x) = \wp'(x),$$

de donde $\wp'(x) = 0$. Sustituyendo $z = x$ en (6.21), concluimos que $p(\wp(x)) = 0$.

Para ver que los e_j son distintos entre sí, nótese que el que $\wp'(\frac{w_1}{2}) = 0$, implica que \wp toma el valor e_1 al menos dos veces en $\frac{w_1}{2}$, pero \wp es de orden 2, luego, debe tomar dicho valor exactamente 2 veces en el paralelogramo fundamental P_0 . Se sigue que $\wp(z) \neq e_1$ para $z = \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$, por tanto $e_1 \neq e_2, e_3$. Análogamente se prueba que $e_2 \neq e_3$. \square

Observación 6.1. Como la función \wp' es de orden 3, los números $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}$ y $\frac{w_1+w_2}{2}$ forman un conjunto completo de sus ceros.

A números como $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}$ y $\frac{w_1+w_2}{2}$ suele llamárseles **semiperiodos**, éstos son precisamente $\frac{1}{2}\Lambda \setminus \Lambda$.

Corolario 6.6.1. i) $\wp(\frac{w_1}{2}) + \wp(\frac{w_2}{2}) + \wp(\frac{w_1+w_2}{2}) = e_1 + e_2 + e_3 = 0$

ii) Sea $\Delta = \Delta(\Lambda) := g_2^3 - 27g_3^2$. Entonces $\Delta \neq 0$.

Demostración. i) Por el teorema 6.6, e_1, e_2, e_3 son los ceros de $p(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$. El resultado se sigue entonces de que el coeficiente de t^2 en este polinomio es 0.

ii) Del mismo teorema, $p(t)$ tiene raíces distintas. Esto equivale a que p y p' no tengan un cero común. Los ceros de $p'(t) = 12t^2 - g_2$ son $\pm\sqrt{g_2/12}$; entonces p y p' no tienen raíces comunes si y sólo si $p(\pm\sqrt{g_2/12}) = \pm\frac{2}{3}g_2\sqrt{g_2/12} - g_3 \neq 0$, es decir $\Delta \neq 0$.

□

A la constante $\Delta(\Lambda)$ se le llama **discriminante modular** de la latiz.

6.4.2. El problema de inversión

Motivados por lo que hemos encontrado previamente nos planteamos el siguiente problema:

Problema. *Dados dos complejos z_1, z_2 tales que $z_2^3 - 27z_3^2 \neq 0$. ¿Existe una latiz $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tal que $g_2(\Lambda) = z_2$ y $g_3(\Lambda) = z_3$?*

La respuesta no sólo resulta afirmativa, sino que puede probarse además, que tal latiz es única. Nótese que tal resultado implica lo siguiente:

Teorema 6.7. *Sea $f(t)$ es un polinomio cúbico de la forma*

$$f(t) = 4 \prod_{j=1}^3 (t - a_j),$$

con raíces a_j distintas y $\sum_{j=1}^3 a_j = 0$. Entonces existe una latiz cuya función \wp satisface

$$[\wp'(z)]^2 = 4 \left(\prod_{j=1}^3 \wp(z) - a_j \right).$$

Hemos incluido la solución al llamado **problema de inversión** y la prueba del teorema anterior en el segundo apéndice, con el fin de no desviar la atención de lo que viene enseguida.

6.5. Curvas elípticas

Formalmente una curva elíptica es una curva algebraica suave de género 1 (topológicamente un toro), en la que hay un punto específico O . A este tipo de curvas es posible darles una estructura de grupo abeliano, en la que el punto O sirve como elemento neutro. Tal definición está inspirada en las curvas elípticas sobre el campo de los complejos, el cual obviamente es el caso que nos interesa y revisaremos en esta sección.

6.5.1. \mathcal{P} es un toro (versión formal)

Definiremos este tipo de superficie riemanniana revisando el ejemplo de la curva $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ determinada por la ecuación

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$

donde los números a_j , $1 \leq j \leq 3$ son distintos. Recordemos que \mathcal{E} es un modelo algebraico de la variedad \mathcal{P} de Poncelet asociada a dos cónicas suaves en posición general; es también una superficie de dos hojas sobre la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ con cuatro puntos de ramificación; los tres puntos finitos $(a_j, 0)_{j=1,2,3}$ y el punto infinito (∞, ∞) . El siguiente teorema es la pieza faltante en la demostración de la versión moderna del porismo de Poncelet que revisamos en el capítulo pasado y motivará nuestra definición de curva elíptica.

Teorema 6.8. *Sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, a_3) \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ la curva mencionada anteriormente. Entonces*

- i) Existe una latiz $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{E} \sim \mathbb{C}/\Lambda$ (\mathcal{E} es isomorfa como superficie de Riemann al toro \mathbb{C}/Λ).*
- ii) Para toda latiz Λ , $\mathbb{C}/\Lambda \sim \mathcal{E}(a_1, a_2, a_3)$ para ciertos complejos distintos a_1, a_2, a_3 .*

Demostración. i) La ecuación diferencial que satisface la función \wp , sugiere el cambio de variables $x = z + \frac{s}{3}$, $y = \frac{w}{2}$; donde $s = \sum_{j=1}^3 a_j$. Entonces $y^2 = \prod_{j=1}^3 (x - a_j)$ se transforma en $w^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (z - e_j)$, donde los $e_j = a_j - \frac{s}{3}$ claramente son distintos entre sí y suman cero. Por el teorema 6.7, existe una latiz Λ cuya función \wp de Weierstrass satisface

$$\wp'^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (\wp - e_j). \quad (6.26)$$

Así las cosas, proponemos $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{E}$, dada por

$$\varphi(\tilde{t}) = (x(t), y(t)) := \left(\wp(t) + \frac{s}{3}, \frac{\wp'(t)}{2}\right), \quad (6.27)$$

donde \tilde{t} denota la clase de equivalencia de t módulo Λ .

Debido a la periodicidad de las funciones \wp y \wp' , φ está bien definida y por construcción $\varphi(\tilde{t}) \in \mathcal{E}$ para todo $\tilde{t} \in \mathbb{C}/\Lambda$. Ahora,

a) φ es sobre.

Se tiene $\varphi(\tilde{0}) = (\infty, \infty)$. Por otro lado, si $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ es cualquier punto finito de la curva, como $x(t)$ es par y asume todo valor, existe t_0 tal que

$$x(t_0) = x(-t_0) = x_0.$$

Entonces

$$y^2(t_0) = \prod_{j=1}^3 (x_0 - a_j) = y_0^2,$$

por lo que $y(t_0) = \pm y_0$, y como $y(t)$ es impar, concluimos que debe tenerse $\varphi(\tilde{t}_0) = (x_0, y_0)$ ó $\varphi(-\tilde{t}_0) = (x_0, y_0)$.

b) φ es uno-a-uno.

$\varphi(\tilde{t}_1) = \varphi(\tilde{t}_2)$ equivale al par de ecuaciones siguiente:

$$\wp(t_1) = \wp(t_2), \quad (6.28)$$

$$\wp'(t_1) = \wp'(t_2). \quad (6.29)$$

De (6.28) y el teorema 6.2, inciso *v*), tenemos $t_1 \equiv \pm t_2 \pmod{\Lambda}$.

Supóngase que fuera

$$t_1 \equiv -t_2 \pmod{\Lambda}. \quad (6.30)$$

Como \wp' es una función elíptica impar, se sigue de (6.29) y (6.30) que $\wp'(t_2) = -\wp'(t_2)$, es decir, $\wp'(t_2) = 0$ ó $\wp'(t_2) = \infty$. Por lo tanto, t_2 es un semiperiodo o bien un periodo, pero en cualquier caso se tendrá $t_2 \equiv -t_2 \pmod{\Lambda}$, que junto con la ecuación (6.30) da $t_1 \equiv t_2 \pmod{\Lambda}$, que es $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$.

c) φ es conforme en \mathbb{C}/Λ .

Sea $\varphi(\tilde{t}_0) = (x_0, y_0)$, de acuerdo a la estructura que describimos en el capítulo anterior, t suficientemente cercano a t_0 sirve como coordenada local en \tilde{t}_0 , mientras que x , y y $\frac{x}{y}$ sirven como coordenadas locales en (x_0, y_0) según sea el caso respectivamente que dicho punto sea: 1) un punto regular, 2) un punto de ramificación finito y 3) el punto de ramificación infinito. De (6.27) observamos que estos casos corresponden

respectivamente a que t_0 sea: 1) ni un semiperiodo ni un periodo, 2) un semiperiodo y 3) un periodo.

En términos de tales coordenadas locales, φ se expresa en cada caso como

$$1) x = \wp(t) + \frac{s}{3}, \quad 2) y = \wp'(t)/2, \quad 3) \frac{x}{y} = \frac{\wp(t) + \frac{s}{3}}{\wp'(t)/2}.$$

Derivando estas ecuaciones en $t = t_0$ se obtiene

$$1) x'(t_0) = \wp'(t_0) \neq 0, \quad 2) y'(t_0) = \wp''(t_0)/2 \neq 0, \quad 3) (x/y)'(t_0) = -1.$$

1) y 2) se siguen del que \wp' sea de orden 3 con ceros en los semiperiodos de la latiz y 3) se puede calcular utilizando las expansiones de \wp y \wp' alrededor de un periodo. En todo caso observamos que φ es conforme localmente.

ii) Sea $\wp(z)$ la función de Weierstrass correspondiente. La prueba del inciso anterior muestra que \mathbb{C}/Λ es isomorfo a $\mathcal{E}(\wp(\frac{w_1}{2}), \wp(\frac{w_2}{2}), \wp(\frac{w_1+w_2}{2}))$, donde $\Lambda = \{w_1, w_2\}$.

□

Habiendo exhibido un ejemplo no trivial gracias a las propiedades de la función elíptica de Weierstrass, daremos la siguiente:

Definición 6.4. Una superficie riemanniana M isomorfa a \mathbb{C}/Λ para alguna latiz $\Lambda \subset \mathbb{C}$, es una **curva elíptica**.

Comentario

Las curvas elípticas pues, **no son elipses**, su nombre está inspirado precisamente en el hecho de que en el caso complejo, éstas pueden parametrizarse utilizando funciones elípticas.

Lo que hemos visto sirvió como motivación para generalizar el concepto y llegar a la definición que mencionábamos al principio de la sección. Pueden definirse por ejemplo, curvas elípticas en el plano proyectivo real y se demuestra que su parte afín está determinada por una ecuación de la forma

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aunque no es válido el resultado recíproco, es decir, no toda ecuación de este tipo determina una curva elíptica; (si se toman $a = b = 0$ se tiene una curva singular en $(0, 0)$ que no puede por tanto, ser elíptica).

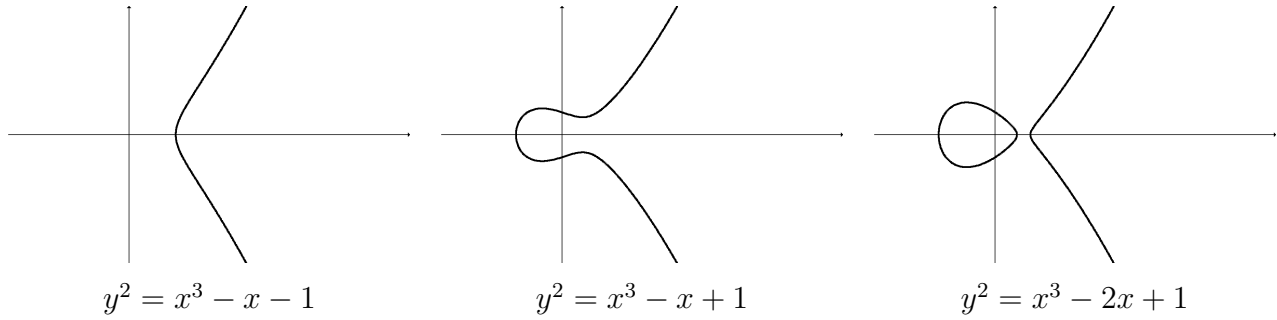


Figura 6.4: Algunos ejemplos de partes afines de curvas elípticas reales.

6.5.2. La estructura de grupo

En un toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$, podemos definir de manera natural una adición $'+'$ heredando la correspondiente de \mathbb{C} . Esto es, dados $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, sean $\tilde{t}_i = t_i + \Lambda$ para $i = 1, 2$ y defínase

$$\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 := \widetilde{t_1 + t_2}.$$

Por ser Λ una latiz, es claro que la definición no depende de la elección de los representantes de las clases de equivalencia, así como que $(T, +)$ es un grupo abeliano con $\tilde{0}$ como elemento neutro. Puede probarse además que en términos de coordenadas locales de cualesquiera dos elementos de T , la suma que hemos definido es una función analítica de 2 variables, se dice en este caso que $(T, +)$ es un grupo analítico.

Ahora, dada una curva elíptica \mathcal{E} , existen una latiz Λ y un isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{E}$ que nos permiten *transportar* la estructura de grupo abeliano del toro a \mathcal{E} como sigue. Para cualesquiera $p_1, p_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$, sea

$$\varphi(p_1) + \varphi(p_2) = \varphi(p_1 + p_2). \tag{6.31}$$

Claramente \mathcal{E} es entonces, un grupo abeliano analítico con elemento neutro (también llamado **origen**), $\varphi(\tilde{0})$. Esta estructura es única, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 6.9. *Sea \mathcal{E} una curva elíptica y elíjase un punto específico $\vartheta \in \mathcal{E}$. Entonces \mathcal{E} puede equiparse con una única estructura de grupo abeliano analítico, que tiene a ϑ como origen.*

Demostración. Sea $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ un isomorfismo con $p = \psi(\vartheta)$. Por el teorema de caracterización de automorfismos del toro, la función $\zeta(\tilde{t}) = \tilde{t} - p$ es un automorfismo de \mathbb{C}/Λ tal que $\zeta(p) = \tilde{0}$. Entonces $\zeta \circ \psi$ es un isomorfismo de la curva al toro que mapea ϑ en $\tilde{0}$. Sea $\varphi = (\zeta \circ \psi)^{-1}$ y defínase la suma como en la ecuación (6.31). Claramente $\varphi(\tilde{0}) = \vartheta$ y \mathcal{E} con esa adición, tiene la estructura deseada.

Para probar la unicidad, basta considerar el caso en que $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Lambda$ y $\vartheta = \tilde{0}$; pues si en una curva elíptica arbitraria \mathcal{E} con un origen también arbitrario ϑ , estuvieran definidas dos estructuras de grupo abeliano analítico teniendo tal origen, puede definirse φ como se hizo anteriormente. Entonces φ^{-1} induce las dos adiciones conmutativas y analíticas mencionadas en el toro correspondiente con $\tilde{0}$ como origen.

Sean entonces $+$ la suma usual en $T = \mathbb{C}/\Lambda$ y \oplus alguna otra para la cual también se cumplirían las hipótesis; (T, \oplus) es un grupo analítico y abeliano con $\tilde{0}$ como origen. Probemos que

$$\tilde{t} \oplus \tilde{s} = \tilde{t} + \tilde{s}, \quad \text{para todos } \tilde{t}, \tilde{s} \in T. \quad (6.32)$$

- Si $\tilde{s} = \tilde{0}$, el resultado se sigue de que ambas adiciones tienen este elemento como neutro.
- Si $\tilde{s} \neq \tilde{0}$, podemos usar de nuevo el teorema de caracterización de los automorfismos del toro de la siguiente manera: claramente $\phi_{\tilde{s}}(\tilde{t}) = \tilde{t} \oplus \tilde{s}$ es un automorfismo de T sin puntos fijos. Entonces por el resultado citado existe también una constante $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$ tal que para todo $\tilde{t} \in T$:

$$\phi_{\tilde{s}}(\tilde{t}) = \tilde{t} + \tilde{\sigma}. \quad (6.33)$$

Haciendo $\tilde{t} = \tilde{0}$ obtenemos en especial

$$\tilde{s} = \phi_{\tilde{s}}(\tilde{0}) = \tilde{\sigma}. \quad (6.34)$$

Así, (6.32) se sigue de (6.33) y (6.34).

□

Corolario 6.9.1. *Si \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son dos curvas elípticas con orígenes ϑ_1 y ϑ_2 respectivamente, y $\varphi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es un isomorfismo de variedades de Riemann que mapea ϑ_1 en ϑ_2 , entonces φ también es un isomorfismo de grupos. Es decir, dados cualesquiera $a, b \in \mathcal{E}_1$,*

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b).$$

Demostración. Definimos la siguiente suma analítica en \mathcal{E}_2 :

$$\varphi(a) \oplus \varphi(b) = \varphi(a + b), \quad \forall a, b \in \mathcal{E}_1.$$

Tanto \oplus como la adición original $+$ de \mathcal{E}_2 tienen a ϑ_2 como origen y por el teorema anterior, deben ser idénticas. \square

Sea \mathcal{E} la curva elíptica dada por

$$\{(x, y) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\},$$

donde $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, y sea $\wp(z)$ la función de Weierstrass de la latiz Λ determinada por dicho discriminante. Si tenemos dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{E}$, nos interesa ahora obtener una fórmula explícita para las coordenadas del tercer punto $p_3 = (x_3, y_3) \in \mathcal{E}$ que satisface

$$p_3 = p_1 + p_2,$$

con la suma inducida por el isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{E}$, definido mediante

$$z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)).$$

Lo que obtendremos a continuación tiene una interpretación geométrica muy bonita en el caso real, pues resulta que p_3 se obtiene tomando la tercer intersección entre la curva correspondiente y la recta que une los puntos p_1 y p_2 , y reflejándola respecto al eje horizontal, (salvo en casos especiales) como muestra la siguiente figura:

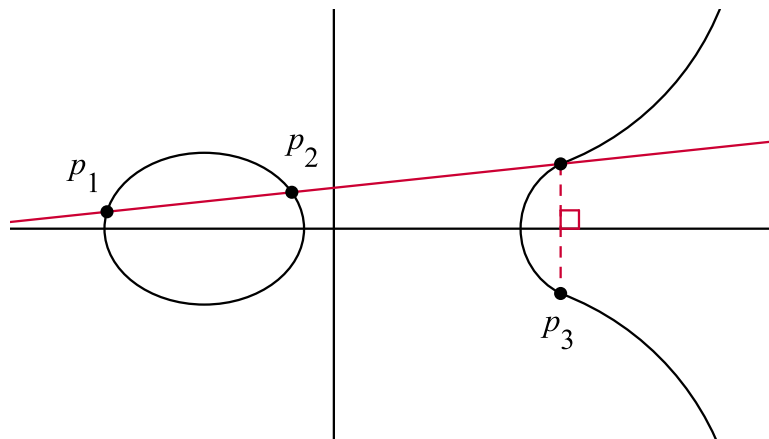


Figura 6.5: $p_3 = p_1 + p_2$.

El caso interesante obviamente es para puntos distintos del origen de \mathcal{E} que es $\wp(\Lambda)$. Sean entonces $t_1, t_2 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ tales que $\wp(\tilde{t}_j) = p_j$, $j = 1, 2$; consideremos primero el caso $t_1 \not\equiv t_2 \pmod{\Lambda}$.

Tómense a, b complejos tales que

$$\wp'(t_1) = a\wp(t_1) + b$$

$$\wp'(t_2) = a\wp(t_2) + b,$$

es decir, $y = ax + b$ es la recta que pasa por p_1 y p_2 . Entonces, como la función

$$\wp'(z) - [a\wp(z) + b]$$

tiene un polo de orden 3 en 0, debe tener también 3 ceros contando multiplicidades; dos de ellos son t_1 y t_2 y si t_3 es el tercero, se tiene también

$$\wp'(t_3) = a\wp(t_3) + b,$$

y por el teorema 6.1, inciso *iv*):

$$t_3 \equiv -(t_1 + t_2) \pmod{\Lambda},$$

de manera que

$$\wp(t_3) = \wp(-(t_1 + t_2)) = \wp(t_1 + t_2). \quad (6.35)$$

Ahora, de lo anterior se sigue que la ecuación

$$4x^3 - g_2x - g_3 = (ax + b)^2, \quad (6.36)$$

obtenida eliminando y de las ecuaciones de la recta y la curva elíptica, tiene 3 raíces contando multiplicidades. Estas son $\wp(t_1)$, $\wp(t_2)$, $\wp(t_3)$, por lo que el lado izquierdo de (6.36) se factoriza como sigue

$$4 \prod_{j=1}^3 (x - \wp(t_j)),$$

e igualando el coeficiente de x^2 con el del lado derecho de (6.36) da

$$\sum_{j=1}^3 \wp(t_j) = \frac{a^2}{4}.$$

Pero de las ecuaciones originales para a y b tenemos

$$a(\wp(t_1) - \wp(t_2)) = \wp'(t_1) - \wp'(t_2),$$

que junto con (6.35) implican finalmente las fórmulas de adición buscadas:

$$\wp(t_1 + t_2) = -\wp(t_1) - \wp(t_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(t_1) - \wp'(t_2)}{\wp(t_1) - \wp(t_2)} \right)^2. \quad (6.37)$$

En términos de las coordenadas de los puntos,

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2.$$

Observaciones 6.2. i) Si fijamos t_1 en (6.37), la fórmula es válida para todo $t_2 \not\equiv t_1 \pmod{\Lambda}$ salvo a lo sumo una cantidad finita de tales números, luego, por continuación analítica se tiene la validez para todos estos.

ii) Para el caso $t_1 \equiv t_2 \pmod{\Lambda}$, basta tomar el límite en (6.37) cuando $t_1 \rightarrow t_2$ para obtener

$$\wp(2t) = -2\wp(t) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(t)}{\wp'(t)} \right)^2.$$

6.5.3. Los puntos de torsión de \mathbb{C}/Λ

Sea $T = \mathbb{C}/\Lambda$, con $\Lambda = \{w_1, w_2\}$. Daremos la siguiente definición, similar a la dada en teoría básica de grupos:

Definición 6.5. Un elemento $z \in T$ es de orden n si y sólo si existe un entero positivo n tal que

$$nz \equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

donde nz denota a z sumado consigo mismo n veces.

Los puntos de orden finito son llamados **puntos de torsión** del toro T . Obsérvese que dado un entero positivo n , existen precisamente n^2 puntos de orden n en T ; a saber, las clases de equivalencia representadas por

$$\frac{jw_1 + kw_2}{n}, \quad 0 \leq j, k \leq n-1, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Hemos probado que la transformación de Poncelet puede verse como una traslación en un toro. Es natural entonces que nos interese caracterizar los puntos de torsión, y de ser posible, obtener condiciones necesarias y suficientes para que un par de cónicas admita un polígono interinscrito.

En el caso del toro, mostraremos que los puntos de torsión son un conjunto completo de ceros de cierta función elíptica y esto nos ayudará posteriormente a caracterizar los puntos de torsión de la curva elíptica $\mathcal{E}(a_1, a_2, a_2)$, eligiendo a su punto (∞, ∞) como origen.

Definición 6.6. Para un entero positivo n , V_n es el espacio de funciones elípticas con periodos w_1, w_2 , con al menos un polo de orden menor o igual a n en

$$R = \{xw_1 + yw_2 \mid 0 \leq x, y < 1\},$$

estando éste precisamente en 0.

Para $n = 1$, definimos V_1 como el espacio de funciones constantes.

Es claro que V_n es un subespacio vectorial, del espacio de funciones complejas de variable compleja.

Para $n = 1$, evidentemente $\dim V_n = 1$; una base para V_n es simplemente por ejemplo, $\{1\}$, la función constante 1. Si $n \geq 2$, tenemos lo siguiente:

Teorema 6.10. Sea $\wp^{(0)} := \wp$ la función elíptica de Weierstrass asociada a $\Lambda = \{w_1, w_2\}$, para $k = 1, 2, \dots$, denotemos por $\wp^{(k)}$ a la k -ésima derivada de \wp . Entonces $\{1, \wp, \wp' \dots \wp^{(n-2)}\}$ es una base de V_n .

Demostración. i) $\{1, \wp, \wp' \dots \wp^{(n-2)}\}$ es linealmente independiente.

De la ecuación (6.6) que define a la función \wp , obtenemos que en $t = 0$, $\wp(t)$ tiene la expansión

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + h(t),$$

donde $h(t)$ es analítica en $t = 0$. Derivando esta ecuación tenemos

$$\wp^{(k-2)}(t) = (-1)^k (k-1)! t^{-k} + h^{(k-2)}(t), \quad k \geq 2. \quad (6.38)$$

Si el conjunto que proponemos fuese linealmente dependiente, entonces para algún j con $1 \leq j \leq n-1$, se tendría

$$c_0 + c_1 \wp + \dots + c_j \wp^{(j-1)} = 0, \quad (6.39)$$

donde $c_0, \dots, c_j \in \mathbb{C}$ y $c_j \neq 0$. Pero por (6.38), la función del lado izquierdo de (6.39) tiene un polo de orden $j+1$ en $t = 0$, lo cual contradice que se trate de la función cero.

ii) $\{1, \wp, \wp' \dots \wp^{(n-2)}\}$ genera a V_n .

Sea $f \in V_n$, por definición, f debe tener una expansión en $t = 0$ de la forma

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{t^k} + g(t), \quad (6.40)$$

donde a_k son constantes y $g(t)$ es analítica en $t = 0$. Como el residuo de f en 0 es a_1 y f no tiene ningún otro polo en el paralelogramo R , se sigue del teorema 6.1, inciso ii) que

$a_1 = 0$. Sea $\xi(t) = f(t) - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k a_k}{(k-1)!} \wp^{(k-2)}(t)$. Por (6.38) y (6.40), $\xi(t)$ no tiene polos en R , lo que implica que es constante y f es una combinación lineal de $1, \wp, \wp', \dots, \wp^{(n-2)}$.

□

Así las cosas, para $n \geq 2$ podemos tomar funciones elípticas $f_1, f_2, \dots, f_n \in V_n$ que formen una base. La función elíptica que mencionábamos al principio de la subsección, cuyos ceros son precisamente los puntos de torsión de orden n , es el wronskiano de f_1, \dots, f_n :

$$W_{f_1, \dots, f_n} = \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_1' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Como se establece a continuación.

Teorema 6.11. Sean $z \in \mathbb{C}/\Lambda$, $n \geq 2$ y V_n el espacio de funciones elípticas definido anteriormente. Si f_1, f_2, \dots, f_n es una base de V_n , son equivalentes:

- i) $nz \equiv 0 \pmod{\Lambda}$.
- ii) Existe $f \in V_n$ no-idénticamente 0, con un cero de multiplicidad mayor o igual a n en z .
- iii) $W_{f_1, f_2, \dots, f_n}(z) = 0$.

Demostración. Probaremos primero que i) y ii) son equivalentes. Supóngase $nz \equiv 0 \pmod{\Lambda}$, por el teorema 6.4 existe una función elíptica f cuyos conjuntos completos de ceros y polos son respectivamente, z y 0 contados n veces. Claramente f satisface ii). Recíprocamente, si se tiene ii); por el tercer inciso del teorema 6.1, 0 y z contados ambos n veces, forman conjuntos completos de polos y ceros de f respectivamente. Luego por el cuarto inciso del mismo teorema, $nz \equiv 0 \pmod{\Lambda}$.

Ahora, ii) significa que $f^{(j)}(z) = 0$ para $0 \leq j \leq n-1$. Expresando a f como combinación lineal de los elementos de la base elegida, obtenemos un sistema de n ecuaciones,

$$f^{(j)}(z) = \sum_{i=1}^n c_i f_i^{(j)}(z) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad (6.41)$$

para ciertas constantes c_1, c_2, \dots, c_n , no todas nulas.

Por lo tanto, $nz \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ es equivalente a que el sistema (6.41) tenga una solución no trivial para las c_k , lo que equivale a iii). □

- Observaciones 6.3.* i) La elección de la base en el teorema anterior no influye en el resultado, pues si $g_i = \sum_j a_{ij} f_j$, $1 \leq i \leq n$ es otra base de V_n , se tiene $\det(a_{ij}) \neq 0$ y como $g_i^{(k)} = \sum_j a_{ij} f_j^{(k)}$, tenemos $W_{g_1, g_2, \dots, g_n} = \det(a_{ij}) \cdot W_{f_1, f_2, \dots, f_n}$.
- ii) Si $u = u(t)$ es analítica en $t = z$ y $u'(z) \neq 0$, la diferenciación respecto a t en el teorema, puede cambiarse por diferenciación respecto a u .

6.5.4. Los puntos de torsión de \mathcal{E}

En el teorema 6.8 dimos un isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathcal{E}(a_1, a_2, a_3)$ para el cual $\varphi(\tilde{0}) = (\infty, \infty)$. Vimos que φ induce una única estructura de grupo abeliano analítico en la curva elíptica \mathcal{E} teniendo a (∞, ∞) como origen, nos interesan ahora los puntos de torsión de \mathcal{E} con esta adición.

Tomemos un punto (x_0, y_0) distinto del origen. Notemos primero que la condición para que (x_0, y_0) sea de orden 2, es que $(x_0, y_0) = \varphi(z)$, para algún $z \in \frac{\Lambda}{2} \setminus \Lambda$. De la ecuación de φ , (6.27), vemos que estos puntos son precisamente los 3 puntos de ramificación finitos $(a_j, 0)$, $j = 1, 2, 3$.

Ahora, un punto finito $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ será de orden n , $n \geq 3$, si $(x_0, y_0) = \varphi(z)$ con $z \in \frac{\Lambda}{n} \setminus \frac{\Lambda}{2}$. Observamos de nuevo de (6.27), que el hecho de que φ' sea impar, y que $z \in \frac{\Lambda}{n} \setminus \frac{\Lambda}{2}$ equivalga a $-z \in \frac{\Lambda}{n} \setminus \frac{\Lambda}{2}$, implica que los puntos de orden n vienen en pares; esto es, (x_0, y_0) es uno de tales puntos si y sólo si $(x_0, -y_0)$ lo es. Enseguida obtendremos un criterio para caracterizar a los puntos de orden mayor o igual a 3.

La función $y = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}$ tiene dos ramas analíticas en x_0 , negativas entre sí. Elíjase cualquiera de las dos y sea

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - x_0)^k,$$

su expansión en serie de Taylor. Probaremos lo siguiente:

Teorema 6.12. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con la notación introducida anteriormente;*

i) *Si $n = 2m + 1$, $m \geq 1$. Entonces (x_0, y_0) es un punto de orden n de la curva \mathcal{E} si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} A_2 & \dots & A_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.42)$$

ii) *Si $n = 2m$, $m \geq 2$. Entonces (x_0, y_0) es un punto de orden n de la curva \mathcal{E} si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} A_3 & \dots & A_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m-1} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.43)$$

Demostración. Es claro que $(x_0, y_0) = \varphi(z)$ es un punto finito de orden n si y sólo si $z \in \frac{\Lambda}{n} \setminus \frac{\Lambda}{2}$. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ las funciones que definen al isomorfismo φ en (6.27) y considérese las siguientes bases del espacio V_n del teorema 6.11:

Para $n = 2m + 1$:

$$1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^m; y, (x - x_0)y, \dots, (x - x_0)^{m-1}y.$$

Y para $n = 2m$:

$$1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^m; y, (x - x_0)y, \dots, (x - x_0)^{m-2}y.$$

Las listas de funciones que proponemos son bases por tener polos únicamente en 0 dentro del paralelogramo R , (de multiplicidades $0, 2, 3, \dots, n$); hay n funciones en cada lista y la prueba del teorema 6.10 muestra que son linealmente independientes.

Mostraremos los detalles faltantes para el caso i), pues el segundo es análogo. Para evaluar el wronskiano W correspondiente, derivaremos las funciones de la primer base respecto a x en $x_0 = \varphi(z) + \frac{s}{3}$. Por las observaciones al teorema 6.11 esto es admisible, pues $x'(z) = \wp'(z)$ que no es nula por ser $z \notin \frac{\Lambda}{2}$. Tenemos entonces

$$W = \det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad (6.44)$$

donde A es la matriz diagonal con entradas $1, 1, 2!, 3!, \dots, m!$, B es una matriz de $(m+1) \times m$, O es la matriz cero de $m \times (m+1)$ entradas y

$$C = \begin{pmatrix} (m+1)!A_{m+1} & \dots & (m+1)!A_2 \\ (m+2)!A_{m+2} & \dots & (m+2)!A_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ (2m)!A_{2m} & \dots & (2m)!A_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Las descripciones de A y O se obtienen del hecho de que para los enteros $j, k \geq 0$, tenemos

$$\left. \frac{d}{dx^j} (x - x_0)^k \right]_{x=x_0} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k, \\ j!, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Y para obtener C , se utiliza

$$(x - x_0)^j y = \sum_{k=j}^{\infty} A_{k-j} (x - x_0)^k, \quad 0 \leq j \leq m-1,$$

de donde

$$[(x - x_0)^j y]_{x=x_0}^{(l)} = l! A_{l-j}, \quad m+1 \leq l \leq 2m.$$

De (6.44) y (6.45) se sigue que $W = (\det A) \cdot (\det C)$, que es un múltiplo escalar no-nulo del determinante que aparece en (6.42). Entonces, el resultado se sigue del teorema 6.11. \square

Observación 6.4. Es claro que el teorema anterior es válido también para la curva elíptica con origen (∞, ∞) , determinada por la ecuación

$$y = c\sqrt{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)},$$

donde los a_j son distintos entre sí y $c \neq 0$.

6.6. El teorema de Cayley

Para concluir este capítulo, daremos una condición necesaria y suficiente hallada originalmente por Cayley para que un par de cónicas suaves en posición general, satisfaga el porismo de Poncelet.

Sea C, D un par de tales cónicas, hemos probado que la variedad de Poncelet asociada,

$$\mathcal{P} = \{(x, \xi) \mid x \in C, \xi \in D^*, x \in \xi\},$$

es una curva elíptica, cuya estructura de grupo queda determinada si elegimos un origen $\vartheta \in \mathcal{P}$. Vimos también que la transformación de Poncelet $\eta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, es una traslación en términos de esta estructura. Esto es, existe un $b \in \mathcal{P}$ fijo tal que:

$$\eta(p) = p + b, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}.$$

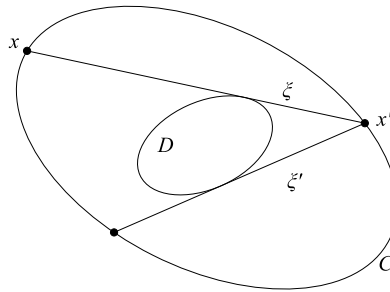
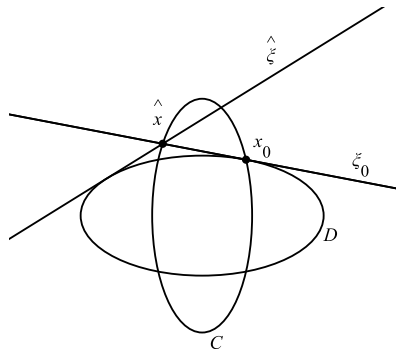


Figura 6.6: $\eta(x, \xi) = (x', \xi')$

Recuérdese que existe un polígono interinscrito de $n \geq 3$ lados al par (C, D) si y sólo si $\eta^n(p) = p + nb = p$, (de aquí se sigue el porismo de Poncelet) lo que equivale a $nb = \vartheta$. Hemos establecido lo siguiente:

Resultado 6.1. *La función η^n es el mapeo identidad en \mathcal{P} si y sólo si $b = \eta(\vartheta)$ es un punto de torsión de \mathcal{P} de orden n .*

Elegiremos como origen de \mathcal{P} a alguno de los 4 puntos (x_0, ξ_0) para los cuales $x_0 \in C \cap D$. Entonces $b = (\hat{x}, \hat{\xi})$, donde x_0 y \hat{x} son las intersecciones de ξ_0 con C y $\hat{\xi}$ es la tangente a D que pasa por \hat{x} . Estos puntos se ilustran simbólicamente en la figura siguiente.



En la subsección 5.2.2 dimos un isomorfismo φ entre la variedad de Poncelet y la curva elíptica $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}^2$ dada por la ecuación

$$y = \sqrt{\det(xC + D)}.$$

Utilizando la notación que se usó en la parametrización de las cónicas C y D^* ; $x(r)$ y $\xi(s)$ respectivamente, en la prueba del resultado 4.4 observamos que

$$x(\infty) = x_0$$

y

$$x(0) = \hat{x}.$$

Esto implica respectivamente, que el isomorfismo $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ satisface

$$\varphi(\vartheta) = (\infty, \infty)$$

y

$$\varphi(b) = \text{alguno de los dos puntos } (0, \pm\sqrt{\det(0 \cdot C + D)}) = (0, \pm\sqrt{\det D}).$$

Nosotros caracterizamos a los puntos de torsión de las curvas elípticas de la forma de \mathcal{E} precisamente utilizando al punto (∞, ∞) como origen. Esto sugiere naturalmente, hacer uso del corolario 6.9.1 y el teorema 6.12 para obtener el último resultado del presente capítulo; observando finalmente que, al ser no-singular la cónica D se tiene que $\det(tC + D)$ es no-nula en $t = 0$ y por tanto admite una serie de Taylor para $|t|$ suficientemente pequeño, concluimos:

Teorema 6.13. (Teorema de Cayley). Sean C y D dos cónicas suaves en posición general y

$$\sqrt{\det(tC + D)} = A_0 + A_1t + \cdots + A_n t^n + \dots$$

Entonces D es una n -curva de Poncelet respecto a C si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} A_2 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{si } n = 2m + 1 \ (m \geq 1);$$

$$\det \begin{pmatrix} A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1} & \cdots & A_{2m-1} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{si } n = 2m \ (m \geq 2).$$

Demostración. Se sigue de lo visto hasta ahora. □

6.6.1. Comentarios

Puede probarse que si las cónicas C y D no están en posición general, (ver los tipos II-V en § 4.4.1), el porismo de Poncelet sigue cumpliéndose; en los casos *II* y *III* todos los n -ángulos interinscritos al par (C, D) , son cerrados si es que al menos uno lo es (nótese que no se tiene la propiedad de que todo punto en la cónica C es vértice de alguno de los polígonos). Los casos *IV* y *V* cumplen el porismo por vacuidad, pues se puede probar que no existen polígonos interinscritos al par (C, D) en tales situaciones. Por supuesto la variedad de Poncelet generada en estos casos no es una curva elíptica, sin embargo, resulta siempre una variedad en la que se puede garantizar que la transformación de Poncelet es la identidad, siempre que ésta tenga al menos un punto fijo.

Mostramos a continuación algunas imágenes de ejemplos en el plano real:

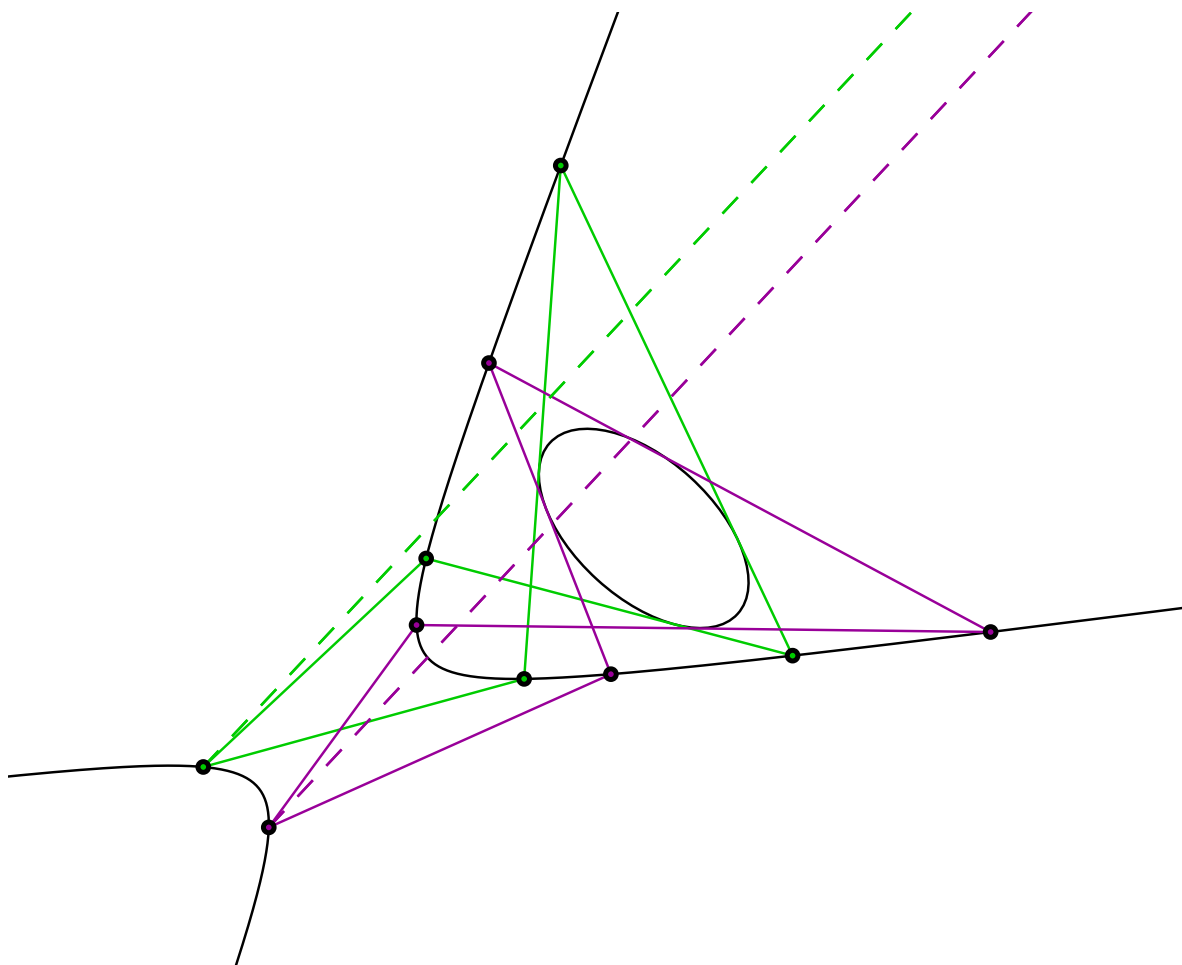


Figura 6.7: Dos pentágonos interinscritos a una hipérbola y una elipse.

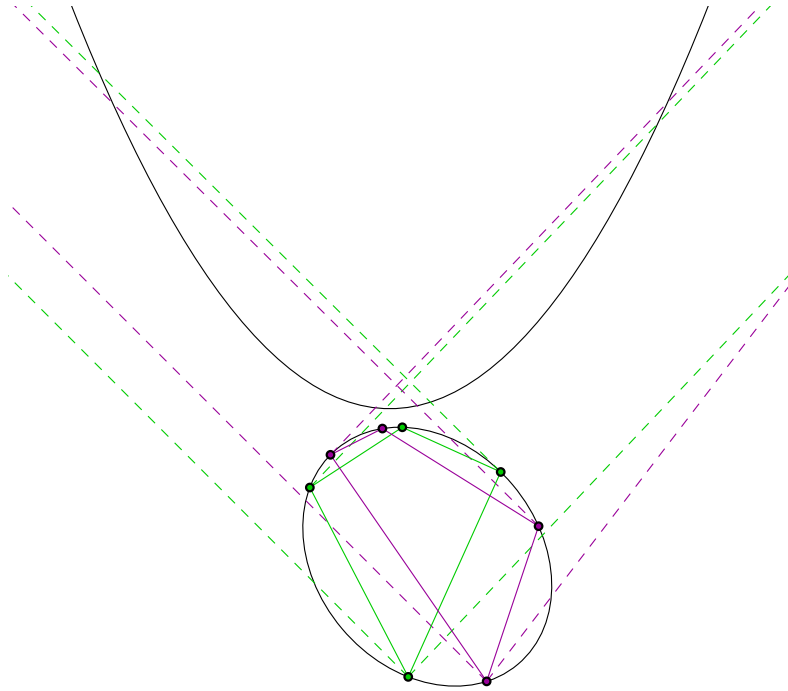


Figura 6.8: Dos cuadriláteros interinscritos a una elipse y una parábola.

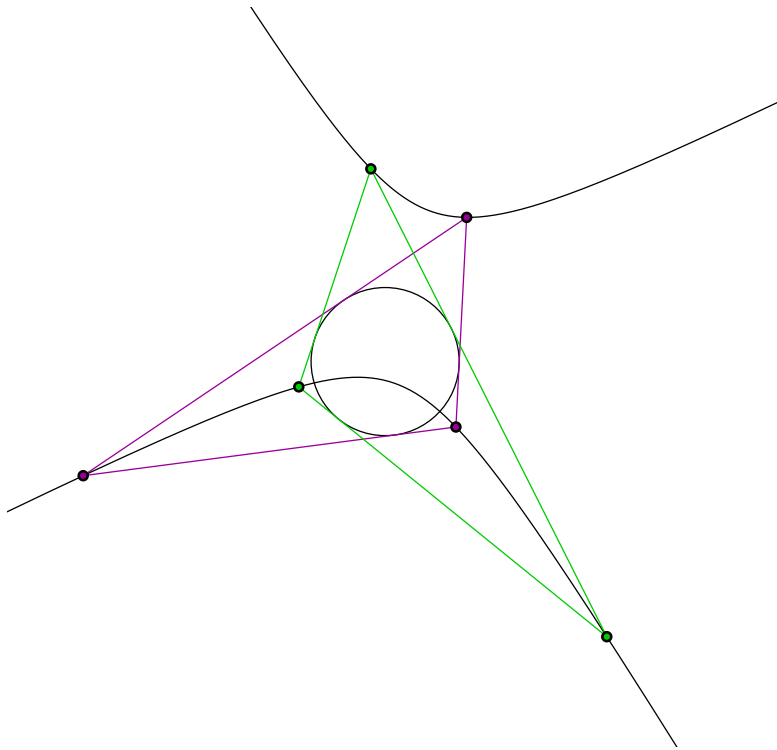


Figura 6.9: Dos triángulos interinscritos a una hipérbola y una circunferencia.

Hemos sido testigos de cómo la intuición que adquirimos en los primeros dos capítulos permite comprender las generalizaciones de los conceptos ahí estudiados en espacios aparentemente más complicados, (nótese que el poderío de la teoría de funciones de variable compleja, así como la propiedad de cerradura algebraica de \mathbb{C} , hace de hecho, más sencilla la tarea desde un punto de vista técnico). Sin embargo, fuera del teorema de Cayley, no hemos hecho más que lo logrado ya en el caso real, es decir, probamos el porismo de Poncelet en el plano proyectivo complejo utilizando como guía las ideas planteadas en el plano euclideo, que igualmente nos llevaron a una demostración en tal caso. Es con esta motivación que comenzamos el capítulo siguiente; nos gustaría sacar más provecho de las herramientas desarrolladas hasta ahora y obtener más resultados que difícilmente hubieran sido posibles de hallar anteriormente.

Capítulo 7

Polinomios y circunferencias de Poncelet

7.1. Introducción

El porismo de Poncelet suele llamarse, en virtud del teorema de Cayley, **teorema de cerradura de Poncelet**. El término *porismo* se aplica porque en él se establece que en caso de que cierto problema tenga una solución, entonces tiene una infinidad de soluciones; el problema en cuestión (hallar polígonos interinscritos a un par de cónicas), es además visualmente muy atractivo. Nos era interesante pues, por muchas razones, saber explícitamente cuándo existe al menos un polígono interinscrito, y el teorema de Cayley responde a esta pregunta, al menos teóricamente.

Véanse sin embargo, las fórmulas de Chaple-Euler y Fuss halladas en el capítulo 1; en ellas se resuelve el problema de hallar polígonos interinscritos de 3 y 4 lados respectivamente, a un par de circunferencias de manera explícita en términos de los únicos 3 parámetros que definen al par de cónicas en cuestión. El teorema de Cayley da una respuesta más general, pero es difícil de explotar, sobre todo para polígonos con gran número de lados.

De manera similar a como nosotros dedujimos las fórmulas citadas, Steiner descubrió las ecuaciones correspondientes para polígonos con el número de lados que se cita en la siguiente tabla, donde R y r son los radios de las circunferencias y a la distancia entre sus centros:

Número de lados	Condición necesaria y suficiente
$n = 3$	$R^2 - a^2 = 2Rr$
$n = 4$	$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2)$
$n = 5$	$r(R - a) = (R + a)[\sqrt{(R - r + a)(R - r - a)} + \sqrt{2R(R - r - a)}]$
$n = 6$	$3(R^2 - a^2)^4 = 4r^2(R^2 + a^2)(R^2 - a^2)^2 + 16r^4R^2a^2$

Quizá observando la complejidad de las expresiones resultantes en las variables R , r y a , uno pueda tener idea de lo laborioso que resultaron los cálculos para llegar a ellas utilizando el tipo de herramientas que empleamos en el capítulo de introducción. Esta vez expondremos cómo se han utilizado las técnicas de los capítulos 5 y 6, para descubrir tales ecuaciones, aparecerá además otro resultado geométrico hasta ahora no mencionado, *hermano* del porismo de Poncelet.

7.2. El problema de las circunferencias

En este capítulo consideraremos las cónicas del plano afín dadas por las siguientes ecuaciones:

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\} \text{ y } D' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid (x + a)^2 + y^2 = r^2\},$$

que al tomar parámetros reales, representan un par de circunferencias. Las completaciones proyectivas correspondientes están determinadas por las ecuaciones

$$C : x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0, \quad \text{y} \quad D : x^2 + y^2 + (a^2 - r^2)z^2 + 2axz = 0,$$

respectivamente, mismas que se intersecan siempre en los puntos al infinito representados por los vectores $(1, \pm i, 0)$.

Supondremos que existen además otros dos puntos de intersección de aquí en adelante, con el fin de que las cónicas estén en posición general y podamos utilizar la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. La variedad

$$\mathcal{P} = \{(x, \xi) \in C \times D^* \mid x \in \xi\}$$

es entonces una curva elíptica, en la que la transformación de Poncelet $\eta(x, \xi) = (x', \xi')$, donde x' es el otro punto de intersección de ξ con C y ξ' la otra recta tangente a D por x , es una traslación. Hemos probado ya que existe un polígono de n lados interinscrito al par (C, D) si y sólo si $\eta^n = Id$, (la función identidad). El problema consistirá ahora en lo siguiente:

1. Probar que para cualquier natural $n \geq 2$, la condición para que la transformación de Poncelet satisfaga $\eta^n = Id$ es polinomial en los parámetros a, R, r .
2. Obtener relaciones de recurrencia entre los polinomios resultantes del punto anterior, que nos permitan encontrarlos fácilmente.

Para el segundo inciso será necesario introducir una nueva función $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

7.2.1. La simetría σ

Un automorfismo de \mathcal{P} que denotaremos por σ y que aparece naturalmente debido a la simetría en la variable y de las ecuaciones de C y D en este caso particular, es el inducido por la reflexión respecto a la recta de los centros de ambas circunferencias, $y = 0$:

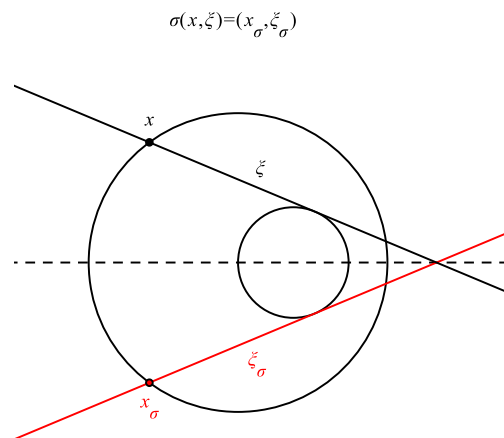


Figura 7.1: La simetría σ .

Es intuitivamente obvio que σ es un automorfismo y además una involución (como cualquier reflexión), pero sin puntos fijos, omitiremos los detalles técnicos que son similares

a la prueba para la transformación de Poncelet η .

Existiendo un isomorfismo $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ para cierta latiz Λ , la función $\tilde{\sigma} = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ es una involución sin puntos fijos en el toro $T := \mathbb{C}/\Lambda$. Por el corolario 5.3.1, existe una constante $\beta \in \mathbb{C}$ tal que

$$\tilde{\varphi}(z + \Lambda) = z + \beta + \Lambda,$$

donde $2\beta \in \Lambda$, pues $\tilde{\varphi}^2 = Id$. Esta simetría es entonces, al igual que la transformación de Poncelet, una traslación. Esto nos permite establecer un resultado análogo al porismo de Poncelet.

Teorema 7.1. *σ -porismo de Poncelet.* Dadas dos circunferencias $C, D \subset \mathbb{C}^2$ cuyas completaciones proyectivas están en posición general, sean \mathcal{P} y η la variedad y transformación de Poncelet correspondientes y $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ la reflexión respecto a la recta de los centros de C y D . Si existe un natural $n \geq 1$ y un punto $p_0 \in \mathcal{P}$ tales que $\eta^n(p_0) = \sigma(p_0)$, entonces $\eta^n(p) = \sigma(p)$ para cualquier $p \in \mathcal{P}$.

Demostración. Al estar las cónicas en posición general, \mathcal{P} es una curva elíptica. Podemos entonces definir una suma \oplus de forma que (\mathcal{P}, \oplus) es un grupo abeliano y por lo visto anteriormente, existen elementos $a, b \in \mathcal{P}$ tales que para todo $p \in \mathcal{P}$:

$$\eta(p) = p \oplus a,$$

$$\sigma(p) = p \oplus b.$$

Si para algún natural $n \geq 1$, existe un punto p_0 de la curva elíptica tal que

$$\eta^n(p_0) = \sigma(p_0),$$

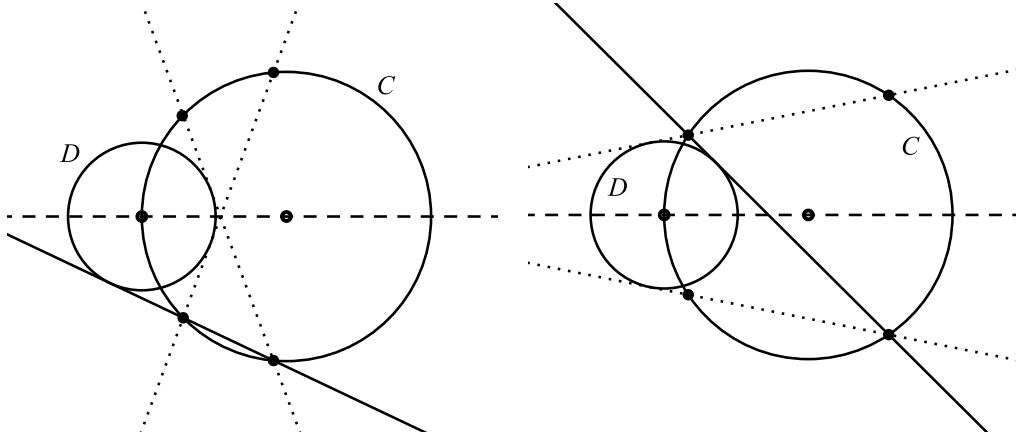
tenemos

$$p_0 \oplus na = p_0 \oplus b,$$

lo cual implica $na = b$, es decir, $\eta^n(p) = p \oplus b = \sigma(p)$. □

Este es el resultado *hermano* del porismo de Poncelet que mencionamos al principio del capítulo. Geométricamente en el caso real, con dos circunferencias C y D , si al tomar un punto en C y trazar $n+1$ tangentes consecutivas a D empezando en dicho punto, la tangente final es simétrica respecto a la recta de los centros de C y D con la primera, lo mismo sucederá sin importar la elección del punto inicial.

A continuación mostramos un ejemplo para $n = 2$. La primer y tercer tangentes están trazadas con rectas punteadas y son simétricas a la recta de los centros, en ambas figuras las circunferencias C y D son las mismas.



Nos interesarán simultaneamente las condiciones para las cuales la transformación de Poncelet satisfice $\eta^n = Id$ y $\eta^n = \sigma$, pues las relaciones de recurrencia entre los polinomios que vamos a encontrar son peculiarmente sencillas si se tiene en cuenta el segundo caso que recién introdujimos.

7.3. Resultados

A continuación presentamos en resumen, los resultados que se han encontrado en relación al problema que planteamos anteriormente.

7.3.1. Relaciones de recurrencia para los porismos de Poncelet

En primer lugar se introducen los polinomios que intervendrán en las condiciones para que se den ambos porismos, así como las relaciones de recurrencia que satisfacen.

Teorema 7.2. *Existen dos sucesiones de polinomios en tres variables, $p_n(x, y, z)$ y $q_n(x, y, z)$; $n \in \mathbb{N}$, definidos de manera única por los primeros términos*

$$p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = x, q_1 = y, p_2 = xyz^2,$$

y para $m \geq n$, por las relaciones

$$p_{m+n}p_{m-n} = p_m^2 q_n^2 - p_n^2 q_m^2, \quad (7.1)$$

$$q_{m+n}q_{m-n} = q_m^2 p_n^2 - p_n^2 p_m^2. \quad (7.2)$$

Que satisfacen las siguientes propiedades: p_n y q_n son homogéneos de grado n^2 en (x, y, z) , con

$$p_n \in x\mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4] \text{ y } q_n \in y\mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4] \quad \text{para } n \text{ impar}, \quad (7.3)$$

$$\text{y } p_n \in xy z^2 \mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4] \text{ y } q_n \in \mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4] \quad \text{para } n \text{ par}; \quad (7.4)$$

además, el producto $p_l q_l$ divide a p_{2l} en $\mathbb{Z}[x, y, z]$ ($l \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$) y el cálculo recursivo de los polinomios se facilita por las relaciones siguientes: para $k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{kl} = p_k \left(p_l, q_l, \sqrt{\frac{p_{2l}}{p_l q_l}} \right) \text{ y } q_{kl} = q_k \left(p_l, q_l, \sqrt{\frac{p_{2l}}{p_l q_l}} \right). \quad (7.5)$$

La conexión entre estos polinomios y los porismos de Poncelet se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 7.3. Sean C y D dos cónicas proyectivas complejas en posición general con partes afines dadas respectivamente por las ecuaciones $x^2 + y^2 = R^2$ y $(x + a)^2 + y^2 = r^2$, \mathcal{P} y η la variedad y transformación de Poncelet asociadas y $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la involución inducida por la simetría respecto al eje x . Entonces, para cualquier elección de las raíces cuadradas \sqrt{a} , \sqrt{R} y $\sqrt{2r}$:

$$\eta^n = Id \text{ si y sólo si } p_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r}) = 0$$

$$\text{y } \eta^n = \sigma \text{ si y sólo si } q_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r}) = 0.$$

7.3.2. Los polinomios de Poncelet

Debido a que cada porismo se da si y sólo si los polinomios que presentamos, $(p_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r}), q_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r}))$, se anulan, es inmediato interesarse en los posibles factores de los mismos,

más allá de factores no significativos como \sqrt{a} y \sqrt{R} .

Una primera descomposición que se intuye naturalmente, surge de observar por ejemplo, que si para cierto natural $n \geq 2$, se tiene $p_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r}) = 0$, entonces $\eta^n = Id$, lo que implica que la transformación de Poncelet es de orden finito d para cierto natural d que divide a n . Esto debe conducir a factores irreducibles del polinomio p_n ; se puede llegar más allá en detalle, y probar que si η es de orden par $d = 2k$, se tiene $\eta^k = \sigma$; esto sugiere las siguientes definiciones.

Definición 7.1. Diremos que la configuración formada por las dos cónicas C y D es σ -semiperiódica, si existe un natural $n \in \mathbb{N}^*$ para el cual la transformación de Poncelet asociada satisface $\eta^n = \sigma$. El σ -semiperiodo de η es el natural más chico para el cual $\eta^n = \sigma$. Similarmente, la configuración será σ -estrictamente periódica, si no es σ -semiperiódica y existe un natural $n \in \mathbb{N}^*$ para el cual $\eta^n = Id$. El σ -periodo de η será igualmente, el natural más chico con tal propiedad.

Lo anterior, para establecer los siguientes resultados.

Teorema 7.4. *Existen dos sucesiones de polinomios homogéneos $\varphi_n(x, y, z)$ y $\psi_n(x, y, z)$, ($n \in \mathbb{N}^*$), primos entre sí dos a dos, con $\varphi_1 = x$, $\psi_1 = y$, $\varphi_2 = z^2$, y $\varphi_n, \psi_n \in \mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$ en otro caso, y tales que para $n \geq 1$ se tienen las factorizaciones:*

$$p_n = \left(\prod_{d|n} \varphi_d \right) \left(\prod_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \text{ par}}} \psi_d \right) \quad (7.6)$$

$$q_n = \prod_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} \text{ impar}}} \psi_d. \quad (7.7)$$

Corolario 7.4.1. *Sean $\Phi_n(a, R, r) = \varphi_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r})$ y $\Psi_n(a, R, r) = \psi_n(\sqrt{a}, \sqrt{R}, \sqrt{2r})$, para todo $n \geq 2$. La configuración formada por las cónicas C y D , con parámetros $(a, R, r) \in \mathbb{P}_2$ (con $a, R, r \in \mathbb{C}^*$, y $a \pm R \pm r \neq 0$) será:*

- i) σ -estrictamente periódica de σ -periodo n si y sólo si $\Phi_n(a, R, r) = 0$.
- ii) σ -semiperiódica de σ -semiperiodo n si y sólo si $\Psi_n(a, R, r) = 0$.

Los polinomios Φ_n y Ψ_n son los llamados **polinomios de Poncelet**.

7.4. La conexión con la teoría de funciones elípticas

Utilizaremos la misma notación que en el capítulo previo; para una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\} \subset \mathbb{C}$, $T = \mathbb{C}/\Lambda$ es el toro generado, \wp será la función de Weierstrass correspondiente, $w_3 = w_1 + w_2$ y $e_j = \wp(\frac{w_j}{2})$ para $j = 1, 2, 3$. Los puntos $w_j/2$ son llamados de 2-torsión.

7.4.1. Relaciones de recurrencia

Lo primero que haremos es relacionar las ecuaciones de recurrencia (7.1) y (7.2), con los valores de la función de Weierstrass en los conjuntos siguientes:

$$T_0[n] = \{u \in T \mid u \neq 0, nu \equiv 0(\text{mód } \Lambda)\},$$

$$T_1[n] = \{v \in T \mid nv \equiv \frac{w_1}{2}(\text{mód } \Lambda)\}.$$

En virtud del teorema 6.4, una suma formal de la forma

$$-\sum_{j=1}^N \beta_j b_j + \sum_{k=1}^M \alpha_k a_k,$$

con $\alpha_k, \beta_j \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^M \alpha_k = \sum_{j=1}^N \beta_j$ y $a_k, b_j \in \mathbb{C}/\Lambda$; $-\sum_{j=1}^N \beta_j b_j + \sum_{k=1}^M \alpha_k a_k \equiv 0(\text{mód } \Lambda)$. Determina salvo por una constante multiplicativa, una función elíptica con tal latiz de periodicidad. Dada una función elíptica f , llamaremos a esta suma formal, (la diferencia entre polos y ceros por sus respectivas multiplicidades) el **divisor** de f y lo denotaremos por $\text{div}(f)$. Este concepto resultará extremadamente útil para establecer igualdades que parecieran difíciles de deducir, veamos una aplicación en el siguiente lema que generaliza la fórmula que hallamos para $\wp(2z)$ y ayudará a establecer más adelante las relaciones de recurrencia que nos interesan.

Lema 7.1. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, tenemos*

$$\wp(nz) - e_1 = \frac{1}{n^2} \frac{\prod_{v \in T_1[n]} (\wp(z) - \wp(v))}{\prod_{u \in T_0[n]} (\wp(z) - \wp(u))}.$$

Demostración. Sea $T[n] = \{u \in T \mid nu \equiv 0(\text{mód } \Lambda)\}$. Las funciones que aparecen en los lados izquierdo y derecho de la igualdad son claramente elípticas sobre el toro T y tienen ambas el divisor

$$(-2) \cdot (T[n]) + 2 \cdot (T_1[n]),$$

por lo que difieren quizá solamente por una constante multiplicativa, sin embargo, puede calcularse su desarrollo asintótico alrededor del origen para verificar que ambas tienen el mismo término dominante $\frac{1}{n^2 z^2}$, por lo que se tiene la igualdad. \square

Introduzcamos ahora polinomios P_n, Q_n , $n \in \mathbb{N}^*$ (que dependen de la latiz Λ) de coeficientes complejos definiendo para todo $z \in \mathbb{C}$:

i) Para n impar:

$$P_n^2(\wp(z)) = n^2 \prod_{u \in T_0[n]} (\wp(z) - \wp(u)) \quad (7.8)$$

$$(\wp(z) - e_1)Q_n^2(\wp(z)) = \prod_{v \in T_1[n]} (\wp(z) - \wp(v)); \quad (7.9)$$

ii) Para n par:

$$\frac{1}{4} (\wp'(z))^2 P_n^2(\wp(z)) = n^2 \prod_{u \in T_0[n]} (\wp(z) - \wp(u)) \quad (7.10)$$

$$Q_n^2(\wp(z)) = \prod_{v \in T_1[n]} (\wp(z) - \wp(v)). \quad (7.11)$$

Sean además $P_0 = 0$ y $Q_0 = 1$.

Observaciones 7.1. Por construcción, estos polinomios no tienen factores múltiples. La cantidad $P_n(\wp(z))$ es nula si y sólo si $z + \Lambda \in T[n]$ y $2z \not\equiv 0 \pmod{\Lambda}$, mientras que $Q_n(\wp(z))$ se anula si y sólo si $z + \Lambda \in E_1[n]$ y $z \not\equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda}$.

Sea ahora d_1 un complejo tal que $d_1^2 = (e_2 - e_1)(e_3 - e_1)$ y elijanse raíces cuadradas $\sqrt{d_1}$ y $\sqrt{\wp(z) - e_1}$. Vamos a introducir para $n \in \mathbb{N}$, las cantidades $\mathcal{P}_n(z)$ y $\mathcal{Q}_n(z)$ como se muestra a continuación:

$$\text{Para } n \text{ impar: } \mathcal{P}_n(z) := \sqrt{d_1} P_n(\wp(z)), \quad \mathcal{Q}_n(z) := \sqrt{\wp(z) - e_1} Q_n(\wp(z)).$$

$$\text{Para } n \text{ par: } \mathcal{P}_n(z) := \frac{\sqrt{d_1}}{2} \wp'(z) P_n(\wp(z)), \quad \mathcal{Q}_n(z) := Q_n(\wp(z)).$$

Mismas que satisfacen ecuaciones análogas a las mencionadas para los polinomios del teorema 7.2:

Teorema 7.5. *Se tiene para cualesquiera naturales m, n con $m \geq n$, que*

$$\mathcal{P}_{m+n}(z)\mathcal{P}_{m-n}(z) = \mathcal{P}_m^2(z)\mathcal{Q}_n^2(z) - \mathcal{P}_n^2(z)\mathcal{Q}_m^2(z), \quad (7.12)$$

$$\mathcal{Q}_{m+n}(z)\mathcal{Q}_{m-n}(z) = \mathcal{Q}_m^2(z)\mathcal{Q}_n^2(z) - \mathcal{P}_n^2(z)\mathcal{P}_m^2(z). \quad (7.13)$$

Nota: La inclusión en la definición de \mathcal{P}_n del factor $\sqrt{d_1}$ es con el fin de simplificar la ecuación (7.13).

Demostración. Estas identidades se prueban por casos sobre m y n , pero la idea es la misma en cada uno; por ejemplo, para probar (7.12) cuando $m \neq n$, definimos la función elíptica en el toro T , dada por $f(z) = \wp(nz) - \wp(mz)$. Tomando el caso en que m y n son pares podemos usar el lema previo para escribir f en términos de los polinomios P_n y Q_n de las ecuaciones (7.10) y (7.11), obteniendo

$$f(z) = \frac{4}{(\wp'(z))^2} \cdot \frac{P_m^2(\wp(z))Q_n^2(\wp(z)) - P_n^2(\wp(z))Q_m^2(\wp(z))}{P_n^2(\wp(z))P_m^2(\wp(z))}.$$

El divisor de f podemos calcularlo directamente de $f(z) = \wp(nz) - \wp(mz)$; $f(z) = 0$ si y sólo si $\wp(nz) = \wp(mz)$ si y sólo si $mz \equiv \pm nz \pmod{\Lambda}$, lo que equivale a $z \in T[m+n] \cup T[m-n]$. Por otro lado los polos de \wp son de orden 2 y están en cada punto de la latiz de periodicidad, esto lleva finalmente a

$$\operatorname{div}(f) = (-2) \cdot (T[m]) + (-2) \cdot (T[n]) + (T[m+n]) + (T[m-n]).$$

Lo anterior permite verificar que los divisores de las siguientes funciones elípticas son iguales:

$$z \mapsto P_m^2(\wp(z))Q_n^2(\wp(z)) - P_n^2(\wp(z))Q_m^2(\wp(z)),$$

$$z \mapsto P_{m+n}(\wp(z))P_{m-n}(\wp(z)).$$

Por lo que son proporcionales, finalmente la ecuación (7.12) se sigue de observar que las dos funciones que aparecen (en cada lado de la igualdad) son polinomiales en $\wp(z)$ con el mismo término dominante, $m^2 - n^2$ y de la definición misma de $\mathcal{P}_n(z)$ y $\mathcal{Q}_n(z)$.

Las pruebas en cada caso para la ecuación (7.13) se hacen auxiliándonos esta vez con la función $g(z) = (\wp(nz) - e_1)(\wp(mz) - e_1) - d_1^2$. El cálculo del divisor correspondiente que no

es tan inmediato como el de la función f , se puede hacer reescribiendo g ; observemos que la función elíptica

$$z \mapsto (\wp(z) - e_1)(\wp(z + \frac{w_1}{2}) - e_1),$$

no tiene polos, por lo que toma un valor constante para todo $z \in T$, mismo que podemos hallar simplemente haciendo $z = \frac{w_2}{2}$ y resulta $g \equiv d_1^2$. De aquí se sigue que

$$g(z) = (\wp(nz) - e_1) \left(\wp(mz) - \wp\left(nz + \frac{w_1}{2}\right) \right),$$

$$\text{de donde, } \operatorname{div}(g) = (-2) \cdot (T[m]) + (-2) \cdot (T[n]) + (T_1[m+n]) + (T_1[m-n]).$$

Y se concluye de manera análoga. \square

Observaciones 7.2. 1. Para $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}^*$, las cantidades $\mathcal{P}_n(z_0)$ y $\mathcal{Q}_n(z_0)$ se anulan si y sólo si $z_0 + \Lambda \in T_0[n]$ y $z_0 + \Lambda \in T_1[n]$ respectivamente.

2. Las sucesiones $\mathcal{P}_n(z_0)$, $\mathcal{Q}_n(z_0)$, dependen exclusivamente de la latiz Λ y satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que los polinomios del teorema 7.2, con *condiciones iniciales*:

$$\mathcal{P}_0(z_0) = 0, \quad \mathcal{Q}_0(z_0) = 1, \quad (7.14)$$

$$\mathcal{P}_1(z_0) = \sqrt{d_1}, \quad \mathcal{Q}_1(z_0) = \sqrt{\wp(z_0) - e_1} \text{ y } \mathcal{P}_2(z_0) = \sqrt{d_1} \wp'(z_0). \quad (7.15)$$

7.4.2. La parametrización de \mathcal{P}

De la misma manera a lo que hicimos para el teorema de Cayley, ahora necesitamos ligar los conceptos vistos previamente, (referentes a puntos de torsión y 2-torsión de un toro y la función \wp correspondiente), con la parametrización de la variedad de Poncelet asociada al par de cónicas C y D que hemos estado manejando, y las transformaciones η y σ . En el siguiente teorema establecemos formalmente la relación entre las cantidades \mathcal{P}_n , \mathcal{Q}_n y los parámetros que definen al par (C, D) .

Teorema 7.6. *Si las cónicas $C, D \subset \mathbb{P}_2$ definidas por las ecuaciones*

$$C : x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0, \quad \text{y} \quad D : x^2 + y^2 + (a^2 - r^2)z^2 + 2axz = 0,$$

están en posición general, \mathcal{P} y η son la variedad y transformación de Poncelet asociadas respectivamente, y $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la involución inducida por la reflexión respecto a la recta de los centros de las partes afines de C y D ; existen entonces, una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\} \subset \mathbb{C}$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}^$ y un isomorfismo $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ tales que las transformaciones η y σ*

son conjugadas a traslaciones en el toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$ por los puntos z_0 y $\frac{w_1}{2}$ respectivamente. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\eta^n = Id \quad \text{si y sólo si} \quad nz_0 \equiv 0 \pmod{\Lambda} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{P}_n(z_0) = 0$$

$$\text{y } \eta^n = \sigma \quad \text{si y sólo si} \quad nz_0 \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{Q}_n(z_0) = 0,$$

las expresiones $\mathcal{P}_n(z_0)$ y $\mathcal{Q}_n(z_0)$ están determinadas por las ecuaciones de recurrencia y condiciones iniciales del teorema 7.5, y las igualdades:

$$d_1^2 = \frac{a^2}{R^2}, \quad \wp(z_0) - e_1 = 1 \quad \text{y} \quad \wp'(z_0) = \frac{2r}{R}.$$

Demostración. Si las cónicas están en posición general, sean $x_0 = (1, i, 0)$, $x_1 = (1, -i, 0)$, x_2 y x_3 representantes de los cuatro puntos de intersección.

Las transformaciones η y σ son ambas traslaciones en la curva elíptica \mathcal{P} . Recordemos que podemos parametrizar a C con una función $j : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow C$, determinada como sigue: para $t \in \widehat{\mathbb{C}}$, sea $L_{x_0}(tC + D)$ la recta tangente en x_0 a la cónica del haz generado por C y D , dada por la ecuación

$$t(x^2 + y^2 - R^2z^2) + x^2 + y^2 + (a^2 - r^2)z^2 + 2axz = 0,$$

(recordar que para $t = \infty$ se define como C a tal cónica). Entonces

$$j(t) = L_{x_0}(tC + D) \cap C.$$

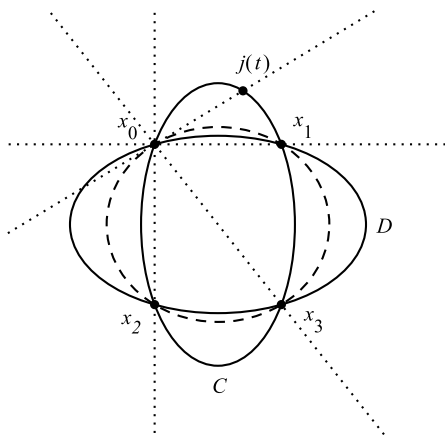


Figura 7.2: Parametrización de C .

(Pueden verse para más detalles la proposición 4.8 y el resultado 4.4). De tal manera que cada uno de los puntos x_i proviene de un parámetro $t_i \in \widehat{\mathbb{C}}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), que corresponden a

cada una de las cónicas degeneradas del haz $\{C, D\}$; claramente: $t_0 = \infty$ y $t_1 = -1$, mientras que t_2, t_3 son las otras dos raíces del polinomio

$$\tilde{P}(t) = \det(tC + D);$$

Al no existir confusión de acuerdo al contexto, denotaremos por C y D a las cónicas o bien las matrices simétricas asociadas a las ecuaciones que las definen, es decir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 - r^2 \end{pmatrix}.$$

De aquí sabemos que \mathcal{P} es isomorfa a la curva $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ determinada por la ecuación cúbica $y^2 = \det(tC + D)$; claramente esta curva es a su vez isomorfa a cualquier otra definida por una expresión de la forma $y^2 = k \det(tC + D)$, donde $k \in \mathbb{C}^*$. Con el fin de simplificar los cálculos, consideraremos entonces al polinomio $P(t) = \det(C^{-1}) \cdot \det(tC + D)$, que evidentemente tiene las mismas raíces que \tilde{P} , y es:

$$\det(t \cdot Id + C^{-1}D), \text{ con } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{tenemos: } C^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 - r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{R^2} & 0 & -\frac{a^2 - r^2}{R^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{por lo tanto } P(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & a \\ 0 & t+1 & 0 \\ -\frac{a}{R^2} & 0 & t - \frac{a^2 - r^2}{R^2} \end{pmatrix} = (t+1) \left(t^2 + \frac{R^2 + r^2 - a^2}{R^2} t + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Consideraremos entonces la curva $\mathcal{P}' = \{(t, y) \in \widehat{\mathbb{C}} \mid y^2 = P(t)\}$. De la demostración del teorema de Cayley del capítulo anterior, sabemos que existen una latiz $\Lambda \subset \mathbb{C}$ e isomorfismos

$$T = \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{P}' \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{P}$$

con $\varphi_1(0 + \Lambda) = (\infty, \infty)$. Ahora, η induce en las curvas elípticas T y \mathcal{P}' traslaciones η_1 y η_2 respectivamente. Vimos (también en el teorema de Cayley) que η_2 está determinada por $\eta_2(\infty, \infty) = (0, \sqrt{\det(0 \cdot Id + C^{-1}D)}) = (0, \sqrt{P(0)}) = (0, \frac{r}{R})$. Sea z_0 tal que $\eta_1(0 + \Lambda) = z_0$.

De igual manera la transformación σ induce traslaciones σ_1 y σ_2 en T y \mathcal{P}' respectivamente. Para calcular $\sigma_1(0 + \Lambda)$ y $\sigma_2(\infty, \infty)$, sean

$$p : \mathcal{P} \longrightarrow C,$$

$$\omega : \mathcal{P}' \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}},$$

las proyecciones dadas por $p(x, \xi) = x$ y $\omega(t, y) = t$. El isomorfismo φ_2 hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}' & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{P} \\ \omega \downarrow & & \downarrow p \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{t} & C. \end{array}$$

De modo que si y_i , $i = 0, 1$, son los puntos de \mathcal{P} tales que $p(x_i) = y_i$, es claro que σ mapea y_0 a y_1 , por lo que $\sigma_2(\infty, \infty) = (-1, P(-1)) = (-1, 0)$. Para calcular la preimagen de $(-1, 0)$ bajo φ_1 , basta recordar la forma de este isomorfismo:

$$z + \Lambda \in T \mapsto (\wp(z) + s, \wp'(z)/2),$$

donde $s = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$; con \wp la función de Weierstrass asociada a la latiz Λ determinada al resolver el problema de inversión inducido por la cúbica que define a \mathcal{P}' . Puede verificarse entonces que

$$\varphi_1\left(\frac{w_1}{2} + \Lambda\right) = (-1, 0)$$

así como

$$d_1^2 = (e_2 - e_1)(e_3 - e_1) = (t_2 + 1)(t_3 + 1) = \frac{a^2}{R^2},$$

$$\wp(z_0) - e_1 = (\wp(z_0) + s) - (e_1 + s) = 1,$$

y

$$\wp'(z_0) = 2\frac{r}{R}.$$

El resto se sigue del teorema 7.5 y las observaciones 7.2. □

7.5. Los polinomios de periodicidad y semiperiodicidad

El objetivo de esta sección es construir los polinomios p_n y q_n del teorema 7.2; estableceremos un resultado sencillo previo, que liga a los mismos con las cantidades \mathcal{P}_n y \mathcal{Q}_n .

Teorema 7.7. Sean $\Lambda = \{w_1, w_2\} \subset \mathbb{C}$ una latiz y considérense el toro \mathbb{C}/Λ , el punto de 2-torsión $\frac{w_1}{2}$ asociados y un $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Con la notación utilizada anteriormente, si nombramos $x_1 = \sqrt{d_1}$, $y_1 = \sqrt{\wp(z_0) - e_1}$ y escogemos un $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $y_1 z_1^2 = \wp'(z_0)$; tenemos entonces para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n(z_0) = p_n(x_1, y_1, z_1),$$

$$\mathcal{Q}_n(z_0) = q_n(x_1, y_1, z_1).$$

Nota. Los índices en x_1 , y_1 y z_1 hacen referencia al punto de 2-torsión elegido, $w_1/2$.

Demostración. Para toda elección de valores iniciales

$$a_0 = 0, b_0 = 1 \quad \text{y} \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{C}^*$$

existe a lo más un par de sucesiones de complejos (a_n) y (b_n) , que cumplen las relaciones siguientes ($m \geq n$):

$$a_{m+n}a_{m-n} = a_m^2 b_n^2 - a_n^2 b_m^2 \quad (1)_{m,n}$$

$$b_{m+n}b_{m-n} = b_m^2 b_n^2 - a_n^2 a_m^2 \quad (2)_{m,n}$$

(pueden construirse a partir de las relaciones $(2)_{n,n}$ $(2)_{n+1,n}$ $(1)_{n+1,n}$ y $(1)_{n+2,n}$).

Sabemos del teorema 7.5, que estas sucesiones existen para toda condición inicial

$$(a_1, b_1, c_1) \in \mathcal{D} := \left\{ \left(\sqrt{d_1}, \sqrt{\wp(z_0) - e_1}, \sqrt{d_1} \wp'(z_0) \right) \right\} \subset (\mathbb{C}^*)^3$$

asociada al toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$, su función \wp y los puntos $\frac{w_1}{2}$ y z_0 tal que $2z_0 \notin \Lambda$; baste poner $a_n = \mathcal{P}_n(z_0)$ y $b_n = \mathcal{Q}_n(z_0)$.

Una vez construidas de tal forma (a_n) y (b_n) se ve por tanto (de las unicidades previamente mencionadas), que para cualquier condición inicial $(a_1, b_1, c_1) \in \mathcal{D}$, es $a_n = p_n(a_1, b_1, \sqrt{a_2/(a_1 b_1)})$ y $b_n = q_n(a_1, b_1, \sqrt{a_2/(a_1 b_1)})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Observaciones 7.3. 1. El teorema 7.3 es consecuencia directa de la interpretación de las cantidades $\mathcal{P}_n(z_0)$ y $\mathcal{Q}_n(z_0)$ y de los cálculos realizados en el teorema 7.6.

2. Si la pareja de sucesiones (a_n) , (b_n) satisface las relaciones de recurrencia que hemos citado, con $(a_1, b_1, c_1) \in (\mathbb{C}^*)^3$ y $a_4 \neq 0$; las nuevas secuencias definidas por $(\tilde{a}_n) := (a_{2n})$ y $(\tilde{b}_n) := (b_{2n})$ verifican también las mismas relaciones $(1)_{m,n}$ y $(2)_{m,n}$, pero esta vez con condiciones iniciales

$$\tilde{a}_0 = 0, \tilde{b}_0 = 1 \text{ y } \tilde{a}_1 = a_2, \tilde{b}_1 = b_2, \tilde{a}_2 = a_4 \in \mathbb{C}^*;$$

y se debe tener también $\tilde{a}_n = a_{2n} = p_n(a_2, b_2, \sqrt{a_4/(a_2b_2)})$ y $\tilde{b}_n = b_{2n} = q_n(a_2, b_2, \sqrt{a_4/(a_2b_2)})$. Observaciones análogas se tienen para todo $\ell \geq 2$ y las sucesiones $(\tilde{a}_n) := (a_{\ell n})$ y $(\tilde{b}_n) := (b_{\ell n})$.

El teorema y la observación previos nos serán útiles para demostrar el teorema 7.2:

Demostración. (del teorema 7.2). Empezaremos por mostrar que a partir de los términos iniciales

$$p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = x, q_1 = y, p_2 = xyz^2,$$

podemos construir recursivamente polinomios $p_m, q_m \in \mathbb{Z}[x, y, z^2]$ que satisfacen lo siguiente:

- $q_1 \mid q_{2k+1}$ (esto corresponde vía el teorema 7.7 al hecho de que $z_0 \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda} \implies (2k+1)z_0 \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda}$).
- $q_1 \mid p_{2k}$ (vía el teorema 7.7: $z_0 \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda} \implies 2kz_0 \equiv 0 \pmod{\Lambda}$).
- $p_1 \mid p_n$ (vía el teorema 7.7: $z_0 \equiv 0 \pmod{\Lambda} \implies nz_0 \equiv 0 \pmod{\Lambda}$).
- Satisfacen las ecuaciones (7.1) y (7.2) (salvo un detalle que indicaremos y será probado más adelante).

Procederemos distinguiendo la paridad de m .

$$\text{Comenzando con } q_{2n} = 1 \cdot q_{2n} = q_0 q_{2n} = q_n^4 - p_n^4.$$

Para definir q_{2n+1} utilizamos la relación $q_{2n+1}q_1 = q_{n+1}^2q_n^2 - p_{n+1}^2p_n^2$. Por recurrencia, q_1 divide a p_n ó a p_{n+1} , y a q_n ó a q_{n+1} . Por tanto q_{2n+1} definido de esta forma será un polinomio

divisible entre q_1 .

Definimos a p_{2n+1} mediante la relación $p_{2n+1}p_1 = p_{n+1}^2q_n^2 - p_n^2q_{n+1}^2$. Por recurrencia, $p_1 \mid p_k$ para $k < 2n + 1$, de aquí que p_{2n+1} sea también divisible entre p_1 .

Por último, para definir los polinomios p_{2n} para $n \geq 2$ comenzaremos por p_4 ; calculando explícitamente p_3 y q_3 , tenemos

$$p_3 = x[y^4z^4 - (y^4 - x^4)^2], \quad q_3 = y[(y^4 - x^4)^2 - x^4z^4].$$

Podemos constatar luego, que la relación $p_4p_2 = p_3^2q_1^2 - p_1^2q_3^2$ define un polinomio $p_4 \in \mathbb{Z}[x, y, z^2]$ divisible entre el producto p_2q_2 , a saber, $p_4 = p_2q_2[4y^4x^4 + x^4z^4 + y^4z^4 - 2(x^8 - y^8)]$. Así, los polinomios $p_k \in \mathbb{Z}[x, y, z^2]$ están ya definidos para $0 \leq k \leq 2n - 1$; esto permite definir $p_{2n} \in \mathbb{Z}[x, y, z^2]$ haciendo

$$p_{2n}(x, y, z) = p_n \left(p_2, q_2, \sqrt{\frac{p_4}{p_2q_2}} \right).$$

Obsérvese que p_1q_1 divide a p_2 , por lo que divide también a p_{2n} .

De lo discutido en la prueba del teorema 7.7, las funciones polinomiales $p_{m+n}p_{m-n}$ y $p_m^2q_n^2 - p_n^2q_m^2$ (así como $q_{m+n}q_{m-n}$ y $q_m^2q_n^2 - p_n^2p_m^2$) coinciden en un abierto no vacío de \mathbb{C}^3 . Las sucesiones (p_n) y (q_n) satisfacen entonces, las relaciones de recurrencia (7.1) y (7.2).

Es inmediato que los polinomios que recién construimos, son homogéneos de grado n^2 y que para n impar se tiene $p_n \in x\mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$ y $q_n \in y\mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$, mientras que para n par, $p_n \in xy^2z^2\mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$ y $q_n \in \mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$.

Las ecuaciones indicadas en (7.5) se satisfacen debido a la segunda observación que hicimos luego del teorema 7.7. Restará probar únicamente que los cocientes $\frac{p_{2i}}{p_iq_i}$ que aparecen en (7.5) son polinomiales en (x, y, z) . El objetivo de la siguiente subsección será demostrar esta propiedad.

□

7.5.1. Algunas propiedades de los polinomios p_n y q_n

A continuación se realizan algunos cálculos cuyos resultados se escriben en una colección de lemas que llevarán a completar el detalle de la prueba anterior; para $l \in \mathbb{N}^*$ el polinomio p_{2l} es divisible entre el producto $p_l q_l$. La lectura de esta subsección puede omitirse para pasar directamente a la construcción de los polinomios φ_n y ψ_n .

Lema 7.2. *Existe una sucesión de polinomios $(g_n) \in \mathbb{Z}[t]$ tal que, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$g_n(\cos \theta) \cdot \text{sen } \theta = \text{sen}(n\theta).$$

Esta sucesión es única dadas las condiciones siguientes

$$g_0 = 0, g_1 = 1, g_2(t) = 2t \tag{7.16}$$

$$g_{m+n} g_{m-n} = g_m^2 - g_n^2. \tag{7.17}$$

Demostración. Estos polinomios pueden construirse fácilmente a partir de la ecuación de recurrencia citada. La igualdad trigonométrica $g_n(\cos \theta) \cdot \text{sen } \theta = \text{sen}(n\theta)$ es consecuencia de las identidades conocidas

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta$$

$$\text{y } \text{sen}(m+n)\theta \text{sen}(m-n)\theta = \text{sen}^2(m\theta) - \text{sen}^2(n\theta).$$

Ejemplificaremos calculando el siguiente polinomio. Es claro que g_i , $0 \leq i \leq 2$ cumplen las condiciones del lema, para g_3 tenemos

$$g_3 = g_{2+1} g_{2-1} = g_2^2 - g_1^2 = 4t^2 - 1,$$

Ahora, si $\text{sen } \theta = 0$ también se tiene $\text{sen}(n\theta) = 0$ y la ecuación que resta por probar es inmediata, si $\text{sen } \theta \neq 0$ tenemos

$$g_3(\cos \theta) \text{sen}^2 \theta = \text{sen}^2 \theta [g_2^2(\cos \theta) - g_1^2(\cos \theta)] = \text{sen}^2(2\theta) - \text{sen}^2 \theta = \text{sen}(3\theta) \text{sen } \theta$$

y se tiene la conclusión deseada. □

Lema 7.3. *Si definimos para $n \in \mathbb{N}$ la función polinomial $f_n \in \mathbb{Z}[x, y, z^2]$ para la cual $p_n(x, y, z) = x f_n(x, y, z)$, se tendrá para todo $t \in \mathbb{C}$*

$$f_n(0, 1, \sqrt{2t}) = g_n(t).$$

Demostración. Podemos obtener directamente a partir de (7.2):

$$q_{m+n}q_{m-n} = q_m^2 q_n^2 - p_m^2 p_n^2$$

y los polinomios iniciales definidos previamente, que $q_2(x, y, z) = y^4 - x^4$, de aquí verificamos que para $0 \leq n \leq 2$ se tiene para todo $s \in \mathbb{C}$

$$q_n(0, 1, s) = 1$$

Suponiendo inductivamente que esto ocurre para cualquier $k = 1, \dots, n$ con $n \geq 2$, tenemos para $n + 1$ que

$$q_{n+1}(0, 1, s)q_{n-1}(0, 1, s) = q_n^2(0, 1, s)q_1^2(0, 1, s) - p_n^2(0, 1, s)p_1^2(0, 1, s) = q_n^2(0, 1, s) = 1,$$

lo que implica que para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{C}$; $q_n(0, 1, s) = 1$. Deducimos entonces a partir de (7.1), que la sucesión de funciones $t \in \mathbb{C} \mapsto f_n(0, 1, \sqrt{2t})$, satisface las ecuaciones (7.16) y (7.17) y se tiene el resultado. \square

Corolario 7.7.1. *Ninguno de los polinomios $2x^2 \pm 2y^2 \pm z^2$ puede dividir a p_n ni a q_n ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Demostración. Si alguno de los polinomios $2x^2 \pm 2y^2 \pm z^2$ dividiera a p_n , el lema anterior implicaría que $1 \pm t$ divide a $g_n(t)$, una contradicción. Algo similar aplica para q_n , pues recién vimos que $q_n(0, 1, s) = 1$. \square

Finalmente, realizamos unos cálculos utilizando las relaciones de recurrencia de (p_n) y (q_n) cuyos resultados serán útiles y listamos en el lema siguiente.

Lema 7.4. *Sea $n \geq 2$. Para cada uno de los polinomios p_n y q_n , los términos de grado máximo en x y y están dados por las siguientes expresiones:*

Para n impar:

$$\begin{aligned} p_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} x[x^{n^2-1} + y^{n^2-1}] + \dots \\ q_n &= y[x^{n^2-1} + y^{n^2-1}] + \dots \end{aligned}$$

Para n par:

$$\begin{aligned} p_n &= xyz^2 \left[\frac{n}{2} x^{n^2-4} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{n}{2} y^{n^2-4} \right] + \dots \\ q_n &= (-1)^{\frac{n}{2}} x^{n^2} + y^{n^2} + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, se tienen las simetrías dadas por

$$p_{2n}(x, y, z) = (-1)^{n+1} p_{2n}(y, x, z)$$

$$q_{2n}(x, y, z) = (-1)^n q_{2n}(y, x, z)$$

$$p_{2n+1}(x, y, z) = (-1)^n q_{2n+1}(y, x, z)$$

Por último:

$$q_{2n}(x, y, 0) = (y^4 - x^4)^{n^2}, \quad q_{2n+1}(x, y, 0) = y(y^4 - x^4)^{n(n+1)},$$

$$p_{2n+1}(x, 0, z) = (-1)^n x^{4n^2+4n+1} y \quad q_{2n}(x, 0, z) = x^{4n^2}.$$

Corolario 7.7.2. Para todo natural $l \geq 1$, el polinomio p_{2l} es divisible entre $p_l q_l$, con cociente en $\mathbb{Z}[x^2, y^2, z^2]$.

Demostración. En el teorema 7.6, asociamos a cada par de cónicas C y D con parámetros $(a, R, r) \in (\mathbb{C}^*)^3$, $(a \pm R \pm r \neq 0)$, un toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$ ($\Lambda = \{w_1, w_2\}$), un punto de 2-torsión $\frac{w_1}{2}$ y un punto $z_0 \in T$ para los cuales, utilizando la notación del teorema 7.7:

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right).$$

Sea \wp la función elíptica de Weierstrass asociada a Λ , definimos para $n \in \mathbb{N}^*$ los siguientes conjuntos

$$A_0[n] = \{\wp(u) \in \mathbb{C} \mid 2u \not\equiv 0 \pmod{\Lambda}, nu \equiv 0 \pmod{\Lambda}\},$$

$$A_1[n] = \{\wp(v) \in \mathbb{C} \mid v \not\equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda}, nv \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda}\}.$$

Luego, del teorema 7.7, tenemos

$$p_n(x_1, y_1, z_1) = n \prod_{\alpha \in A_0[n]} (\wp(z_0) - \alpha),$$

$$q_n(x_1, y_1, z_1) = \prod_{\beta \in A_1[n]} (\wp(z_0) - \beta).$$

Para $l \geq 1$, los conjuntos $A_0[l]$ y $A_1[l]$ son disjuntos y están ambos contenidos en $A_0[2l]$. Podemos concluir entonces, por la homogeneidad de los polinomios p_{2l} , p_l y q_l , que el cociente $p_{2l}/p_l q_l$ es no-singular en todo punto del siguiente conjunto:

$$\mathbf{D} := \{(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3 \mid 2x^2 \pm 2y^2 \pm z^2 \neq 0\}.$$

Supongamos ahora, por ejemplo, que l es impar. Tenemos $p_{2l} \in xyz^2 \mathbb{Z}[x, y, z]$. Del corolario 7.7.1 y el lema 7.4; los factores irreducibles de los polinomios p_l/x y q_l/y son distintos de x , y ,

z y de los polinomios $2x^2 \pm 2y^2 \pm z^2$. Debe existir entonces un polinomio $r_l \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ para el cual $p_{2l} = p_l q_l r_l$. El hecho de que r_l tenga coeficientes enteros, se deduce observando (con ayuda del lema 7.4), que los máximos comunes divisores de los coeficientes de los polinomios p_l/x y q_l/y , son ambos 1 (el máximo común divisor de los coeficientes de un polinomio de coeficientes enteros suele llamarse **contenido** del polinomio). \square

7.5.2. Los polinomios φ_n y ψ_n

Finalmente, estableceremos el teorema 7.4, que se deducirá de una proposición previa.

Nos será útil introducir la sucesión $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ definida como sigue:

$$\gamma_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^r \text{ es una potencia de un primo } p \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera que podamos escribir a cualquier $n \in \mathbb{N}^*$ en la forma

$$n = \prod_{d|n} \gamma_d.$$

Por otro lado, dada una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$ en la cual distinguimos al punto $\frac{w_1}{2}$ de 2-torsión, diremos que un punto $z + \Lambda$ del toro \mathbb{C}/Λ es de periodo $\frac{w_1}{2}$ -estricto n si n es el natural más chico con la propiedad

$$nz \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

Similarmente z será de $\frac{w_1}{2}$ -semiperiodo n si n es el natural más chico para el cual

$$nz \equiv \frac{w_1}{2} \pmod{\Lambda}.$$

Proposición 7.1. *Sea $\Lambda = \{w_1, w_2\} \subset \mathbb{C}$ una latiz y $T = \mathbb{C}/\Lambda$ la curva elíptica correspondiente (con la suma usual módulo Λ). Defínanse*

$$V_0[n] = \{\wp(u) \in \mathbb{C} \mid u \text{ es de periodo } \frac{w_1}{2} \text{ -estricto } n \text{ en } T\},$$

$$V_1[n] = \{\wp(u) \in \mathbb{C} \mid u \text{ es de } \frac{w_1}{2} \text{ -semiperiodo } n \text{ en } T\}.$$

Sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Con la notación del teorema 7.7 tenemos para todo $n \geq 3$:

$$\varphi_n(x_1, y_1, z_1) = \gamma_n \prod_{\alpha \in V_0[n]} (\wp(z_0) - \alpha),$$

$$\psi_n(x_1, y_1, z_1) = \prod_{\beta \in V_1[n]} (\wp(z_0) - \beta).$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las ecuaciones (7.6) y (7.7) y del teorema 7.7. \square

Demostración. (del teorema 7.4). Construiremos recursivamente los polinomios ψ_n , la sucesión (φ_n) que satisface las ecuaciones (7.6) se construye de manera análoga.

Procederemos inductivamente, pongamos $\psi_1 = q_1 = y$. Suponiendo construidos los polinomios ψ_k para $k \leq n-1$ de tal forma que las ecuaciones (7.7) se satisfagan para $1 \leq k \leq n-1$, mostraremos como construir ψ_n .

Seguiremos la idea de la prueba del corolario 7.7.2. Apliquemos la proposición anterior (con la notación que venimos empleando) a los polinomios ya construidos, tenemos para $1 \leq k \leq n-1$ la identidad:

$$\psi_k \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right) = \prod_{\beta \in V_1[k]} (\wp(z_0) - \beta),$$

que junto con el teorema 7.7 nos permite deducir que:

$$q_n \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right) = \prod_{\beta \in V_1[n]} (\wp(z_0) - \beta) \cdot \prod_{\substack{d \leq n-1, d|n \\ \frac{n}{d} \text{ impar}}} \psi_d \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right).$$

El cociente de q_n entre el producto $\prod \psi_d$ que aparece en la expresión anterior, es así, no-singular en todo punto del conjunto

$$\mathbf{D} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3 \mid 2x^2 \pm 2y^2 \pm z^2 \neq 0\}.$$

Concluimos de esta forma, que tal cociente es un polinomio homogéneo $\psi_n \in \mathbb{Z}[x^4, y^4, z^4]$. Por construcción, tenemos para $k \neq l$, que las cantidades $\psi_k \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right)$ y $\psi_l \left(\sqrt{\frac{a}{R}}, 1, \sqrt{\frac{2r}{R}} \right)$ no se anulan simultáneamente; los polinomios que hemos construido deben ser entonces, primos entre sí dos a dos. \square

7.6. Las circunferencias de Poncelet

Hemos alcanzado uno de los objetivos principales del trabajo. Como ya hemos mencionado, Poncelet y otros muchos geómetras se interesaron primeramente en el problema de hallar las que nosotros hemos llamado n -circunferencias de Poncelet respecto a otra circunferencia y resultó sorprendente el hecho de que fuese más sencillo demostrar el porismo original que dar ejemplos concretos del mismo para valores incluso relativamente chicos de n .

No se sabía a ciencia cierta cómo obtener las fórmulas que con gran trabajo lograron Euler, Fuss, Steiner, entre otros; con el paso del tiempo y el consecuente desarrollo de las matemáticas fue posible, como hemos exhibido, observar que la *clave* para hallar tales fórmulas estaba en reconocer el que hemos llamado aquí σ -porismo de Poncelet, que ligado a la interpretación del problema vía la teoría de funciones y curvas elípticas, hace que las fórmulas que nos interesan estén relacionadas entre sí por ecuaciones de recurrencia peculiarmente sencillas.

Vamos entonces a concluir mostrando los primeros polinomios de Poncelet Φ_n y Ψ_n para $2 \leq n \leq 7$. Un sencillo programa de cómputo permite luego, construir ejemplos de porismos y σ -porismos, se invita al lector a construir sus propios ejemplos dando valores a los parámetros y a observar los diferentes tipos de polígonos que se obtienen en cada caso, nosotros mostraremos a continuación los polinomios resultantes y posteriormente algunas imágenes generadas con los mismos:

$$\Phi_2 = 2r.$$

$$\Psi_2 = (R - a)(R + a).$$

$$\Phi_3 = -(a^2 - 2rR - R^2)(a^2 + 2rR - R^2).$$

$$\Psi_3 = (a^2 - 2ra - R^2)(a^2 + 2ra - R^2).$$

$$\Phi_4 = 4r^2R^2 - 2R^4 + 4a^2r^2 + 4a^2R^2 - 2a^4.$$

$$\Psi_4 = (a^4 + 4aRr^2 - 2a^2R^2 + R^4)(a^4 - 4aRr^2 - 2a^2R^2 + R^4).$$

$$\Phi_5 = (a^6 - 2a^4rR + 8a^2r^3R - 3a^4R^2 - 4a^2r^2R^2 + 4a^2rR^3 + 3a^2R^4 + 4r^2R^4 - 2rR^5 - R^6)$$

$$(a^6 + 2a^4rR - 8a^2r^3R - 3a^4R^2 - 4a^2r^2R^2 - 4a^2rR^3 + 3a^2R^4 + 4r^2R^4 + 2rR^5 - R^6).$$

$$\Psi_5 = (R^6 - 2R^4ra + 8R^2r^3a - 3R^4a^2 - 4R^2r^2a^2 + 4R^2ra^3 + 3R^2a^4 + 4r^2a^4 - 2ra^5 - a^6)$$

$$(R^6 + 2R^4ra - 8R^2r^3a - 3R^4a^2 - 4R^2r^2a^2 - 4R^2ra^3 + 3R^2a^4 + 4r^2a^4 + 2ra^5 - a^6).$$

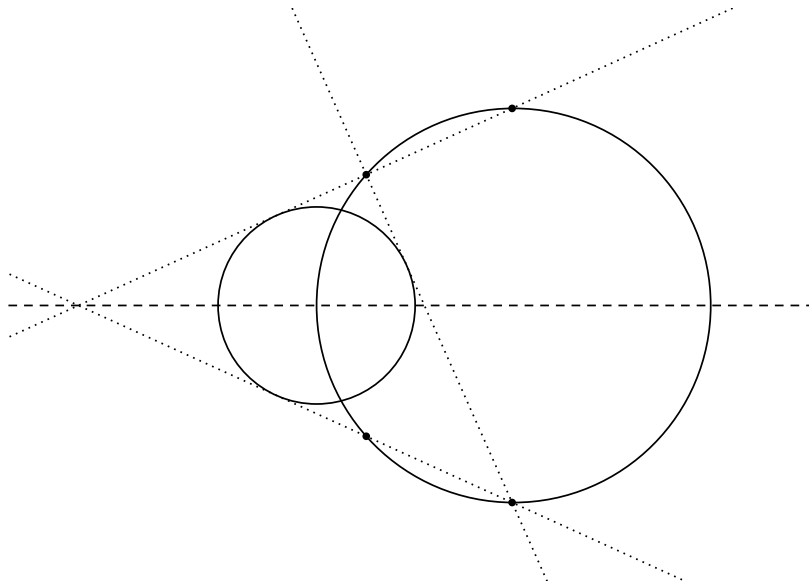
$$\begin{aligned} \Phi_6 &= 4R^6r^2 - 3R^8 + 16a^2R^2r^4 - 4a^2R^4r^2 + 12a^2R^6 - 4a^4R^2r^2 \\ &\quad - 18R^4a^4 + 4a^6r^2 + 12a^6R^2 - 3a^8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_6 &= (R^8 + 16r^2a^3R^3 - 8r^2a^5R - 4a^2R^6 + 6a^4R^4 \\ &\quad - 16a^2R^2r^4 + 16a^3r^4R + 16ar^4R^3 - 8r^2aR^5 - 4a^6R^2 + a^8) \\ &\quad (R^8 - 16r^2a^3R^3 + 8r^2a^5R - 4a^2R^6 + 6a^4R^4 \\ &\quad - 16a^2R^2r^4 - 16a^3r^4R - 16ar^4R^3 + 8r^2aR^5 - 4a^6R^2 + a^8). \end{aligned}$$

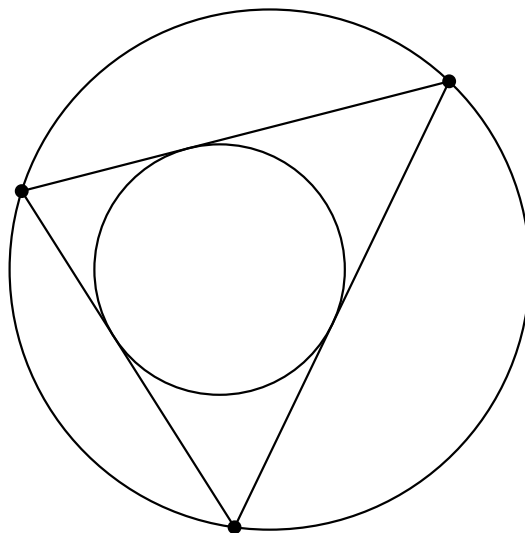
$$\begin{aligned}
\Phi_7 = & (48a^4R^5r^3 + 15a^4R^8 + R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
& + 64a^2R^4r^6 - 16a^6R^2r^4 - 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 + 32a^4R^4r^4 - 4a^8R^2r^2 \\
& - 40a^6R^5r - 16a^2R^6r^4 + 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr - 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
& - 6a^{10}R^2 - 6R^{10}a^2 + a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 - 20a^6R^6 + 16R^8a^2r^2 \\
& + 16a^6R^4r^2) \\
& (48a^4R^5r^3 - 15a^4R^8 - R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
& - 64a^2R^4r^6 + 16a^6R^2r^4 + 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 - 32a^4R^4r^4 + 4a^8R^2r^2 \\
& - 40a^6R^5r + 16a^2R^6r^4 - 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr + 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
& + 6a^{10}R^2 + 6R^{10}a^2 - a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 + 20a^6R^6 - 16R^8a^2r^2 \\
& - 16a^6R^4r^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_7 = & (R^{12} + 16R^2r^2a^8 + 20rR^8a^3 - 4rR^{10}a + 40rR^4a^7 + 64R^2r^6a^4 - 32r^5R^6a \\
& - 64r^3R^6a^3 - 40rR^6a^5 + 48r^3R^4a^5 + 32r^5R^2a^5 - 20rR^2a^9 + 24r^3R^8a \\
& - 20R^6a^6 - 6R^2a^{10} - 6R^{10}a^2 + 15R^4a^8 + a^{12} + 15a^4R^8 + 16R^6r^2a^4 - 24R^4r^2a^6 \\
& - 4R^8r^2a^2 - 16R^2r^4a^6 - 16R^6r^4a^2 + 32R^4r^4a^4 - 8r^3a^9 - 4r^2a^{10} + 4ra^{11}) \\
& (R^{12} + 16R^2r^2a^8 - 20rR^8a^3 + 4rR^{10}a - 40rR^4a^7 + 64R^2r^6a^4 + 32r^5R^6a \\
& + 64r^3R^6a^3 + 40rR^6a^5 - 48r^3R^4a^5 - 32r^5R^2a^5 + 20rR^2a^9 - 24r^3R^8a \\
& - 20R^6a^6 - 6R^2a^{10} - 6R^{10}a^2 + 15R^4a^8 + a^{12} + 15a^4R^8 + 16R^6r^2a^4 - 24R^4r^2a^6 \\
& - 4R^8r^2a^2 - 16R^2r^4a^6 - 16R^6r^4a^2 + 32R^4r^4a^4 + 8r^3a^9 - 4r^2a^{10} - 4ra^{11}).
\end{aligned}$$

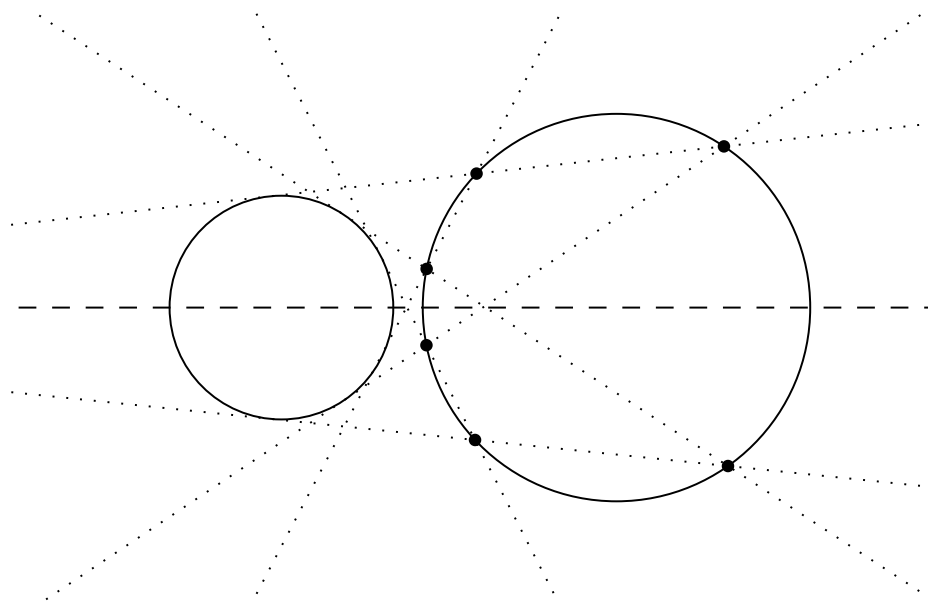
σ -porismo de Poncelet, $n = 2$, $R - a = 0$.



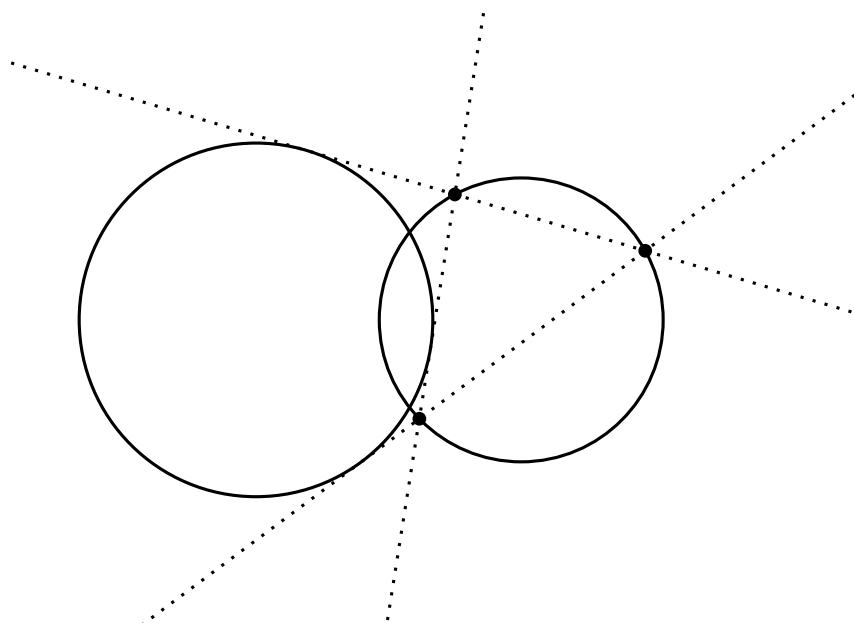
Porismo de Poncelet, $n = 3$, $a^2 + 2rR - R^2 = 0$.



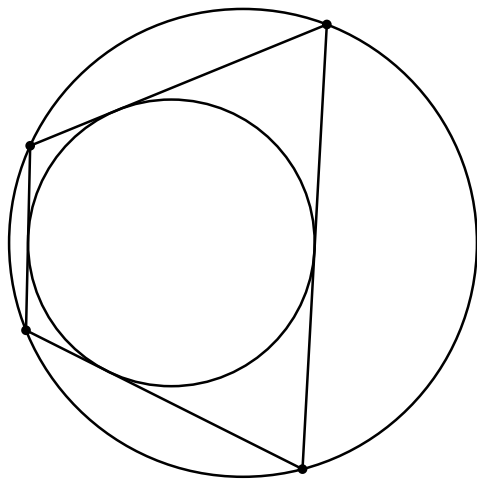
σ -porismo de Poncelet, $n = 3$, $a^2 - 2ra - R^2 = 0$.



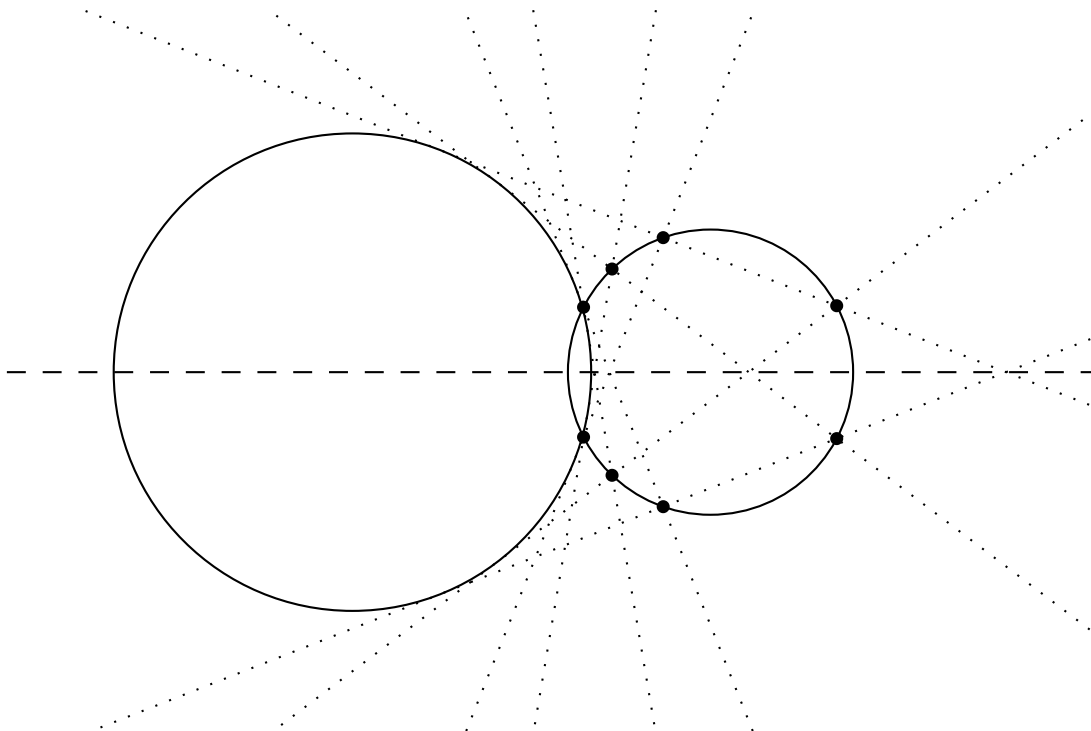
Porismo de Poncelet, $n = 3$, $a^2 - 2rR - R^2 = 0$.



Porismo de Poncelet, $n = 4$, $4r^2R^2 - 2R^4 + 4a^2r^2 + 4a^2R^2 - 2a^4 = 0$.

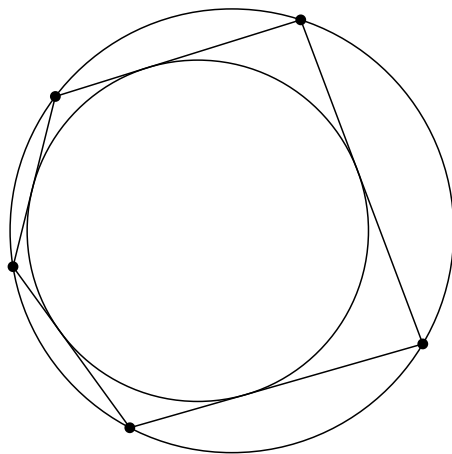


σ -porismo de Poncelet, $n = 4$, $a^4 - 4aRr^2 - 2a^2R^2 + R^4 = 0$.



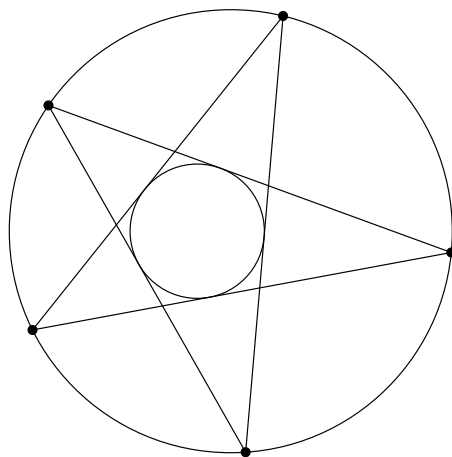
Porismo de Poncelet, $n = 5$,

$$a^6 - 2a^4rR + 8a^2r^3R - 3a^4R^2 - 4a^2r^2R^2 + 4a^2rR^3 + 3a^2R^4 + 4r^2R^4 - 2rR^5 - R^6 = 0.$$



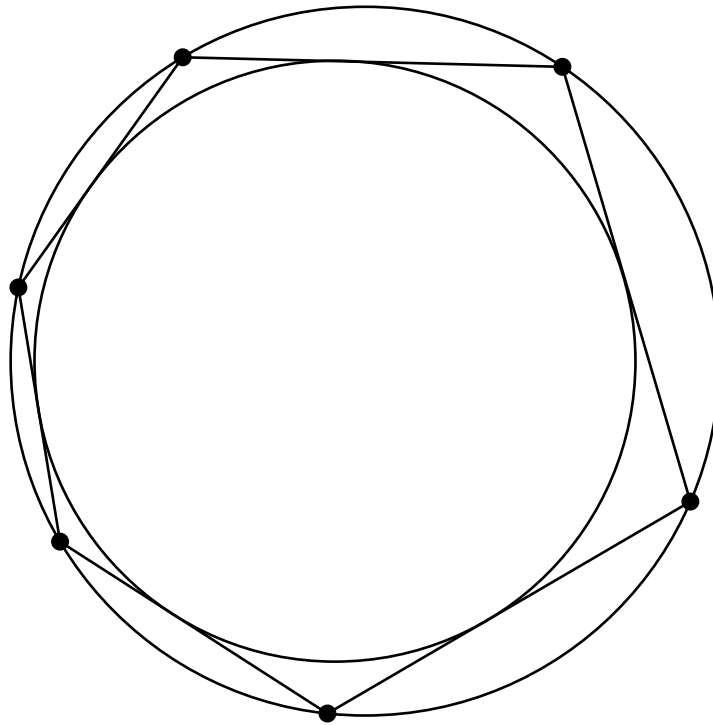
Porismo de Poncelet, $n = 5$,

$$a^6 + 2a^4rR - 8a^2r^3R - 3a^4R^2 - 4a^2r^2R^2 - 4a^2rR^3 + 3a^2R^4 + 4r^2R^4 + 2rR^5 - R^6 = 0.$$



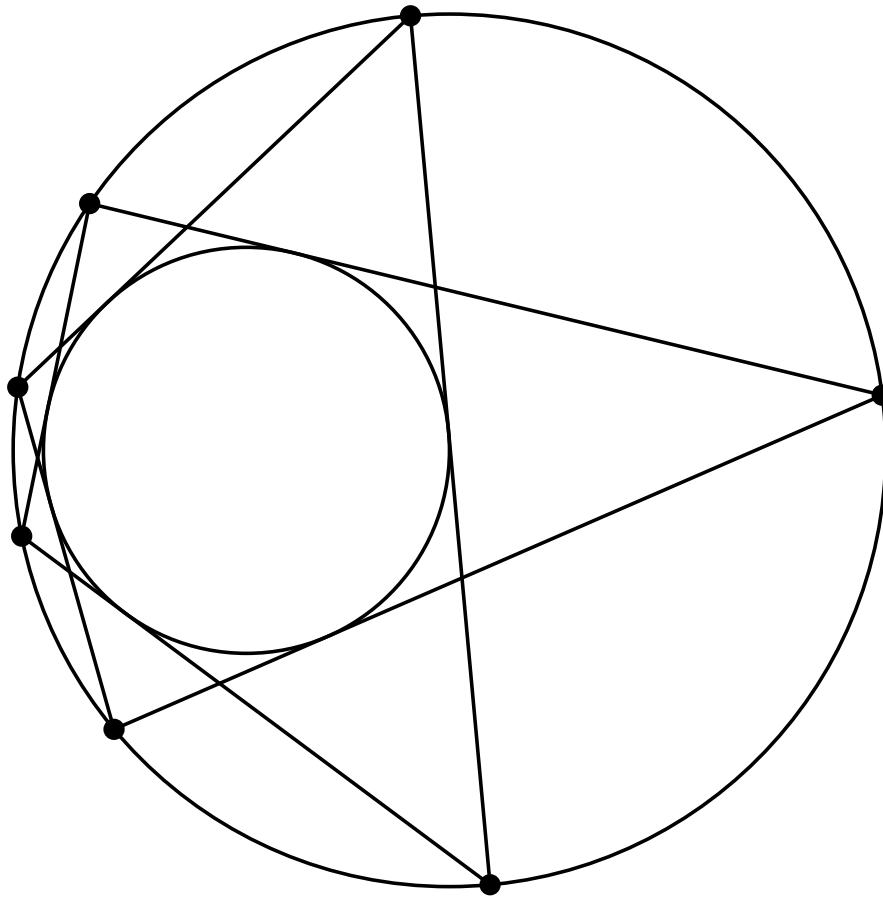
Porismo de Poncelet, $n = 6$,

$$4R^6r^2 - 3R^8 + 16a^2R^2r^4 - 4a^2R^4r^2 + 12a^2R^6 - 4a^4R^2r^2 - 18R^4a^4 + 4a^6r^2 + 12a^6R^2 - 3a^8 = 0.$$



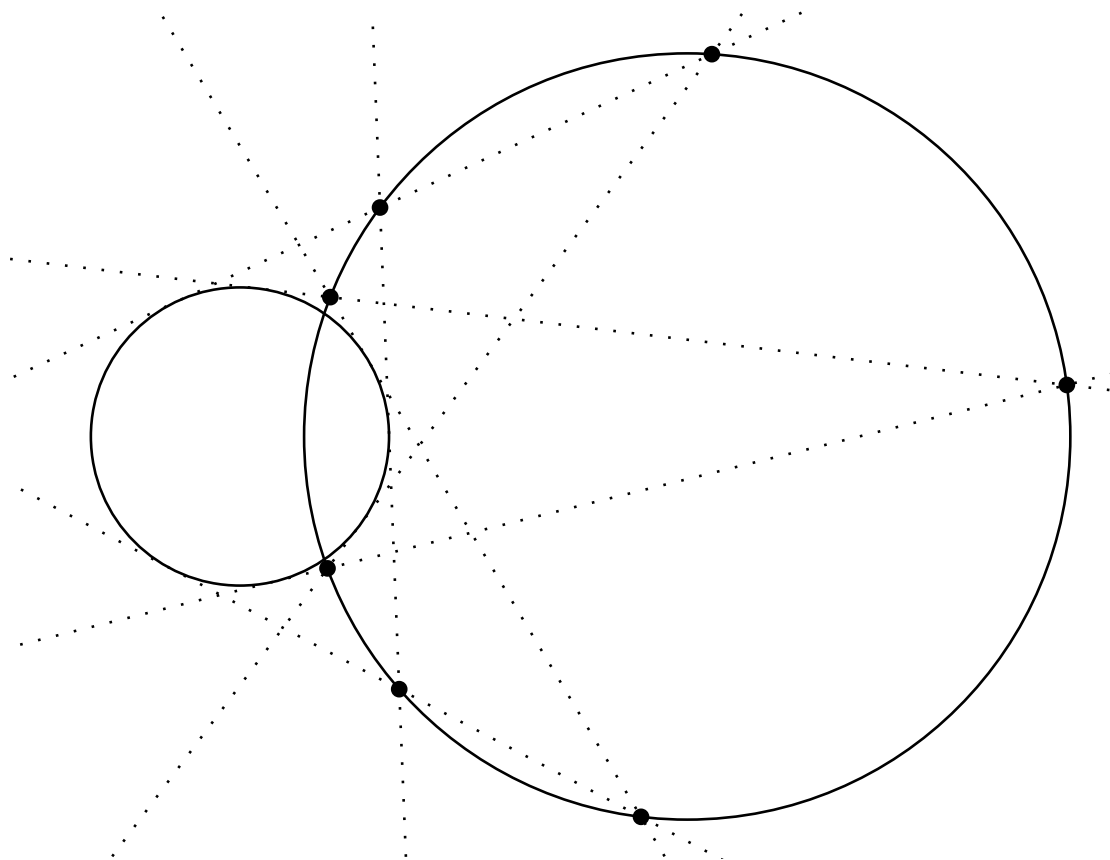
Porismo de Poncelet, $n = 7$,

$$\begin{aligned}
 &48a^4R^5r^3 + 15a^4R^8 + R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
 &+ 64a^2R^4r^6 - 16a^6R^2r^4 - 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 + 32a^4R^4r^4 - 4a^8R^2r^2 \\
 &- 40a^6R^5r - 16a^2R^6r^4 + 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr - 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
 &- 6a^{10}R^2 - 6R^{10}a^2 + a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 - 20a^6R^6 + 16R^8a^2r^2 \\
 &+ 16a^6R^4r^2 = 0.
 \end{aligned}$$



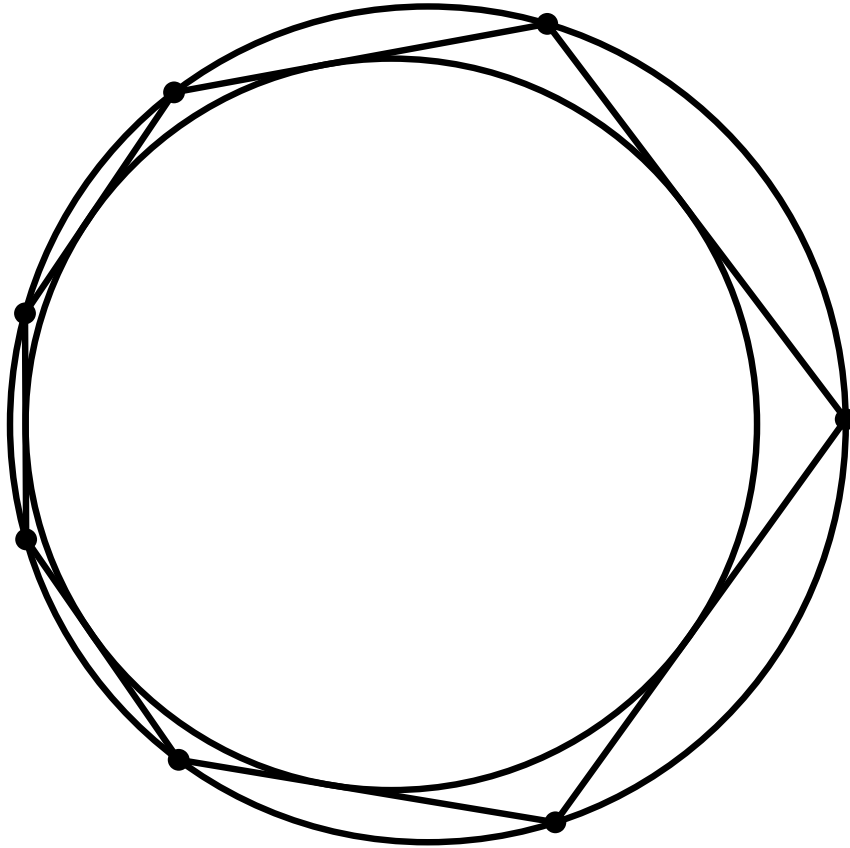
Porismo de Poncelet, $n = 7$,

$$\begin{aligned}
 &48a^4R^5r^3 + 15a^4R^8 + R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
 &+ 64a^2R^4r^6 - 16a^6R^2r^4 - 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 + 32a^4R^4r^4 - 4a^8R^2r^2 \\
 &- 40a^6R^5r - 16a^2R^6r^4 + 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr - 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
 &- 6a^{10}R^2 - 6R^{10}a^2 + a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 - 20a^6R^6 + 16R^8a^2r^2 \\
 &+ 16a^6R^4r^2 = 0.
 \end{aligned}$$



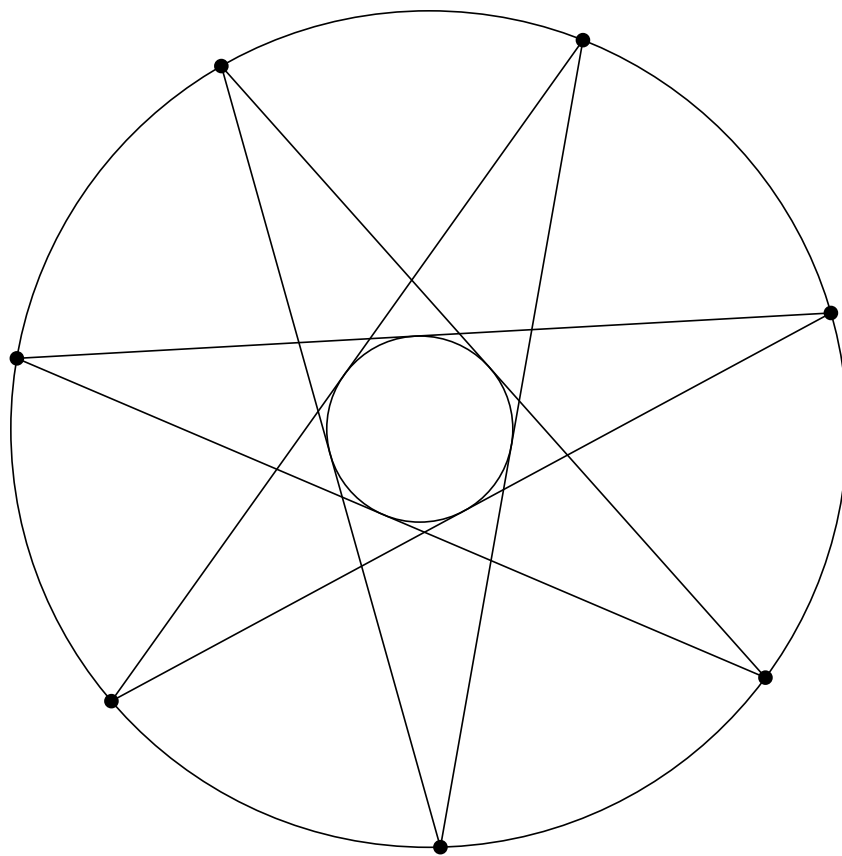
Porismo de Poncelet, $n = 7$,

$$\begin{aligned}
 &48a^4R^5r^3 - 15a^4R^8 - R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
 &- 64a^2R^4r^6 + 16a^6R^2r^4 + 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 - 32a^4R^4r^4 + 4a^8R^2r^2 \\
 &- 40a^6R^5r + 16a^2R^6r^4 - 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr + 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
 &+ 6a^{10}R^2 + 6R^{10}a^2 - a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 + 20a^6R^6 - 16R^8a^2r^2 \\
 &- 16a^6R^4r^2 = 0.
 \end{aligned}$$



Porismo de Poncelet, $n = 7$,

$$\begin{aligned}
 &48a^4R^5r^3 - 15a^4R^8 - R^{12} - 20R^9a^2r + 20a^8R^3r + 40a^4R^7r - 64a^6R^3r^3 \\
 &- 64a^2R^4r^6 + 16a^6R^2r^4 + 24a^4R^6r^2 + 24a^8Rr^3 - 32a^4R^4r^4 + 4a^8R^2r^2 \\
 &- 40a^6R^5r + 16a^2R^6r^4 - 15a^8R^4 - 4a^{10}Rr + 4R^{10}r^2 + 4R^{11}r - 8R^9r^3 \\
 &+ 6a^{10}R^2 + 6R^{10}a^2 - a^{12} - 32a^6Rr^5 + 32a^2R^5r^5 + 20a^6R^6 - 16R^8a^2r^2 \\
 &- 16a^6R^4r^2 = 0.
 \end{aligned}$$



Parte IV

El rango numérico

Guía para la parte IV

Las subsecciones de cada capítulo están nombradas de manera que no haya confusión acerca de dónde se encuentra cada resultado o definición citado a continuación, para más detalle consúltese el índice general.

Al lector familiarizado con el concepto de rango numérico se le sugiere omitir la lectura del capítulo 8.

Capítulo 8

Objetivo. Definir el rango numérico para matrices con entradas complejas, estudiar sus propiedades básicas mostrando ejemplos que ligen su estudio con los objetos geométricos que aparecen en las partes previas de la tesis, cubriendo el material necesario para comprender el capítulo final en el que se construyen curvas de Poncelet a partir de fronteras de rangos numéricos.

Material expuesto.

1. Definición de rango numérico.
2. Polígonos convexos vistos como rangos numéricos de matrices normales.
3. Circunferencias y elipses vistas como fronteras de rangos numéricos de matrices de 2×2 .
4. Propiedades generales básicas del rango numérico.
 - a) Convexidad.
 - b) Compacidad para el caso de operadores entre espacios de dimensión finita.
 - c) Contención del espectro del operador.
 - d) El radio numérico.
5. Un algoritmo para dibujar la frontera del rango numérico de una matriz con entradas complejas cualquiera.

Capítulo 9

Objetivo. Utilizar los resultados vistos en el capítulo 8 para construir operadores cuyos rangos numéricos permiten obtener ejemplos diversos de curvas de Poncelet no-cónicas. Comenzamos con un ejemplo para después hacer una construcción general, ligando el problema con el contenido de la primer parte (primeros dos capítulos) y concluyendo así la tesis.

Material expuesto.

1. Construcción de matrices que definen curvas de Poncelet.
 - a) Un caso particular para triángulos y elipses.
 - b) El caso general de curvas tangentes a los lados de polígonos convexos inscritos en la circunferencia unitaria.
2. Conexión entre las curvas construidas previamente y la demostración de Jacobi del caso real del porismo de Poncelet*.
3. Grado de arbitrariedad para construir curvas de Poncelet dado un polígono inscrito en la circunferencia unitaria*.
4. Generalización de las construcciones para el caso de polígonos no convexos*.

* Estos temas se sugieren como continuación del estudio para el lector.

Bibliografía

El capítulo 8 está basado principalmente en el libro [9] de Gustafson y Rao, mientras que el capítulo 9 es una introducción al trabajo de Boris Mirman expuesto en los artículos [16] y [17].

Capítulo 8

El campo de valores de un operador lineal

8.1. Introducción

En esta, la última parte de la tesis, saldremos un poco de la línea trazada por los capítulos previos para dar una breve introducción a un problema contemporáneo.

Los resultados del capítulo anterior permiten construir ejemplos de circunferencias de Poncelet respecto a otra circunferencia dada con polígonos interinscritos de cualquier número de lados; podemos observar informalmente incluso, dado que las transformaciones proyectivas mapean cónicas en cónicas y preservan la propiedad de cerradura de los polígonos interinscritos, que es posible a partir de aquí, construir ejemplos de diferentes tipos de cónicas (refiriéndonos a las partes afines de las mismas) que satisfagan las condiciones del porismo de Poncelet para polígonos con cualquier número de lados. ¿Será posible construir este tipo de ejemplos para otro tipo de curvas más allá de las cónicas?, sin duda toda la teoría que utilizamos previamente hace uso constante de propiedades geométricas y algebraicas de las mismas, de modo que se intuye difícil extender las ideas desarrolladas hasta ahora con el fin de resolver la pregunta previa.

A principios de este siglo se comenzó a trabajar constantemente en la relación sorprendente entre las curvas de Poncelet y el llamado **campo de valores** ó **rango numérico** de un operador lineal, en el presente capítulo expondremos las propiedades del mismo que

sugieren la relación que mencionamos para concluir cubriendo el último objetivo del trabajo; dar ejemplos no-cónicos de n -curvas de Poncelet respecto a una circunferencia.

Utilizaremos la notación empleada en [7] así como algunos resultados básicos que suelen cubrirse en los cursos de álgebra lineal de la licenciatura.

8.2. Definición y propiedades básicas

En general el rango numérico suele definirse para operadores lineales $A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ en un espacio de Hilbert sobre \mathbb{C} separable con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como sigue:

$$\Omega(A) := \{ \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1 \}.$$

Para nuestros fines será suficiente considerar espacios de dimensión finita (\mathbb{C}^n módulo isomorfismo) y supondremos a los operadores, inducidos por la multiplicación por la izquierda por alguna matriz cuadrada con entradas complejas. Puede observarse sin embargo, que muchos de los resultados básicos que exponaremos tienen validez también en el caso general.

En la siguiente proposición listamos algunas propiedades básicas a partir de la definición.

Proposición 8.1. 1. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Omega(\alpha A + \beta Id) = \alpha \Omega(A) + \beta$.

2. Si A^* denota el adjunto del operador A , entonces $\Omega(A^*) = \{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in \Omega(A) \}$.

3. Si U es un operador (matriz) unitario(a), $\Omega(U^*AU) = \Omega(A)$.

Incluiremos la prueba del tercer inciso, siendo 1 y 2 inmediatos.

Demostración. Inciso 3. Dado $\lambda \in \Omega(A)$, existe x con $\|x\| = 1$ de manera que

$$\lambda = \langle U^*AUx, x \rangle,$$

$\langle U^*AUx, x \rangle = \langle AUx, Ux \rangle$ y como U es unitario, $\|Ux\| = \|x\| = 1$, por lo que $\lambda \in \Omega(A)$. Viceversa, si $\lambda = \langle Ay, y \rangle \in \Omega(A)$, ($\|y\| = 1$), por ser U unitario y en particular invertible, $y = Ux$ para cierto x con $\|x\| = 1$ y se tiene análogamente $\lambda = \langle AUx, Ux \rangle = \langle U^*AUx, x \rangle \in \Omega(U^*AU)$. \square

8.3. Ejemplos; el lema de la elipse

Nos interesa mostrar ejemplos que relacionen lo antes posible el rango numérico con los objetos geométricos manejados previamente en este trabajo.

8.3.1. Matrices diagonales

Tomemos primero un operador lineal $D : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ diagonalizable respecto a cierta base $\gamma \subset \mathbb{C}^n$, denotaremos por $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ a $[D]_\gamma$, donde

$$[D]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Afirmamos entonces que

$$\Omega([D]_\gamma) = \text{Conv}(\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\});$$

donde $\text{Conv}(X)$ denota el casco convexo del conjunto X .

Demostración. Sea $\lambda = \langle [D]_\gamma x, x \rangle \in \Omega([D]_\gamma)$; donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ es un vector unitario.

Entonces

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{x}_j x_j = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \lambda_j \in \text{Conv}(\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}),$$

pues $\sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1$ y $|x_j|^2 \geq 0$ para $1 \leq j \leq n$.

De igual manera, todo punto de $\text{Conv}(\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\})$ es de la forma

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1,$$

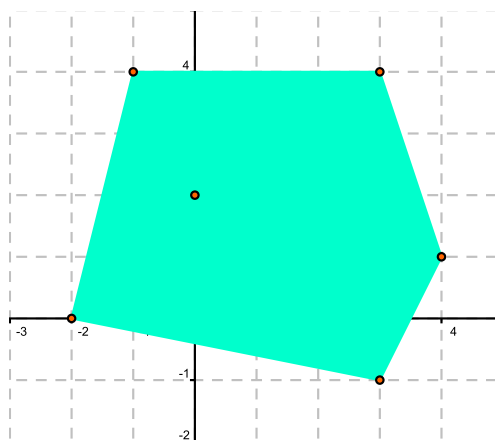
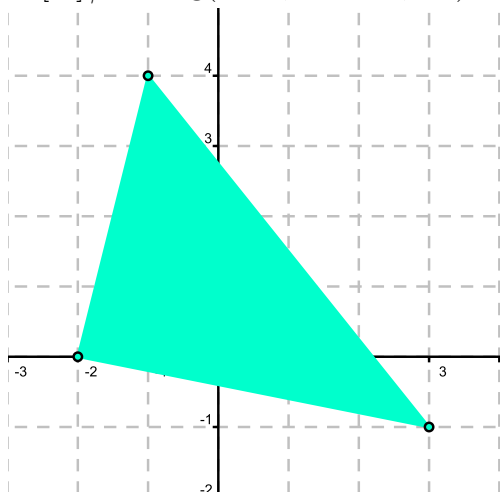
que es:

$$\left\langle [D]_\gamma \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \right\rangle \in \Omega([D]_\gamma).$$

□

Ilustremos un par de casos particulares:

$$[D]_\gamma = \text{Diag}(3 - i, -1 + 4i, -2) \quad [D]_\gamma = \text{Diag}(-2, 3 - i, 4 + i, 3 + 4i, -1 + 4i, 2i)$$



8.3.2. Matrices normales y unitarias

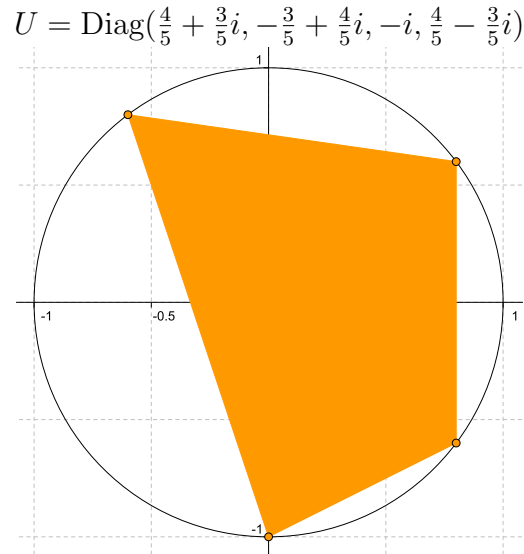
Utilizando el ejemplo anterior y el tercer inciso de la proposición 8.1 tenemos el siguiente resultado.

Resultado 8.1. *El rango numérico de una matriz normal $T \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es el casco convexo de sus eigenvalores.*

En efecto, pues una matriz normal es unitariamente diagonalizable.

Si tomamos ahora una matriz $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, ($n \geq 3$) unitaria, tenemos además por el hecho de que sus eigenvalores tienen módulo 1, que el rango numérico es en este caso

un polígono convexo inscrito en la circunferencia unitaria. Esto resultará una herramienta fundamental a la hora de construir curvas de Poncelet respecto a tal circunferencia. En la siguiente imagen aparece el rango numérico de un operador unitario $U : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$.



8.3.3. Circunferencias y elipses

En esta subsección caracterizaremos los posibles rangos numéricos para matrices $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Comenzaremos por revisar algunos casos particulares.

Ejemplo 1. $A' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|a| > 0$.

Como $A' = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ podemos limitarnos a calcular el rango numérico de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para después utilizar el primer inciso de la proposición 8.1.

Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ un vector unitario, entonces

$$Ax = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle Ax, x \rangle = \bar{x}_1 x_2.$$

Observando que

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) = \frac{1}{2}.$$

Tenemos $\Omega(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$. La otra contención también ocurre, si tomamos $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$, supongamos en la forma $z = re^{i\theta}$ con $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tenemos $2r \in [0, 1]$, de modo que podemos tomar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sin 2\alpha = 2r$.

Sea $x = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ e^{i\theta} \sin \alpha \end{bmatrix}$. Entonces $\|x\| = 1$ y

$$\langle Ax, x \rangle = e^{i\theta} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} e^{i\theta} \sin 2\alpha = re^{i\theta} = z.$$

Por lo anterior, el rango de la matriz A' considerada originalmente es precisamente $\{az \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$, un círculo con centro en el origen de radio $\frac{|a|}{2}$:

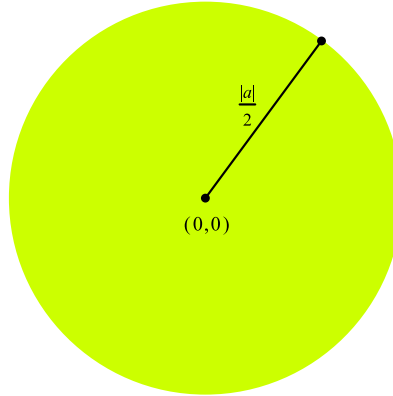


Figura 8.1: El rango numérico de la matriz A'

Ejemplo 2. $A = \begin{pmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

Esta vez, dado un $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ unitario, utilizaremos una representación de la forma $x_1 = e^{i\alpha} \cos \theta$, $x_2 = e^{i\beta} \sin \theta$. En estos términos tenemos

$$Av = \begin{bmatrix} re^{i\alpha} \cos \theta + be^{i\beta} \sin \theta \\ -re^{i\beta} \sin \theta \end{bmatrix},$$

$$\langle Ax, x \rangle = r \cos^2 \theta + be^{i(\beta-\alpha)} \cos \theta \sin \theta - r \sin^2 \theta = r \cos 2\theta + \frac{b}{2} e^{i(\beta-\alpha)} \sin 2\theta.$$

La última expresión puede reescribirse como $r \cos 2\theta + \frac{|b|}{2} e^{i(\beta-\alpha+\gamma)} \sin 2\theta$, donde $\gamma = \arg(b)$. Desarrollando las potencias de e escribiremos $\langle Av, v \rangle$ en la forma $x + iy$:

$$\langle Av, v \rangle = r \cos 2\theta + \frac{|b|}{2} \sin 2\theta \cos(\beta - \alpha + \gamma) + i \frac{|b|}{2} \sin 2\theta \sin(\beta - \alpha + \gamma) := x + iy.$$

Pongamos $2\theta = \varphi$ y observemos que las partes real x e imaginaria y de $\langle Av, v \rangle$ satisfacen la ecuación

$$(x - r \cos \varphi)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4} \sin^2 \varphi. \quad (8.1)$$

Por tanto, al variar φ , $x + iy$ se mueve en una familia de circunferencias, todas contenidas en $\Omega(A)$. Para encontrar la curva envolvente de estas circunferencias podemos derivar (8.1) respecto a φ obteniendo

$$r(x - r \cos \varphi) = \frac{|b|^2}{4} \cos \varphi,$$

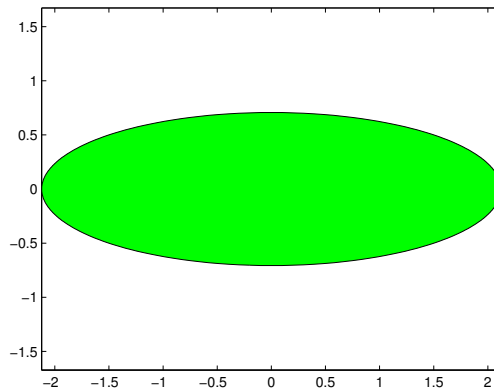
de donde

$$\cos \varphi = \frac{rx}{r^2 + \frac{|b|^2}{4}} \quad \text{y} \quad \sin^2 \varphi = 1 - \frac{r^2 x^2}{(r^2 + \frac{|b|^2}{4})^2}.$$

Sustituyendo estos valores en (8.1) y simplificando hallamos la ecuación de la envolvente buscada:

$$\frac{x^2}{r^2 + (|b|^2/4)} + \frac{y^2}{(|b|^2/4)} = 1.$$

Ésta es una elipse con centro en el origen y ejes de longitudes $|b|$ y $\sqrt{4r^2 + |b|^2}$. Obsérvese también que sus focos son los puntos reales $\pm r$, precisamente los eigenvalores de la matriz A . En la siguiente imagen se muestra como ejemplo el rango numérico del operador $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$:



8.3.4. Lema de la elipse

Los ejemplos de la subsección anterior son casos particulares de un resultado simple pero muy importante que probaremos enseguida.

Lema 8.1. *El rango numérico de una matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ es el casco convexo de una elipse con focos en sus eigenvalores.*

Demostración. Por un teorema de Schur (véase [7], pág. 385), A es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior, luego en virtud del tercer inciso de la proposición 8.1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad b, \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

De aquí dividiremos el problema en casos:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Entonces

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el ejemplo 1 de 8.3.3, el rango de esta última matriz es un círculo de radio $\frac{|b|}{2}$ y centro en el origen. Por la proposición 8.1 $\Omega(A)$ en este caso es un círculo del mismo radio pero con centro en λ , el único eigenvalor de la matriz.

2. Si $b = 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, A es una matriz diagonal con estos eigenvalores cuyo rango numérico por lo visto en 8.3.1 es el segmento de recta que une λ_1 y λ_2 ; una elipse degenerada con tales focos.

3. Finalmente consideremos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $b \neq 0$. Podemos hacer lo siguiente:

$$A - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) Id = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & b \\ 0 & \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sean $r \in \mathbb{R}$ tal que $re^{i\theta} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$, y

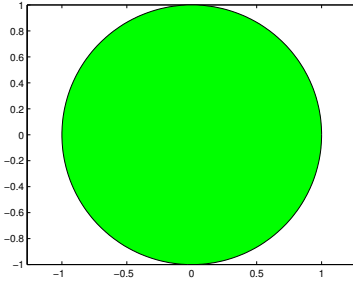
$$B := e^{-i\theta} \left[A - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) Id \right] = \begin{pmatrix} r & be^{-i\theta} \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

El resultado para este caso se sigue entonces del ejemplo visto previamente y la proposición 8.1.

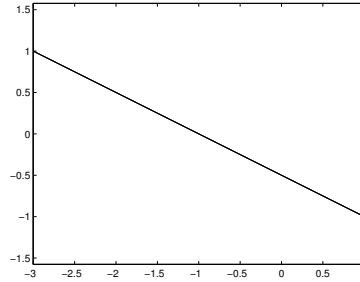
□

A continuación ilustramos algunos rangos numéricos de este tipo con sus respectivas matrices:

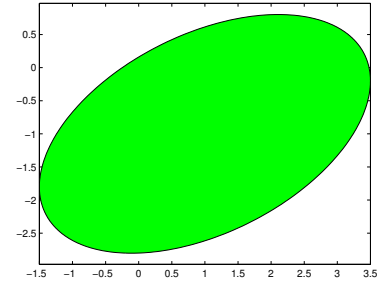
$$\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -3+i \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -1-2i & 3i \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



8.4. Resultados clásicos

La importancia del lema de la elipse se debe a que permite observar la que quizá sea la propiedad más conocida de cualquier rango numérico; su convexidad.

8.4.1. Convexidad; el teorema de Toeplitz-Hausdorff

El teorema que establece la convexidad del rango numérico se atribuye a Toeplitz y a Hausdorff.

Teorema 8.1. *El rango numérico de cualquier operador lineal $T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es convexo.*

Demostración. Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interior definido en \mathbb{H} , $\| \cdot \|$ la norma inducida correspondiente y

$$\mathcal{S} := \{v \in \mathbb{H} \mid \|v\| = 1\}.$$

Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega(T)$, digamos $\lambda_1 = \langle Tx, x \rangle$, $\lambda_2 = \langle Ty, y \rangle$ con $x, y \in \mathcal{S}$, obsérvese que si suponemos que hemos tomado puntos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega(T)$ distintos, entonces $\{x, y\}$ debe ser linealmente independiente sobre \mathbb{C} . Sea entonces $\mathcal{L} := L_{\mathbb{C}}(\{x, y\})$ el subespacio de \mathbb{H} sobre \mathbb{C} generado por $\{x, y\}$ y Π la proyección ortogonal de \mathbb{H} sobre \mathcal{L} . Π es entonces un operador autoadjunto y claramente $\Pi x = x$ y $\Pi y = y$. Entonces

$$\langle \Pi T \Pi x, x \rangle = \langle \Pi T x, x \rangle = \langle Tx, \Pi^* x \rangle = \langle Tx, \Pi x \rangle = \langle Tx, x \rangle.$$

Lo mismo puede decirse para el vector y : $\langle \Pi T \Pi y, y \rangle = \langle T y, y \rangle$, esto muestra que el operador $\Pi T \Pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ satisface:

$$\Omega(\Pi T \Pi) \subset \Omega(T) \quad \text{y} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega(\Pi T \Pi).$$

Por el lema de la elipse, $\Omega(\Pi T \Pi)$ es convexo, entonces

$$\text{Conv}(\{\lambda_1, \lambda_2\}) \subset \Omega(\Pi T \Pi) \subset \Omega(T).$$

Por lo tanto $\Omega(T)$ es convexo. □

8.4.2. Compacidad

En el caso de operadores entre espacios de dimensión finita se tiene además garantizada la compacidad del rango numérico correspondiente, al ser éste la imagen continua de la esfera unitaria en un espacio isomorfo a algún \mathbb{C}^n . Para espacios de dimensión infinita los rangos numéricos no son en general ni abiertos ni cerrados (para consultar ejemplos véase [9]).

8.4.3. Contención espectral

Más allá de sus propiedades geométricas, el rango numérico surgió originalmente como un auxiliar para estudiar el espectro de un operador lineal

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{existe } v \in \mathbb{H} \text{ con } T v = \lambda v\}.$$

Para rangos numéricos de operadores lineales $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ en general se tiene siempre que $\sigma(T) \subset \overline{\Omega(T)}$, (el espectro de T está contenido en la cerradura de su rango numérico). Una prueba sencilla de este hecho puede verse en [9], pág. 6.

En el caso que nos interesa (operadores entre espacios de dimensión finita), esta propiedad es inmediata.

Teorema 8.2. *Dada una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, se tiene*

$$\text{Conv}(\sigma(A)) \subset \Omega(A).$$

Demostración. Dado $\lambda \in \sigma(A)$, tómesese $x \in \mathbb{C}^n$ unitario tal que $Ax = \lambda x$. Entonces $\langle Ax, x \rangle = x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda\|x\| = \lambda$, por tanto $\sigma(A) \subset \Omega(A)$. El resto se sigue de la convexidad del rango numérico. \square

Como hemos observado anteriormente, para matrices normales se tiene también la otra contención.

8.5. El radio numérico

Teniendo en cuenta las propiedades expuestas hasta ahora del rango numérico, es natural, dada una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, preguntarse por *qué tan grande* es $\Omega(A)$. En concreto nos interesa el número $\omega(A)$ que definimos a continuación.

Definición 8.1. El **radio numérico** del operador lineal A está dado por

$$\omega(A) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \leq r \ \forall \lambda \in \Omega(A)\}.$$

Observaciones 8.1.

$$\omega(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \Omega(A)\}.$$

Y tenemos para cualquier vector $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle Ax, x \rangle \leq \omega(A)\|x\|^2.$$

Puede probarse directamente a partir de las propiedades básicas del rango numérico que $\omega : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ define una norma, más aún, si denotamos por $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ a la norma usual para operadores lineales, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.3. $\omega(\cdot)$ y $\|\cdot\|$ definen normas equivalentes en el espacio $M_{n \times n}(\mathbb{C})$, más precisamente:

$$\omega(A) \leq \|A\| \leq 2\omega(A).$$

Demostración. Al definir A un operador lineal entre espacios de dimensión finita, $\|A\|$ es también finito. Sea $\lambda \in \Omega(A)$, pongamos $\lambda = \langle Ax, x \rangle$ con $\|x\| = 1$. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\lambda| \leq \|Ax\|\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|.$$

De donde $\omega(A) \leq \|A\|$. Por otro lado utilizando una identidad de polarización, tenemos para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$4\langle Ax, x \rangle = \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle + i(\langle A(x+iy), x+iy \rangle - \langle A(x-iy), x-iy \rangle),$$

de aquí y las observaciones 8.1:

$$\begin{aligned} 4|\langle Ax, x \rangle| &\leq \omega(A)[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] \\ &= 4\omega(A)[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \end{aligned}$$

Eligiendo $\|x\| = \|y\| = 1$ tenemos

$$4|\langle Ax, x \rangle| \leq 8\omega(A).$$

Por lo tanto $\|A\| \leq 2\omega(A)$. □

8.6. Cómo dibujar el rango numérico

En el último capítulo mostraremos cómo construir matrices cuyos rangos numéricos tienen fronteras que son curvas de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria y como hemos mencionado ya, nos interesa en particular el caso en que éstas no sean cónicas, lo cual excluye que podamos graficarlas utilizando el material hasta ahora expuesto, por ello nos interesa tener un método sencillo de dibujar el rango numérico de una matriz cualquiera.

8.6.1. Matrices hermitianas

La idea que expondremos surge de considerar primero un caso muy sencillo, recordemos que una matriz $H \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es llamada hermitiana si $H = H^*$, en el siguiente teorema reuniremos un par de propiedades de este tipo de matrices.

Teorema 8.4. *Dada una matriz $H \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiana:*

- i) Existe una matriz unitaria U tal que U^*HU es diagonal.*
- ii) Todos los eigenvalores de H son reales.*

Demostración. Se trata de un resultado clásico de álgebra lineal, puede verse una prueba en el capítulo 6, sección 4 de [7]. □

Con la notación del teorema anterior, el primer inciso se debe básicamente a que H en particular es una matriz normal, por lo cual sabemos también que $\text{Conv}(\sigma(H)) = \Omega(H)$ y como además $\Omega(H) = \Omega(U^*HU)$, el segundo inciso nos proporciona un método muy simple para obtener $\Omega(H)$ que establecemos a continuación.

Resultado 8.2. Sean $\lambda_M(H)$, $\lambda_m(H)$ los eigenvalores mínimo y máximo de H (es decir, $\lambda_m(H) \leq \lambda \leq \lambda_M(H)$ para cualquier $\lambda \in \sigma(H)$). Entonces

$$\Omega(H) = [\lambda_m, \lambda_M].$$

8.6.2. Proyección real

Motivados por lo anterior, escribiremos a cualquier matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ en la forma

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}.$$

Denotaremos a las matrices de esta descomposición, $\frac{A+A^*}{2}$ y $\frac{A-A^*}{2}$ como $h(A)$ y $s(A)$ respectivamente. Obsérvese que $h(A)$ es una matriz hermitiana.

Denotemos por $\text{Re}(X) \subset \mathbb{R}$ al conjunto de las partes reales de todos los puntos de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$, como veremos a continuación, en términos del rango numérico, la descomposición que proponemos es lo equivalente a escribir a cada número complejo z en términos de sus partes real e imaginaria $z = x + iy$.

Proposición 8.2. Para toda $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$:

$$\Omega(h(A)) = \text{Re}(\Omega(A)).$$

Demostración. Se sigue de que para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$ unitario, tenemos

$$\begin{aligned} \langle h(A)x, x \rangle &= x^*h(A)x = x^* \left(\frac{A + A^*}{2} \right) x = \frac{1}{2} (x^*Ax + x^*A^*x) = \\ &= \frac{1}{2} (x^*Ax + (x^*Ax)^*) = \frac{1}{2} (x^*Ax + \overline{x^*Ax}) = \text{Re}(x^*Ax) = \text{Re} \langle Ax, x \rangle. \end{aligned}$$

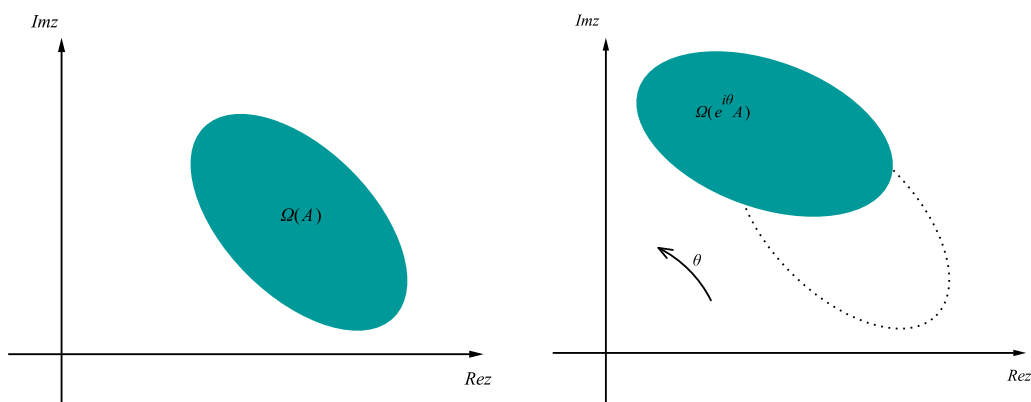
□

Por el resultado anterior y la convexidad del rango numérico, podemos decir que para cualquier matriz A , las rectas $\text{Re } z = \lambda_m(h(A))$ y $\text{Re } z = \lambda_M(h(A))$ son líneas soporte de $\Omega(A)$.

8.6.3. Algoritmo

Podemos ahora dar un método para graficar $\Omega(A)$, en caso de que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ no sea una de las matrices especiales que vimos en la sección 8.3:

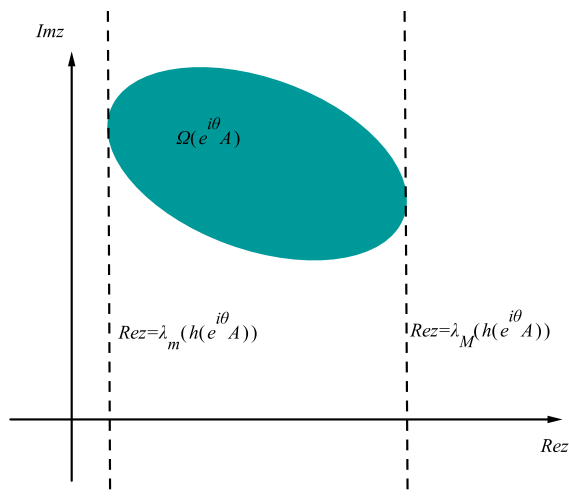
1. Tómese un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ y, utilizando el hecho de que $\Omega(e^{i\theta} A) = e^{i\theta} \Omega(A)$, calcúlese la matriz $e^{i\theta} A$, cuyo rango numérico será $\Omega(A)$ rotado θ radianes.



2. Calcúlese los eigenvalores máximo y mínimo de $h(e^{i\theta} A)$: $\lambda_M(h(e^{i\theta} A))$ y $\lambda_m(h(e^{i\theta} A))$ respectivamente y tómenselas rectas soporte

$$\operatorname{Re} z = \lambda_m(h(e^{i\theta} A)) \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} z = \lambda_M(h(e^{i\theta} A))$$

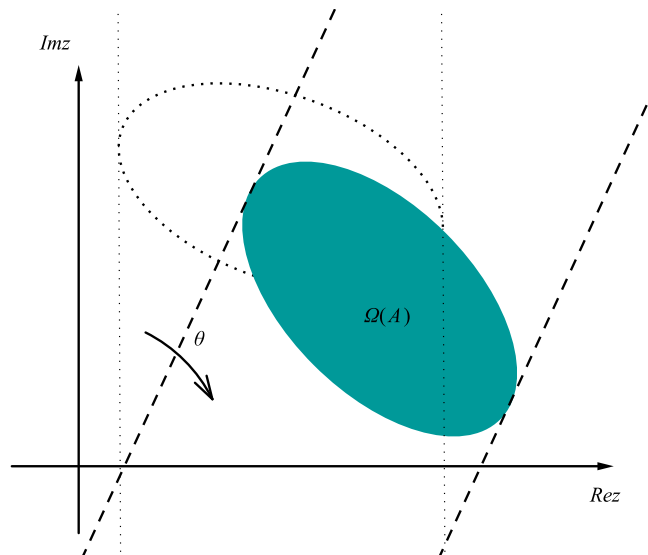
de $\Omega(e^{i\theta} A)$.



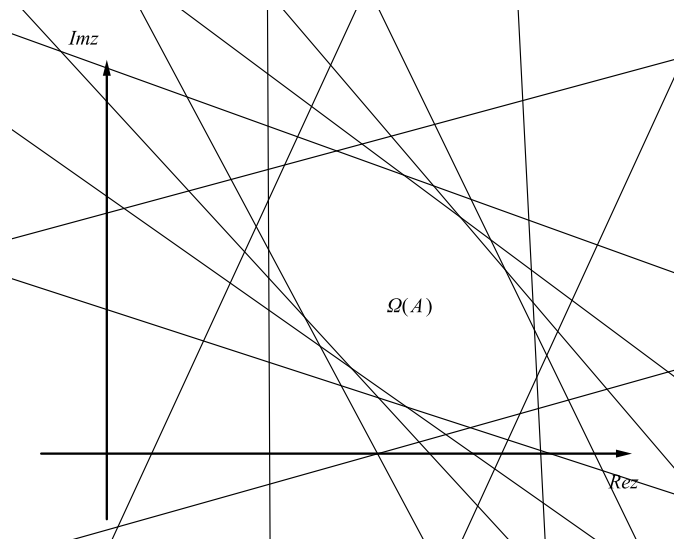
3. Aplíquese la rotación inversa

$$z \mapsto e^{-i\theta} z$$

a las rectas obtenidas en el punto anterior para tener nuevas rectas soporte de $\Omega(A)$.



4. Repítase el proceso para una colección adecuada de ángulos $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < 2\pi$. La frontera del rango numérico buscado es la envolvente de las rectas obtenidas.

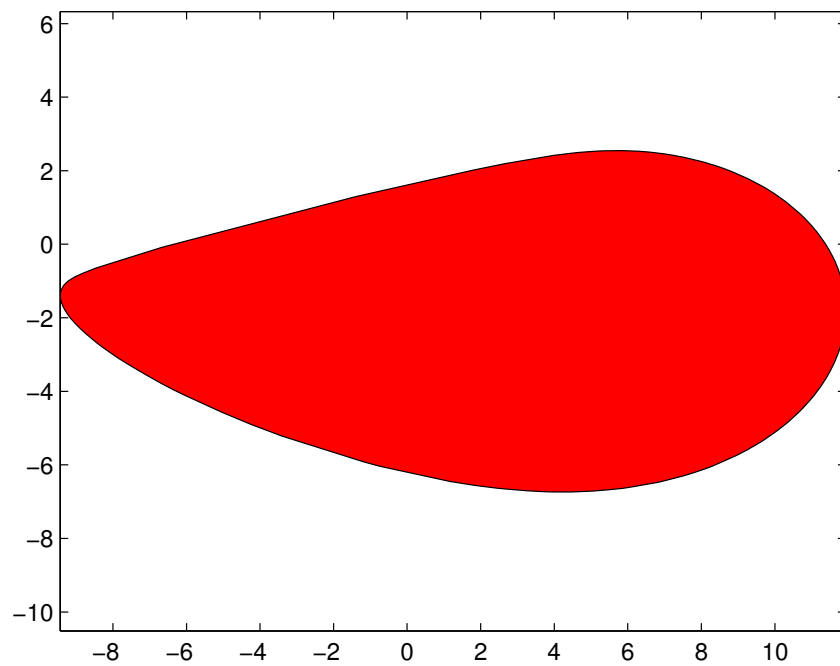


Este algoritmo fue propuesto por Karl Gustafson y Duggirala Rao en [9] y en el apéndice C incluimos un código de MATLAB escrito originalmente por Dora y Valentin Matache.

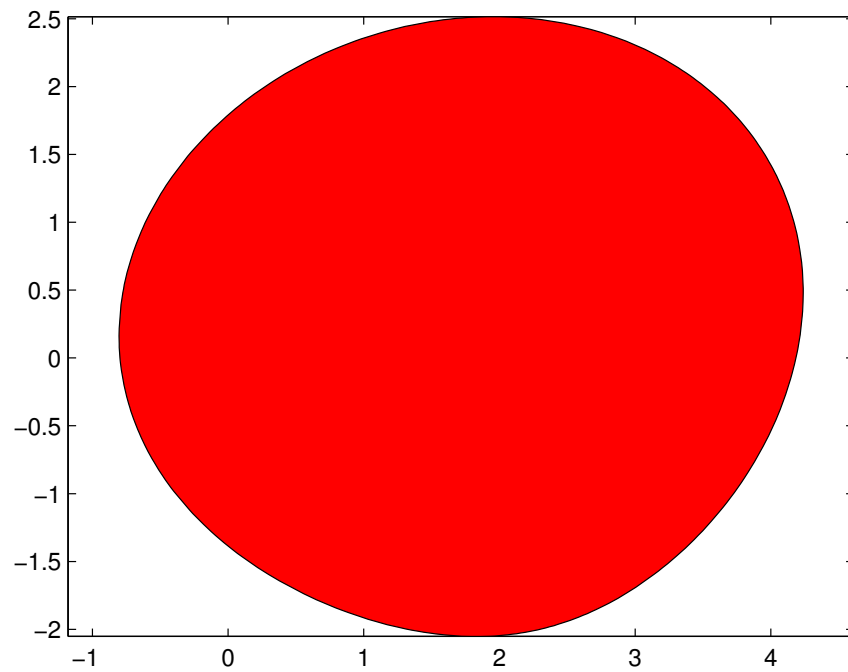
8.6.4. Algunas imágenes

Para concluir esta sección, mostraremos rangos numéricos de algunas matrices varias, construidos con el método que recién discutimos.

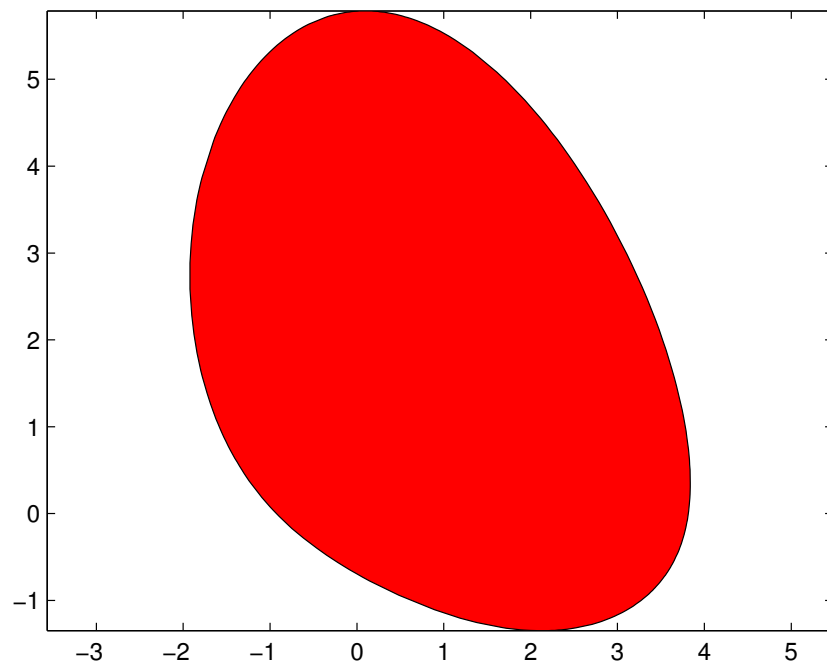
$$A = \begin{pmatrix} 2 - 5i & 10 & 0.2 - i \\ 9 - i & 0 & 3 + i \\ 7i & 2 + 3i & 0 \end{pmatrix}$$



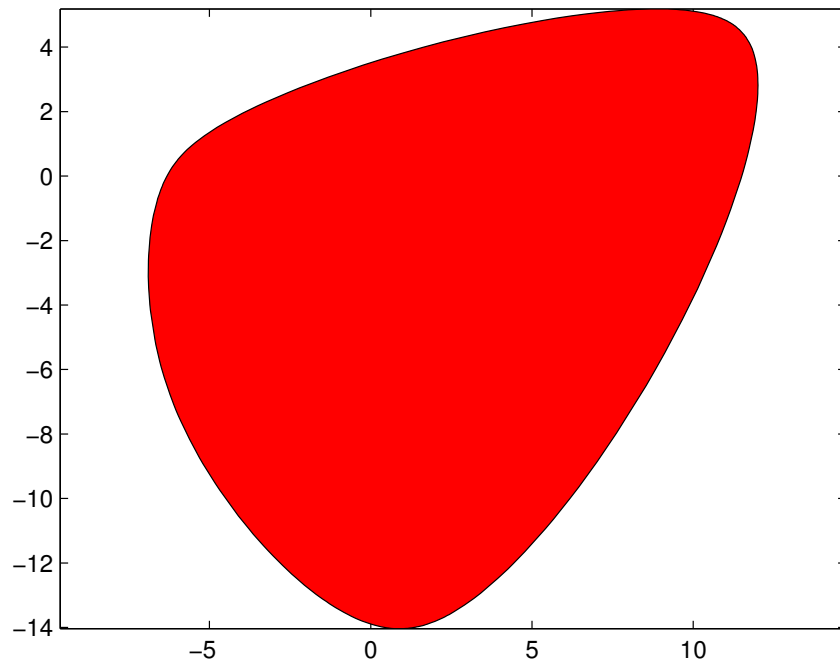
$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 - 1.5i & -1 + i \\ 0 & 0 & 3 + 0.8i \end{pmatrix}$$



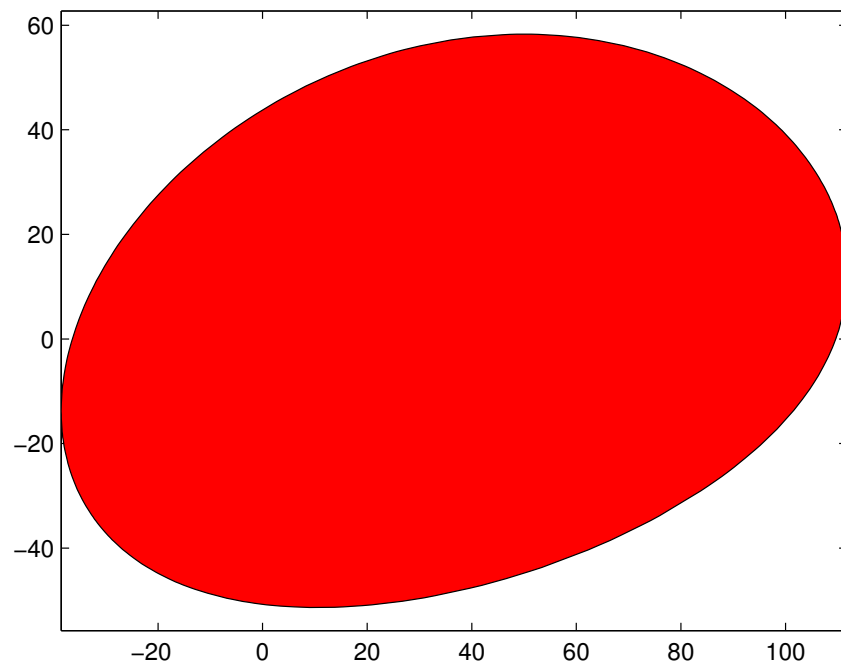
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5i & 0 & 2.12 \\ 0 & 0.5i & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & 1 - 2i \\ 0 & 0 & 0 & 3 - 0.3i \end{pmatrix}$$



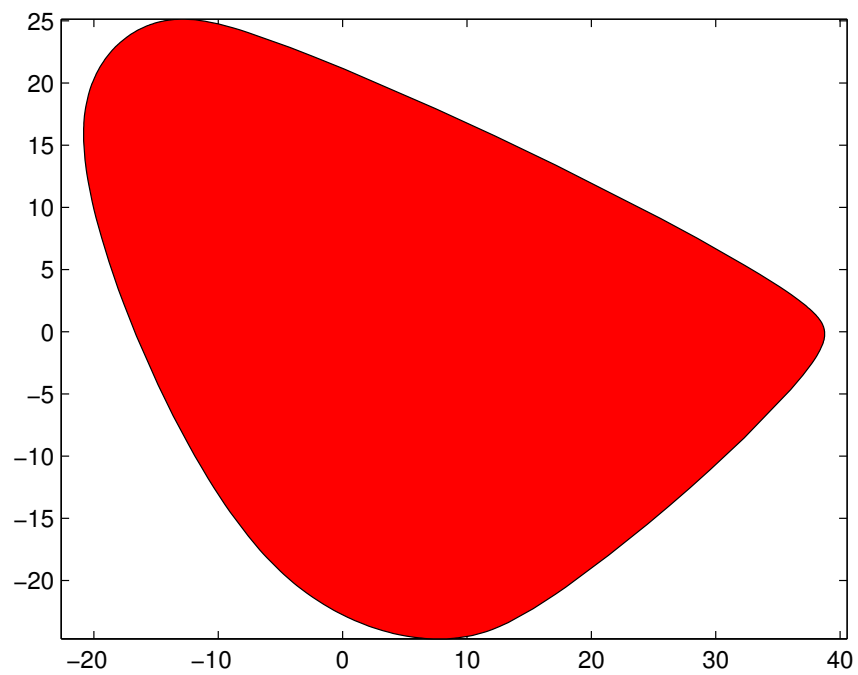
$$A = \begin{pmatrix} 1 - 13i & 2 + i & 3 + 5i & -4 \\ 0 & -5.3 & 1 - 4i & -2 - 2i \\ 0 & 0 & 11 + 4i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -5 - 6i \end{pmatrix}$$



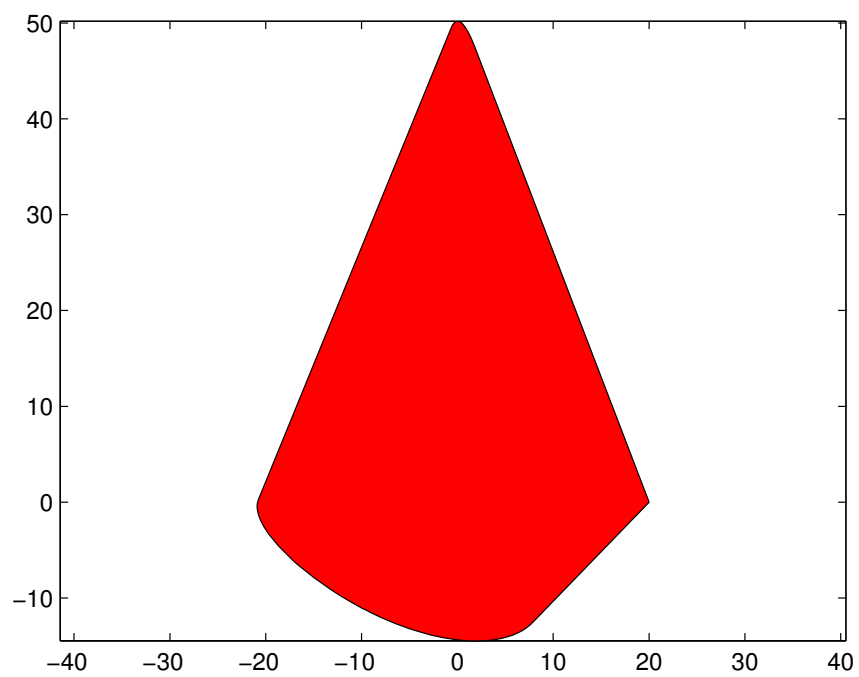
$$A = \begin{pmatrix} 101 & 10 & -12 + 7i & 13 \\ -5 + 3.3i & 7 + 8i & 0 & 10 + 20i \\ 53 - 23i & 2 - 15i & 19 & -82i \\ 5.5 - i & 0 & -18 + 3i & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 38 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 - 20i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 + 20i & 0 & 0 \\ -8.3 - 4.4i & -10 - 10i & 3 + 9i & -5 - 8i & 12 \\ 2 + 6i & 2 + 6i & -8 - 7i & -8 - 7i & -12 + 11i \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 50i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 3-6i & 0 & -8-8i & 3-6i \\ 3-6i & 0 & 0 & 3-6i & 8-8i \end{pmatrix}$$



Capítulo 9

Curvas de Poncelet

9.1. Introducción

El capítulo anterior sugiere una conexión entre el problema que nos interesa y las curvas de frontera de los rangos numéricos, pues hemos visto ejemplos en que estas son circunferencias, elipses y polígonos convexos; en particular observamos que las matrices unitarias tienen rangos cuyas fronteras son polígonos convexos inscritos en la circunferencia unitaria. En este último capítulo presentaremos una construcción propuesta por Boris Mirman (1997) en [17] de matrices obtenidas a partir de una matriz unitaria U cuyo rango numérico tiene una frontera tangente a cada lado del polígono definido por $\partial\Omega(U)$ y resultara ser curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria.

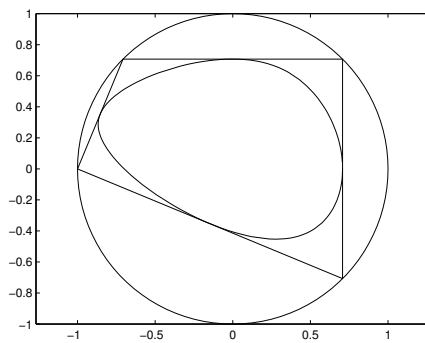


Figura 9.1: Un ejemplo de una curva de Poncelet obtenida con la construcción de Mirman.

El objetivo es probar que esta construcción funciona, estudiar algunas de sus propiedades y extenderla a polígonos no convexos, en el camino será necesario utilizar algunos resultados referentes a eigenvalores normales de una matriz, mismos que para no perder la secuencia que nos interesa, nos limitaremos a citar, si se está interesado en ver más detalles sobre los mismos hemos incluido para ello el apéndice D.

Recordaremos la definición de que una curva sea n -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria, recuperando la notación del capítulo 2 pondremos

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Recuérdese también que un polígono está interinscrito al par de curvas (Γ_1, Γ_2) si todos sus vértices están en Γ_1 y todos sus lados están sobre rectas tangentes a Γ_2 .

Para abreviar, llamaremos simplemente **circuito convexo** a una curva suave, cerrada, simple y convexa del plano euclideo.

Definición 9.1. Un circuito convexo $\Gamma \subset \text{Int}(\mathbb{D})$ es n -curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$ si para todo punto $p \in \partial\mathbb{D}$ existe un polígono de n lados interinscrito a $(\partial\mathbb{D}, \Gamma)$ con vértice en p .

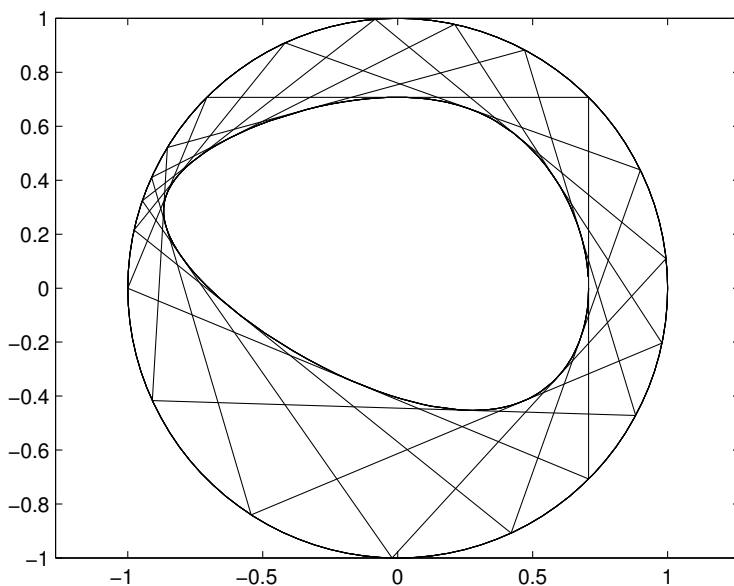


Figura 9.2: La 4-curva de Poncelet de la figura 9.1.

9.2. Construcción principal

Antes de dar el teorema general desarrollaremos un ejemplo sencillo, (en adelante, denotaremos por \vec{e}_j al j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{C}^n).

9.2.1. Caso particular

Sea U la matriz unitaria $\text{Diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})$, con los $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $1 \leq i \leq 3$, distintos dos a dos. U es unitaria (con eigenvalores $e^{i\theta_j}$ correspondientes a los eigenvectores \vec{e}_j) y como sabemos, la frontera de su rango numérico $\partial\Omega(U)$ es un triángulo inscrito en $\partial\mathbb{D}$ con vértices en sus eigenvalores:

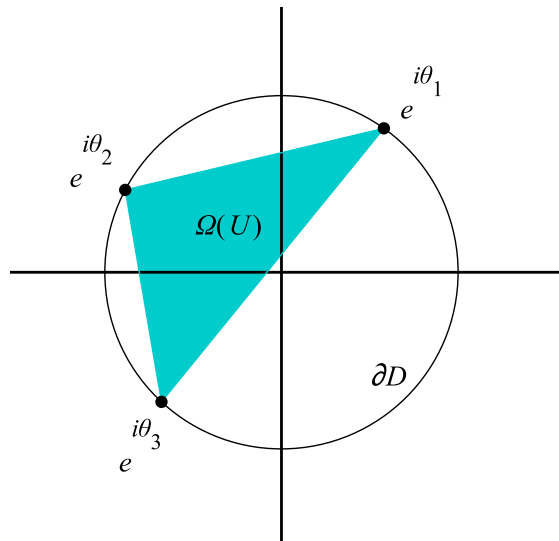


Figura 9.3: Construyendo un caso particular para triángulos.

Vamos a construir un subespacio $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ conveniente de manera que la proyección ortogonal Π de \mathbb{C}^3 en \mathcal{A} sea tal que la matriz $\widehat{T} := \Pi^* U \Pi = \Pi U \Pi$ restringida a \mathcal{A} tenga un rango numérico cuya frontera sea un circuito convexo inscrito al triángulo $\partial\Omega(U)$. Es natural construir \mathcal{A} con dimensión 2 pues por el lema de la elipse, $\partial\Omega(T)$ será una de estas curvas y de estar inscrita al triángulo dado, el porismo de Poncelet original garantiza que ésta será una 3-curva respecto a la circunferencia unitaria.

Sean w el vector unitario $\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j$ y

$$\mathcal{A} := L_{\mathbb{C}}(\{w\})^{\perp} = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid \langle x, w \rangle = 0\},$$

el complemento ortogonal del subespacio generado por $\{w\}$.

La proyección ortogonal en \mathcal{A} está dada por

$$\Pi := Id - ww^*.$$

Definiendo como mencionábamos, $\widehat{T} = \Pi U \Pi$, es claro que \mathcal{A} es un subespacio \widehat{T} -invariante, por lo que tiene sentido definir su restricción

$$T := \widehat{T}|_{\mathcal{A}}.$$

Tenemos por las propiedades del radio numérico, $\omega(\widehat{T}) = \omega(\Pi U \Pi) \leq \|\Pi U \Pi\| \leq \|\Pi\| \|U\| \|\Pi\| = 1$. Por lo cual $\Omega(\widehat{T}) \subset \mathbb{D}$ y al ser T una restricción de \widehat{T} , tenemos también que $\Omega(T)$ es un convexo dentro del círculo unitario.

Afirmamos que $\Omega(T)$ interseca en exactamente un punto a cada lado del triángulo $\partial\Omega(U)$.

Demostración. Probaremos lo anterior para uno de los lados del triángulo, los otros casos son análogos. Sea ℓ_1 el lado de $\partial\Omega(U)$ que une los eigenvalores $e^{i\theta_1}$ y $e^{i\theta_2}$; es claro que ℓ_1 es precisamente el rango numérico de U restringida al eigensubespacio $\mathcal{L} := L_{\mathbb{C}}(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$, como $\dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{A}) = 2 + 2 = 4 > \dim \mathbb{C}^3$, debe existir al menos un $v \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$, vector que podemos además suponer unitario por pertenecer a la intersección de dos subespacios. Tenemos entonces

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \Pi U \Pi v, v \rangle = \langle \Pi U v, v \rangle = \langle Uv, \Pi^* v \rangle = \langle Uv, \Pi v \rangle = \langle Uv, v \rangle.$$

De manera que $\Omega(T)$ toca en al menos un punto al lado ℓ_1 . Para ver que esto no ocurre en ningún otro punto, notemos primero que dado cualquier otro vector $v' \in L_{\mathbb{C}}(\{v\})$ unitario, es decir $v' = \alpha v$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ tenemos

$$\langle Uv', v' \rangle = \langle \alpha Uv, \alpha v \rangle = \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \langle Uv, v \rangle = \langle Uv, v \rangle.$$

Por lo que el que exista otro punto de intersección, implica la existencia de algún $u \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ tal que $\{u, v\}$ sea linealmente independiente, pero esto implicaría

$$\dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}) = 2.$$

Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$, de donde $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathcal{A}$. Esto es una contradicción; obsérvese que $\langle \vec{e}_j, w \rangle \neq 0$, $1 \leq j \leq 3$, por lo cual el subespacio \mathcal{A} no contiene ningún eigenvector de U .

□

Así las cosas, por la convexidad de $\Omega(T)$, $\partial\Omega(T)$ debe ser una curva inscrita a $\partial\Omega(U)$. En este caso particular podemos usar además el lema de la elipse, al poderse ver $T \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ como una matriz de tales dimensiones; si el triángulo que dimos de entrada tiene en efecto, 3 vértices distintos, $\partial\Omega(T)$ no puede ser degenerada y por el porismo de Poncelet tal como fue probado en el capítulo 2, tenemos como conclusión que $\partial\Omega(T)$ es una 3-curva de Poncelet respecto a $\partial\mathbb{D}$.

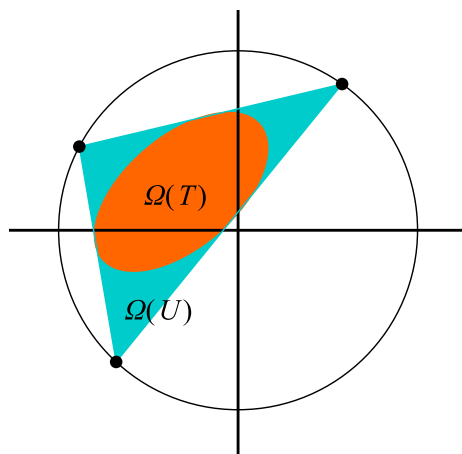


Figura 9.4: El rango numérico de la matriz construida T .

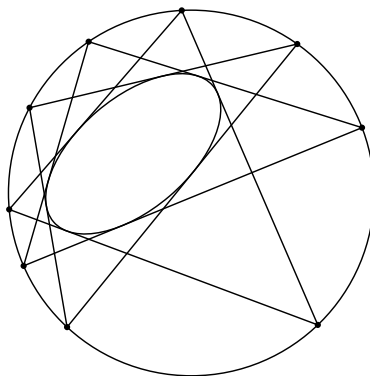


Figura 9.5: La 3-curva de Poncelet de la figura previa.

9.2.2. Generalización

Observando el caso particular recién presentado, es fácil notar que gran parte de la construcción no depende de las dimensiones de la matriz unitaria con la que empezamos. Hemos utilizado sin embargo, el lema de la elipse y el mismo porismo de Poncelet para garantizar el hecho de que la curva que obtuvimos como frontera del rango numérico de la matriz construida, es en efecto una curva de Poncelet. Extenderemos la idea del ejemplo previo tomando ahora una matriz unitaria $U \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$, $n \geq 3$, comenzando a hacer consideraciones adicionales que nos permitirán en última instancia dejar de lado al lema de la elipse y al porismo de Poncelet, en otras palabras, a las cónicas.

Basados en el trabajo original de Boris Mirman [17], enunciaremos el resultado en forma de teorema y daremos la idea de la demostración, señalando detalles pendientes que cubriremos más adelante.

Teorema 9.1. *Sea $U \in M_{(n+1) \times (n+1)}$ una matriz unitaria con eigenvalores distintos. Considérese el siguiente espacio vectorial n -dimensional, que no contiene eigenvectores de U :*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle x, w \rangle = 0; \langle \vec{e}, w \rangle \neq 0 \text{ para cualquier eigenvector } \vec{e} \text{ de } U, \|w\| = 1\}.$$

Sea Π la proyección ortogonal $Id - ww^*$ sobre \mathcal{A} . Entonces la matriz $T = \Pi U \Pi$ vista como un operador

$$T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},$$

es tal que la frontera de su rango numérico es una $(n+1)$ -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria \mathbb{D} .

Demostración. De manera análoga al caso particular expuesto anteriormente, $\Omega(T)$ es un convexo contenido en \mathbb{D} .

Debido a que el rango numérico se conserva bajo la conjugación con matrices unitarias, podemos suponer también que la matriz U es diagonal

$$U = \text{Diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_{n+1}}).$$

La frontera de su campo de valores es un $(n+1)$ -ágono inscrito en la circunferencia unitaria y cada uno de sus lados puede ser visto precisamente como el rango numérico de U restringida

al eigenespacio generado por dos eigenvectores (vectores de la base canónica de \mathbb{C}^n) consecutivos. Afirmamos que $\Omega(T)$ interseca a cada uno de estos lados en uno y solamente un punto, el argumento es exactamente el mismo al utilizado en el caso de los triángulos pero lo repetiremos para ganar claridad.

Tómese por ejemplo el lado ℓ_1 que une los vértices $e^{i\theta_1}$ y $e^{i\theta_2}$ (los otros lados pueden tratarse de la misma manera), tenemos

$$\ell_1 = \Omega(U|_{L_{\mathbb{C}}(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})}),$$

donde $\mathcal{L} := L_{\mathbb{C}}(\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ es el eigenespacio de U generado por los primeros dos vectores de la base canónica. Como $\dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{A}) = 2 + n > \dim(\mathbb{C}^{n+1})$, existe algún vector no nulo $v \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ y al ser $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ cerrado bajo multiplicación escalar, podemos suponer que $\|v\| = 1$, para tener $\langle Tv, v \rangle \in \Omega(T)$, $\langle Uv, v \rangle \in \ell_1$ y

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \Pi U \Pi v, v \rangle = \langle \Pi U v, v \rangle = \langle Uv, \Pi^* v \rangle = \langle Uv, \Pi v \rangle = \langle Uv, v \rangle.$$

Esto muestra que el rango de T interseca en un punto al lado ℓ_1 , si existiera otro punto de intersección, debería existir un segundo vector unitario $u \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ con $\{u, v\}$ linealmente independiente, lo cual implicaría $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, contradiciendo el hecho de que \mathcal{A} no contiene eigenvectores de la matriz U .

Hemos establecido que $\Omega(T)$ está estrictamente en el interior del disco unitario \mathbb{D} y toca precisamente en un punto a cada lado de $\partial\Omega(U)$, a partir de aquí no podemos utilizar las ideas del caso particular $n = 2$. Se pueden construir sin embargo, una infinidad de matrices unitarias $U_\gamma \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$ cuyos rangos numéricos también son $(n+1)$ -ágonos inscritos en $\partial\mathbb{D}$ y cuyos lados intersecan en uno y solamente un punto a $\Omega(T)$, a saber:

$$U_\gamma = U(I - ww^* + e^{i\gamma}ww^*).$$

Tenemos $U_\gamma^*U_\gamma = Id$, es decir U_γ es unitaria, además sus $n + 1$ eigenvalores deben ser distintos dos a dos, pues de tener un eigenvalor múltiple, el subespacio \mathcal{A} de dimensión n debe contener un eigenvector de U_γ y por tanto T debe intersecar en al menos un punto a $\partial\mathbb{D}$, lo cual contradice lo que hemos probado anteriormente.

Se tiene también $\Pi U_\gamma \Pi = T$, así que el mismo argumento utilizado para U sirve para mostrar que $\Omega(T)$ interseca en uno y solamente un punto a $\partial\Omega(U_\gamma)$.

Para $0 < |\gamma_1 - \gamma_2| < 2\pi$, los polígonos $\partial\Omega(U_{\gamma_1})$ y $\partial\Omega(U_{\gamma_2})$ no pueden tener todos sus vértices iguales, pues esto equivale a que tuvieran los mismos eigenvalores y se tendría $\det U_{\gamma_1} = \det U_{\gamma_2}$, esto es imposible pues $\det(I - ww^* + e^{i\gamma}ww^*) = e^{i\gamma}$ y por tanto $\det U_\gamma = e^{i\gamma} \det U$. Más aún, $\partial\Omega(U_{\gamma_1})$ y $\partial\Omega(U_{\gamma_2})$ no pueden diferir sólo en algunos vértices, porque circunscriben

al conjunto convexo $\Omega(T)$; por cualquier punto fuera de un convexo compacto pasan 2 y sólo 2 rectas soporte.

Al variar $\gamma \in [0, 2\pi)$, $\partial\Omega(U_\gamma)$ describe todos los posibles $(n + 1)$ -ágonos interinscritos al par de curvas $(\partial\mathbb{D}, \partial\Omega(T))$ y $\partial\Omega(T)$ resulta una $(n + 1)$ -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria. \square

Como decíamos antes de exhibir esta construcción, quedan pendientes ciertos detalles menores en la prueba que cubriremos en las siguientes secciones en las que hablaremos un poco más sobre las propiedades de las matrices T que recién mencionamos, las cuales son llamadas **unitariamente bordeables** por obvias razones.

Ilustraremos la construcción realizada para un caso con $n = 3$:

1.- El polígono inicial se construye tomando el rango numérico de una matriz unitaria U con 4 valores propios diferentes.

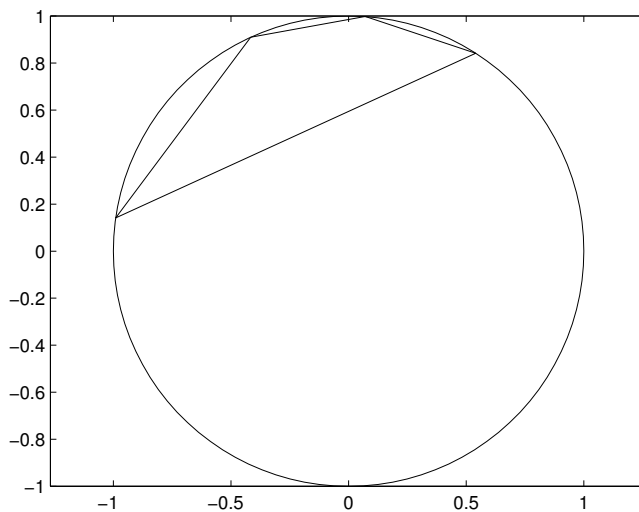


Figura 9.6: Un polígono de 4 lados inscrito en la circunferencia unitaria.

2.- Tomando un vector unitario $w \in \mathbb{C}^4$ no ortogonal a ningún eigenvector U , se construye la frontera del rango numérico de la matriz $T = \Pi U \Pi$, donde Π es la proyección ortogonal $Id - ww^*$.

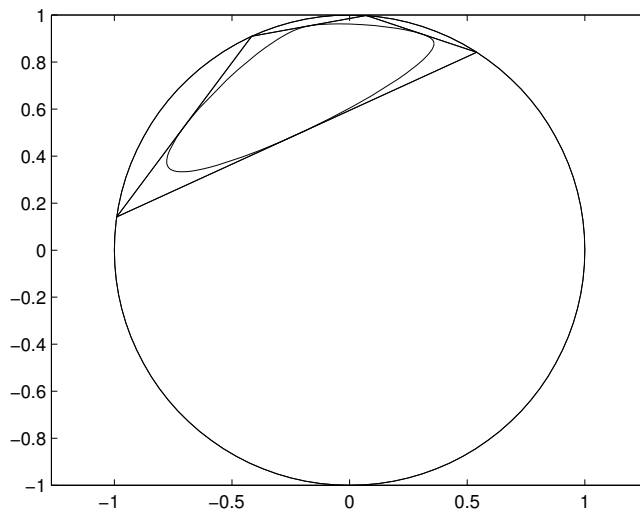


Figura 9.7: La curva $\partial\Omega(T)$ definida por el polígono y el vector w elegidos.

3.- Las matrices U_γ generan todos los polígonos de 4 lados interinscritos a $(\partial\mathbb{D}, \partial\Omega(T))$.

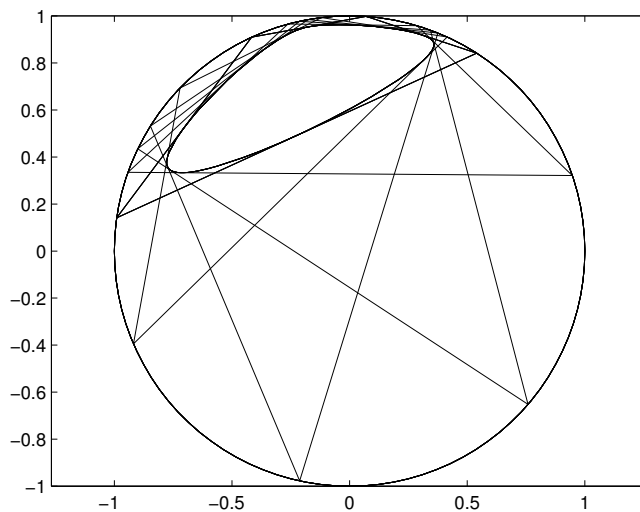


Figura 9.8: Otra 4-curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria.

9.2.3. Galería

En las siguientes imágenes mostramos ejemplos de k -curvas de Poncelet para $k = 4, 5, 6$ construidas con la idea recién expuesta. Se incluyen 2 ilustraciones por ejemplo, una con las curvas y el polígono interinscrito inicial y otra con varios de estos polígonos.

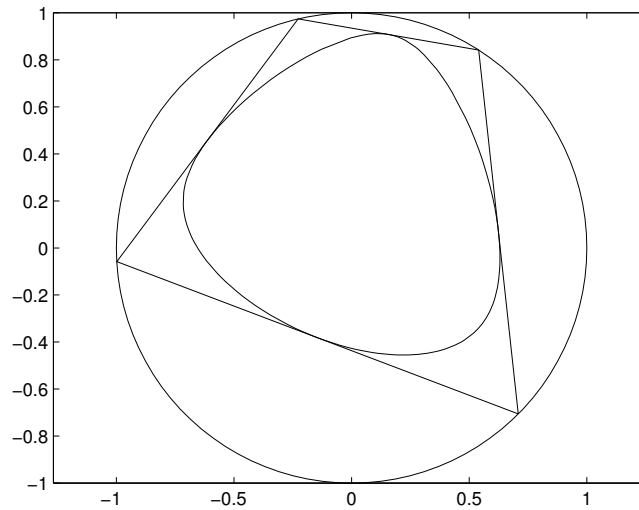


Figura 9.9: $k = 4$, ejemplo 1(1).

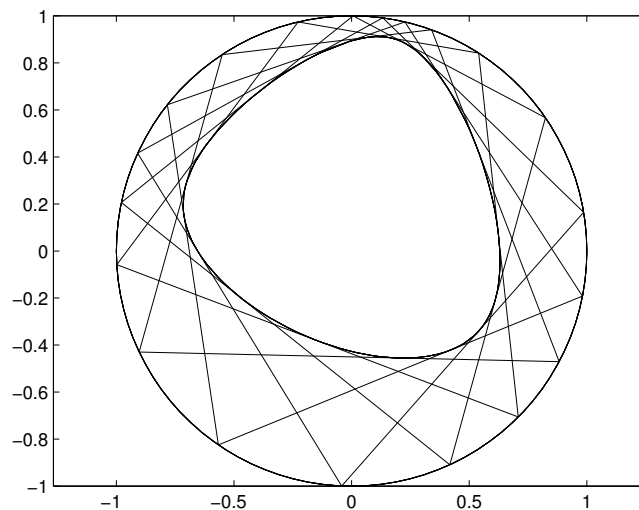


Figura 9.10: $k = 4$, ejemplo 1(2).

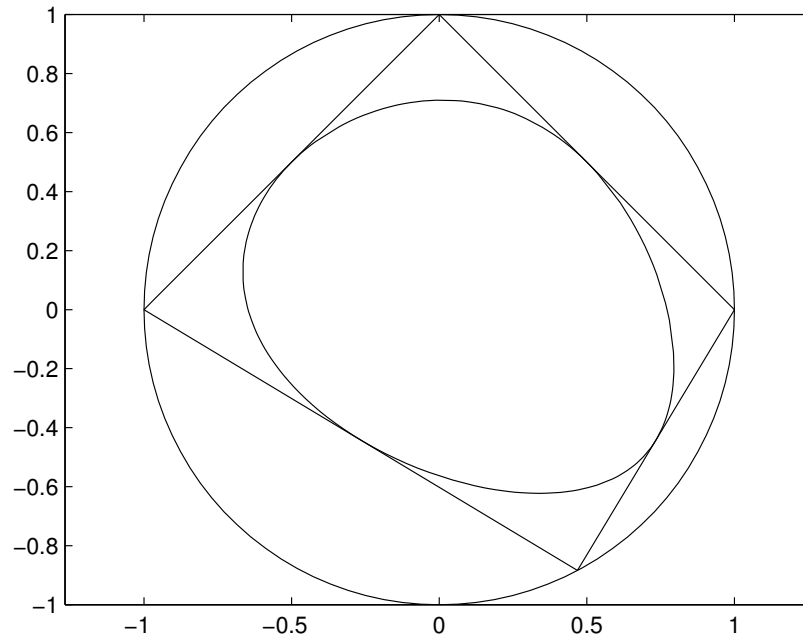


Figura 9.11: $k = 4$, ejemplo 2(1).

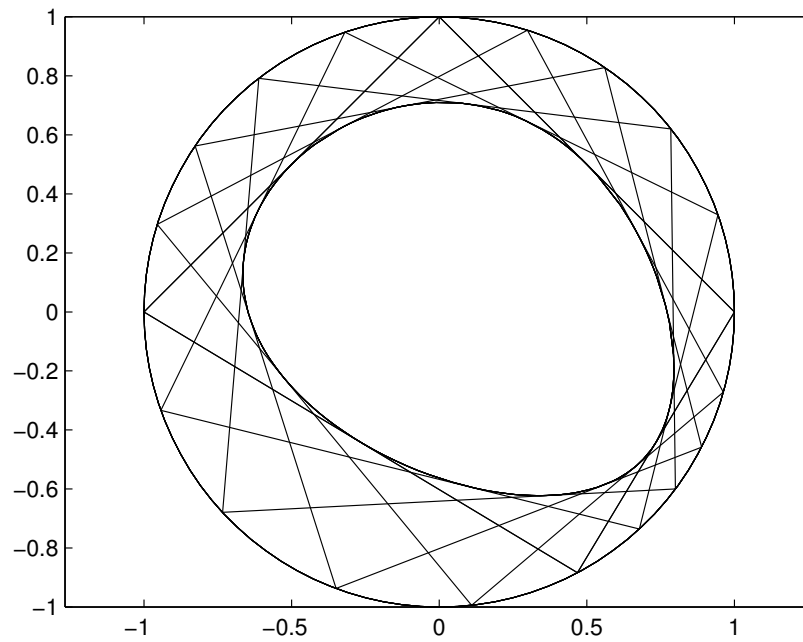
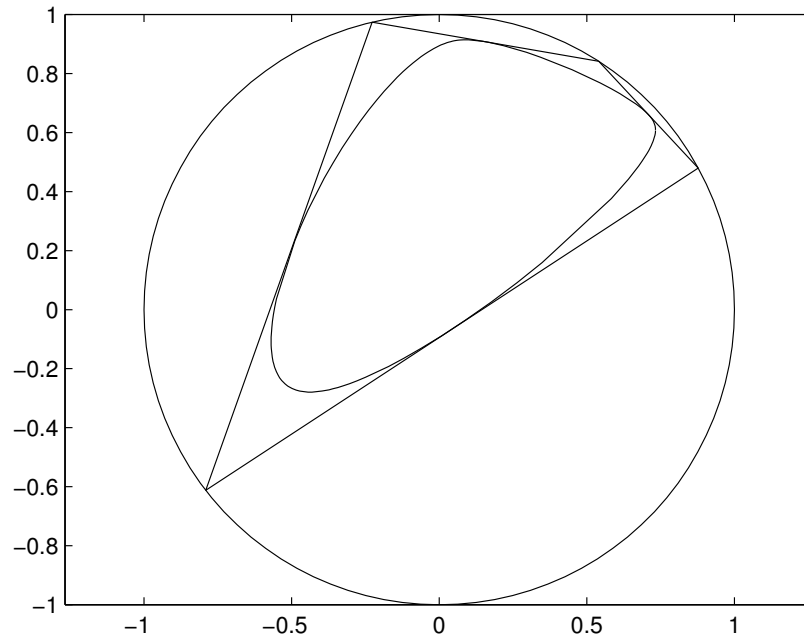
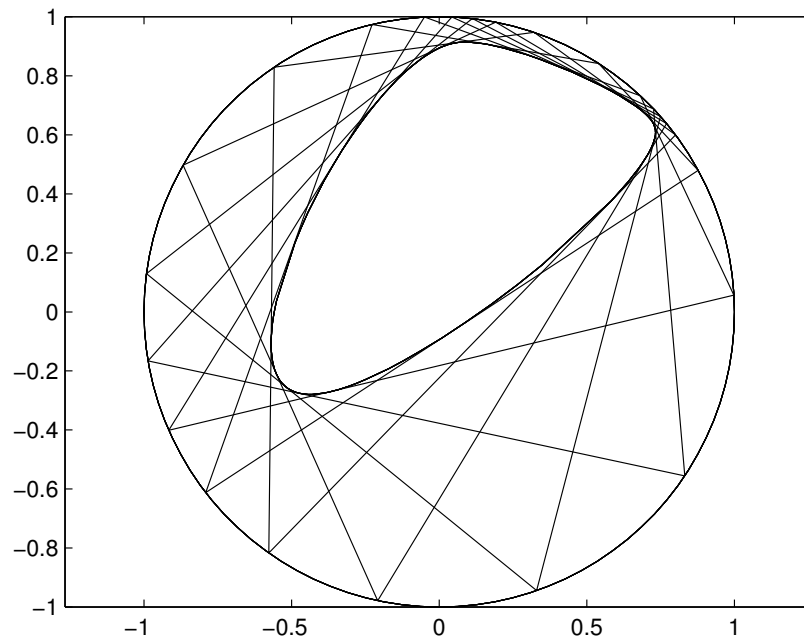


Figura 9.12: $k = 4$, ejemplo 2(2).

Figura 9.13: $k = 4$, ejemplo 3(1).Figura 9.14: $k = 4$, ejemplo 3(2).

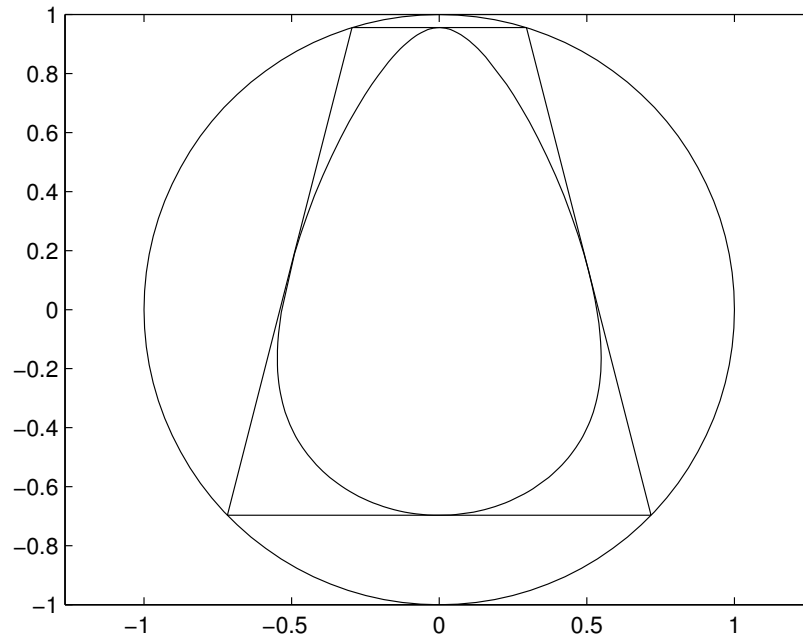


Figura 9.15: $k = 4$, ejemplo 4(1).

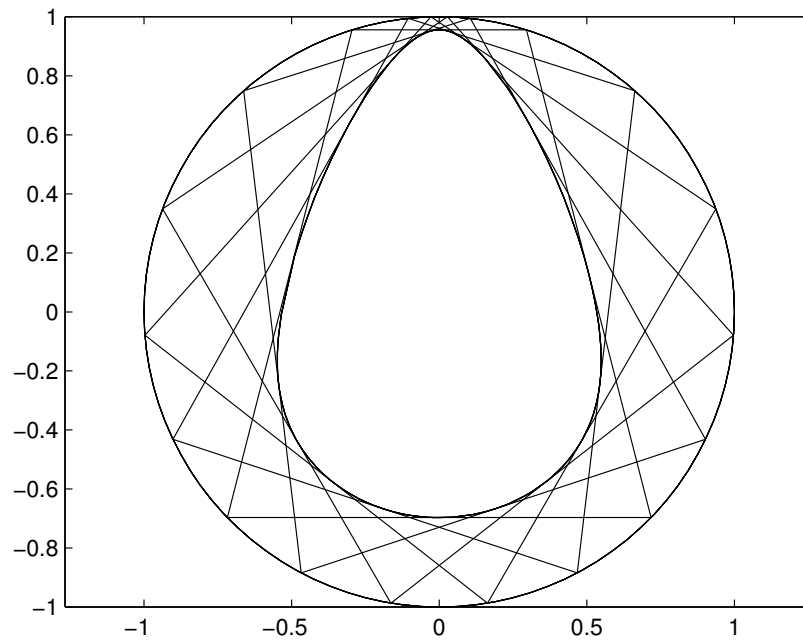
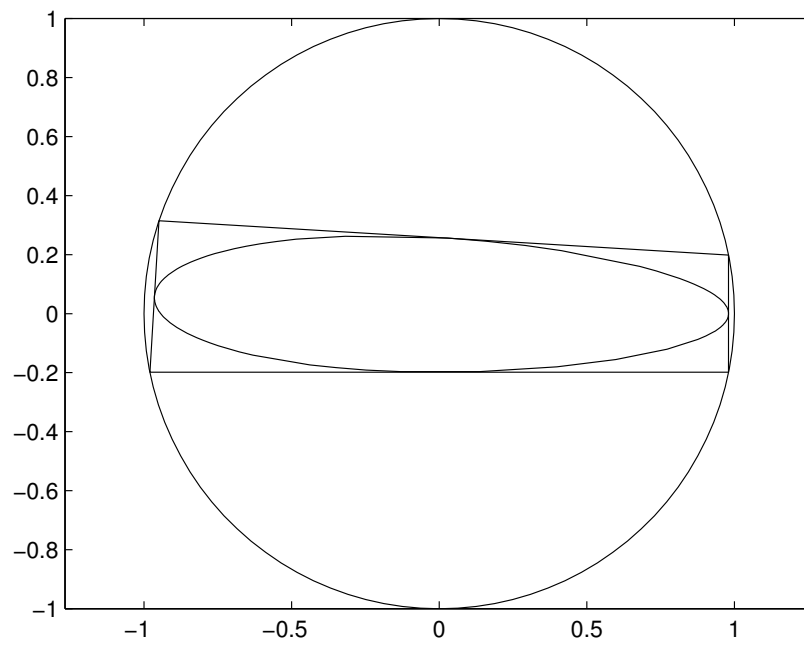
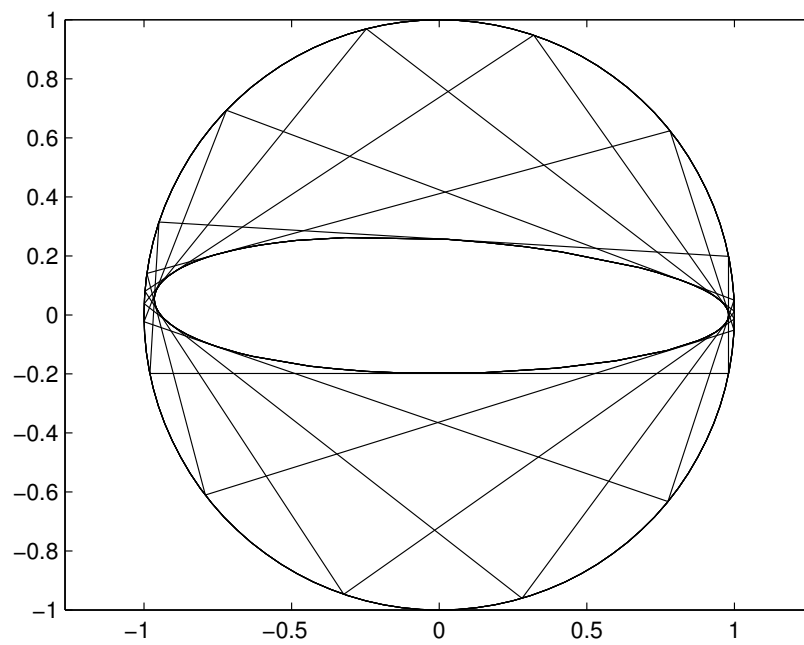


Figura 9.16: $k = 4$, ejemplo 4(2).

Figura 9.17: $k = 4$, ejemplo 5(1).Figura 9.18: $k = 4$, ejemplo 5(2).

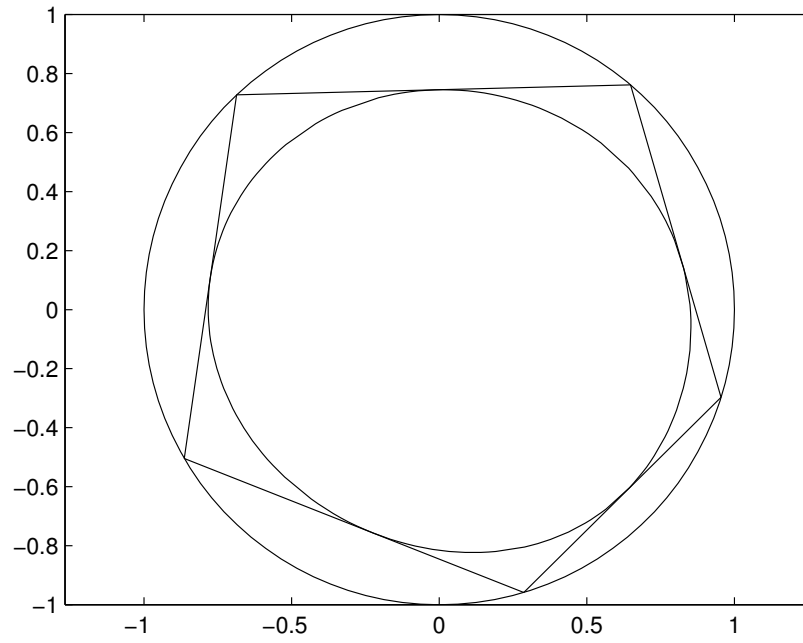


Figura 9.19: $k = 5$, ejemplo 1(1).

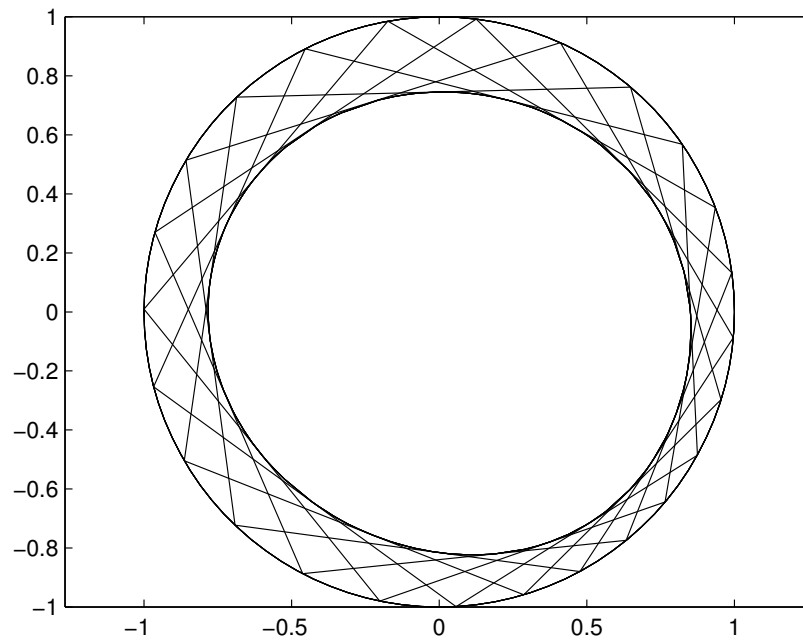
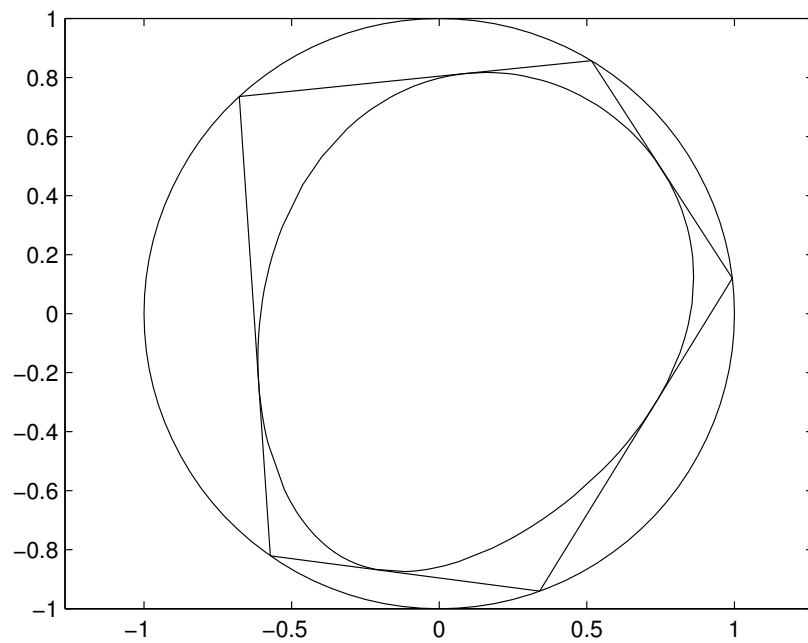
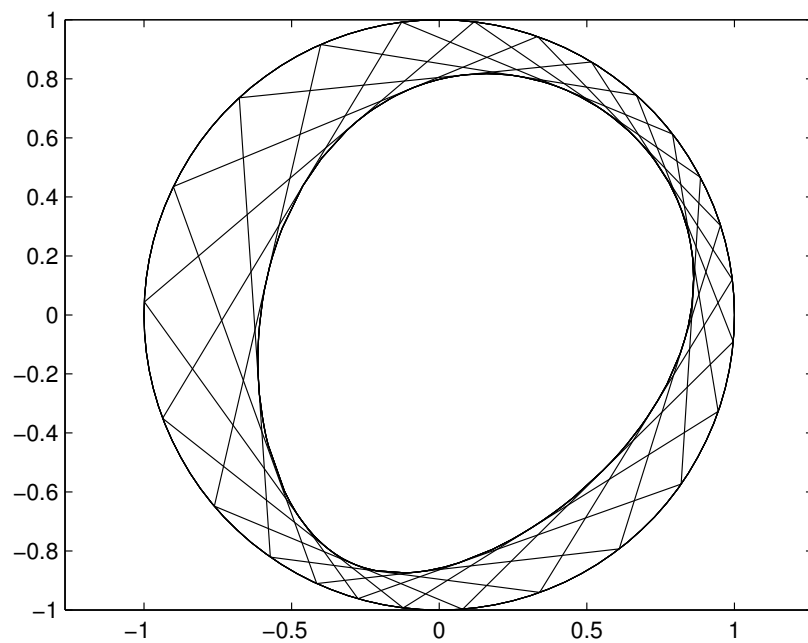


Figura 9.20: $k = 5$, ejemplo 1(2).

Figura 9.21: $k = 5$, ejemplo 2(1).Figura 9.22: $k = 5$, ejemplo 2(2).

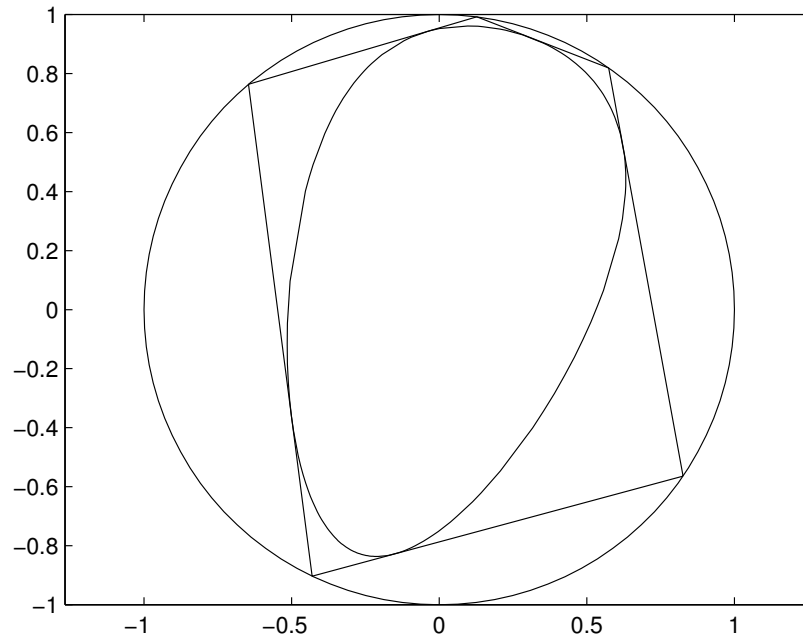


Figura 9.23: $k = 5$, ejemplo 3(1).

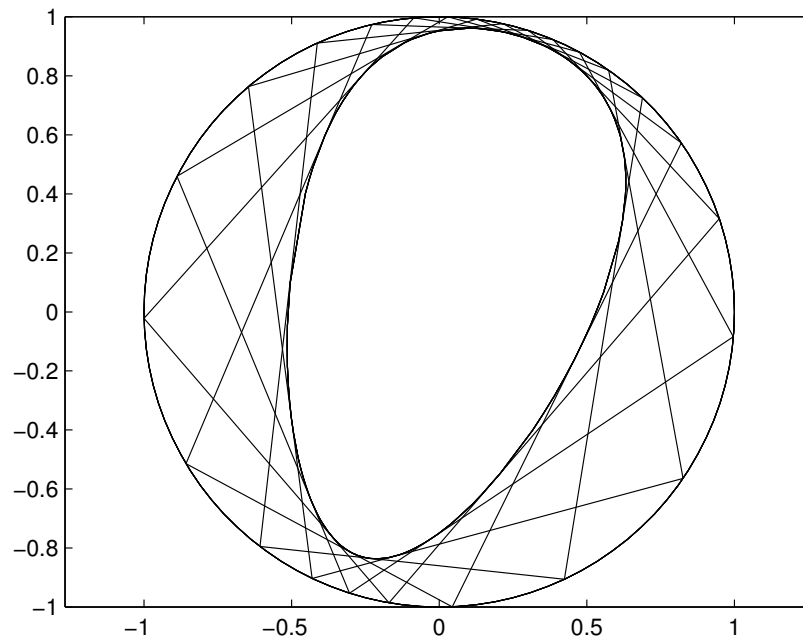
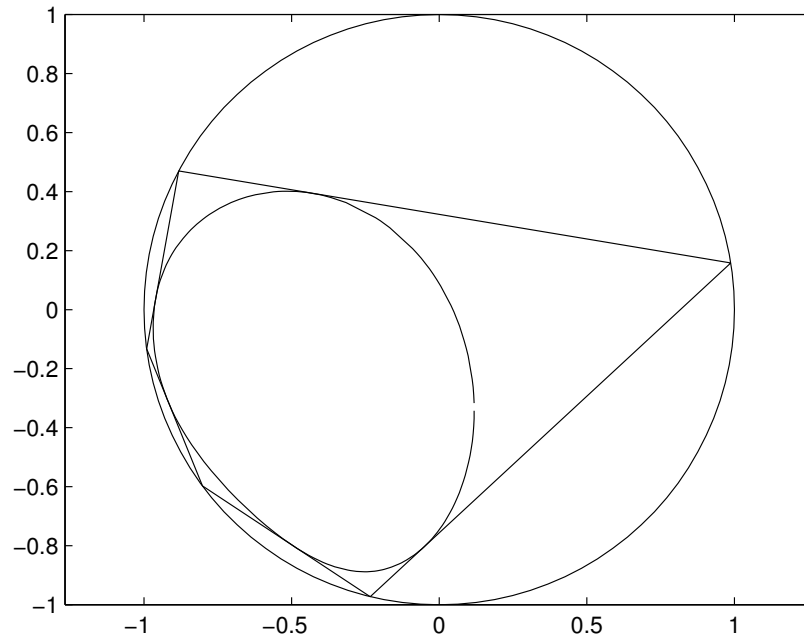
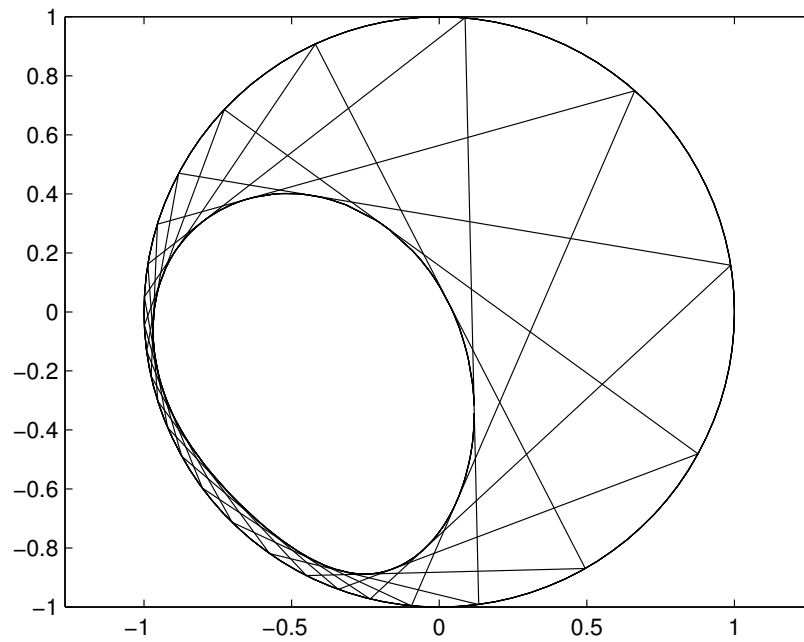


Figura 9.24: $k = 5$, ejemplo 3(2).

Figura 9.25: $k = 5$, ejemplo 4(1).Figura 9.26: $k = 5$, ejemplo 4(2).

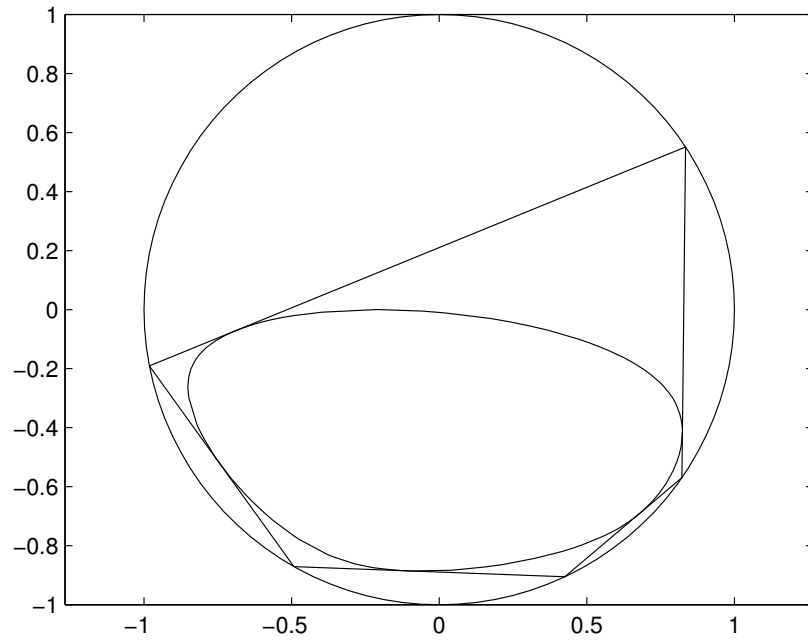


Figura 9.27: $k = 5$, ejemplo 5(1).

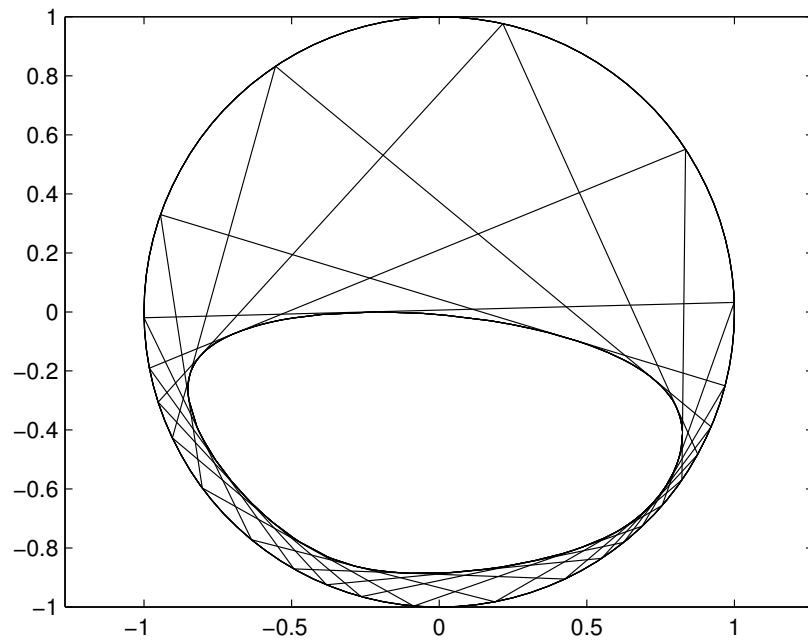
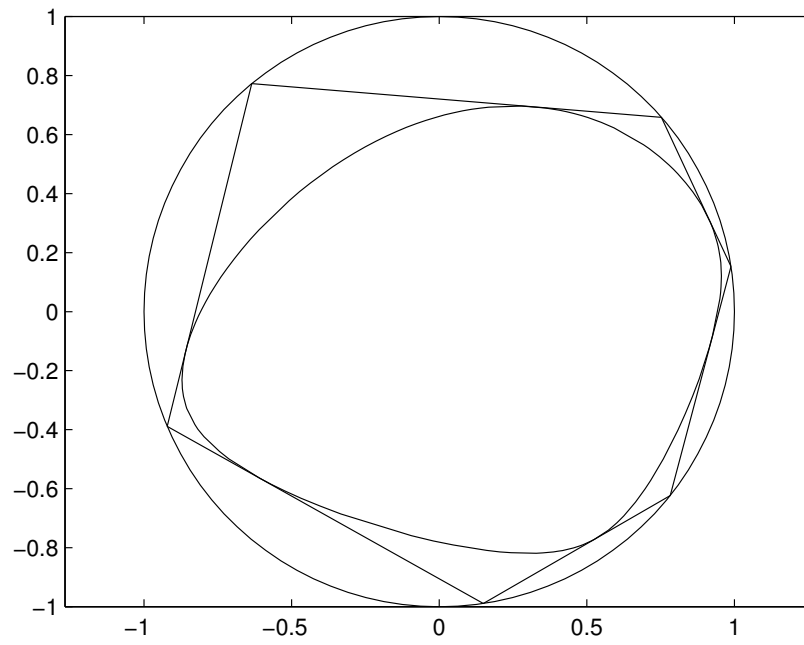
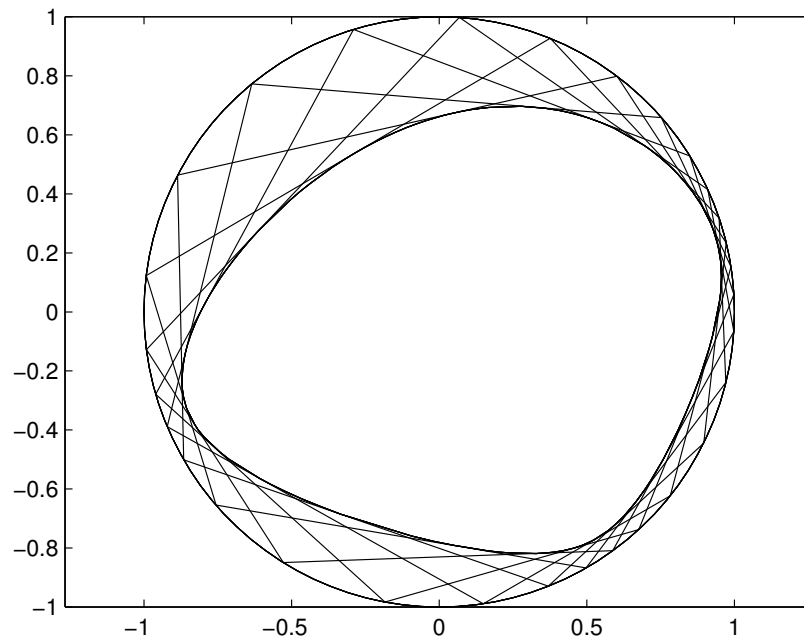


Figura 9.28: $k = 5$, ejemplo 5(2).

Figura 9.29: $k = 6$, ejemplo 1(1).Figura 9.30: $k = 6$, ejemplo 1(2).

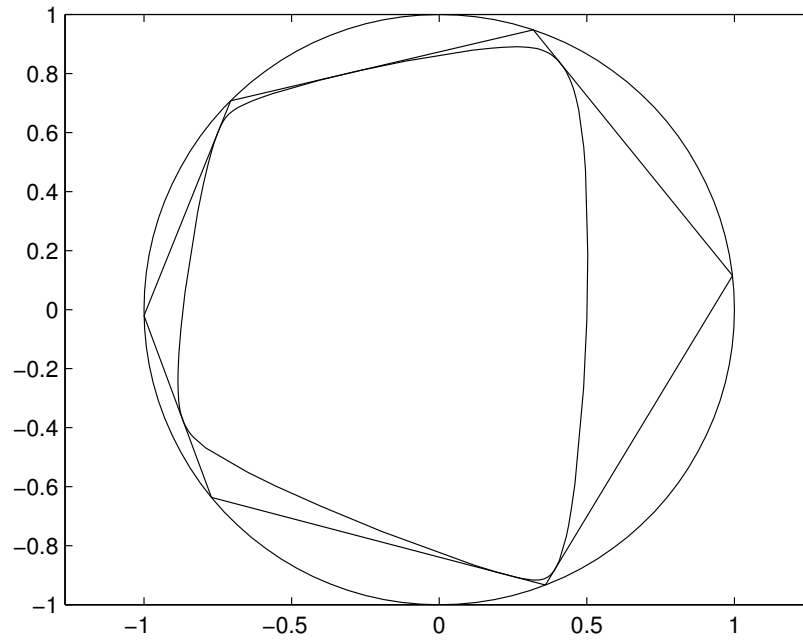


Figura 9.31: $k = 6$, ejemplo 2(1).

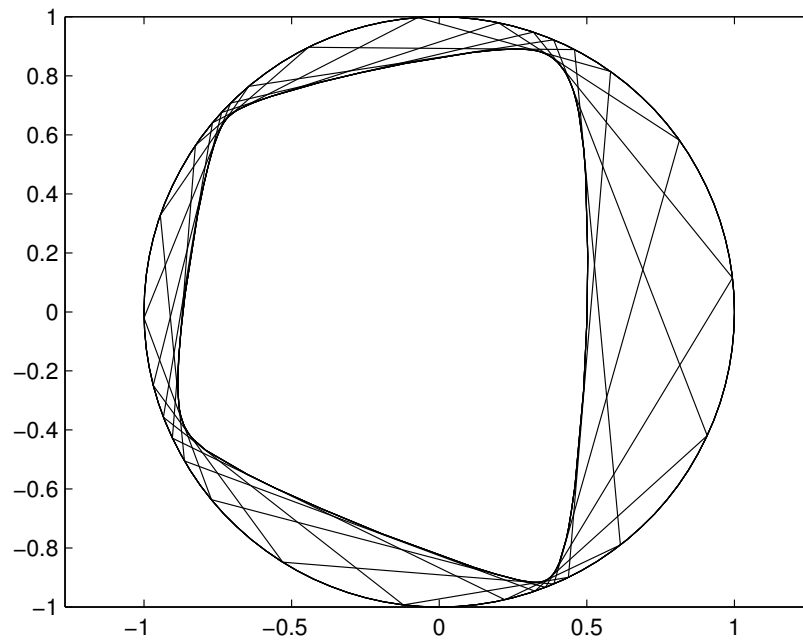
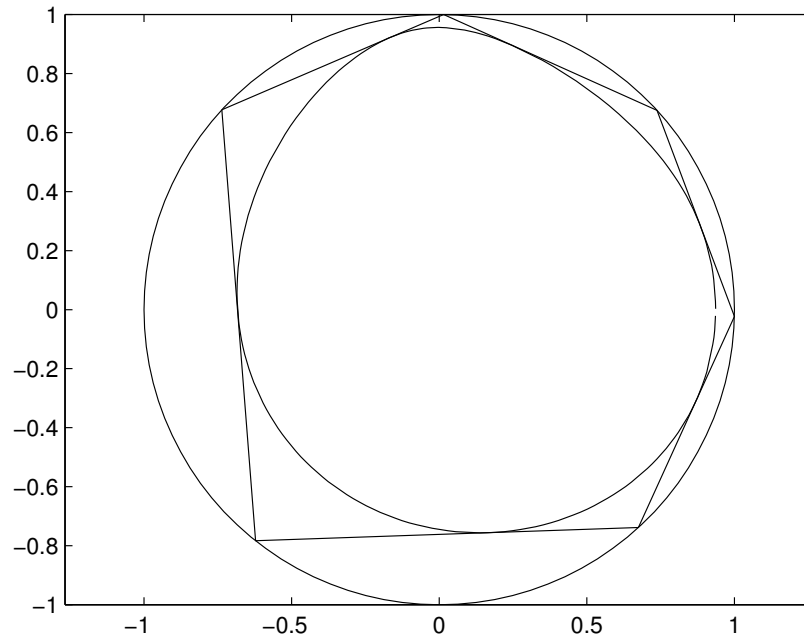
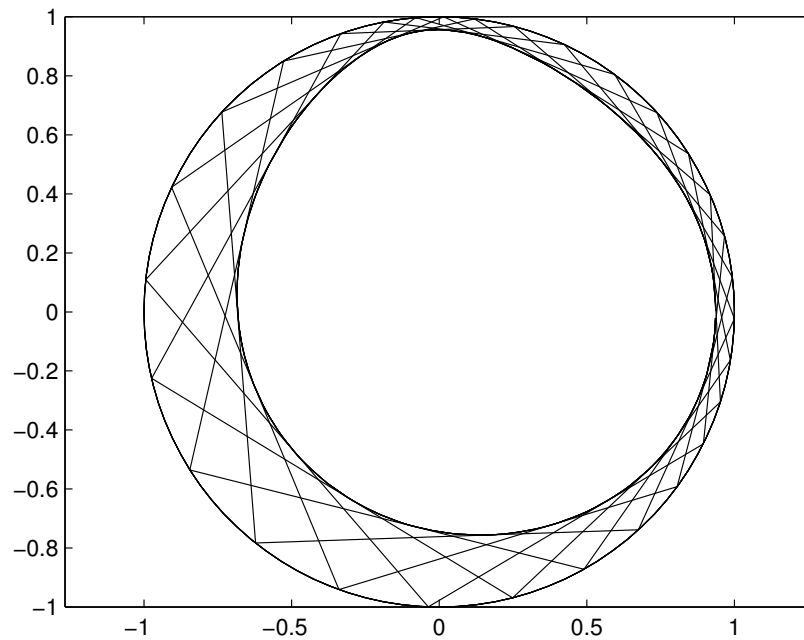


Figura 9.32: $k = 6$, ejemplo 2(2).

Figura 9.33: $k = 6$, ejemplo 3(1).Figura 9.34: $k = 6$, ejemplo 3(2).

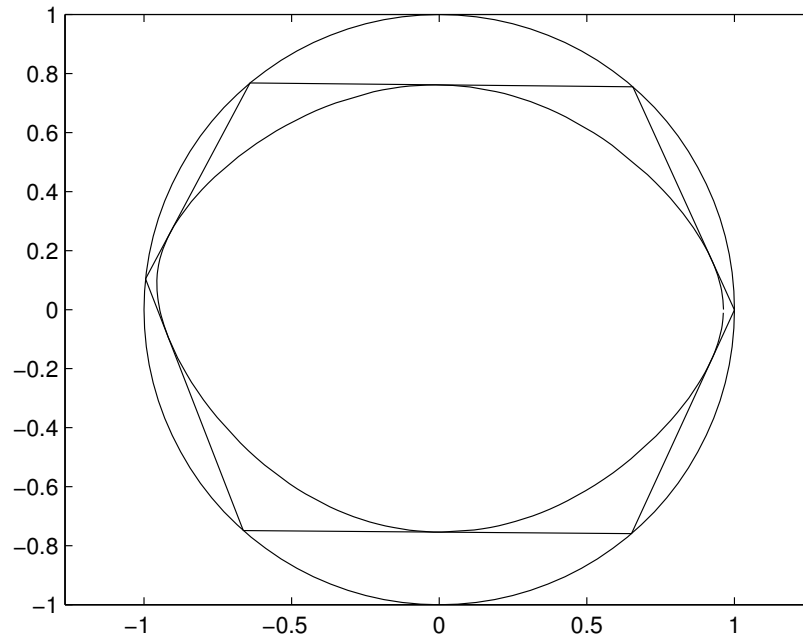


Figura 9.35: $k = 6$, ejemplo 4(1).

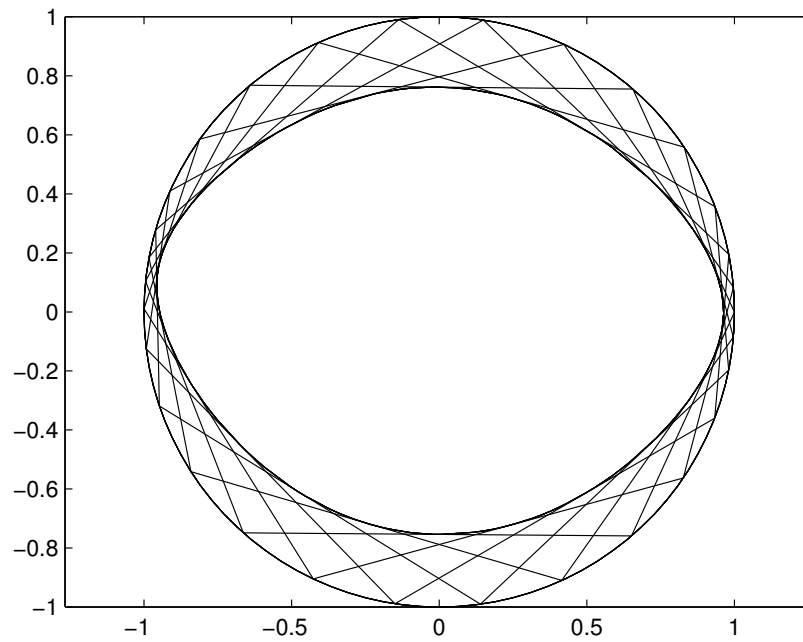
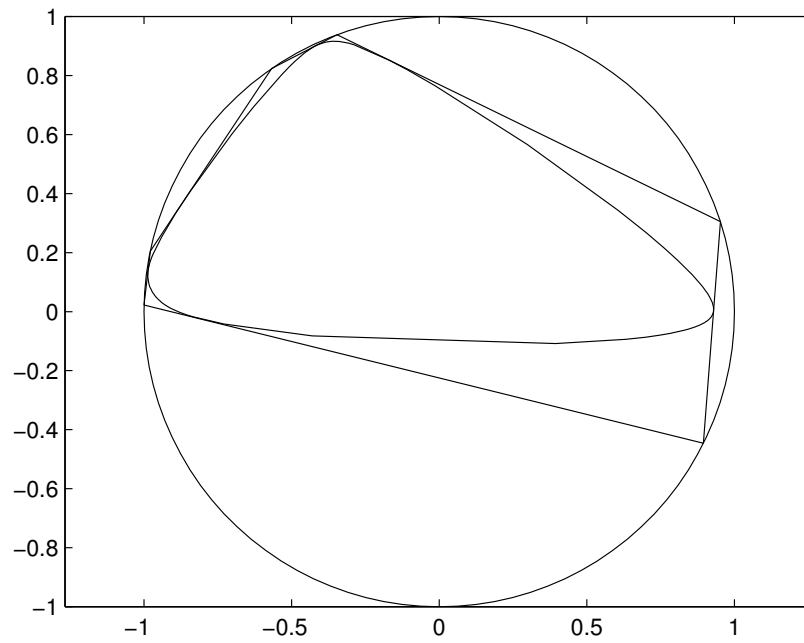
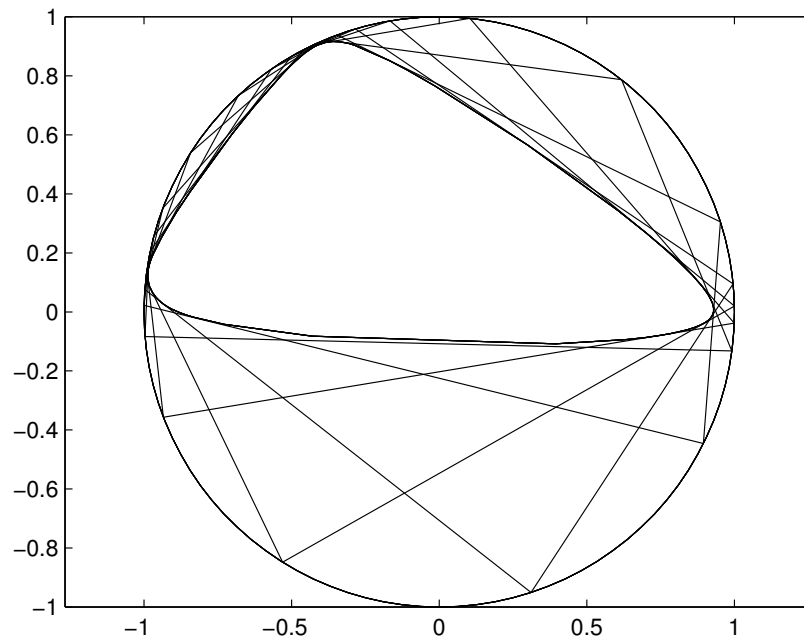


Figura 9.36: $k = 6$, ejemplo 4(2).

Figura 9.37: $k = 6$, ejemplo 5(1).Figura 9.38: $k = 6$, ejemplo 5(2).

9.3. Suavidad de las curvas

Un detalle de la construcción principal que no es claro es el hecho de que las curvas obtenidas no contienen puntos singulares. Nos gustaría poder hablar analíticamente de las tangentes a las curvas de Poncelet en cada uno de sus puntos, por lo que mostraremos en esta sección que hemos construido previamente sólo curvas suaves.

En lo subsecuente llamaremos a las curvas generadas en la construcción principal, **curvas unitariamente bordeables**, abreviadamente **curvas U.B.**

9.3.1. Puntos afilados

Hablando informalmente queremos ver que una curva U.B. no tiene picos, una manera de formalizar el concepto de pico es la siguiente:

Definición 9.2. Sea A una matriz cuadrada con entradas complejas, diremos que un punto $\alpha \in \partial\Omega(A)$ es **afilado**, si existen ángulos $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, $\theta_1 < \theta_2$, tales que

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta}\alpha) = \max_{\theta \in (\theta_1, \theta_2)} \{\operatorname{Re} \beta \mid \beta \in \Omega(e^{i\theta}A)\}.$$

Geoméricamente, un punto es afilado si podemos rotar el rango numérico correspondiente un cierto rango de ángulos y dicho punto siempre está más a la derecha que el resto. En el caso de matrices normales N por ejemplo, los puntos afilados son precisamente los vértices del polígono $\partial\Omega(N)$ que coinciden con sus eigenvalores. Esto motiva nuestro siguiente resultado, en cuya demostración utilizaremos la notación de la sección 8.6 para los eigenvalores máximo y mínimo de una matriz hermitiana y para la descomposición de una matriz cualquiera en sus partes hermitiana y casi-hermitiana.

Proposición 9.1. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Si $\alpha \in \Omega(A)$ es punto afilado, entonces $\alpha \in \sigma(A)$.

Demostración. Por definición, $\alpha \in \Omega(A)$ es un punto afilado si y sólo si existe $x \in \mathbb{C}^n$ unitario tal que

$$x^* h(e^{i\theta}A)x = \lambda_M(h(e^{i\theta}A)) \quad \text{para todo } \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Si denotamos por λ_M^θ a $\lambda_M(h(e^{i\theta}A))$, la ecuación anterior implica

$$h(e^{i\theta}A)x = \lambda_M^\theta x \quad \text{para todo } \theta \in (\theta_1, \theta_2). \quad (9.1)$$

Derivando (9.1) respecto a θ tenemos

$$h(e^{i\theta}A)x = \frac{d}{d\theta}\lambda_M^\theta x, \quad (9.2)$$

equivalentemente:

$$s(e^{i\theta}A)x = -i\frac{d}{d\theta}\lambda_M^\theta x. \quad (9.3)$$

Sumando (9.2) y (9.3), tenemos

$$e^{i\theta}Ax = (\lambda_M^\theta - i\frac{d}{d\theta}\lambda_M^\theta)x \iff Ax = e^{-i\theta}(\lambda_M^\theta - i\frac{d}{d\theta}\lambda_M^\theta)x.$$

Por lo tanto

$$\alpha = x^*Ax = e^{-i\theta}(\lambda_M^\theta - i\frac{d}{d\theta}\lambda_M^\theta),$$

es un eigenvalor de A . □

En el capítulo 8 vimos ejemplos que muestran que el recíproco no es válido en general, es decir, existen matrices con eigenvalores que no son puntos afilados de su rango numérico. Vimos también que para matrices normales sí resulta equivalente el ser eigenvector y punto afilado, esto motiva la definición dada siguiente subsección.

9.3.2. Eigenvalores normales

Como veremos, un valor propio es normal cuando la matriz correspondiente restringida al respectivo eigenespacio se comporta como una matriz normal.

Definición 9.3. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Un valor propio $\lambda \in \sigma(A)$ es normal si

- i) Si x es un eigenvector de A correspondiente a λ y y cualquier otro vector propio correspondiente a un eigenvalor distinto, entonces $\langle x, y \rangle = 0$.
- ii) La dimensión del eigenespacio de A correspondiente a λ es igual a la multiplicidad de λ en el polinomio característico de A .

De manera equivalente podemos decir que λ es un eigenvalor normal de la matriz A , si ésta es unitariamente equivalente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} D & O \\ O & S \end{pmatrix},$$

donde $D = \text{Diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{m \text{ veces}})$, con m la multiplicidad de λ , $S \in M_{(n-m) \times (n-m)}(\mathbb{C})$ una matriz triangular superior y las O , matrices con todas las entradas iguales a cero.

Lo anterior basta para identificar a los eigenvalores de la frontera de un rango numérico, como se afirma a continuación.

Teorema 9.2. *Si un eigenvector $\lambda \in \sigma(A)$ está en la frontera de $\partial\Omega(A)$, entonces es normal.*

Demostración. Daremos por hecho que A es una matriz de $n \times n$ entradas con $n \geq 2$. Supongamos que λ no fuera normal, entonces módulo equivalencia unitaria, A tiene una submatriz en la diagonal principal de alguna de las formas

$$A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \beta, \gamma \neq 0.$$

Claramente $\Omega(A_1) \subset \Omega(A)$ ó $\Omega(A_2) \subset \Omega(A)$ según sea el caso. Pero en ambas situaciones λ pertenece al interior de los rangos numéricos de las submatrices correspondientes, pues vimos que éstos son ya sea un círculo con centro en λ , o una elipse no-degenerada con focos en λ y λ_1 . Esto contradice la hipótesis de que $\lambda \in \partial\Omega(A)$.

□

Así las cosas, si una matriz U.B. tuviera puntos afilados, éstos deberían ser también eigenvalores normales, por lo que una manera de resolver el problema de la sección (garantizar la suavidad de las curvas de Poncelet que construimos) es probar que estas matrices no tienen valores propios normales. Para establecer esto último, requerimos un lema sencillo.

Lema 9.1. *Si λ es un eigenvalor normal de una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ y x es un eigenvector correspondiente a λ , entonces*

$$A^*x = \bar{\lambda}x.$$

Demostración. Por hipótesis, $Ax = \lambda x$ y $A^*Ax = AA^*x$, tenemos entonces

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle = \|A^*x\|^2.$$

Ahora, para cualquier $c \in \mathbb{C}$ tenemos

$$(A - cId)^*(A - cId)x = (A - cId)^*(A - cId)x;$$

de aquí que para el caso particular $c = \lambda$, $B := A - \lambda Id$ tengamos $Bx = 0$ y $\|Bx\| = \|B^*x\| = 0$, es decir

$$\|A^*x - \bar{\lambda}x\| = 0.$$

Por lo tanto $A^*x = \bar{\lambda}x$. □

Teorema 9.3. *Las matrices unitariamente bordeables de la construcción principal, no tienen eigenvalores normales.*

Demostración. Utilizaremos la notación de la generalización de dicha construcción. Supongamos que existe λ un eigenvalor normal de la matriz unitariamente bordeable T , entonces existe un $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| = 1$ tal que

$$Tx = \lambda x \quad \text{y} \quad T^*x = \bar{\lambda}x,$$

es decir

$$\Pi Ux = \lambda x \quad \text{y} \quad \Pi U^*x = \bar{\lambda}x.$$

De estas ecuaciones tenemos

$$Ux - ww^*Ux = \lambda x \quad \text{y} \quad U^*x - ww^*U^*x = \bar{\lambda}x.$$

Por lo cual

$$Ux = \lambda x + \langle Ux, w \rangle w \tag{9.4}$$

y

$$U^*x = \bar{\lambda}x + \langle U^*x, w \rangle w. \tag{9.5}$$

Como $x \in \mathcal{A}$, x no es eigenvector de U ni de U^* , de manera que los productos interiores $\langle Ux, w \rangle$ y $\langle U^*x, w \rangle$ son no-nulos. Podemos obtener entonces a partir de (9.5):

$$UU^*x = \bar{\lambda}Ux + \langle U^*x, w \rangle Uw \iff Uw = \frac{1}{\langle U^*x, w \rangle} (x - \bar{\lambda}Ux).$$

Sustituyendo Ux en esta última expresión por el valor dado en (9.4):

$$Uw = \frac{1}{\langle U^*x, w \rangle} (x - |\lambda|^2 x - \bar{\lambda} \langle Ux, w \rangle w).$$

De aquí se sigue que $Uw \in \mathcal{L}_1 := L_{\mathbb{C}}(\{x, w\})$, espacio que además es U -invariante. De manera análoga puede probarse que \mathcal{L}_1 es también U^* -invariante.

Sea $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1^\perp$. Para cualesquiera $y \in \mathcal{L}_2$ y $a, b \in \mathbb{C}$, existen $a', b' \in \mathbb{C}$ tales que

$$\langle Uy, ax + bw \rangle = \langle y, U^*(ax + bw) \rangle = \langle y, a'x + b'w \rangle = 0,$$

lo cual prueba que \mathcal{L}_2 es también un espacio U -invariante y U^* -invariante.

De la descomposición $\mathbb{C}^{n+1} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ y del hecho de que en nuestra construcción suponemos que $n \geq 2$, podemos garantizar la existencia de vectores no-nulos en el subespacio \mathcal{L}_2 , pues $\dim(\mathcal{L}_1) = 2$, por lo que podemos obtener eigenvectores de U tanto en \mathcal{L}_1 como en \mathcal{L}_2 (de hecho el polinomio característico de U es precisamente $p_1 \cdot p_2$, con p_1 y p_2 los polinomios característicos de $U|_{\mathcal{L}_1}$ y $U|_{\mathcal{L}_2}$ respectivamente). Pero al ser $w \in \mathcal{L}_1$, tenemos $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{A}$, lo cual contradice que \mathcal{A} no contiene eigenvectores de la matriz U . \square

Hemos cumplido así el objetivo de esta sección, que establecemos en este corolario.

Corolario 9.3.1. *Todas las curvas de Poncelet construidas en la sección 9.2 son suaves.*

9.4. Los polígonos interinscritos

En esta sección discutiremos acerca de por qué los rangos numéricos de las matrices unitarias U_γ de la construcción principal, son en efecto, todos los posibles $(n+1)$ -ángulos interinscritos a $(\partial\mathbb{D}, \partial\Omega(T))$, probando además que cualquier punto de $\partial\mathbb{D}$ es vértice de uno de estos polígonos, lo cual cubre finalmente los detalles necesarios para concluir nuestra afirmación sobre el hecho de que $\partial\Omega(T)$ es una $(n+1)$ -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria.

Más concretamente, probaremos que el valor de γ en U_γ puede siempre determinarse a partir de una ecuación que lo relaciona continuamente con los vértices del polígono inicial $\partial\Omega(U)$ de forma tal que un eigenvalor $e^{i\phi}$ de U_γ se puede colocar en cualquier punto de la circunferencia unitaria. El resultado preciso está en el siguiente teorema.

Teorema 9.4. *Sean $e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$ los eigenvalores de la matriz unitaria $U = \text{Diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_{n+1}})$. Si se toma el vector*

$$w = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} \vec{e}_j,$$

entonces un eigenvalor $e^{i\phi}$ de la matriz (también unitaria)

$$U_\gamma = U + (e^{i\gamma} - 1)Uww^*$$

puede determinarse de la siguiente ecuación respecto a ϕ :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \cot\left(\frac{\phi - \theta_j}{2}\right) = \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Demostración. Sea $x = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \vec{e}_j$ tal que $U_\gamma x = e^{i\phi} x$. Sustituyendo $U_\gamma = U + (e^{i\gamma} - 1)Uww^*$ y reagrupando términos resulta:

$$(e^{i\gamma} - 1)w^* x U w = e^{i\phi} x - U x.$$

Sustituyendo ahora $Uw = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} e^{i\theta_j} \vec{e}_j$ y $Ux = \sum_{j=1}^{n+1} x_j e^{i\theta_j} \vec{e}_j$ tenemos:

$$(e^{i\gamma} - 1) \frac{w^* x}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} e^{i\theta_j} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n+1} (e^{i\phi} - e^{i\theta_j}) x_j \vec{e}_j.$$

Entonces para $i \leq j \leq n+1$:

$$\frac{w^* x}{\sqrt{n+1}} (e^{i\gamma} - 1) = (e^{i(\phi - \theta_j)} - 1) x_j,$$

de donde

$$\frac{w^* x}{n+1} \left(\frac{e^{i\gamma} - 1}{e^{i(\phi - \theta_j)} - 1} \right) = \frac{x_j}{\sqrt{n+1}};$$

sumando sobre j :

$$\frac{w^* x}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{e^{i\gamma} - 1}{e^{i(\phi - \theta_j)} - 1} \right) = w^* x.$$

Claramente $w^* x \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{1}{e^{i(\phi - \theta_j)} - 1} \right) = \frac{1}{e^{i\gamma} - 1}. \quad (9.6)$$

Ahora, $\frac{1}{e^{ia} - 1}$ con $a \in \mathbb{R}$ es

$$\frac{1}{\cos a - 1 + i \operatorname{sen} a} = \frac{\cos a - 1 - i \operatorname{sen} a}{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a - 2 \cos a + 1} =$$

$$\frac{\cos a - 1 - i \operatorname{sen} a}{2(1 - \cos a)} = -\frac{1}{2} \left(1 + i \frac{\operatorname{sen} a}{1 - \cos a} \right).$$

Por otro lado

$$\frac{\operatorname{sen} a}{1 - \cos a} = \frac{1 + \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1+\cos a}{2}\right)\left(\frac{1+\cos a}{2}\right)}}{\frac{\operatorname{sen} a}{2}} =$$

$$\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{\operatorname{sen} a}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)} = \cot\left(\frac{a}{2}\right)$$

Por lo tanto, igualando las partes imaginarias en la ecuación (9.6), se sigue que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \cot\left(\frac{\phi - \theta_j}{2}\right) = \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

□

Este teorema concluye los detalles pendientes del teorema 9.1.

9.5. Epílogo

Tomemos una matriz unitaria $U \in M_{(n+1) \times (n+1)}$ con eigenvalores distintos y construyamos $\partial\Omega(T)$ siguiendo el teorema 9.2, una $(n+1)$ -curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria. Imitando lo que hicimos en el capítulo 2 podemos definir una transformación

$$\mathcal{J} : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{D}$$

con la condición de que la cuerda que una $e^{i\psi}$ con $\mathcal{J}(e^{i\psi})$ sea tangente a $\partial\Omega(T)$, dejando al cuerpo convexo $\Omega(T)$ a su izquierda. Es fácil deducir a partir del teorema 9.4 que la función $\rho : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{D}$ dada por

$$\rho(e^{i\psi}) = \frac{1}{(n+1)|\langle w, \vec{e}_\psi \rangle|},$$

donde \vec{e}_ψ es un eigenvector de U_γ unitario correspondiente al eigenvalor $e^{i\psi}$ (recuérdese que cualquier punto $e^{i\psi} \in \partial\mathbb{D}$ puede verse como un eigenvalor de alguna matriz unitaria de la forma $U_\gamma = U + (e^{i\gamma} - 1)Uww^*$), define una medida buena

$$\mu : \mathcal{B}(\partial\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

a saber:

$$\mu(A) = \int_A \rho(e^{i\psi}) d\psi,$$

que es \mathcal{J} -invariante, y para cualquier ψ :

$$\int_{\psi}^{\phi} \rho(e^{iz}) dz = \frac{2\pi}{n+1},$$

en donde $\mathcal{J}(e^{i\psi}) = e^{i\phi}$.

De esta forma podemos repetir los argumentos de la sección 2.5 para obtener una prueba análoga de esta nueva versión del porismo de Poncelet para fronteras de rangos numéricos, concluyendo que las transformaciones \mathcal{J} que recién definimos son, como era de esperarse, topológicamente conjugadas a una rotación por un ángulo $\frac{2\pi}{n+1}$ en la circunferencia unitaria.

Creo que este hecho integra en cierto modo este trabajo en todas sus partes, haciendo ver una vez más la simpleza de las ideas principales detrás de él y propicia un momento ideal para su conclusión. Considero que en estas páginas el estudiante de licenciatura en matemáticas tiene una introducción razonable al tema particular del porismo y las curvas de Poncelet y por qué no, a muchas áreas del conocimiento matemático interesantes por sí mismas que se involucraron en el estudio específico realizado.

9.6. Invitación

Me gusta pensar en todo trabajo de esta naturaleza como una invitación también, a continuar el aprendizaje sobre su contenido, por lo que mencionaré finalmente resultados diversos que el lector interesado puede ahora deducir o investigar fácilmente por cuenta propia, partiendo de lo visto a lo largo de estas páginas.

1. Existen teoremas concebidos como generalizaciones del porismo de Poncelet en el plano hiperbólico y en espacios tridimensionales y de dimensión superior.
2. Si bien es intuitivamente obvia la existencia de curvas de Poncelet no cónicas luego de lo visto en este capítulo, es fácil mostrar que dado cualquier polígono de n lados inscrito en la circunferencia unitaria, pueden elegirse arbitrariamente puntos en el interior de $n-1$ de los mismos, determinando así unívocamente un n -ésimo, siendo todos susceptibles a ser puntos de tangencia de una n -curva de Poncelet generada a partir de la construcción

aquí expuesta utilizando matrices U.B. Obsérvese entonces que en virtud del hecho de que una cónica en \mathbb{R}^2 queda determinada conociéndose 5 de sus puntos, lo anterior hace que sea inmediato deducir la naturaleza no-cónica de una infinidad de curvas de Poncelet.

3. La construcción general que expusimos puede extenderse para polígonos no-convexos; éstos son manejados formándose con las diagonales de los polígonos convexos generados de los rangos numéricos de las matrices unitarias y las curvas de Poncelet resultan de hallar las múltiples raíces de una ecuación que aparece luego de considerar la parametrización de las curvas frontera de las matrices U.B.
4. Es posible dar una demostración del porismo original de Poncelet (versión real) utilizando exclusivamente las técnicas de álgebra lineal y propiedades del rango numérico.
5. A sabiendas de los resultados de los puntos 2 y 3, Hwa-Long Gau, uno de los primeros matemáticos que estudió la conexión entre el porismo de Poncelet y el rango numérico, conjeturó que toda curva de Poncelet debía ser la frontera del campo de valores de una matriz unitariamente bordeable, Mirman y Shukla sin embargo, observaron que existen curvas de Poncelet no-algebraicas y deducen en el artículo [16] de la bibliografía, condiciones necesarias y suficientes para que una curva de Poncelet respecto a la circunferencia unitaria, sea la frontera de un rango numérico.

Apéndices

Apéndice A

Automorfismos del toro

En el capítulo 5 establecimos el siguiente teorema, (proposición 5.2).

Teorema A.1. Sean $T_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$, $i = 1, 2$ un par de toros y π_i las correspondientes proyecciones naturales de \mathbb{C} en T_i respectivamente. Suóngase que existe un isomorfismo $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$, tal que $\varphi(p_1) = p_2$. Sean $z_i \in \mathbb{C}$ puntos sobre p_i , $i = 1, 2$. Entonces existe un único automorfismo ψ de \mathbb{C} tal que $\psi(z_1) = \psi(z_2)$ y

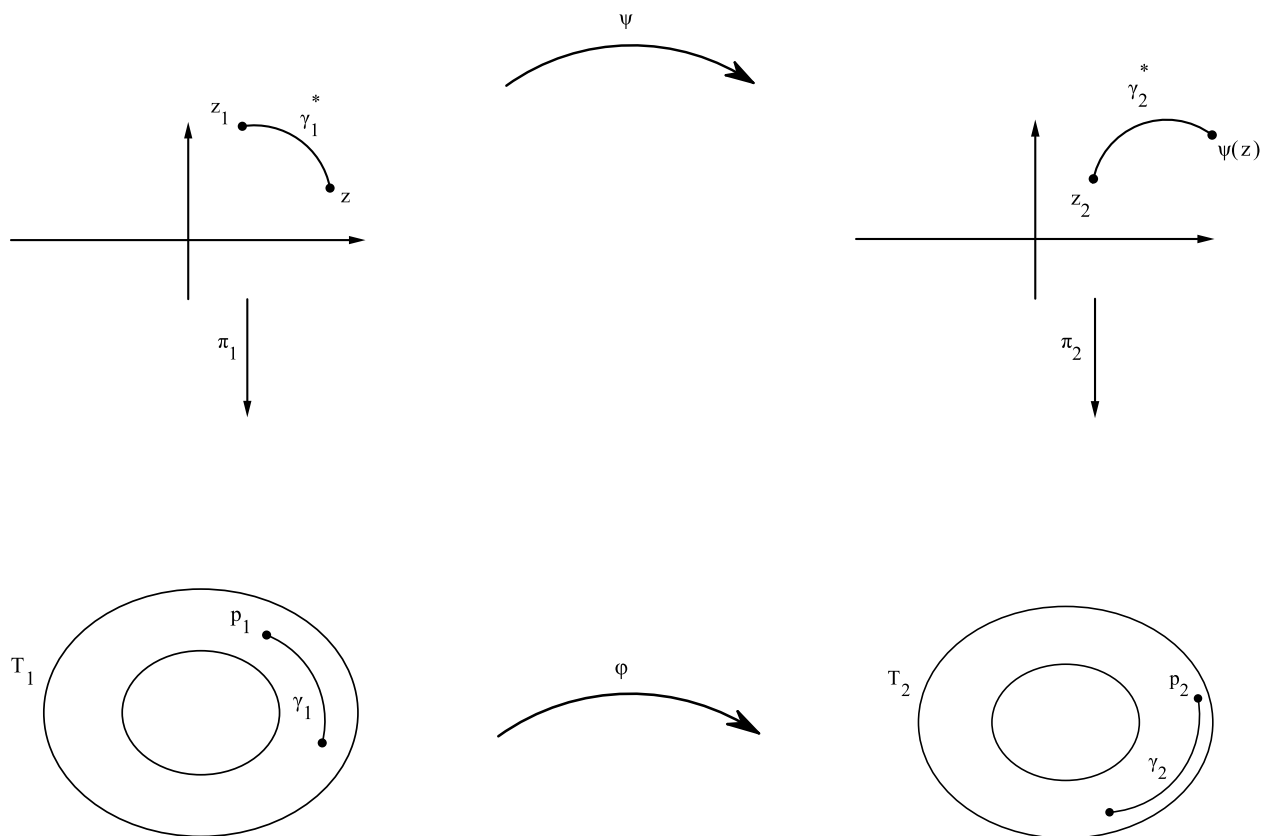
$$\varphi \circ \pi_1(z) = \pi_2 \circ \psi(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.1})$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ T_1 & \xrightarrow{\varphi} & T_2, \end{array}$$

es conmutativo.

Una manera de construir el automorfismo que proponemos es la siguiente. Para $z \in \mathbb{C}$, tomemos cualquier curva $\gamma_1^* \subset \mathbb{C}$ que una z_1 con z , en ese sentido. Sean $\gamma_1 = \pi_1(\gamma_1^*)$, $\gamma_2 = \varphi(\gamma_1)$ y γ_2^* el levantamiento de γ_2 que empieza en z_2 . Definimos a $\psi(z)$ como el punto terminal de γ_2^* , (ver figura siguiente).



Para probar que ψ está bien definido y es un automorfismo de \mathbb{C} , introduciremos el concepto de curvas en superficies de Riemann y probaremos ciertos lemas relacionados con levantamientos de curvas en variedades y homotopía entre ellas.

A.1. Curvas en superficies de Riemann

La manera de definir una curva en una superficie es la misma en que se definen estos objetos en los espacios euclidianos en los cursos de cálculo:

Definición A.1. Sean M una superficie riemanniana y $f : [0, 1] \rightarrow M$ una función continua. La imagen de f es llamada una curva en M . Los puntos $f(0)$ y $f(1)$ son llamados inicial y terminal respectivamente.

A.1.1. Homotopía

Definición A.2. Dos curvas γ_0 y γ_1 en una superficie M que unen ambos los puntos $p, q \in M$ son homotópicas si existe una función continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ con las siguientes propiedades:

- i) $F(t, 0) = \gamma_0$ y $F(t, 1) = \gamma_1$ para $t \in [0, 1]$.
- ii) $F(0, s) = p$ y $F(1, s) = q$ para $s \in [0, 1]$.

Llamaremos a una de tales funciones F , una homotopía.

Al variar $t \in [0, 1]$ tomando un $s \in (0, 1)$ fijo, obtenemos una nueva curva γ_s que une también p con q :

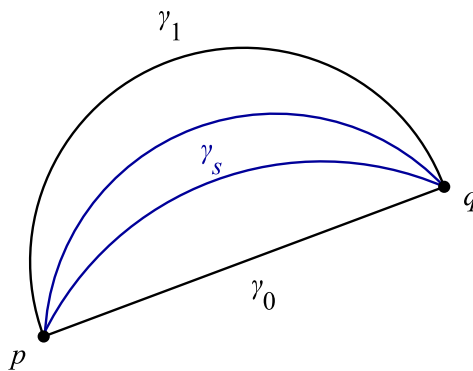


Figura A.1: Dos curvas homotópicas en el plano.

Denotaremos esto poniendo $\gamma_0 \sim \gamma_1$, es claro que la homotopía es una relación de equivalencia.

Observación A.1. Dadas $\gamma_0, \gamma_1 \subset M_1$ dos curvas homotópicas y $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ una función continua entre superficies, $\gamma'_0 = \varphi(\gamma_0)$ y $\gamma'_1 = \varphi(\gamma_1)$ son dos curvas homotópicas en M_2 . (En efecto, si $F(t, s)$ es una homotopía entre γ_0 y γ_1 , claramente $G(t, s) := (\varphi \circ F)(t, s)$ lo es entre γ'_0 y γ'_1).

A.1.2. Teoremas de levantamiento

Introduciremos formalmente algunos conceptos mencionados en la sección 5.3.2.

Definición A.3. Sean M y M^* dos superficies de Riemann y $\pi : M^* \rightarrow M$ un mapeo suprayectivo y analítico. Se dice que M^* es una superficie cubriente de M con mapeo de proyección π si para cada $p^* \in M^*$ existen parámetros locales z^* y z de $p = \pi(p^*)$, tales que:

- i) $z^*(p^*) = z(p) = 0$.
- ii) En términos de z y z^* , π está representada por $z = z^{*n}$, para algún entero positivo n .

Como $z = z^{*n}$ es una función n -a-1 de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^* , se sigue que π es también n -a-1 en $D \setminus \{p^*\}$, para algún disco paramétrico D respecto a p^* . Luego, el número n no depende de los parámetros locales elegidos, el punto p^* es llamado **punto de ramificación de orden** $n - 1$ si $n > 1$ y **punto regular** para $n = 1$. M^* es llamada **cubierta suave** de M si consiste solamente de puntos regulares y **cubierta ramificada** si contiene uno o más puntos de ramificación. Suele decirse también cuando M^* es cubierta suave, que la función π es suave.

Ejemplo. Sean $M = \widehat{\mathbb{C}}$ y M^* la superficie dada por la ecuación

$$w^2 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3), \quad a_1, a_2, a_3 \text{ distintos.}$$

Entonces el mapeo $\pi : M^* \rightarrow M$ dado por $\pi(z, w) = z$ es analítico y se pueden dar discos paramétricos D_j , $j = 1, 2, 3, 4$ respecto a cada uno de los puntos $p_j^* = (a_j, 0)$, $1 \leq j \leq 3$ y $p_4^* = (\infty, \infty)$ tales que π es 2-a-1 en $D_j \setminus \{p_j^*\}$, es decir, estos puntos son de ramificación de orden 1. Por otro lado existen también discos respecto al resto de puntos de la superficie para los que π es inyectiva.

Definición A.4. El mapeo de proyección $M^* \xrightarrow{\pi} M$ es un mapeo cubriente si para todo $p \in M$, existe una vecindad U de p tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$ es una unión disjunta de abiertos en M^* , cada uno de los cuales es mapeado conformemente a U bajo π .

Se sigue de la definición que los mapeos cubrientes son suaves. Recordemos que si π es cubriente de M^* a M , para cada $p \in M$, el conjunto $\pi^{-1}(p)$ se conoce como la **fibra** de π

sobre p y cada punto de la fibra se denomina punto sobre p .

Ejemplo. Véase el toro en el capítulo 5.

A continuación probaremos un par de teoremas sobre levantamiento de curvas.

Teorema A.2. *Sea $\pi : M^* \rightarrow M$ un mapeo cubriente entre superficies. Tómesese una curva $\gamma \subset M$ que empiece en p y un punto $p^* \in M^*$ sobre p . Si γ es la imagen de una función continua $f : [0, 1] \rightarrow M$, entonces existe una única curva $\{g(t) \in M^* \mid t \in [0, 1]\}$ que empieza en p^* tal que*

$$\pi \circ g(t) = f(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (\text{A.2})$$

Para probar este teorema utilizaremos el lema del número de Lebesgue:

Lema A.1. *Si el espacio métrico (X, d) es compacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta abierta de X , existe un número $\delta > 0$, (el número de Lebesgue de la cubierta), tal que todo subconjunto de X con diámetro menor a éste, está contenido en algún U_α*

Su prueba puede hallarse en cualquier texto de topología básica de conjuntos, (puede verse por ejemplo [5], pág. 234).

Demostración. (Del teorema A.2).

Usando el hecho de que π es un mapeo cubriente, escogemos una cubierta abierta \mathcal{U} de M tal que para todo $U \in \mathcal{U}$, $\pi^{-1}(U)$ sea unión disjunta de abiertos $V \subset M^*$ y π mapee cada V conformemente en U . Nos referiremos a los conjuntos V como los abiertos sobre U .

Por ser f continua, $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ es una cubierta abierta del intervalo $I := [0, 1]$, al ser I un espacio métrico compacto, podemos usar el lema del número de Lebesgue para construir una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de I tal que cada subintervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ esté contenido en $f^{-1}(U)$, para algún $U \in \mathcal{U}$. Etiquetaremos este conjunto escribiéndolo como U_i .

Sean V_1 el abierto sobre U_1 que contiene al punto p^* , y ψ_1 la función inversa de la restricción de π a V_1 . Defínase

$$g(t) = \psi_1 \circ f(t), \quad t \in I. \quad (\text{A.3})$$

Claramente g es continua en I_1 y $g(0) = p^*$. Aplicando π en ambos lados de la ecuación (A.3) se obtiene (A.2) para $t \in I_1$. Este procedimiento puede repetirse para definir g inductivamente en I_j , $2 \leq j \leq n$; suponiendo que g está definida en $[0, t_i]$, escogemos V_{i+1} como el

abierto sobre U_{i+1} que contiene a $g(t_i)$, luego se define ψ_{i+1} como la inversa de la restricción de π a V_{i+1} para obtener finalmente, para el intervalo I_{i+1} , la función $g = \psi_{i+1} \circ f$. El mapeo resultante al final del proceso $g : I \rightarrow M^*$ determina entonces, una curva que empieza en p^* y cumple la ecuación (A.2).

La demostración de que la curva es única la haremos también subintervalo a subintervalo en la partición que construimos anteriormente, escribiéndola solamente para I_1 , pues el argumento para el resto es el mismo. Dada una curva definida por una función g que cumple (A.2), escójense vecindades U_1 y V_1 igual que antes y sea V'_1 la unión de los abiertos sobre U_1 distintos a V_1 , (que son disjuntos con V_1). Por ser $f(I_1) \subset U_1$ y por (A.2), tenemos

$$g(I_1) \subset \pi^{-1}(U_1) = V_1 \cup V'_1.$$

Como I_1 es conexo y g es continua, $g(I_1)$ también es conexo. Pero $p^* \in g(I_1) \cap V_1$, así que debe tenerse $g(I_1) \subset V_1$. Luego podemos aplicar ψ_1 en ambos lados de (A.2) para obtener (A.3). \square

En el siguiente teorema se presenta un hecho intuitivamente claro acerca de levantamientos de curvas homotópicas en una superficie. (Se utiliza la misma notación que en el teorema anterior).

Teorema A.3. *Sean $p, q \in M$ y p^* un punto de M^* sobre p . Sean γ_1 y γ_2 dos curvas homotópicas en M que unen p con q y γ_1^* , γ_2^* los respectivos levantamientos en M^* que empiezan en p^* . Entonces γ_1^* y γ_2^* terminan en el mismo punto y son homotópicas entre sí.*

Demostración. Sea $S = I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$. Si $F : S \rightarrow M$ es una homotopía entre γ_1 y γ_2 , basta construir una función continua $G : S \rightarrow M^*$ tal que

$$\pi \circ G(t, s) = F(t, s), \quad (t, s) \in S, \quad (\text{A.4})$$

$$G(0, s) = p^*, \quad G(1, s) = q^*, \quad s \in I. \quad (\text{A.5})$$

Donde q^* es algún punto en M^* sobre q . Como los levantamientos de las curvas γ_1 y γ_2 son únicos, se sigue de las ecuaciones (A.4) y (A.5) que

$$\gamma_i^*(t) = G(t, i), \quad \text{para } i = 0, 1 \text{ y } t \in I, \quad (\text{A.6})$$

y se tendría el resultado buscado. La construcción de la función G puede hacerse imitando la construcción de g en la prueba del teorema anterior. El cuadrado S se particiona en una

mallas de subcuadrados formados por segmentos paralelos a los lados de S . Tomando estos subcuadrados de un diámetro suficientemente chico; G puede definirse inductivamente en la malla, comenzando por el renglón más bajo, avanzando de izquierda a derecha, siguiendo al segundo renglón y así sucesivamente, definiendo siempre $G = \pi^{-1} \circ F$, para una elección apropiada de π^{-1} . \square

A.2. Caracterización de los automorfismos

Probaremos finalmente el teorema de levantamiento de los isomorfismos entre toros.

Demostración. (Del teorema A.1). Definiendo ψ como se indicó en el inicio de este apéndice, probaremos lo siguiente:

- i) ψ está bien definida, es decir, no depende de la elección de la curva γ_1^* . Sea $\delta_1^* \subset \mathbb{C}$ alguna otra curva que una z_1 con z y defínanse las curvas correspondientes δ_1 , δ_2 y δ_2^* . Como $\varphi \circ \pi_1$ es una función continua de \mathbb{C} en T_2 que mapea γ_1^* en γ_2 y δ_1^* en δ_2 , se sigue de la observación A.1 que $\gamma_2 \sim \delta_2$. Luego, por el teorema A.3, los levantamientos correspondientes γ_2^* y δ_2^* , tienen los mismos puntos terminales.
- ii) ψ es una biyección de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Para cualquier $w \in \mathbb{C}$, sean γ_2^* una curva que una z_2 con w , $\gamma_2 := \pi_2(\gamma_2^*)$ y $\gamma_1 = \varphi^{-1}(\gamma_2)$. Entonces por el teorema A.2 existe una única curva γ_1^* levantamiento de γ_1 que pasa por z_1 y cuyo otro extremo por construcción es mapeado bajo ψ a w , esto prueba que ψ es sobre. Ahora, si $x, y \in \mathbb{C}$ cumplen $\psi(x) = \psi(y)$, el argumento es análogo al del inciso anterior; tomando las correspondientes curvas δ_2^* y γ_2^* que los unen con z_2 (se trata de curvas homotópicas en \mathbb{C}), por la observación A.1 la función $\varphi^{-1} \circ \pi_2$ mapea éstas a curvas homotópicas en T_1 cuyos levantamientos que pasan por z_1 , por el teorema A.3 son también homotópicos y tienen los mismos puntos inicial y terminal, por lo cual $x = y$, es decir, ψ es inyectiva.
- iii) ψ es entera. Dado $z \in \mathbb{C}$, escojamos un disco D_2 centrado en $\psi(z)$ tal que π_2 sea una biyección de D_2 en $\tilde{D}_2 := \pi_2(D_2)$ y un disco D_1 centrado en z tal que $\varphi \circ \pi_1$ mapee D_1 en \tilde{D}_2 . Para $w \in D_1$, sea $\tilde{\gamma}_1^*$ la curva de z_1 a w formada yendo primero de z_1 a z por γ_1^* y luego de z a w por el segmento rectilíneo que los une. Reemplazando γ_1^* por $\tilde{\gamma}_1^*$, obtenemos que $\psi(w) \in D_2$ y se tiene

$$\psi(w) = \theta \circ \varphi \circ \pi_1(w), \quad \text{para } w \in D_1, \quad (\text{A.7})$$

donde θ es la inversa de la restricción de π_2 a D_1 . La ecuación (A.7) muestra que ψ restringida a D_1 es una composición de funciones analíticas. De aquí que ψ es analítica en z .

Finalmente la unicidad de ψ se sigue de la ecuación (A.1) y del teorema A.2. Reemplazando z por $\gamma_1^*(t)$ con $t \in I$ en dicha ecuación, se tiene que $\psi(\gamma_1^*)$ es el levantamiento de γ_2 que empieza en $\varphi \circ \pi_1(z_1)$. \square

Apéndice B

La función modular

En este apéndice trataremos el problema de inversión planteado en §6.4.2. La solución está basada en las propiedades de la llamada función modular. Recordaremos el problema. Dada una latiz $\Lambda = \{w_1, w_2\}$, se definieron los invariantes modulares

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^3}.$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}.$$

Observándose que el discriminante asociado $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, era no nulo. Nos preguntamos entonces si dadas constantes $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ con $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, existirá una latiz Λ' para la cual $g_j(\Lambda') = c_j$, $j = 2, 3$.

B.1. Las funciones g_2, g_3

Escribiremos los invariantes modulares mencionados previamente, en función de la base de la latiz Λ , esto es

$$g_2(w_1, w_2) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^3},$$

$$g_3(w_1, w_2) = 140 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^6}.$$

Proposición B.1. *Las funciones $g_k(w_1, w_2)$, $k = 2, 3$, cumplen lo siguiente:*

i) *Para cualquier $\lambda \neq 0$:*

$$g_k(\lambda w_1, \lambda w_2) = \frac{g_k(w_1, w_2)}{\lambda^{2k}}.$$

ii) *Para cualesquiera enteros a, b, c, d con $ad - bc = \pm 1$:*

$$g_k(aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) = g_k(w_1, w_2).$$

Demostración. i) Es inmediato de la definición.

ii) Sean

$$w'_1 = aw_1 + bw_2, \quad w'_2 = cw_1 + dw_2. \quad (\text{B.1})$$

Resolviendo el sistema (B.1) para w_1 y w_2 utilizando $ad - bc = \pm 1$, resulta

$$w_1 = \pm(dw'_1 - bw'_2), \quad w_2 = \pm(-cw'_1 + aw'_2). \quad (\text{B.2})$$

Sea Λ' la latiz generada por w'_1 y w'_2 . Las ecuaciones (B.1) y (B.2) muestran respectivamente que $\Lambda' \subset \Lambda$ y $\Lambda \subset \Lambda'$.

Claramente los conjuntos $\{mw_1 + nw_2\}$ y $\{mw'_1 + nw'_2\}$, con $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, son entonces iguales ambos a $\Lambda \setminus \{0\}$. Esto termina la prueba.

□

B.2. La función modular J

Denotaremos por $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ al semiplano superior $\{\tau \mid \text{Im } \tau > 0\}$. Para $\tau \in \mathbb{H}$ sean

$$g_k(\tau) = g_k(1, \tau), \quad k = 1, 2.$$

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau).$$

Definición B.1. La función modular $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, esta dada por

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Observación B.1. $J(\tau)$ es finita para todo $\tau \in \mathbb{H}$ por el corolario 6.6.1.

Teorema B.1. $J(\tau)$ es analítica en \mathbb{H}

Demostración. Basta probar que las series de $g_2(\tau)$ y $g_3(\tau)$ convergen uniformemente en \mathbb{H} . Sea $\tau = x+iy$, probaremos que las series mencionadas convergen uniformemente para $|x| \leq a$, $y \geq b$; donde a y b son reales positivos arbitrarios. Tenemos

$$|m + n\tau|^2 = m^2 + 2mnx + m^2x^2 + n^2y^2.$$

Dados los números a, b , elíjase δ tal que $\frac{a^2}{a^2+b^2} < \delta^2 < 1$. Reescribimos la ecuación anterior como sigue

$$|m + n\tau|^2 = (1 - \delta^2)m^2 + \left(\delta m + \frac{xn}{\delta}\right)^2 + \left[y^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)x^2\right]n^2,$$

de donde

$$|m + n\tau|^2 \geq (1 - \delta^2)m^2 + \left[b^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta^2}\right)a^2\right]n^2. \quad (\text{B.3})$$

Como los coeficientes de m^2 y n^2 en (B.3) son ambos positivos, para cualesquiera enteros m, n se tiene $|m + n\tau|^2 \geq \varepsilon^2(m^2 + n^2)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Entonces

$$\frac{1}{|m + n\tau|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{|m + ni|}, \quad (m, n) \neq (0, 0). \quad (\text{B.4})$$

Por el lema 6.1,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|m + ni|^r} < \infty, \quad \text{para } r > 2 \quad (\text{B.5})$$

La convergencia uniforme de las series que definen a las funciones $g_2(\tau)$ y $g_3(\tau)$ se sigue de (B.4) y (B.5). \square

B.3. El grupo modular Γ

Ya en el capítulo 2 habíamos tratado con el siguiente grupo de transformaciones,

$$G = \{T : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid T(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, ad - bc \neq 0\},$$

el cual está formado por funciones conformes y tiene gran importancia en geometría hiperbólica plana, (para saber más de esto, puede verse [15]).

Ahora consideraremos las $\gamma \in G$; $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, para las cuales a, b, c, d son enteros con $ad - bc = 1$. Multiplicando y dividiendo $\gamma(\tau)$ por $c\bar{\tau} + d$ tenemos

$$\operatorname{Im} \gamma(\tau) = \operatorname{Im} \frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} \tau}{|c\tau + d|^2}.$$

Esta ecuación muestra que γ mapea conformemente \mathbb{H} en sí mismo. Es fácil ver que el subconjunto $\Gamma \subset G$ de este tipo de transformaciones de Möbius es en realidad un subgrupo, y es llamado **grupo modular**.

Teorema B.2. *La función modular $J(\tau)$ satisface*

$$J(\gamma(\tau)) = J(\tau),$$

para cualesquiera $\tau \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Sea $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Como $ad - bc = 1$ se sigue de la proposición B.1, para $k = 2, 3$, que

$$g_k(\tau) = g_k(c\tau + d, a\tau + b) = (c\tau + d)^{-2k} g_k(\gamma(\tau)), \quad (\text{B.6})$$

de donde

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^{12} f(\tau), \quad \text{para } f = g_2^3 \text{ ó } g_3^2. \quad (\text{B.7})$$

El teorema se sigue de (B.7). □

B.4. Región fundamental para Γ

Debido a que Γ es un grupo de transformaciones que preservan \mathbb{H} , podemos definir una relación de equivalencia en el semiplano poniendo $\tau_1 \sim \tau_2$ si y sólo si, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\tau_1) = \tau_2$. Las clases de equivalencia módulo esta relación son llamadas Γ -órbitas, estas por supuesto forman una partición de \mathbb{H} .

Por el teorema B.2, la función modular J es constante en cada Γ -órbita. De manera análoga a lo que se tiene con los paralelogramos fundamentales y las funciones elípticas, diremos que una región (subconjunto conexo por trayectorias) F , es fundamental para Γ , si cada Γ -órbita uno y solamente un punto en común con F . Nótese que los valores de J en \mathbb{H} son exactamente sus valores en F .

Teorema B.3. *Sea*

$$F = \{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \tau < \frac{1}{2}, |\tau| > 1\} \cup \{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \tau \leq 0, |\tau| = 1\}.$$

Entonces F es una región fundamental para Γ .

Dejaremos un detalle pendiente en la prueba de este teorema que será cubierto en la sección B.6.

En la siguiente figura se muestra la región F , ésta consiste en su interior $\{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \tau < \frac{1}{2}, |\tau| > 1\}$ y parte de la frontera.

Las transformaciones $T(\tau) = \tau + 1$ y $G(\tau) = -1/\tau$ están en el grupo modular. T mapea el lado izquierdo de la frontera de F en su lado derecho y G dobla el lado del fondo respecto al punto medio i . Los puntos $\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, i y $\rho + 1$ son llamados vértices de F .

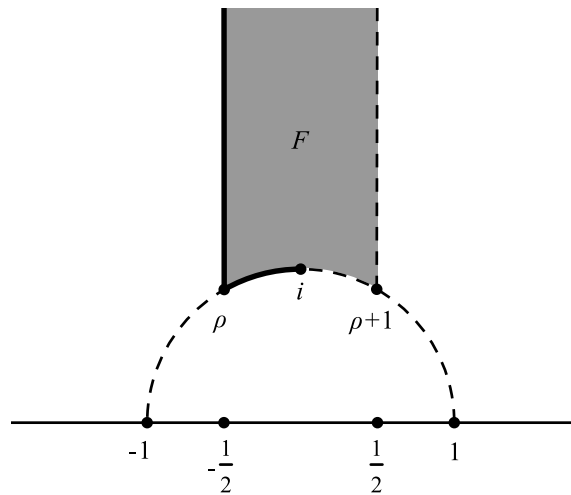


Figura B.1: La región fundamental F .

Demostración. Veremos primero que toda Γ -órbita interseca a F . Sea $\tau = x + iy$ y $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Entonces

$$\operatorname{Im} \gamma(\tau) = \frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2}. \tag{B.8}$$

Fíjese τ y déjese γ variar sobre Γ . De (B.8) tenemos

$$\lim_{\max(|c|,|d|) \rightarrow \infty} (\operatorname{Im} \gamma(\tau)) = 0,$$

por lo tanto, $\text{Im } \gamma(\tau)$ alcanza un valor máximo, digamos, en $\gamma_0(\tau)$. Sea n el entero para el cual $\tau_0 = \gamma_0(\tau)$ satisface $-\frac{1}{2} \leq \text{Re } \tau_0 < \frac{1}{2}$. τ_0 es un punto de la Γ -órbita de τ para la cual $\text{Im } \tau_0$ es maximal, pues $\text{Im } \tau_0 = \text{Im } \gamma_0(\tau)$.

Tenemos también $\tau_0 \geq 1$, pues de lo contrario

$$\text{Im } (-1/\tau_0) = \frac{\text{Im } \tau_0}{|\tau_0|^2} > \text{Im } \tau_0,$$

lo que contradice la maximalidad de $\text{Im } \tau_0$. Así las cosas, τ_0 es el punto deseado de la Γ -órbita de τ , a no ser que $|\tau_0| = 1$ y $\text{Re } \tau_0 > 0$, en cuyo caso $-1/\tau_0$ es el punto buscado.

Falta probar que cada Γ -órbita interseca a F en precisamente un punto. Como mencionábamos antes de empezar la prueba, más adelante veremos que J toma cada valor complejo precisamente una vez en F ; si una Γ -órbita intersecara a F en al menos dos puntos τ_1, τ_2 distintos, tendríamos $J(\tau_1) = J(\tau_2)$, contradiciendo el resultado que mencionamos. \square

Más adelante requeriremos de la siguiente consecuencia del teorema recién probado:

Corolario B.3.1. *Cualquier latiz Λ tiene una base $\{w_1, w_2\}$ tal que $\frac{w_2}{w_1} \in F$.*

Demostración. Empezemos por tomar una base $\{w'_1, w'_2\}$ tal que $\tau_0 = \frac{w'_2}{w'_1} \in \mathbb{H}$. Por el teorema previo, existe una transformación $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \in \Gamma$, tal que $\gamma(\tau_0) \in F$. Sean

$$w_1 = dw'_1 + cw'_2,$$

$$w_2 = bw'_1 + aw'_2.$$

Entonces $\{w_1, w_2\}$ es una base de la misma latiz Λ , pues $ad - bc = 1$, y

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{aw'_2 + bw'_1}{cw'_2 + dw'_1} = \gamma(\tau_0) \in F$$

\square

B.5. La serie de Fourier de J

Al ser $T(\tau) = \tau + 1$ una transformación del grupo modular, tenemos por el teorema B.2 que $J(\tau + 1) = J(\tau)$, es decir, J es una función analítica en \mathbb{H} con periodo 1. Esto implica

(véase por ejemplo [2], teorema 1.17), que J tiene una única serie de Fourier

$$J(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau},$$

absolutamente convergente para $\tau \in \mathbb{H}$.

El objetivo de esta sección es evidentemente, estudiar esta expansión, pues deduciremos así el comportamiento asintótico de J cuando $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ que será necesario para establecer el resultado referente a los valores de la función modular en la región fundamental que propusimos en la pasada sección. Requeriremos algunos lemas previos que suelen ser ejercicios típicos de un primer curso de variable compleja:

Lema B.1. *Para $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, tenemos*

$$\pi \cot \pi \tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\tau + m} - \frac{1}{m} \right). \quad (\text{B.9})$$

La deducción de esta fórmula puede hallarse, por ejemplo, en [1], págs. 151-152.

Lema B.2.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}. \quad (\text{B.10})$$

Las identidades (B.10) pueden deducirse de (B.9) tomando en ambos lados las series de Laurent alrededor de $\tau = 0$ e igualando los coeficientes correspondientes de τ^3 y τ^5 .

Finalmente requeriremos:

Lema B.3. *Si $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ converge para $|t| < 1$. Entonces*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t^n)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos del disco $|t| < 1$. Se sigue que g es analítica en tal región; su serie de Taylor puede obtenerse sumando formalmente las series de $f(t), f(t^2), \dots$, etc.

Demostración. Sea $0 < r < 1$. Para $|t| < r$ tenemos

$$|f(t^n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{nk}, \quad n \geq 1. \quad (\text{B.11})$$

Sumando también sobre n intercambiando el orden de las sumas, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{r^k}{1-r^k} \leq \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k < \infty. \quad (\text{B.12})$$

El lema se sigue de las ecuaciones (B.11) y (B.12). \square

Notación. Haremos $t = e^{2\pi i\tau}$. t como función de τ , mapea el semiplano \mathbb{H} en el disco agujerado dado por $0 < |t| < 1$.

Teorema B.4. Para $\tau \in \mathbb{H}$, tenemos

$$J(\tau) = \frac{1}{1728t} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (\text{B.13})$$

donde la serie es convergente para $|t| < 1$.

Demostración. Para probar (B.13), primero deduciremos las series de Fourier de las funciones g_2 y g_3 . Nótese que si en la ecuación (B.6) se hacen $a = b = d = 1$ y $c = 0$, se observa que tanto g_2 como g_3 son funciones analíticas en \mathbb{H} y 1 es un periodo de ambas.

Ahora, de la identidad

$$\cot \pi\tau = i \frac{e^{2\pi i\tau} + 1}{e^{2\pi i\tau} - 1} = i \frac{t + 1}{t - 1},$$

obtenemos la serie

$$\pi \cot \pi\tau = -\pi i (1 + 2t + 2t^2 + \dots). \quad (\text{B.14})$$

Igualando (B.14) con (B.9) y derivando 3 y 5 veces respecto a τ , se obtienen respectivamente

$$6 \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(\tau + m)^4} = 16\pi^4 (t + 8t^2 + \dots), \quad (\text{B.15})$$

$$120 \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(\tau + m)^6} = -64\pi^6 (t + 32t^2 + \dots). \quad (\text{B.16})$$

Podemos reescribir la fórmula que define a la función g_2 ;

$$g_2(w_1, w_2) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^3},$$

para $w_1 = 1$ y $w_2 = \tau$, como sigue

$$g_2(\tau) = 60 \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \right). \quad (\text{B.17})$$

La primer fórmula del lema B.2 junto con las ecuaciones (B.15) y (B.17), nos dan

$$g_2(\tau) = 60 \left(\frac{\pi^4}{45} + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + 8t^{2n} + \dots) \right). \quad (\text{B.18})$$

De esta última fórmula y el lema B.3 llegamos finalmente a

$$g_2(\tau) = \pi^4 \left(\frac{4}{3} + 320t + \dots \right).$$

Partiendo de la ecuación (B.16) y utilizando el mismo procedimiento, se puede verificar que

$$g_3(\tau) = \pi^6 \left(\frac{8}{27} - \frac{448}{3}t + \dots \right).$$

Por lo tanto

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = \pi^{12}(4096t + \dots). \quad (\text{B.19})$$

Como $J = g_2^3/\Delta$, las expresiones que obtuvimos para g_2 y Δ implican (B.13). \square

Observación B.2. Si $\tau = x + yi$, donde $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Se tiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} tJ(x + iy) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1728} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \right) = \frac{1}{1728},$$

uniformemente en x , pues recuérdese que

$$t = \frac{e^{2\pi i x}}{e^{2\pi y}}.$$

B.6. Los valores de J

Como mencionamos en la prueba del teorema B.3, la función modular tiene la siguiente propiedad:

Teorema B.5. $J(\tau)$ toma todos los valores complejos precisamente una vez en la región fundamental F .

Demostración. Sea $c \in \mathbb{C}$ arbitrario, probaremos de forma equivalente que $f(\tau) := J(\tau) - c$ tiene precisamente un cero en F .

Del teorema B.4 observamos que $J(\tau)$ tiende a ∞ uniformemente cuando $\tau \rightarrow \infty$ en $F \subset \mathbb{H}$, por ello, podemos elegir una recta horizontal debajo de la cual deben de estar todos los ceros de J en F .

En la siguiente figura, etiquetamos esta recta con el número 5. Sea C el contorno formado por los 4 lados 1, 2, 3, 4, 5 ilustrado en dicha figura, orientado positivamente:

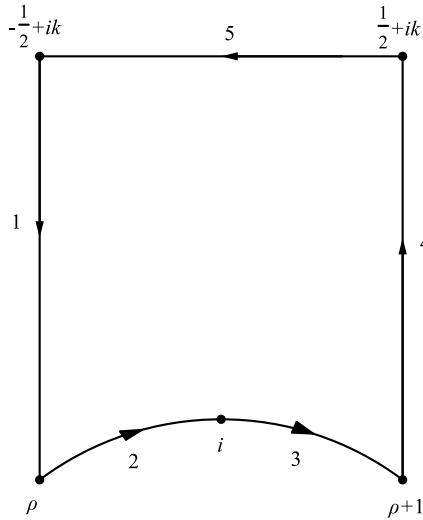


Figura B.2: El contorno C .

Para obtener el número de ceros de f en F , calcularemos el cambio en el argumento de f conforme C es recorrido en dirección positiva. Sea N este número de ceros (contando multiplicidades). Considerando primero el caso en que f no tuviera ceros en C . Entonces

$$N = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^5 \Delta_j, \quad (\text{B.20})$$

donde Δ_j es el cambio en el argumento de f a lo largo del lado j del contorno. Como $f(\tau) = f(\tau+1)$, la imagen bajo f del lado 4 se obtiene cambiando la dirección de la respectiva imagen del lado 1. Entonces

$$\Delta_1 = -\Delta_4. \quad (\text{B.21})$$

Similarmente, pero esta vez por ser también $f(\tau) = f(-1/\tau)$, tenemos

$$\Delta_2 = -\Delta_3. \quad (\text{B.22})$$

Sea k la coordenada imaginaria de los puntos del lado 5. Entonces $t = e^{2\pi i \tau}$ mapea 5 a la circunferencia $|t| = e^{-2\pi k}$, orientada en contra de las manecillas del reloj. Se sigue de la

observación B.2 que, para k suficientemente grande, f mapea el lado 5 a un contorno que rodea a 0 una vez en sentido contrario a las manecillas. Luego

$$\Delta_5 = 2\pi. \quad (\text{B.23})$$

De las ecuaciones (B.20), ..., (B.23), obtenemos $N = 1$.

Considérese enseguida el caso en que f tiene ceros en C , pero no en sus vértices. Estos ceros deben venir en pares y ser simétricos respecto al eje imaginario. Modifiquemos el contorno C para obtener C' ; esquivando los ceros con arcos circulares de forma que las transformaciones T y U mencionadas en la sección de la región fundamental F , lleven los arcos de 1 en los de 4 y los de 2 en los de 3 respectivamente. Demos también a C' la orientación positiva:

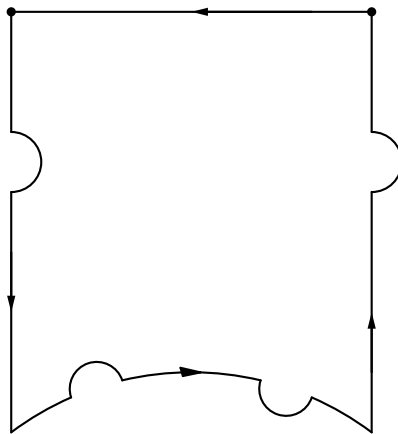


Figura B.3: El contorno modificado C' .

Utilizando el mismo argumento que en el caso anterior, reemplazando C con C' se obtiene también en este caso $N = 1$.

Finalmente, si f tiene ceros también en algunos vértices de C podemos modificarlo de nueva cuenta, introduciendo arcos circulares de radio r alrededor de sus vértices:

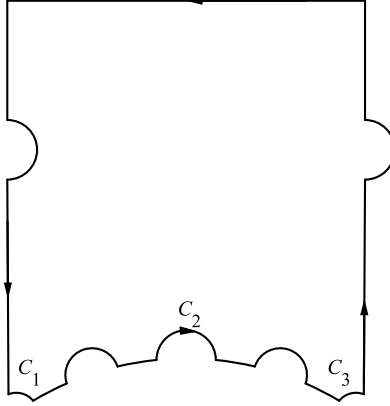


Figura B.4: La modificación del contorno C en el último caso.

Argumentando como en los casos anteriores, tenemos, para r suficientemente chico,

$$N_0 = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \Delta(C_j), \quad (\text{B.24})$$

donde N_0 es el número de ceros de f en $F \setminus \{\rho, i\}$, contados con sus multiplicidades, y $\Delta(C_j)$ es el cambio en el argumento de f a lo largo de C_j . Sean $m_\rho, m_i, m_{\rho+1}$ las respectivas multiplicidades de f en $\rho, i, \rho+1$. Como $f(\tau) = f(\tau+1)$, tenemos $m_\rho = m_{\rho+1}$. El ángulo que subtiende el arco C_2 tiende a π conforme el radio de C_2 tiende a 0, y aquellos de C_1 y C_3 tienden a $\frac{\pi}{3}$. En $\rho, i, \rho+1$, f magnifica ángulos por los factores $m_\rho, m_i, m_{\rho+1}$, respectivamente. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_2) = -\pi m_i, \quad (\text{B.25})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(C_3) = -\frac{\pi}{3} m_\rho. \quad (\text{B.26})$$

Haciendo tender r a cero, concluimos por (B.24), (B.25) y (B.26), que

$$N_0 + \frac{m_i}{2} + \frac{m_\rho}{3} = 1. \quad (\text{B.27})$$

Como f tiene ceros en algunos de los vértices de C , tenemos $m_i > 0$ o bien $m_\rho > 0$. Por tanto las soluciones para (B.27) son

$$(N_0, m_i, m_\rho) = (0, 2, 0), (0, 0, 3).$$

Se sigue que $f = 0$ en solamente un punto de F y que este punto es, ya sea i ó ρ . Por lo que una vez más se tiene $N = 1$. \square

En la última sección requeriremos conocer algunos valores de las funciones g_2 , g_3 y J que calcularemos enseguida.

Teorema B.6. *Tenemos*

$$g_2(\rho) = 0, \quad g_3(i) = 0,$$

que son equivalentes respectivamente a

$$J(\rho) = 0, \quad J(i) = 1.$$

Demostración. La equivalencia es inmediata, por ser $J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$.

Ahora,

$$g_2(\rho) = 60 \sum_{w \in \Lambda_\rho \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4},$$

donde Λ_ρ es la latiz generada por la base $\{1, \rho\}$. Por ser $\rho\Lambda_\rho = \Lambda_\rho$, tenemos

$$g_2(\rho) = 60 \sum_{w \in \Lambda_\rho \setminus \{0\}} \frac{1}{(\rho w)^4} = \rho^{-4} g_2(\rho),$$

lo cual implica $g_2(\rho) = 0$, pues $\rho^{-4} \neq 1$.

También se tiene

$$g_3(i) = 140 \sum_{w \in \Lambda_i \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6},$$

donde $\Lambda_i = \{1, i\}$, y como $i\Lambda_i = \Lambda_i$, se obtiene

$$g_3(i) = 140 \sum_{w \in \Lambda_i \setminus \{0\}} \frac{1}{(iw)^6} = -g_3(i),$$

lo cual nos lleva a $g_3(i) = 0$. □

B.7. Solución al problema de inversión

Resolveremos el problema planteado en el capítulo 6.

Teorema B.7. *Sean c_2, c_3 constantes tales que $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$. Entonces existe una única latiz Λ para la cual*

$$g_k(\Lambda) = c_k, \quad k = 2, 3. \tag{B.28}$$

Demostración. Por el corolario B.3.1, cualquier latiz Λ tiene una base $w, w\tau$, con $w \neq 0$ y $\tau \in F$. Reescribimos la ecuación (B.28) como

$$g_k(w, w\tau) = c_k, \quad k = 2, 3. \quad (\text{B.29})$$

Para buscar soluciones con $w \neq 0$ y $\tau \in F$. Consideraremos por separado los casos $c_2, c_3 \neq 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$:

i) $c_2, c_3 \neq 0$.

Haciendo algunas manipulaciones, (B.29) es equivalente a

$$\frac{g_2^3(w, w\tau)}{g_2^3(w, w\tau) - 27g_3^2(w, w\tau)} = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad \frac{g_3(w, w\tau)}{g_2(w, w\tau)} = \frac{c_3}{c_2}. \quad (\text{B.30})$$

Por la homogeneidad de las funciones g_2, g_3 ; las condiciones de (B.30) a su vez equivalen a

$$\text{a) } J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}, \quad \text{b) } w^2 = \frac{c_2 g_3(\tau)}{c_3 g_2(\tau)}. \quad (\text{B.31})$$

Por el teorema B.5, (B.31), inciso a), tiene una única solución $\tau_0 \in F$. Como $c_2, c_3 \neq 0$, debe tenerse $J(\tau_0) \neq 0, 1$, que equivale a $g_2(\tau), g_3(\tau) \neq 0$. Se sigue que para $\tau = \tau_0$, el lado derecho de la ecuación (B.31), b), es no-nulo y tiene dos raíces cuadradas; sean $\pm w_0$ dichas raíces. Entonces las bases $\{w_0, w_0\tau\}$ y $\{-w_0, -w_0\tau\}$ generan una misma latiz Λ_0 que es la única solución de (B.28).

ii) $c_2 = 0$.

Claramente se debe tener $c_3 \neq 0$ y (B.29) se transforma en el par de ecuaciones

$$\text{a) } g_2(\tau) = 0, \quad \text{b) } w^{-6} g_3(\tau) = c_3. \quad (\text{B.32})$$

Por los teoremas B.5 y B.6, $\tau = \rho$ es la única solución en la región fundamental F a (B.32), a). Haciendo $\tau = \rho$ en (B.32), b), obtenemos como soluciones para w a las seis raíces sextas de $\frac{g_3(\tau)}{c_3} \neq 0$. Puede verificarse sin embargo que si w es cualquiera de estas raíces, $\{w, w\rho\}$ genera una misma latiz Λ que es la única solución en este caso del problema de inversión.

iii) $c_3 = 0$.

En este caso debe tenerse entonces $c_2 \neq 0$ y (B.29) es ahora equivalente a

$$\text{a) } g_3(\tau) = 0, \quad \text{b) } w^{-4} g_2(\tau) = c_2. \quad (\text{B.33})$$

Y de nueva cuenta, los teoremas B.5 y B.6 implican que $\tau = i$ esta vez es la única solución en F a (B.33), a) mientras que si w es cualquiera de las 4 raíces cuartas de $\frac{g_2(i)}{c_2} \neq 0$; la latiz $\Lambda = \{w, iw\}$ es la única solución para (B.28).

□

Apéndice C

Programa para graficar el rango numérico de una matriz

En este apéndice incluimos el código de un mfile de MATLAB que permite encontrar gráficamente el rango numérico de una matriz, las variables de entrada de la función **nrange(A,P,C,F)** son la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, el número de puntos $P \in \mathbb{N}$ que se desea graficar en la frontera de $\Omega(A)$, el color **C** que se desea utilizar en la imagen de acuerdo a la tabla siguiente:

Valor de entrada	Color del gráfico
'r'	rojo
'm'	magenta
'y'	amarillo
'g'	verde
'c'	azul agua
'b'	azul marino
'k'	negro

El valor preestablecido es 'b'.

Finalmente **F** puede tomar los valores 'y' ó 'n' en caso de que se desee o no, colorear el interior del rango con el color seleccionado. El valor preestablecido es 'y' (sí).

C.1. Código

```

function [rerange, imrange, nradius] = nrange(A, P, C, F);
% Copyright:
% Dora Matache and Valentin Matache
% University of Nebraska Omaha
% Department of Mathematics
% Year 2001
if nargin == 1
P = 500;
C = 'b';
F = 'y';
end
if nargin == 2
C = 'b';
F = 'y';
end
if nargin == 3
F = 'y';
end

[m, n] = size(A);
if m ~= n
error('Debes dar una matriz cuadrada.');
```

```

end
count = 1;
for theta=0:P
T=(cos(theta*2*pi/P)+i*sin(theta*2*pi/P))*A;
ReT=.5*(T+T');
lambda=max((eig(ReT)));
[eigvec,eigval]=eig(ReT);
for j=1:n
value=eigval(j,j);
if value>=lambda;
u=eigvec(:,j)/norm(eigvec(:,j));
z=u'*A*u;
x(count)=real(z);
y(count)=imag(z);
count = count + 1;
end
end
end
rerange = x(1:count-1);

```

```
imrange = y(1:count-1);
disp(Él radio numérico es:');
nradius = max(sqrt(x.^2 + y.^2))
if F == 'n'
if A == A(1,1)*eye(n)
plot(real(A(1,1)),imag(A(1,1)),C);
else
plot(rerange, imrange, C);
axis equal
end
else
if A == A(1,1)*eye(n)
plot(real(A(1,1)),imag(A(1,1)),C);
else
fill(rerange, imrange, C);
axis equal
end
end
```

C.2. El radio numérico

El programa calcula además el llamado radio numérico de la matriz A , este real no negativo se define como

$$\sup\{|\lambda|, \lambda \in \Omega(A)\}.$$

(Véase la sección 5 del capítulo 8).

Bibliografía

- [1] AHLFORS, L., *Complex Analysis*, McGraw Hill, 1953.
- [2] APOSTOL, T., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer-Verlag, N.Y., 1990.
- [3] COLWELL, P., *Blaschke Products*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1985.
- [4] DAEPP, U., GORKIN, P., MORTINI, R., *Ellipses and Finite Blaschke Products*, Amer. Math. Monthly 109 (2002), 785-793.
- [5] DUGUNDJI, J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.
- [6] FLATTO, L., *Poncelet's Theorem*, AMS, 2008.
- [7] FRIEDBERG, S., INSEL, A., SPENCE, L., *Linear Algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [8] GARNETT, J.B., *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Mathematics No.96, Academic Press, N.Y., 1981.
- [9] GUSTAFSON, K., RAO, D., *Numerical Range*, Springer-Verlag, N.Y., 1997.
- [10] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, N.Y., 1977.
- [11] HORN, R., JOHNSON, C., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Sydney, 1991.
- [12] HULIN, D., *Factorisation des polynômes de Poncelet*, Geom Dedicata 130 (2007), 109-136.
- [13] LANG, S., *Elliptic Functions*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1973.
- [14] LASCURAIN ORIVE, A., *Curso básico de variable compleja*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.

- [15] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [16] MIRMAN, B., SHUKLA, P., *A characterization of complex plane Poncelet curves*, Elsevier Science Inc., Linear Algebra and its Applications 408 (2005), 86-119.
- [17] MIRMAN, B., *Numerical ranges and Poncelet curves*, Elsevier Science Inc., Linear Algebra and its Applications 281 (1998), 59-85.
- [18] NEEDHAM, T., *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 2000.
- [19] PÉREZ CARBAJAL, F., *Algunos aspectos probabilísticos de Teoría Ergódica*, Tesis de Licenciatura, Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2010.
- [20] SAMUEL, P., *Projective Geometry*, Springer-Verlag, N.Y., 1988.
- [21] SÁNCHEZ, H., PALMAS, O., *Geometría riemanniana*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.