UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE EL TEOREMA DE RADÓN - NIKODYM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

MARÍA EUGENIA CORTÉS ISLAS

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. PABLO BARRERA SÁNCHEZ

1969

SOBRE EL TEOREMA DE
RADÓN – NIKODYM

TESIS
QUE PARA OBTENER
EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

MARÍA EUGENIA CORTÉS ISLAS

1969.

A MIS PADRES

Y HERMANOS

Índice

Introducción

El objetivo de este trabajo es dar una presentación sencilla del teorema de Radón-Nikodym cuyos antecedentes pueden resumirse como sigue. En 1904, Lebesgue, observó que se pueden obtener medidas en la recta a partir de la integral de Lebesgue de una función medible, además dio condiciones necesarias y suficientes para que una medida en la recta posea la propiedad anterior. En 1905, A. Vitali, clasificó dichas medidas. Posteriormente, J. Radón amplió el resultado para medidas sobre los borelianos en espacios euclidianos. Finalmente, Nikodym notó que los resultados anteriores, son independientes del conjunto donde están definidas las medidas.

El desarrollo del trabajo consiste en definir, para un conjunto arbitrario, los conceptos de medida, función medible e integral y sus principales consecuencias, lo cual se hace en los tres primeros capítulos. En el cuarto capítulo se aborda el teorema y en el último, se esbozan algunas aplicaciones.

El tema de esta tesis fue sugerido e inicialmente guiada por el matemático Gonzalo Zubieta R., y terminada con la dirección del M. en C. Pablo Barrera S. Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi amigo M. en C. Pablo Barrera S., de quien siempre he recibido sus consejos y su ayuda generosísima. Finalmente, doy las gracias a mis familiares, amigos, profesores y alumnos, por su apoyo estimulante.

Sea X un conjunto.

Definición 1.1

Una colección M de subconjuntos de X se llama una σ-algebra si

1. $X \in M$
2. $E \in M$ implica $\sim E \in M$
3. si $E_n \in M, n = 1,2,\ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$.

A los conjuntos de M se les llamará medibles.

Obsérvese que $\emptyset \in M$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in M$, si $E_n \in M, n = 1,2,\ldots$

Ejemplo 1.1

Sea $P(A)$ la colección de todos los subconjuntos de un conjunto A, entonces $P(A)$ es una σ-algebra.

Ejemplo 1.2

Una σ-algebra importante es la de los c onjuntos borelianos que se construye de la siguiente manera: sea R^n el espacio euclidiano de dimensión n y M la mínima σ-algebra que contenga a los abiertos de R^n.

Tiene sentido hablar de la mínima σ-algebra ya que al menos hay una, la construida como en el ejemplo anterior.

Definición 1.2

Una función ϕ se llama una medida (medida con signo) si:

1. Dom ϕ es una σ-algebra M.
2. $-\infty < \phi(E) \leq \infty, \forall E \in M$ ó $-\infty \leq \phi(E) < \infty, \forall E \in M$ lo que implica en el primer caso, que $\exists \beta \in \Re, \ni -\infty < \beta \leq \phi(E) \leq \infty, \forall E \in M$, y algo análogo para el otro caso. De aquí en adel ante, se supondrá que se tiene el primer caso y se requieren los re sultados para el segundo caso al considerar menos la medida.

3. ϕ es σ-aditiva implica que sea aditiva, i.e., si $E_1, E_2 \in M$ y $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ entonces $\phi(E_1 \cup E_2) = \phi(E_1) + \phi(E_2)$. Para visualizar lo anterior, es suficiente con notar que en el caso de ser ϕ la medida que a todo conjunto le asocia el valor infini to, vale la igualdad y que cuando existe una conjunto al que ϕ le asocia un real, la medida del conjunto vacío, $\varnothing$, vale cero y entonces
$$\phi(E_1 \cup E_2) = \phi(E_1 \cup E_2 \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots) = \phi(E_1) + \phi(E_2) + \phi(\varnothing) + \ldots = \phi(E_1) + \phi(E_2).$$

Definición 1.3

Una función θ se llama una medida positiv a si es una medida tal que $0 \leq \theta(E) \leq \infty, \forall E \in M$.

Ejemplo 1.3

Sea $P(A)$ definida como en el ejemplo 1.1

Sea $p \in A$ y defínase

$$\theta(E) = \begin{cases} 1, \text{ si } p \in E \\ 0, \text{ si } p \notin E \end{cases}$$

θ es una medida positiva.

Ejemplo 1.4

Si θ es una medida sobre M y A es un conjunto fijo en M, entonces la función λ, definida para cada conjunto $E \in M$ como $\lambda(E) = \theta(A \cap E)$ es una medida sobre M.

Demostración:

Por definición $Dom(\lambda) = Dom(\theta) = M$.

$-\infty < \lambda(E) \leq \infty, \forall E \in M$ pues $\lambda(E) = \theta(E \cap A)$. Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$ entonces

$$\lambda(E) = \theta(E \cap A) = \theta\left(\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] \cap A\right) = \theta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap A)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

Definición 1.4

Una medida positiva θ se llama σ-finita si $\forall E \in Dom(\theta)$ existen conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$ y $\theta(E_i) < \infty$, $i = 1,2,\ldots$

Afirmación 1.1

Si θ es una medida positiva, entonces $\theta(A) \leq \theta(B)$ si $A \subset B$.

Demostración:

Ya que $B = A \cup (B - A)$ con $A \cap (B - A) = \varnothing$, entonces $\theta(B) = \theta(A) + \theta(B - A)$ y $\theta(B - A) \geq 0 \quad \therefore \quad \theta(A) \leq \theta(B)$.

Afirmación 1.2

Si θ es una medida y $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$ entonces $\theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \theta(E_n)$.

Demostración:

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_2 - E_1) \cup \ldots$

$$\begin{aligned}
\theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \theta(E_1) + \theta(E_2 - E_1) + \theta(E_3 - E_2 - E_1) + \ldots \\
&= \lim \left[\theta(E_1) + \theta(E_2 - E_1) + \cdots + \theta(E_n - E_{n-1} - \cdots - E_1)\right] \\
&= \lim \theta(E_n)
\end{aligned}$$

Afirmación 1.3

Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ son medidas positivas y $c_1, c_2, c_n, \ldots$ son números reales no negativos, entonces $\theta = \sum_{i=1}^{n} c_i \theta_i$, es una medida positiva.

En este capítulo el resultado fundament al es el teorema 2.2 que afirma que toda función medible no-negat iva se puede expresar como el límite de una sucesión no-decreciente de funci ones simples no-negativas, ya que desempeñará un papel clave en la construcción de la integral.

Sea X un conjunto y M una σ-algebra definida en X y denótese por $\Re$ a los reales.

Definición 2.1

Una función real f definida en X se llama medible (o $M-medible$) si $\{x : f(x) \geq c\} \in M$, para todo real *c*.

Nótese que si $\{x : f(x) > c\}$ es medible, también lo son $\{x : f(x) < c\}, \{x : f(x) \leq c\}$ y $\{x : f(x) \geq c\}$ en vista de la identidad

$$\{x : f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x : f(x) \geq c + \frac{1}{n}\right\} = \sim \{x : f(x) \leq c\} = \sim \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

Afirmación 2.1

Si $f : X \to \Re$ es medible, también lo son f^2, $a + f$, af, $|f|$, donde *a* es un real cualquiera.

Demostración:

(i) si $c \geq 0$, $\{x : [f(x)]^2 \geq c\} = \{x : f(x) \geq \sqrt{c}\} \cup \{x : f(x) \leq -\sqrt{c}\} \in M$

si $c < 0$, $\{x : [f(x)]^2 \geq c\} = X \in M$

(ii) $\{x : a + f(x) \geq c\} = \{x : f(x) \geq c - a\} \in M$

(iii) si $a > 0$, $\{x : af(x) \geq c\} = \left\{x : f(x) \geq \frac{c}{a}\right\} \in M$

si $a < 0$, $\{x : af(x) \geq c\} = \left\{x : f(x) \leq \frac{c}{a}\right\} \in M$

si $a=0$, af es constante y es medible

(iv) $\{x : |f(x)| \geq c\} = \{x : f(x) \geq c\} \cup \{x : f(x) \leq -c\} \in M$

Afirmación 2.2

Si $f, g : X \to \Re$ son medibles, entonces $\{x : f(x) \geq g(x)\} \in M$.

Demostración:

Sea $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ una sucesión de todos los racionales. Entonces

$$\{x : f(x) \geq g(x)\} = \sim \{x : f(x) < g(x)\} = \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) < r_n < g(x)\}$$

$$= \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x : f(x) < r_n\} \cap \{x : g(x) > r_n\}] \in M$$

Afirmación 2.3

Si f y g son medibles también lo son $f+g$, fg.

Demostración:

$$\{x : f(x) + g(x) \geq c\} = \{x : f(x) \geq c - g(x)\} \in M$$

$$\{x : f(x)g(x) \geq c\} = \left\{x : \frac{1}{4}\left[(f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\right] \geq c\right\} \in M$$

Definición 2.2

Sea $f : X \to \Re$, entonces se definen

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & si \quad f(x) < 0 \end{cases} \quad , f^-(x) = \begin{cases} 0 & si \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Definición 2.3

Sean $f, g : X \to \Re$, entonces se definen

$$f(x) \cup g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \; f(x) \cap g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Afirmación 2.4

Si $f, g : X \to \Re$ son medibles, también lo son $f^+, f^-, f \vee g$ y $f \wedge g$.

Demostración:

(i) $f^{+}(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]\in M$

(ii) $f^{-}(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(x)]\in M$

(iii) $f(x)\vee g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]+\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|\in M$

(iv) $f(x)\wedge g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]-\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|\in M$

Afirmación 2.5

Si $f_n : X \to \Re$ es medible para cada $n=1,2,\ldots$ y si se definen las siguientes funciones:

$f(x)=\inf f_n(x)$; $F(x)=\sup f_n(x)$

$f^{*}(x)=\liminf f_n(x)$; $F^{*}(x)=\limsup f_n(x)$

Entonces f, F, f^{*} y F^{*} son medibles.

Demostración:

$$\{x : f(x)\geq c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x)\geq c\}\in M$$

$$\{x : F(x)> c\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x)> c\}\in M$$

También

$f^{*}(x)=\sup\limits_{m\geq n}\{\inf f_m(x)\}$; $F^{*}(x)=\inf\limits_{n\geq 1}\{\sup\limits_{m\geq n} f_m(x)\}$

que son medibles por lo ya demosrado.

Corolario 2.1

Si $f_n : X\to[0,\infty)$ es medible para $n=1,2,\ldots$ y si $f(x)=\lim f_n(x), x\in X$, entonces f es medible.

Demostración:

En este caso $f(x)=\lim f_n(x)=\liminf f_n(x)$.

Definición 2.3

$\varphi : X \to \Re$ se llama simple si es medible y si toma solamente un número finito de valores distintos.

Teorema 2.2

Si f es una función medible, no-negativa, entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples, no-negativas tales que

(i) $0 \le \varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x) \quad para \ x \in X, \ n \in N$

(ii) $f(x) = \lim \varphi_n(x) \quad para \ x \in X$

Demostración:

Sea la sucesión $\{E_{kn}\}$ $k = 0,1,\ldots,n2^n$, $n \in N$, de conjuntos medibles definidos como

$$E_{kn} = \{x : k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}\}$$
$$E_{n2^n,n} = \{x : f(x) \ge n\}$$

Defínase

$$\varphi_{n-1}(x) = k2^{-n+1}, \qquad si \ x \in E_{k,n-1}$$
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_{n-1}(x), & si \ x \in E_{2k,n} \\ \varphi_{n-1}(x) + 2^{-n}, & si \ x \in E_{2k+1,\,n} \end{cases}$$

ya que $E_{k,\,n-1} = E_{2k,\,n} \cup E_{2k+1,\,n}$, entonces

$$\varphi_{n-1}(x) \le \varphi_n(x).$$

exhibiéndose la igualdad entre conjuntos como $x \in E_{k,\,n-1}$ implica $k2^{-n+1} \le f(x) < (k+1)2^{-(n-1)}$, es decir,

(i) $2k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}$, ó,

(ii) $(2k+1)2^{-n} \le f(x) < 2(k+1)2^{-n}$

lo que implica:

$$x \in E_{2k,\,n} \qquad ó \qquad x \in E_{2k+1,\,n}$$

$$\therefore x \in E_{2k,\,n} \cup E_{2k+1,\,n} \quad \Rightarrow \quad E_{k,\,n-1} \subset E_{2k,\,n} \cup E_{2k+1n,\,n}$$

La contención en el otro sentido se sigue paso a paso en sentido inverso.

Para mostrar la convergencia de $\varphi_n(x)$ a $f(x)$ considérese lo siguiente, sea $x \in X$ entonces existe un natural N tal que $k2^{-N} \leq f(x) < (k+1)2^{-N}$ $\therefore x \in E_{kN} \Rightarrow$ $|\varphi_N(x) - f(x)| < \frac{1}{2^N} \Rightarrow \lim \varphi_n(x) = f(x)$, para toda $x \in X$.

Corolario 2.2

Las funciones simples son densas en el conjunto de las funciones medibles, es decir, las combinaciones lineales de func iones características son densas en el conjunto de las funciones medibles.

En este capítulo se establecerá el c oncepto de integral para funciones medibles cualesquiera y algunas propiedades básicas. Se hará por medio de las funciones simples y del teorema 2.2

Sea X un conjunto, M una σ-algebra definida sobre X y θ una medida positiva, σ-finita definida en M .

Afirmación 3.1

Toda función simple $\varphi : X \to \Re$ se puede representar como $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{Ej}$, con $a_j \in \Re$ y χ_{Ej} es la función característica del conjunto Ej y $\bigcup_{j=1}^{\infty} Ej = X$ con $E_i \cap E_k = \varnothing$, $i \neq k$. Cuando $a_i \neq a_k$ se dirá que es la <u>representación canónica</u> de φ.

Afirmación 3.2

Si $\varphi : X \to [0, \infty)$ es una función simple c on representación canónica $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{Ej}$, se define la integral de φ con respecto a θ como el número en el intervalo $[0, \infty]$, calculado como

$$\int_X \varphi \, d\theta = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, \theta(Ej)$$

En la expresión anterior, se conviene en $0(+\infty) = 0$ de manera que la integral de la función idénticamente cero vale cero tanto en el caso de ser la medida de X finita como cuando tiene medida infinita.

Lema 3.1

Si $\varphi : X \to [0, \infty)$ es una función simple con representación canónica $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ y $c \geq 0$, entonces
$$\int_X c\varphi \, d\theta = c \int_X \varphi \, d\theta.$$

Demostración:

Si $c = 0$, entonces $c\varphi$ es idénticamente cero y vale la igualdad.

Si $c > 0$, entonces $c\varphi : X \to [0, \infty)$ y su representación canónica es

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi_{E_j}.$$

Se concluye que

$$\int_X c\varphi \, d\theta = \sum_{j=1}^{n} c a_j \theta(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \theta(E_j) = c \int_X \varphi \, d\theta.$$

Lema 3.2

Si $\varphi, \psi : X \to [0, \infty)$ son simples, entonces
$$\int_X (\varphi + \psi) \, d\theta = \int_X \varphi \, d\theta + \int_X \psi \, d\theta.$$

Demostración:

Sean las representaciones canónicas de φ y ψ

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{Ej} \quad , \qquad \psi = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}$$

entonces $\varphi + \psi$ tiene una representación

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [a_j + b_k] \chi_{Ej \cap F_k}$$

que en general no es canónica pues puede ser que existan al menos dos conjuntos de la colección $E_i \cap F_k$ para los cuales $a_j + b_k$ coincidan; sean $c_h, h = 1, \ldots, p$ los números distintos del conjunto $S = \{a_j + b_k : j = 1, \ldots, n,\, k = 1, \ldots, m\}$ y defínase G_h la unión de aquellos conjuntos $E_j \cap F_k$ con la propiedad de que $a_j + b_k = c_h$. De esta manera

$\theta(c_h) = \sum_{i,\, j\in(h)} \theta(E_j \cap F_k)$ donde la suma se cons idera entre las parejas a_j, b_k tales que $c_h = a_j + b_k$ Por lo anterior, se logra la representación canónica de $\varphi + \psi$ como

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_X (\varphi + \psi)\, d\theta &= \sum_{h=1}^{p} c_h \theta(G_h) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{i,\, j\in(h)} c_h \theta(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{h=1}^{p} \sum_{i,\, j\in(h)} (a_j + b_k)\theta(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\theta(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j\, \theta(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \theta(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \theta(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k\, \theta(F_k) \\
&= \int_X \varphi\, d\theta + \int_X \psi\, d\theta .
\end{aligned}$$

Lema 3.3

Sea $\varphi : X \to [0, \infty)$ una función simple y defínase λ para cada conjunto $E \in M$ como

$$\lambda(E) = \int_X \varphi\, \chi_E\, d\theta$$

entonces λ es una medida positiva sobre M.

Demostración:

Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ su representación canónica, entonces $\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$ es canónica $\therefore$

$$\lambda(E) = \int_X \varphi \chi_E \, d\theta = \int_X \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \chi_{E_j \cap E}\right) d\theta$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_X \chi_{E_j \cap E} \, d\theta$$

$$\therefore \qquad \lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \theta\left(E_j \cap E\right)$$

Es decir, que λ es una combinación lineal no- negativa de medidas positivas sobre M, lo que es una medida.

Definición 3.3

Sea $f : X \to [0, \infty)$ medible, entonces se define la integral de f con respecto a θ como el número entre $[0, \infty)$ calculada como

$$\int_X f \, d\theta = \sup \int_X \varphi \, d\theta$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples $\varphi : X \to [0, \infty)$ que satisfacen $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para toda $x \in X$. Si $f : X \to [0, \infty)$ es medible y $E \in M$, entonces $\varphi \chi_E$ es medible y $f \chi_E : X \to [0, \infty)$ definiéndose la integral de f sobre E con respecto a θ como el número

$$\int_E f \, d\theta = \int_X f \chi_E \, d\theta$$

Lema 3.4

Si $f, g : X \to [0, \infty)$ son medibles y $f \leq g$ entonces

$$\int_X f \, d\theta \leq \int_X g \, d\theta .$$

Demostración:

Si $\varphi : X \to [0, \infty)$ es simple y además $0 \le \varphi \le f$, entonces $0 \le \varphi \le g$ y se sigue

$$\sup_{0 \le \varphi \le f} \int_X \varphi \, d\theta = \int_X f \, d\theta \le \int_X g \, d\theta$$

Lema 3.5

Si $f : X \to [0, \infty)$ es medible y $E, F \in M$ con $E \subset F$ entonces

$$\int_X f \, d\theta \le \int_F f \, d\theta$$

Demostración:

Como $f\chi_E \le f\chi_F$ se concluye la afirmación.

Teorema 3.1 (Convergencia monótoma)

Si $\{f_n\}$ es una sucesión monótona creci ente de funciones no-negativas, medibles que converge a f, entonces

$$\int_X f \, d\theta = \lim \int_X f_n \, \theta.$$

Demostración:

Por el teorema 2.1 la función f es medible, y de $f_n \le f_{n+1} \le f$ se concluye

$$\int_X f_n \, d\theta \le \int_X f_{n+1} \, d\theta \le \int_X f \, d\theta, \ \forall n \in N$$

$$\therefore \qquad \lim \int_X f_n \, d\theta \le \int_X f \, d\theta$$

Para la desigualdad contraria, tómese α un real con $0 \le \alpha \le 1$ y sea φ una función simple con $0 \le \varphi \le f$.

Defínase $A_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$, de esta manera $A_n \in M$, $A_n \subset A_{n+1}$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Por lo ya construido

$$\int_{A_n} a\varphi \, d\theta \leq \int_{A_n} f_n \, d\theta \leq \int_X f_n \, d\theta.$$

Como $\alpha\varphi$ es simple, entonces existe N tal que

$$\alpha\varphi \leq f_n, \ \forall n \geq N \ \therefore \ A_n = X, \ \forall n \geq N$$

$$\therefore \quad \int_{A_n} \alpha\varphi \, d\theta = \int_X \alpha\varphi \, d\theta \leq \int_X f_n \, d\theta, \ \forall n \geq N.$$

$$\alpha \int_X \varphi \, d\theta \leq \int_X f_n \, d\theta, \ \forall n \geq N$$

$$\alpha \int_X \varphi \, d\theta \leq \lim \int_X f_n \, d\theta$$

y puesto que vale para cualquier $\alpha < 1$

$$\int_X \varphi \, d\theta \leq \lim \int_X f_n \, d\theta$$

$$\therefore \quad \sup \int_X \varphi \, d\theta = \int_X f \, d\theta \leq \lim \int_X f_n \, d\theta$$

$$0 \leq \varphi \leq f$$

Corolario 3.1

(i) Sea $f : X \to [0, \infty)$ medible y $c \geq 0$, entonces $cf : X \to [0, \infty)$ es medible e $\int_X cf \, d\theta = c \int_X f \, d\theta$.

(ii) Sean $f, g : X \to [0, \infty)$ medibles, entonces $f + g : X \to [0, \infty)$ es medible y $\int_X (f + g) \, d\theta = \int_X f \, d\theta + \int_X g \, d\theta$.

Demostración:

(i) Si $c \equiv 0$, es cierta la afirmación.

Si $c > 0$, sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión monótona creciente de funciones simples con $\varphi_n : X \to [0, \infty)$ para $n = 1,2,\ldots$ que converge a f sobre X (Teorema 2.2). Entonces $\{c\varphi_n\}$ es una sucesión monótona que converge a cf. Al considerarse el lema 3.1 y el teorema de la convergencia monótona vale

$$\begin{aligned}\int_X cf\, d\theta &= \lim \int_X c\varphi_n\, d\theta = c \lim \int_X \varphi_n\, d\theta \\ &= c \int_X f\, d\theta.\end{aligned}$$

(ii) Si $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ son sucesiones monótonas crecientes de funciones simples que convergen a f y g con $\varphi_n, \psi_n : x \to [0, \infty)$, $n = 1,2,\ldots$, entonces $\{\varphi_n + \psi_n\}$ es una sucesión monótona creciente que converge a $f + g$. Considérese los lemas 3.1, 3.2 y el teorema 3.1, entonces

$$\begin{aligned}\int_X (f + g)\, d\theta &= \lim \int_X (\varphi_n + \psi_n)\, d\theta \\ &= \lim \int_X \varphi_n\, d\theta + \lim \int_X \varphi_n\, d\theta \\ &= \int_X f\, d\theta + \int_X g\, d\theta.\end{aligned}$$

El siguiente lema es muy importante para manipular sucesiones de funciones no monótonas.

Lema 3.6 (Lema de Fatou).

Si $f_n : X \to [0, \infty)$ es medible para cada $n = 1,2,\ldots$, entonces

$$\int_X (\liminf f_n)\, d\theta \le \liminf \int_X f_n\, d\theta.$$

Demostración:

Sea $g_m = \inf \{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$ así que $g_m \leq f_n$, siempre que $m \leq n$. Entonces

$$\int_X g_m \, d\theta \leq \int_X f_n \, d\theta, \qquad m \leq n$$

así que

$$\int_X g_m \, d\theta \leq \liminf \int_X f_n \, d\theta.$$

Ya que la sucesión $\{g_m\}$ es creciente y converge al $\liminf f_n$ el teorema de la convergencia monótona implica que

$$\int_X (\liminf f_n) \, d\theta = \lim \int_X g_m \, d\theta \leq \liminf \int_X f_n \, d\theta$$

Corolario 3.2

Sea $f : X \to [0, \infty)$ medible, si λ se define sobre M como

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\theta = \int_X f \chi_E \, d\theta.$$

entonces λ es una medida positiva.

Demostración:

Como $f \geq 0$ se concluye que $\lambda(E) \geq 0$. Si $E = \varnothing$, entonces $f\chi_E$ es idénticamente nula, de manera que $\lambda(\varnothing) = 0$.

Para comprobar que λ es σ –aditiva, considérese una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos ajenos y medibles cuya unión sea E y defínase f_n como sigue:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$

Por el corolario 3.1 (ii), y por inducción

$$\int_X f_n \, d\theta = \sum_{k=1}^{n} \int_X f\chi_{E_k} \, d\theta = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

Pero de considerar que $\{f_n\}$ es una sucesión creciente de funciones $f_n : X \to [0, \infty)$ medibles que convergen a $f\chi_E$ y de aplicar el teorema de la convergencia monótona, se concluye que

$$\lambda(E) = \int_X f\chi_E \, d\theta = \lim \int_X f_n \, d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Finalmente, después de construido lo ant erior, se define la integral de funciones medibles f con $f : X \to \Re$.

Definición 3.3

Sea $f : X \to \Re$ medible y tal que al menos una de las integrales de f^+ y f^- es finita con respecto a θ, entonces se define la integral de f con respecto a θ como

$$\int_X f \, d\theta = \int_X f^+ \, d\theta - \int_X f^- \, d\theta.$$

Definición 3.4

Sea $L(X)$ la colección de las funciones sumables que consiste de todas las funciones θ-medibles, definidas en X, tales que tanto f^+ como f^- de f tienen integrales finitas con respecto a θ.

Los siguientes resultados valdrán para este espacio de funciones $L(X)$.

Para $f \in L(X)$ que sea expresable como la diferencia de funciones f_1, f_2 medibles no-negativas ambas con integral finita, entonces

$$\int_X f \, d\theta = \int_X f_1 \, d\theta - \int_X f_2 \, d\theta.$$

De hecho, ya que $f = f^{+} - f^{-} = f_1 - f_2$ se concluye

$$f^{+} + f_2 = f^{-} + f_1$$

aplicando el corolario 3.1 (ii)

$$\int_X f^{+} \, d\theta + \int_X f_2 \, d\theta = \int_X f^{-} \, d\theta + \int_X f_1 \, d\theta$$

y como todas son finitas, se tiene

$$\int_X f \, d\theta = \int_X f^{+} \, d\theta - \int_X f^{-} \, d\theta = \int_X f_1 \, d\theta - \int_X f_2 \, d\theta$$

Lema 3.7

Si $f \in L(X)$, defínase λ sobre M como

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\theta \ , \ \forall E \in M$$

Entonces λ es una medida.

Demostración:

Ya que $f^{+}, f^{-} : X \to [0, \infty)$ el corolario 3.2 implica que λ^{+} y λ^{-} definidas por

$$\lambda^{+}(E) = \int_E f^{+} \, d\theta \ , \lambda^{-}(E) = \int_E f^{-} \, d\theta$$

son medidas positivas sobre X y ambas finitas pues $f \in L(X)$ y como $\lambda = \lambda^{+} - \lambda^{-}$ se sigue lo propuesto.

Teorema 3.2

Una función medible $f \in L(X)$ si y solo si $|f|$ pertenece a $L(X)$. En éste caso

$$\left|\int_X f \, d\theta\right| \leq \int_X |f| \, d\theta$$

Demostración:

Por definición f pertenece a $L(X)$ si y solo si $f^+, f^- : X \to [0, \infty)$ son medibles y tienen integrales finitas. Como $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ y $|f|^- = 0$, lo propuesto se sigue del lema 3.4 y del corolario 3.1 (ii). Es más

$$\begin{aligned} \left|\int_X f \, d\theta\right| &= \left|\int_X f^+ \, d\theta - \int_X f^- \, d\theta\right| \\ &\leq \int_X f^+ \, d\theta + \int_X f^- \, d\theta = \int_X |f| \, d\theta \end{aligned}$$

Corolario 3.3

Si f es medible, $g \in L(X)$ y $|f| \leq |g|$, entonces $f \in L(X)$, e

$$\int_X |f| \, d\theta \leq \int_X g \, d\theta$$

Demostración:

Se concluye del lema 3.4 y del teorema anterior.

Teorema 3.3

Si $f, g \in L(X)$, entonces αf, $f + g \in L(X)$ para α real y además

$$\int_X \alpha f \, d\theta = \alpha \int_X f \, d\theta \quad , \qquad \int_X (f+g) \, d\theta = \int_X f \, d\theta + \int_X g \, d\theta$$

Demostración:

Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha f = 0$, así que

$$\int_X \alpha f \, d\theta = 0 = \alpha \int_X f \, d\theta .$$

Si $\alpha > 0$, entonces $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, entonces

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f \, d\theta &= \int_X \alpha f^+ \, d\theta - \int_X \alpha f^- \, d\theta \\ &= \alpha \left\{ \int_X f^+ \, d\theta - \int_X f^- \, d\theta \right\} \\ &= \alpha \int_X f \, d\theta\end{aligned}$$

El caso $\alpha < 0$ se maneja similarmente.

Si f y g pertenecen a $L(X)$, entonces $|f|$ y $|g|$ pertenecen a $L(X)$. Como $|f + g| \leq |f| + |g|$, se sigue de los corolarios 3.1 (i) y 3.3 que $f + g \in L(X)$. Para establecer la relación deseada, observemos que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Ya que $f^+ + g^+$ y $f^- + g^-$ son funciones de $L(X)$, no-negativas, se sigue

$$\int_X (f + g) \, d\theta = \int_X (f^+ + g^+) \, d\theta - \int_X (f^- + g^-) \, d\theta$$

Al aplicar el corolario 3.1 (ii) y reordenar los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_X (f + g) \, d\theta &= \int_X f^+ \, d\theta - \int_X f^- \, d\theta + \int_X g^+ d\theta - \int_X g^- d\theta \\ &= \int_X f \, d\theta + \int_X g \, d\theta .\end{aligned}$$

Teorema 3.4 (De la convergencia dominada)

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de $L(X)$ que converge a una función f medible valuada en los reales y si existe una función $g \in L(X)$ tal que $|f_n| \leq g$, $n = 1,2,\ldots$ Entonces $f \in L(X)$ e

$$\int_X f \, d\theta = \lim \int_X f_n \, d\theta$$

Demostración:

Por el corolario 3.3 se concluye que $f \in L(X)$. Como $g + f_n \geq 0$, se puede aplicar el lema de Fatou y el teorema 3.3 para obtener

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\theta + \int_X f \, d\theta = \int_X (f+g) \, d\theta &\leq \lim\inf \int_X (g + f_n) \, d\theta \\
&\leq \lim\inf \left[\int_X g \, d\theta + \int_X f_n \, d\theta \right] \\
&\leq \int_X g \, d\theta + \lim\inf \int_X f_n \, d\theta
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \int_X f \, d\theta \leq \lim\inf \int_X f_n \, d\theta \qquad (1)$$

Como $g - f_n \geq 0$, al aplicar el lema de Fatou y el corolario 3.3 de nuevo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\theta - \int_X f \, d\theta = \int_X (g - f) \, d\theta &\leq \lim\inf \int_X (g - f_n) \, d\theta \\
&= \int_X g \, d\theta - \lim\sup \int_X f_n \, d\theta
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \lim\sup \int_X f_n \, d\theta \leq \int_X f \, d\theta \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$\int_X f \, d\theta = \lim \int_X f_n \, d\theta$$

Corolario 3.4

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $L(X)$ que converge puntualmente a f sobre X y $f_n(x) \geq f_{n+1}(x), \forall x \in X$, entonces

$$\lim \int_X f_n \, d\theta = \int_X f \, d\theta.$$

Definición 4.1

Un conjunto medible E es positivo con respecto a una medida ϕ si $\phi(F) \geq 0,\ \forall F \subset E,\ F \in M.$

Definición 4.2

Un conjunto medible E es negativo con respecto a una medida ϕ si $\phi(F) \leq 0,\ \forall F \subset E,\ F \in M.$

Afirmación 4.1

Si E_1, E_2 son negativos, entonces $E_1 - E_2$ es negativo.

Demostración:

Como todo medible F contenido en $E_1 - E_2$ está contenido en $E_1 \therefore \phi(F) \leq 0,\ \forall F \subset E_1 - E_2.$

Nótese, de la demostración, que t odo conjunto medible contenido en un negativo es a su vez un conjunto negativo.

Afirmación 4.2

Si $E_1, E_2, \ldots$ son negativos, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es negativo.

Demostración:

Sea $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ F \in M,\ F = F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F \cap E_i)\ \therefore$

$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_1 - F \cap E_2) \cup (F \cap E_1 - F \cap E_2 - F \cap E_3) \cup \cdots$

$\phi(F) = \phi(F \cap E_1) + \phi(F \cap E_1 - F \cap E_2) + \cdots \leq 0.$

$\therefore \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es negativo.

Lema 4.1

Todo conjunto de medida negativa conti ene a un conjunto negat ivo con medida negativa.

Demostración:

Sea E un conjunto con medida negativa, i.e., $-\infty < \beta \leq \phi(E) < 0, \beta \in \Re$. Para E vale la siguiente disyunción: o el es un conjunto negativo, o no lo es, en el primer caso el lema quedaría demostr ado, por lo tanto, supóngase el segundo. Entonces, existe por lo menos un medible $F \subset E$ tal que $\phi(E) > 0$. Bajo esta, suposición, sea

$$\alpha_1 = \left\{ n \in N : \exists F \subset E, F \in M \text{ y } \phi(F) > \frac{1}{n} \right\}$$

entonces $\alpha_1 \neq \varnothing$ $\therefore$ existe $k_1 \in \alpha_1$ con $k_1 \leq n, \forall n \in \alpha_1$. Ahora bien, $k_1 \in \alpha_1$ es equivalente a que exista un medible $E_1 \subset E$ con $\phi(E_1) > \frac{1}{k_1} > 0$, entonces $\phi(E) < 0$ y $E = E_1 \cup (E - E_1)$ implican $\phi(E) = \phi(E_1) + \phi(E - E_1) < 0$ de aquí que $\phi(E - E_1) < 0$, es decir, se tiene otro conjunto $E - E_1$ con medida negativa. Se demuestra por inducción , que existen dos sucesiones $\{k_i\}$ y $\{E_i\}$ tales que

(i) k_i es el primer elemento de α_i, habiéndose definido

$$\alpha_i = \left\{ n \in N : \exists F \subset E - E_1 - E_2 - \cdots - E_{i-1}, F \in M \ y\, \phi(F) > \frac{1}{n} \right\}$$

(ii) $E_i \subset E - E_1 - \cdots - E_{i-1}$ y $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$

(iii) $\phi(E_i) > \frac{1}{k_i}$

Si en algún paso de esta construcción, $E - E_1 - \cdots - E_{i-1}$ resultara negativo, el lema quedaría demostrado; en caso contrario, $\alpha_i \neq \varnothing$ y es posible continuar la construcción.

Por otra parte, nótese que $0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(E_i) < \infty$, en particular $k_i \to \infty$ si $i \to \infty$. Esto es cierto, ya que por un lado $\frac{1}{k_i} < \phi(E_i), i = 1,2,\ldots,$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(E_i) = \phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ pues $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$ y por otro $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset E$ y $\phi(E) < 0$ $\quad \therefore \phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty.$

Sea $F_0 = E - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces F_0 es negativo porque : $F \subset F_0$ con $F \in M$ y $\phi(F) > 0$ implican que existe n_0 tal que $\phi(F) > \frac{1}{n_0}$ y como $\lim k_i = \infty$ entonces existe $k_i > n_0$, lo cual contradice la definición de k_i pues $F \subset F_0 \Rightarrow F \subset E - E_1 \cdots - E_{i-1}$ y $n_0 \in \alpha_i$ pero $n_0 < k_i$.

Teorema 4.1 De la descomposición.

Si ϕ es una medida cualquiera sobre X, entonces existen conjuntos medibles ajenos A, B tales que $A \cup B = X$, siendo A positivo y B negativo respecto a ϕ.

Demostración:

La idea de la demostración, es construir un conjunto negativo B de medida mínima y mostrar que el conjunto $A = X - B$ es positivo.

Sea $\mathrm{N} = \{B \in M : B \text{ es negativo}\}$, $\mathrm{N} \neq \varnothing$ pues $\varnothing \in \mathrm{N}$ entonces existe $b = \inf\{\phi(B) : B \in \mathrm{N}\}$. Sea $\{B_i\}, B_i \in \mathrm{N}, i = 1,2,\ldots$ tal que $\lim \phi(B_i) = b$. Defínase $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathrm{N}$, entonces $\beta \leq \phi(B)$ y como $B = B_i \cup (B - B_i), i = 1,2,\ldots,$

$$\phi(B) = \phi(B_i) + \phi(B - B_i)$$
$$\phi(B) \leq \phi(B_i) \quad \therefore \quad \phi(B) \leq \lim \phi(B_i) = b.$$

Esto implica que $\phi(B) = b$ y $b > -\infty$.

Sea $A = X - B$ y supóngase que A no fuera positivo, es decir, existiría un medible $E \subset A$, con $\phi(E) < 0$. Por el lema anterior, E siempre contiene a un conjunto F con medida negativa $\therefore$ $B \cup F$ es negativo y $B \cap F = \varnothing$ cumpliendo con $\phi(B \cup F) = \phi(B) + \phi(F) = \beta \neq \phi(F) < \beta$ lo que es una contradicción con la selección de β $\therefore$ A es positivo y el teorema queda demostrado.

Definición 4.3

Si θ es una medida positiva, ϕ una medida y $Dom(\theta) = Dom(\phi) = M$, se dirá que ϕ es θ-continua si $\theta(E) = 0 \Rightarrow \phi(E) = 0$.

Lema 4.2

Sean ϕ y θ medidas, θ - finita y positiva, si ϕ es θ - continua entonces dada $E > 0$, existen conjuntos ajenos $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ y para cualquier medible $E \subset X_n$,

$$\varepsilon(n-1)\theta(E) \leq \phi(E) \leq \varepsilon n \theta(E)$$

Demostración:

Defínase la medida $\phi - \varepsilon n \theta$, $n = 1, 2, \ldots$

Por el lema anterior, existen conjuntos ajenos A_n, B_n tales que, $A_n \cup B_n = X$.

(i) $(\phi - n\varepsilon\theta)(E) \geq 0$, $E \subset A_n$, $E \in M$.

(ii) $(\phi - n\varepsilon\theta)(E) \leq 0$, $E \subset B_n$, $E \in M$.

Sea $D_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Por construcción la sucesión $\{D_n\}$ cumple que $D_n \supset D_{n+1}$ y D_n es positivo para $\phi - n\varepsilon\theta$ porque si se toma un medible $E \subset D_n$, entonces

$$E = E \cap D_n = E \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = (E \cap A_n) \cup (E \cap A_{n+1}) \cup \cdots$$
$$= E_n' \cup E_{n+1}' \cup \cdots$$

con $E_{n+k}' = E \cap A_n - E \cap A_{n+1} - \cdots - E \cap A_{n+k}$, $k \geq 1$

$E_k' \subset A_k$ y $E_j' \cap E_i' = \varnothing$, $i \neq j$, de aquí que

$$\phi(E) = \sum_{k=n}^{\infty} \phi(E_n') \geq \sum_{k=n}^{\infty} k\varepsilon\theta(E_n') \geq \sum_{k=n}^{\infty} n\varepsilon\theta(E_n')$$
$\geq n\varepsilon\theta(E)$, por lo tanto

(i) $\phi(E) \geq n\varepsilon\theta(E)$, $E \subset D_n$, E medible

(ii) $\phi(E) \leq n\varepsilon\theta(E)$, $E \subset \sim D_n$, E medible, pues $\sim D_n \subset \sim A_n$.

Es decir que D_n y $\sim D_n$ es una descomposición de X con respecto a la medida $\phi - \varepsilon n\theta$, $n = 1,2,\ldots$

Sea $X = X - D_1$, $X_n = D_{n-1} - D_n$, $n = 2,3,\ldots$

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y cumplen con las afirmaciones, pues $E \subset X_n$ es equivalente a que $E \subset D_{n-1} - D_n$, es decir, $E \subset D_{n-1}$ y $E \subset \sim D_n$ cumpliéndose

(i) $\phi(E) \geq \varepsilon(n-1)\theta(E)$

(ii) $\phi(E) \leq \varepsilon\, n\theta(E)$

lo que reescribiéndose queda

$$\varepsilon(n-1)\theta(E) \leq \phi(E) \leq \varepsilon n\theta(E).$$

Teorema 4.2 (Radón-Nikodym)

Si ϕ es una medida θ-continua y ambas, ϕ,θ, son σ-finitas, entonces existe una función $f(x)$ tal que $\phi(E)=\int_E f\, d\theta, E\in M$.

Demostración:

Caso I. Supóngase $0\leq\theta\leq(E)<\infty,\ 0\leq\phi(E)<\infty, \forall E\in M$.

Por el lema 4.2, dado $\varepsilon>0$, existen conjuntos ajenos $X_1,X_2,\ldots$, tales que

$$\varepsilon(n-1)\theta(E)\leq\phi(E)\leq\varepsilon\theta(E),\ E\subset X_n,\ E\in M.$$

Defínase $g(x)=n\varepsilon$, si $x\in X_n$. Entonces para cualquier $E\subset X_n$ se cumple $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap X_n)$ y $(n-1)\varepsilon\theta(E\cap X_n)\leq\phi(E\cap X_n)\leq n\varepsilon\theta(E\cap X_n)$, es decir,

$n\varepsilon\theta(E\cap X_n)-\varepsilon\theta(E\cap X_n)\leq\phi(E\cap X_n)\leq n\varepsilon\theta(E\cap X_n)$

$$\therefore\qquad \int_{E\cap X_n} g\, d\theta-\varepsilon\theta(E\cap X_n)\leq\phi(E\cap X_n)\leq\int_{E\cap X_n} g\, d\theta$$

Y sumando sobre n

$$\int_E g\, d\theta-\varepsilon\theta(E)\leq\phi(E)\leq\int_E g\, d\theta$$

En particular, cuando $\varepsilon=\frac{1}{n}$ existe g_n (por lo anterior) tal que

(i) $\int_E g_n\, d\theta-\frac{1}{n}\theta(E)\leq\phi(E)\leq\int_E g_n\, d\theta$

(ii) $\lim\int_E g_n\, d\theta=\phi(E)$

Sea $f_n=g_1\cap g_2\cap\cdots\cap g_n$, entonces es claro que $f_n\leq g_n$, sobre E y para $n=1,2,\ldots$

(iii) $\int_E f_n\, d\theta\leq\int_E g_n\, d\theta$

Defínase $E_i = \{x : f_n(x) = g_i(x)\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, entonces $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ y además, por (i), $\phi(E) = \phi(E_1) + \cdots + \phi(E_n) \leq \int_{E_1} g_1 \, d\theta + \cdots + \int_{E_n} g_n \, d\theta$

$$\therefore \qquad \phi(E) \leq \int_{E_1} f_n \, d\theta + \cdots + \int_{E_n} f_n \, d\theta = \int_E f_n \, d\theta$$

Es decir, $\phi(E) \leq \int_E f_n \, d\theta$, por lo tanto, al considerar (iii)

$$\phi(E) \leq \int_E f_n \, d\theta \leq \int_E g_n \, d\theta$$

que al pasar al límite y considerar (i)

$$\phi(E) \leq \lim \int_E f_n \, d\theta \leq \lim \int_E g_n \, d\theta = \phi(E)$$

$$\therefore \qquad \lim \int_E f_n \, d\theta = \phi(E) \quad .$$

Si se define ahora $f = \lim f_n$ y se aplica el corolario 3.4 $\phi(E) = \lim \int_E f \, d\theta = \int_E f \, d\theta$

$$\therefore \qquad \phi(E) = \int_E f \, d\theta.$$

Caso 2. Si $\theta(E) = \infty$ y $\phi(\text{E}) = \infty$, entonces existe una sucesión de conjuntos ajenos $\{X_n\}$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con $\phi(X_n) < \infty$ y $\theta(X_n) < \infty$., $n = 1,2,\ldots$ Por lo ya demostrado, para cada X_n, existe una función f_n tal que $\forall E \in M$.

$$\int_{E \cap X_n} f_n \, d\theta = \phi(E \cap X_n), \; n = 1,2,\ldots$$

Defínase $f = f_n$ sobre $E \cap X_n$, entonces

$$\int_E f \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap X_n} f_n \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(E \cap X_n) = \phi(E)$$

Caso 3. Si ϕ cambia de signo, se usa la descomposición de Hahn, en otras palabras, existen conjuntos ajenos A, B con A positivo y B negativo tales que $X = A \cup B$ y aplíquese lo ya construido para afirmar la existencia de las funciones f_A y f_B con las propiedades de que cualquier medible $E \subset X_n$ cumple

$$\phi(E \cap A) = \int_{E \cap A} f_A \, d\theta$$

$$-\phi(E \cap B) = \int_{A \cap B} f_B \, d\theta$$

Sean entonces,

$$f_1 = \begin{cases} F_A & \text{sobre } A \\ 0 & \text{sobre } B \end{cases} \qquad , f_2 = \begin{cases} 0 & \text{sobre } A \\ -f_B & \text{sobre } B \end{cases}$$

y defínase $f = f_1 + f_2$, entonces se cumplirá

$$\phi(E) = \phi(E \cap A) + \phi(E \cap B) = \int_{E \cap A} f_1 \, d\theta + \int_{E \cap B} f_2 \, d\theta$$

$$\therefore \phi(E) = \int_E (f_1 + f_2) \, d\theta = \int_E f \, d\theta.$$

Un hecho que se concluye con el teorema de Radón-Nikodym son las condiciones necesarias y suficientes par a que la integral de una función medible sea una medida.

Otro resultado es sobre funcionales lineal es en el que es relevante el teorema de Radón-Nikodym. Para expresar este resultado es necesario introducir la siguiente notación.

Sea un conjunto X con una medida θ positiva y σ-finita, y denomínese por $L(X)$ al espacio de todas las funciones reales medibles $f(x)$ con integral finita sobre X , teniendo como norma

$$\|f\| = \int_X |f(x)| d\theta .$$

Sea también $\varphi(x)$ una función real, medible sobre X y supóngase que $\varphi(x)$ está acotada sobre X salvo en conjuntos de medida cero.

Entonces la integral

$$I_\varphi f = \int_X f(x)\, d\theta$$

existe y define una funcional lineal sobre $L(X)$, pues ella satisface las dos condiciones siguientes:

(i) Si f_1 y f_2 son dos funciones de $L(X)$ y α_1, α_2 son dos números reales, entonces

$$I_\varphi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_\varphi f_1 + \alpha_2 I_\varphi f_2$$

(ii) Si $f_m \in L(X)$ es una sucesión tal que $\|f_m\| \to 0$ entonces $I_\varphi f_m \to 0$, lo cual se sigue de la estimación

$$|I_\varphi f_m| = \left|\int_X f_m(x)\varphi(x)\, d\theta\right| \leq \sup_{x \in X} es\, |\varphi(x)| I_\varphi(|f_m|)$$

donde

$\sup_{x \in X} es\, |\varphi(x)| = \sup\{c \in \Re : |\varphi(x)| \leq c$ sobre X salvo un conjunto de medida nula $\}$

Teorema 5.1

Dada una funcional lineal continua Jf definida sobre el espacio $L(X)$, existe una función $\varphi(x)$ real y medible y acotada en X salvo un conjunto de media cero (esencialmente acotada) tal que

$$Jf = \int_X f(x)\varphi\,(x)\,d\theta$$

y además

$$\|J\| = \sup_{x \in X} es\, |\varphi(x)|$$

donde

$\|J\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |Jf|$ es la norma de la funcional.

Demostración:

Para cada conjunto de medida E con medida finita, con función característica χ_E escríbase

$$\Phi(E) = J\chi_E$$

teniéndose así una medida $\Phi(E)$ σ-finita.

Puesto que

(i) $$|\Phi(E)| = |J\chi_E| \leq \|J\| \|\chi_E\| = \|J\| I\chi_E = \|J\| \theta(E)$$

$\Phi(E)$ es absolutamente continua respecto a θ. Por lo tanto, aplicando el teorema de Radón-Nikodym,

$$\Phi(E) = \int_E \varphi(x)\, d\theta$$

donde $\varphi(x)$ tiene integral finita sobre cada E tal que $0 < \theta(E) < \infty$.

Sea $E = E_+ \cup E_-$, donde $E_+ = \{x : \varphi(x) > \|J\|\}$
$E_- = \{x : \varphi(x) < -\|J\|\}$.

Entonces por lo menos uno de los conjunt os anteriores tiene medida positiva. Si $\theta(E_+) > 0$, se tendría que

$$J\chi_{E_+} = \Phi(E_+) = \int_{E_+} \varphi(x)\, d\theta > \|J\| \theta(E_+),$$

en tanto que si $\theta(E_-) > 0$,

$$|J\chi_{E_-}| = |\Phi(E_-)| = \int_{E_-} |\varphi(x)|\, d\theta > \|J\| \theta(E_-)$$

Por otra parte, de acuerdo con (i)

$$\left|\Phi\left(E_{\pm}\right)\right| \leq \|J\| \theta\left(E_{\pm}\right)$$

Esta contradicción, exhibe que $\theta(E) = 0$.

Por construcción, las funcionales lineales continuas Jf e $I_\varphi f = \int_X f(x)\varphi(x)\, d\theta$, coinciden sobre las funciones característi cas de todos los conjuntos sumables.

Pero ya que las combinaciones lineal es de tales funciones son densas en $L(X)$, $Jf = I_\varphi f$ para toda $f \in L(X)$ que es justamente la afirmación del teorema. Es más

$$\sup_{x \in X} es\, |\varphi(x)| \leq \|J\| = \|I_\varphi\| \leq \sup_{x \in X} es\, |\varphi(x)|$$

lo que implica la igualdad antedicha.

Bibliografía

1. Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1966.
2. Halmos, P. R., *Measure Theory*, D. Van Nostrand, New York, 1950.
3. Saks, S., *Theory of the Integral*, Second edition, Monografje matematyczne , vol. 7, Warsaw, 1937. Reprinted by Hafner, New York.
4. Shilov, G. E., Gurevich, B. L., *Integral, measure and derivative: a unified approach*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs. N. J.