28

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN TEOREMA DE FUNCIONES IMPLICITAS Y UN TEOREMA DE NASH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO
DE MATEMATICA

PRESENTA

MARIA EUGENIA REYES GUERRERO

1972

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN TEOREMA DE FUNCIONES IMPLICITAS Y UN TEOREMA DE NASH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO

DE MATEMATICA .

presenta

MARIA EUGENIA REYES GUERRERO

México, D. F. 1972.

A mis padres

A Marusa

Mis agradecimientos a:

Dr. Pablo Barrera por su valiosa ayuda en la elaboración de esta tesis

Dr. Santiago López de Medrano por su sugerencia del tema de tesis y por su orientación.

Esta tesis fue
elaborada siendo
becaria del CIMASS

INTRODUCCION.

El objetivo de este trabajo es presentar la aplicación de un método iterativo (Newton) a la demostración de un Teorema de Funciones Implícitas y a su vez la aplicación de este teorema a la demostración de un teorema de geometría diferencial.

Este teorema de geometría diferencial sobre inmersión isométrica de variedades riemannianas en espacios euclidianos fue demostrado por primera vez por Nash (1956).

En 1961, Moser sugirió que el Teorema de Funciones Implícitas utilizado por Nash podría demostrarse con el método de Newton.

La demostración del Teorema de Nash que se usa en este trabajo se debe a Jacob Schwarz.

En el capítulo I se describe el método iterativo de Newton que permite encontrar soluciones aproximadas de la ecuación $f(x) = 0$.

Los capítulos II al V están dedicados a introducir los conceptos básicos sobre diferenciabilidad en espacios de Banach, sobre variedades diferenciables y métricas riemannianas necesarios para la formulación del Teorema de Funciones Implícitas y del Teorema de Nash.

En el capítulo VI se demuestra el Teorema de Funciones Implícitas.

El último capítulo está dedicado a demostrar el Teorema de Nash

I N D I C E

C A P I T U L O   I

INTRODUCCION AL METODO DE NEWTON

1. El método de Newton para funciones reales.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Supongamos que se tiene la ecuación:

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

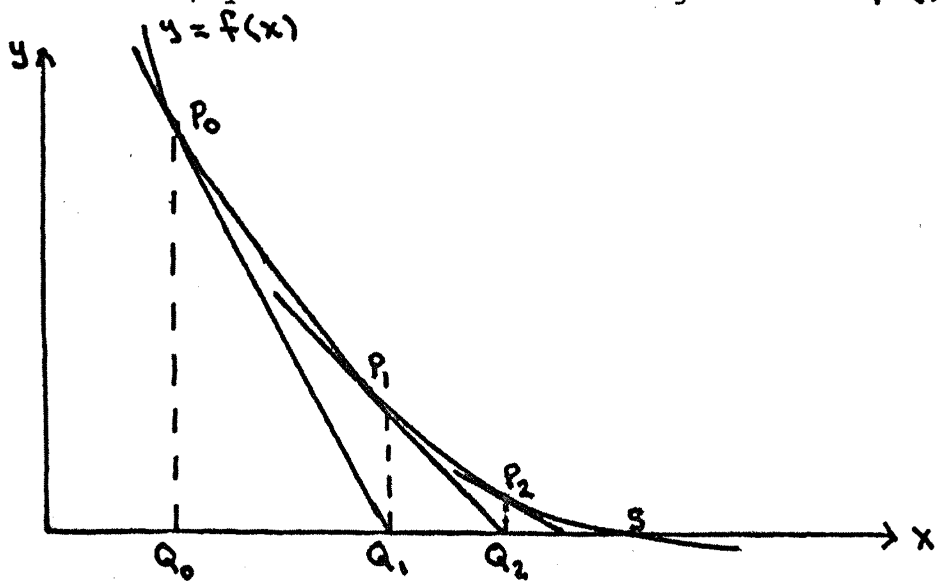
Es bien conocido que, en la mayoría de los casos, no existen métodos algebraicos generales para resolver esta ecuación. Pero como es frecuente que no se requiera una solución exacta de (1.1) sino que basta con dar una buena aproximación de la solución, se han desarrollado métodos numéricos para lograr este objetivo.

Uno de los métodos más conocido es el de Newton. Vamos a intentar describir en que consiste este método y en que casos se puede aplicar.

Consideremos el caso en que la función f es continuamente diferenciable y que $f'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in(a,b)$. Además vamos a suponer que existe $s\in(a,b)$ tal que $f(s)=0$.

Sea $x_0\in(a,b)$ y $P_0=(x_0,f(x_0))$ (ver figura 1.1). Trazemos la tangente a la curva $y=f(x)$ en P_0.

Llamemos $Q_1=(x_1,0)$ el punto donde la tangente intersecta al eje de las x, y trazemos ahora la tangente en $P_1=(x_1,f(x_1))$.



Encontramos Q_2 igual que Q_1. Continuando este proceso, podemos construir una sucesión $\{x_n\}$, donde $Q_n=(x_n,0)$.

Denotamos por s al elemento tal que $f(s)=0$. Es intuitivamente claro de la figura 1.1 que $|(s,0)-Q_n|$ tiende a cero, i.e. que x_n converge a s y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

¿Cómo podemos definir explicitamente a $\{x_n\}$?

La ecuación de la tangente en P_0 es :

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Encontrar el punto Q_1 es equivalente a encontrar x_1 tal que satisfaga que:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)=0$$

ó despejando x_1 de la ecuación anterior que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Por inducción, $\{x_n\}$ queda definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

Observación 1.

La tangente en P_0 no es más que la aproximación lineal de la función f en una vecindad de x_0 ,i.e. la diferencial de f en x_0 .

Ejemplo 1.

Una aplicación importante del método de Newton es el algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número.

Supongamos que se desea calcular la raíz de 2, es decir buscamos x tal que $x^2=2$.

Pero esto es equivalente a resolver la ecuación:

$$f(x)=x^2-2=0 \text{ , donde } f'(x)=2x$$

$$f(x) = x^2 - 2 = 0 \quad , \text{ donde } \quad f'(x) = 2x$$

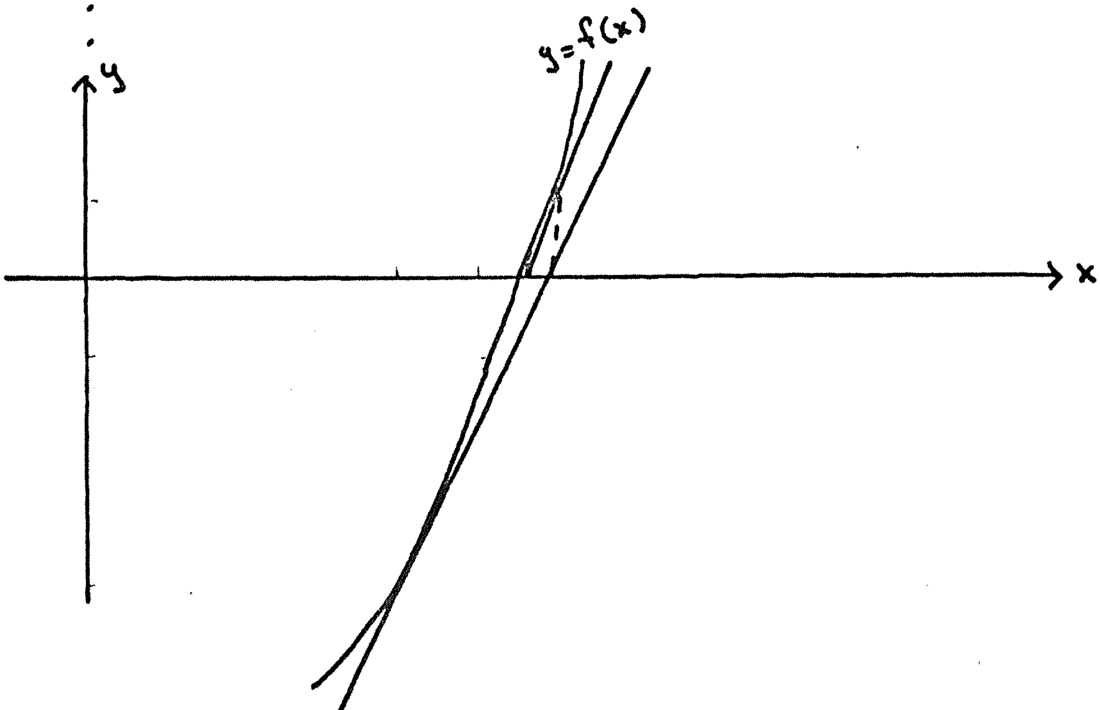
Sea $x_0 = 1$. Entonces construimos la sucesión definida por (1.2) :

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{f(3/2)}{f'(3/2)} = 1.4166$$

$$x_3 = 1.4142$$

$$\vdots$$



De esta forma podemos dar una solución aproximada de la raíz cuadrada de 2 con tanta precisión como queramos.

El algoritmo es extendible al cálculo de la enésima raíz de un número.

Ejemplo 2.

Sea $p(x)$ un polinomio. Podemos encontrar las raices de $p(x)$ aplicando el método de Newton.

El método de Newton no sólo es importante para efectuar cálculos númericos. Se utiliza como método constructivo en la demostración de teoremas de existencia.

En el Teorema que vamos a ver a continuación, suponemos que la función f tiene dos derivadas. En realidad, basta que f sea de clase C^1, lo único que cambia en la demostración son las cotas utilizadas.

TEOREMA 1.1.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$.

Si:

i) existen f', f'' en (a,b)

ii) $f'(x)\neq 0$ para $\forall\, x\in(a,b)$

iii) existe $C\geq 1$ tal que

$$|f''(x)|\leq C,\ |f'(x)^{-1}|\leq C,\ \text{para toda } x\in(a,b)$$

Definimos la sucesión $\{x_n\}$ como:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad \text{para } n=0,1,\ldots$$

entonces existe $\delta(C)$ tal que

$$|f(x_0)|\leq\delta \Rightarrow \{x_n\} \text{ converge en } (a,b)$$

$$\text{y } f(s)=0,\ \text{donde } s=\lim_{n\to\infty} x_n$$

Demostración

A rasgos generales, la demostración es la siguiente:

Se prueba por inducción que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C|f(x_n)|$$

$$|f(x_{n+1})| \leq |x_{n+1} - x_n|^2 C$$

De ahí resulta que

$$|f(x_n)| \leq C^{3(2^{n+1}-1)} \delta^{2^n} \qquad (1.3)$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C\,C^{3(2^{n+1}-1)} \delta^{2^n} \qquad (1.4)$$

De (1.4) se demuestra que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto existe S tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.

De (1.3), si escogemos $\delta = 1/C^6$ cuando $C > 1$ ó $\delta = 1/2$ cuando $C = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = 0 \text{ i.e. que } f(S) = 0$$

Ejemplo 3

(Teorema del mapeo inverso) Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, Supongamos que existen f' , f'' en (a,b) y $C > 1$ tal que $|f''(x)| \leq C$ $|1/f'(x)| \leq C$ para toda $x \in (a,b)$. Si existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces para y suficientemente cerca de 0 existe x cerca de x_0 tal que $f(x) = y$, i.e. existe una vecindad de 0 donde f es invertible.

Si definimos

$$g(x) = f(x) - y$$

entonces para una vecindad V de x_0 , $f'(x) \neq 0$ para toda $x \in V$.

Además para $x \in V$, $|g''(x)| \leq C, |1/g'(x)| \leq C$

Como g satisface las hipótesis del teorema anterior, aplicando el método de Newton encontramos una solución de la ecuación $g(x) = 0$. Sólo basta que $|y| \leq 1/C^6$.

Observación 2.

En la aplicación del método de Newton para cálculos numericos es importante conocer la rapidez de la convergencia de $\{x_n\}$, es decir como se mejora la aproximación de la solución en cada paso iterativo.

Esto depende de la función f . Por ejemplo, si f tiene dos derivadas, la convergencia es más rápida que si sólo es continuamente diferenciable.

También es importante señalar los dos problemas básicos en la aplicación del método: 1) la selección del valor inicial x_0 y 2) el cálculo de $f'(x)$.

2. El método de Newton para funciones en $\mathbb{R}^n$.

La generalización a funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ es inmediata.

Consdderemos el caso de $n=2$. Suponemos que la función f está definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Además $f \in C'(U)$ y $J(X)$ es distinto de cero para toda $X \in U$. Queremos encontrar una solución al sistema

$$f_1(x,y)=0$$
$$f_2(x,y)=0 \qquad\qquad X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 .$$

Sea $X_0=(x_0, y_0)\in U$. Vamos a intentar definir una sucesión que tenga como límite a ξ tal que $f(\xi)=0$.

Recordemos que en el caso de funciones reales, definimos x_n encontrando la intersección de la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ con el eje de las x .

Para el caso de $n=2$, encontramos el punto común $P_1=(x,y,0)$ donde los planos tangentes a las superficies $z=f_i(x_0,y_0)$

intersectan al plano xy para $i=1,2$. Es decir, tenemos que resolver el sistema:

$$f_1(X)+\frac{\partial f_1}{\partial x}(X)(x_1-x_0)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(X)(y_1-y_0)=0$$

$$f_2(X)+\frac{\partial f_2}{\partial x}(X)(x_1-x_0)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(X)(y_1-y_0)=0 \qquad (1.5)$$

Si denotamos $X_1=(x_1,y_1)$,como el determinante asociado a (1.5) no es más que det $J(X_0)\neq 0$,existe una única solución que podemos escribir como:

$$X_1 = X_0 - J^{-1}(X_0)f(X_0)$$

Y por inducción:

$$X_{n+1} = X_n - J^{-1}(X_n)f(X_n) \qquad (1.6)$$

Para el caso de n , (1.5) quedaría como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Como en la sucesión definida por (1.6) no influye la dimensión, esta generalización vale para toda n .

Las condiciones suficientes para que $\{X_n\}$ converga se verán de una manera formal en el capítulo VI.

Ejemplo 4.

Consideremos el Teorema de Funciones Implícitas para el caso de $n=2$.

Sea U abierto en $\mathbb{R}^2$ y $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $F\in C^1(U)$. Si $F(X_0)=0$ con $X_0=(x_0,y_0)\in U$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(X_0)\neq 0$ entonces existe una vecindad V de x_0 , una vecindad W de y_0 y una única función $f\in C^1(V)$ tal que:

i) $f(x_0)=y_0$, $f(x)\in W \quad \forall\, x\in V$

ii) $F(x, f(x))=0 \quad \forall\, x\in V$

iii) $f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))$

Si podemos calcular $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(X)\right)^{-1}$ y además existe $\frac{\partial^2}{\partial y^2}F$ y una constante C tal que $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(X)\right|\leq C$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}(X)^{-1}\right|\leq C$ entonces el método de Newton nos permite conocer explícitamente a la función f .

Sea $x\in V$, con x fija y definimos la función g como

$$g(y)=F(x,y)$$

Entonces calcular $f(x)$ es equivalente a encontrar y tal que $g(y)=0$. Como se puede demostrar que g satisface las hipótesis para aplicar el método de Newton entonces tenemos que

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} g(y_n)=0 \qquad , \quad y_{n+1}=y_n-\frac{g(y_n)}{g'(y_n)}$$

Observación 3.

El ejemplo 3 no es más que un caso particular del Teorema de Funciones Implícitas.

Tenemos $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ con f continuamente diferenciable. $f(x_0)=y_0$ y $f'(x_0)\neq 0$.

Si definimos $g(y,x)=y-f(x)$ entonces g es continuamente diferenciable con $g:\mathbb{R}\times(a,b)\to\mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(y_0,x_0)\neq 0$ y $g(y_0,x_0)=0$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema de Funciones Implícitas, existe una vecindad V de y_0 y un mapeo $h: V\to(a,b)$ tal que $h(y_0)=x_0$ y $g(y,h(y))=0=y-f(h(y))$ para toda $y\in V$.

La pregunta que surge es: ¿se puede dar una generalización del método de Newton a espacios normados? En el Capítulo VI, vamos a demostrar el Teorema de Funciones Implicitas para espacios de Banach y resultados importantes en el análisis funcional usando este método.

C A P I T U L O I I

DIFERENCIABILIDAD EN ESPACIOS DE BANACH

1. Definición de derivada.

Si f es una función real definida en $\mathbb{R}$,decimos que f es derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

y llamamos a ese límite la derivada de f en x_0 ó $f'(x_0)$.

Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$, f es derivable en x_0 si y solo si cada f_i es derivable en x_0 para $i = 1, \ldots, n$.

La extensión de esta definición a funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ presenta problemas, particularmente porque h puede tener una infinidad de direcciones.

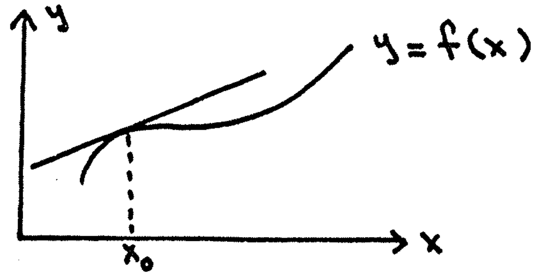
Entonces decimos que f es diferenciable en $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que aproxima a f en una vecindad de $\bar{x}_0$.

Como existe $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A(\bar{x}) = \bar{a} . \bar{x} \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\bar{a}$ es la derivada de f en x_0 .

Vamos a ver que la generalización de diferencial a espacios normados es natural a partir de esta definición.

Para no perder de vista la idea geométrica que existe de la diferencial como transformación lineal vamos a revisar esta definición para el caso de $n = 1$.

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Si existe la derivada $f'(x_0)$ en $x_0 \in (a,b)$ se define la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ como la recta que pasa por ese punto con pendiente $f'(x_0)$.



La tangente queda descrita por la ecuación:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

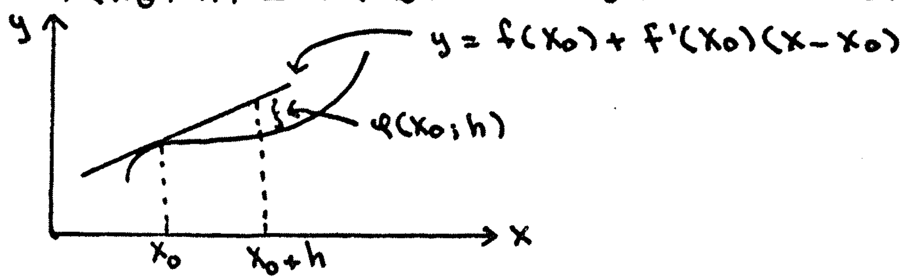
Se puede definir una función:

$$\varphi(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

con $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(x_0, h) = 0$

Entonces despejando $f(x_0 + h)$ tenemos que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varphi(x_0, h) \qquad (2.1)$$



Definimos $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $A(h) = h f'(x_0)$.
A es lineal y continua y (2.1) se puede escribir como:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)$$

Entonces la tangente es una aproximación lineal de f para puntos muy cercanos a x_0 y A es la diferencial de f en x_0 .

DEFINICION 2.1

Sean X, Y espacios de Banach, U abierto en X y $x_0 \in U$. Se dice que un mapeo:

$$f : U \to Y$$

tiene derivada de Frechet en x_0 (ó es Frechet diferenciable en x_0) si existe:

$$A : X \to Y \text{ , lineal y continua y}$$

$$\varphi : X \to Y \quad \text{con} \quad \lim_{|h|\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0 \quad \text{tal que}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h) \qquad (2.2)$$

Si existe otra A' que satisfaga la condición (2.2) entonces:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h) = f(x_0) + A'h + \varphi'(h),$$
$$\text{ó sea que} \quad A'h - Ah = \varphi(h) - \varphi'(h)$$

Para $s \in X$ y $t > 0$ existe h tal que $h = ts$. Entonces,

$$\varphi(ts) - \varphi'(ts) = t(A's - As)$$

Si dividimos los dos miembros de la igualdad por t y sacamos límite obtenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(ts) - \varphi'(ts)}{t} = 0 \quad \therefore \quad A's = As$$

O sea, que sólo existe una única A que satisface la condición (2.2). A es la derivada de Frechet de f en x_0 y se denota como $df(x_0)$ ó $f'(x_0)$ ó df_{x_0}.

Vamos a enunciar algunas propiedades de la derivada de Frechet sin demostrarlas, a excepción de la que se refiere a la composición de mapeos.

Propiedades .

i) Sean $f: U \to Y$, $g: U \to Y$, $x_0 \in U$.
Si f y g son Frechet-diferenciables en x_0 entonces $f+g$ es Frechet-diferencaible en x_0 y

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

ii) Sean Y_1, Y_2, Y_3 espacios de Banach, $Y_1 \times Y_2 \to Y_3$ un mapeo bilineal contínuo, $f: U \to Y_1$, $g: U \to Y_2$ $Y_0 \in U$. Si f y g son Frechet-diferenciables en x_0 entonces fg es Frechet diferenciable en x_0 y

$$d(fg)(x_0) = df(x_0)g(x_0) + f(x_0)\,dg(x_0)$$

iii) Sea $f: X \to Y$. Si f es constante entonces es Frechet-diferenciable para toda $x \in X$ y

$$df(x) = 0 \qquad \forall x \in X$$

iv) Si $f: X \to Y$ es lineal y contínua entonces f es Frechet-diferenciable y

$$df(x_0) = f \qquad \forall x \in X$$

v) si $f: U \to Y$ es Frechet-diferenciable en x_0, $g: Y \to Z$ es Frechet-diferenciable en $f(x_0)$ entonces $g \circ f: U \to Z$ es Frechet-diferenciable en x_0 y

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

Demostración de v)

$$g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) =$$
$$g(f(x_0) + df(x_0)h + \varphi(h)) - g(f(x_0)) =$$
$$g(f(x_0)) + dg(f(x_0))(df(x_0)h + \varphi(h)) - g(f(x_0)) =$$
$$dg(f(x_0))(df(x_0)h) + dg(f(x_0))\varphi(h)$$

Como

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{dg(f(x_0))\varphi(h)}{|h|} = 0 \quad \text{entonces}$$

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Sea $A: X \to Y$ lineal y contínua. Definimos:

$$\| A \| = \sup_{|x| \leq 1} |A(x)|$$

Como $\| \ \|$ es una norma entonces el conjunto de funciones lineales continuas de X en Y, resulta ser un espacio normado con $\| \ \|$ y lo denotamos por $B(X, Y)$. Si Y es completo entonces $B(X, Y)$ es de Banach.

Sea α un mapeo de X a $B(X,Y)$. Decimos que α es contínua si dada $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta$ tal que si $x, y \in X$ entonces

$$|x - y| < \delta \implies \| \alpha(x) - \alpha(y) \| < \varepsilon$$

Sea $f: U \to Y$. Si f es F-diferenciable en U podemos definir el mapeo:

$$df : X \to B(X, Y)$$

DEFINICION 2.2

Si df es continua entonces se dice que $f \in C'(X, Y)$

2. Teorema del Valor Medio.

Antes de demostrar el Teorema del Valor Medio, vamos a ver someramente la definición de integral de una función definida en un intervalo de la recta y con valores en un espacio de Banach.

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$, X, espacio de Banach. Una función escalonada $f: [a,b] \to X$ es una función tal que existe una partición

$$P: \ a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b \qquad y$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \ \ni\cdot$$

$$a_i < t < a_{i+1} \implies f(t) = x_i$$

Es claro que la suma de dos funciones escalonadas es una función escalonada, al igual que el producto por un escalar, por lo tanto el conjunto de funciones escalonadas es un subespacio del espacio de funciones acotadas con la norma sup,

$$\| f \| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Definimos la integral de una función escalonada como:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) x_i$$

Este operador es lineal y ademas como:

$$|I(f)| \leq (b-a)\|f\| \text{ , } I(f) \text{ es continua}$$

Aplicando el Teorema de Hahn-Banach podemos extender I a la cerradura del espacio de funciones escalonadas(que denominaremos funciones reguladas).

Si f es regulada entonces denotamos $I(f)$ por $\int_a^b f$.

Si f es continua en $[a,b]$ entonces es uniformemente continua y por lo tanto es una función regulada (una función regulada se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones escalonadas).

Vamos a enunciar algunas propiedades de la integral.

$$i) \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{si} \quad a \leq c \leq b \tag{2.3}$$

ii) Si $a \leq c \leq d \leq b$ entonces

$$\int_d^c f = - \int_c^d f \tag{2.4}$$

iii) Sea $\lambda : X \to Y$, lineal y contínuo

Si $f: [a,b] \to X$ es regulada entonces $\lambda \circ f$ es regulada y

$$\int_a^b \lambda \circ f = \lambda \int_a^b f \tag{2.5}$$

Sea $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to B(X,Y)$, α continua. Para cada $t \in [a,b]$, $\alpha(t) \in B(X,Y)$ y $\alpha(t)x \in Y$ con $x \in X$.

Podemos integrar α y

$$\int_a^b \alpha(t)dt \in B(X,Y)$$

LEMA 2.1

Sea $\alpha : [a,b] \to B(X,Y)$ continuo y $x \in X$.

Entonces,

$$\int_a^b \alpha(t)x\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt \,.\, x$$

Demostración.

Si definimos el mapeo:

$$\lambda \longrightarrow \lambda(x) \qquad \text{para } \lambda \in B(X,Y)$$

entonces,

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x) \longrightarrow \lambda_1(x) + \lambda_2(x) \qquad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in B(X,Y)$$

$$|\lambda(x)| \leq \|\lambda\| |x| = |x| \|\lambda\| \qquad \forall\, \lambda \in B(X,Y)$$

Por lo tanto este mapeo es lineal y continuo.

Aplicando (2.5) al mapeo dado por la composición

$$t \to \alpha(t) \to \alpha(t)x$$

tenemos que:

$$\int_a^b \alpha(t).x\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt \,.\, x \qquad \text{Q.E.D.}$$

TEOREMA 2.3. (VALOR MEDIO)

Sea U abierto en X, $x \in U$, $y \in X$. Sea $f : U \to Y$, con $f \in C^1(U, Y)$. Supongamos además que $x + ty \in U$ para $0 \leq t \leq 1$. Entonces

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 df(x+ty).y\,dt = \int_0^1 df(x+ty)\,dt \,.\, y$$

Demostración.

Sea $g(t) = f(x+ty)$. Entonces,

$$g(1) = f(x+y), \; g(0) = f(x) \quad y \quad g'(t) = df(x+ty).y \quad y$$

por el Teorema Fundamental de Cálculo.,

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = f(x+y) - f(x) =$$

$$\int_0^1 df(x+ty).y\,dt = \int_0^1 df(x+ty)\,dt \,.\, y \qquad \text{Q.E.D.}$$

COROLARIO 2.1

Sea U abierto en X , $x,z \in U$ tal que la recta $x+t(z-x)$ con $0 \leq t \leq 1$, esté contenida en U y sea $f:U \to Y$ con $f \in C'(U,Y)$. Entonces,

$$|f(z)-f(x)| \leq |z-x| \sup |f'(y)| \quad \text{para} \quad y \in \{x+t(z-x) : 0 \leq t \leq 1\}$$

COROLARIO 2.2

Sea U abierto en X , $x, z, x_0 \in U$. Suponemos que $A = \{x+t(z-x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Entonces,

$$|f(z)-f(x)-f'(x_0)(z-x)| \leq |z-x| \sup_{y \in A} |f'(y)-f'(x_0)|$$

3. TEOREMA DE TAYLOR

Sea U abierto en X y $f:U \to Y$, F-diferenciable en U . Entonces podemos definir el mapeo:

$$df : U \longrightarrow B(X,Y)$$

Como $B(X,Y)$ es un espacio de Banach, podemos definir

$$d^2 f : U \longrightarrow B(X, B(X,Y))$$

Además, sabemos que:

$$B(X, B(X,Y)) \simeq B(X \times X, Y)$$

Entonces $d^2 f(x_0)$ es un operador bilineal de $X \times X$ en Y para cada $x_0 \in U$.

De la misma manera, podemos definir la derivada de orden p, $d^p f(x)$, donde $d^p f(x) \in B(\underbrace{X \times \cdots \times X}_{p}, Y) = B^p(X,Y)$

TEOREMA 2.4

Sea $\omega : X_1 \times X_2 \to Y$, continuo y bilineal. Entonces ω es Frechet diferenciable y para cada $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

$$d\omega(x_1,x_2)(v_1,v_2) = \omega(x_1,v_2) + \omega(v_1,x_2), \text{ así que}$$

$d\omega : X_1 \times X_2 \to B(X_1 \times X_2, F)$ es lineal.

Luego $d^2\omega$ es constante y

$$d^3\omega \equiv 0$$

DEFINICION 2.6

$f: U \to Y$ es de clase C^p ó $f \in C^p(U,Y)$ si $d^k f(x)$ existe para cada $x \in U$ y

$$d^k f : U \to B^k(X,Y) \text{ es continua para } k=0,\dots,p$$

TEOREMA 2.5

Sea $f \in C^p(U,Y)$. Entonces para cada $x \in U$, $d^p f$ es simetrico multilineal.

TEOREMA 2.6 (TEOREMA DE TAYLOR)

Sea U abierto en X, $f: U \to Y$ con $f \in C^p(U,Y)$. Sea $x \in U$, $y \in X$ tal que $A = \{x+ty : 0 \le t \le 1\} \subset U$ y sea $y^{(k)} = \underbrace{(y,\dots,y)}_{k}$. Entonces

$$f(x+y) = f(x) + \frac{df(x)(y)}{1!} + \dots + \frac{d^{p-1}f(x)\,y^{(p-1)}}{(p-1)!} + R_p$$

$$\text{donde} \quad R_p = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} d^p f(x+ty) y^{(p)}\, dt \quad \text{con}$$

$$|R_p| \le \sup_{0 \le t \le 1} \frac{|d^p f(x+ty) - d^p f(x)|\,|y|^p}{p!}$$

4. Derivadas de formas cuadráticas.

DEFINICION 2.7

Sean X, Y espacios de Banach. Se dice que $f: X \to Y$

es una forma cuadrática si:

$$\beta(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y) \text{ es bilineal} \tag{2.6}$$

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x) \quad \forall x \in X \text{ , } \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

donde β es la forma bilineal asociada a f .

De la definición se sigue que:

$$f(x) = 1/2\, \beta(x,x)$$

Es claro que si f es continua entonces β lo es.

Si β es continua entonces,

$$\|\beta\| = \sup_{|x|=1, |y|=1} |\beta(x,y)| \quad \text{y}$$

$$|f(x)| = |1/2\, \beta(x,x)| \leq 1/2\, \|\beta\|\, |x|^2 \quad \therefore \; f \text{ es contínua .}$$

Si definimos:

$$\|f\| = 1/2\, \|\beta\|$$

entonces,

$$|f(x)| \leq \|f\|\, |x|^2 \tag{2.8}$$

TEOREMA 2.7

Sea $f: X \to Y$ una forma cuadrática. Si f es contínua entonces f tiene derivadas de Frechet de todos los ordenes y

$$i)\; f'(z)h = \beta(z,h)$$

$$ii)\; f''(z) = \beta \quad \text{y} \quad f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{para } n \geq 3$$

Además,

$$iii)\; |f'(z)| \leq 2\|f\|\, |z| , \quad \|f''(z)\| = 2\|f\|$$

Demostración.

De (2.7) :

$$f(z+h) - f(z) = \beta(z,h) + f(h)$$

y por (2.8) :

$$\frac{|f(h)|}{|h|} \leq \|f\| |h|$$

Entonces

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$$

Como además $\beta(z,h)$ es lineal en h, entonces f es Frechet diferenciable en z y $f'(z)h = \beta(z,h)$.

Como lo anterior es cierto para toda $z \in X$, podemos definir

$$f' : X \to B(X,Y) \quad y$$

$$f'(z_1+z_2)h = \beta(z_1+z_2,h) = \beta(z_1,h)+\beta(z_2,h) =$$
$$f'(z_1)h + f'(z_2)h \quad \therefore \; f' \text{ es lineal.}$$

Por la propiedad iv) de la derivada de Frechet:

$$f''(z) = f' = \beta$$

y por el Teorema 2.4, $f^{(n)}(z) = 0$ para $n \geq 3$.

Además como:

$$|f'(z)h| = |\beta(z,h)| \leq \|\beta\| |z| |h| \quad \text{entonces}$$

$$|f'(z)| \leq 2\|f\| |z| \quad y$$

$$\|f''(z)\| = \|\beta\| = 2\|f\|$$

Q.E.D.

CAPITULO III

VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. Definiciones básicas

Definición 3.1

Sea V un espacio topológico de Hausdorff. Se dice que V es una variedad de dimensión n si para cada $a \in V$ existe una vecindad abierta de a que sea homeomorfa a un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.

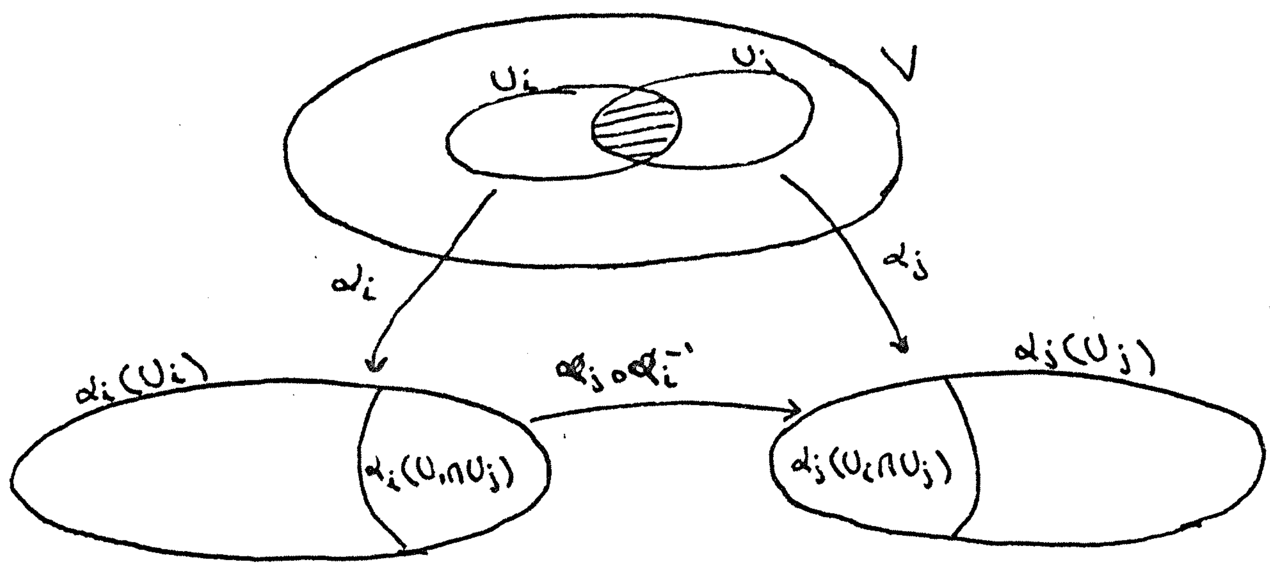
$$S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

Definición 3.2

Sea $0 \leq k \leq \infty$. V es una C^k variedad de dimensión n si existe una familia $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ de abiertos U_i en V y homeomorfismos $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tal que

a) $\bigcup_{i \in I} U_i = V$

b) para cada i, j en I con $U_i \cap U_j \neq \phi$, la función $\alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \alpha_j(U_i \cap U_j)$ es de clase C^k .



Definición 3.3

Sea V una variedad. Una estructura C^k en V es una familia maximal $A=\{(U_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ con las propiedades a) y b).

A un elemento de A se le llama sistema de coordenadas.

Si (U,α) es un sistema de coordenadas entonces se dice que U es una vecindad de coordenadas y que $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ son coordenadas en U.

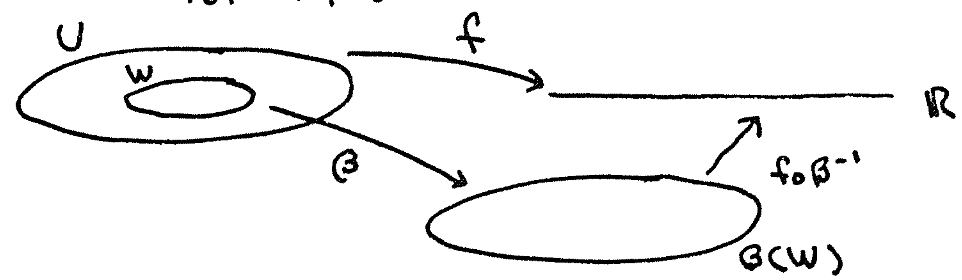
A las funciones $\alpha_j\circ\alpha_i^{-1}$ se les llama transformaciones de coordenadas.

Se dice que cualquier subconjunto de A que satisfaga a) y b) es una base para la estructura C^k en V.

Definición 3.4

Si V es una C^k variedad y U un abierto en V, entonces una función $f:U\to\mathbb{R}$ es una C^r función en si para cada sistema de coordenadas (W,β) en V con $W\subset U$ la función

$$f\circ\beta^{-1}:\beta(W)\to\mathbb{R} \text{ es de clase } C^r\ (0\le r\le k)$$



Denotamos al conjunto de funciones reales de clase C^r en V por $C^r(V)$.

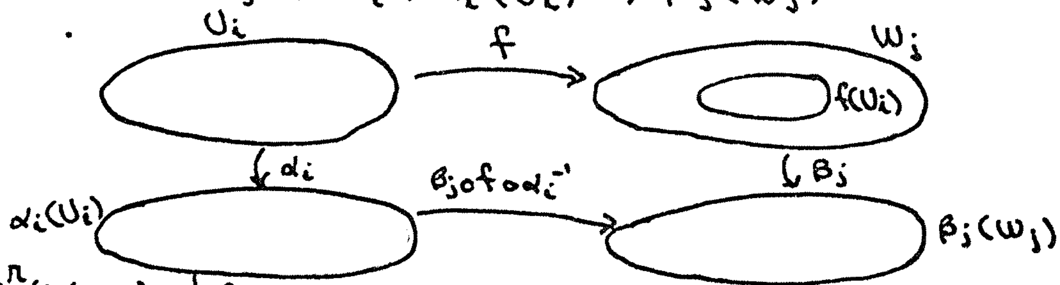
Si A, A' son dos bases de distintas estructuras C^k en V entonces A y A' son equivalentes si definen el mismo conjunto $C^r(V)$.

Se puede demostrar que A, A' son equivalentes si y solo si son bases de la misma estructura C^k en V. Dando a V la estructura C^k con la familia maximal nos evitamos introducir una relación de equivalencia.

Definición 3.5

Sean V, W C^k variedades y $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$, $\{(W_j, \beta_j)\}_{j \in J}$ sus respectivas estructuras.

Una función continua $f: V \to W$ es de clase C^r si para cada (U_i, α_i) en V, (W_j, β_j) en W con $f(U_i) \subset W_j$, la función $\beta_j \circ f \circ \alpha_i^{-1} : \alpha_i(U_i) \to \beta_j(W_j)$ es de clase C^r.



$C^r(V, W) = \{f : V \longrightarrow W \;:\; f$ es de clase $C^r\}$. En particular W puede ser $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 2

Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria,

$$U_1 = \{\bar{x} \in S^n : x_{n+1} > -1\},$$

$$U_2 = \{\bar{x} \in S^n : x_{n+1} < 1\} \quad \text{y}$$

$$\alpha_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

$$\alpha_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n, \quad \alpha_2(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n-1}}\right)$$

las proyecciones desde $(0, 0, \ldots, -1)$ y $(0, 0, \ldots, 1)$ respectivamente.

Entonces S^n es una C^∞ variedad de dimensión n con la familia $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i=1,2}$.

Ejemplo 3

Sea P^n el n-espacio proyectivo (el espacio de todas las rectas que cruzan el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$)

Cualquier recta queda determinada por un vector $\neq 0$ contenido en ella.

Dos vectores $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ determinan la misma recta si existe $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_i = \lambda x_i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

O sea que $P^n = \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ donde $\bar{x} \sim \bar{y}$ si satisfacen (3.1).

Para cada $1 \leq i \leq n+1$ sea $U_i \subset P^n$ el conjunto de elementos de la forma $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ con $x_i \neq 0$, y definimos α_i como el mapeo

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

Entonces P^n es una C^∞ variedad de dimension n .

Ejemplo 4

Sea $\mathfrak{A} = \{(U_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ una C^k estructura en V_1 y $\mathcal{B} = \{(W_j, \beta_j)\}_{j \in J}$ una C^k estructura en V_2.

Entonces la familia

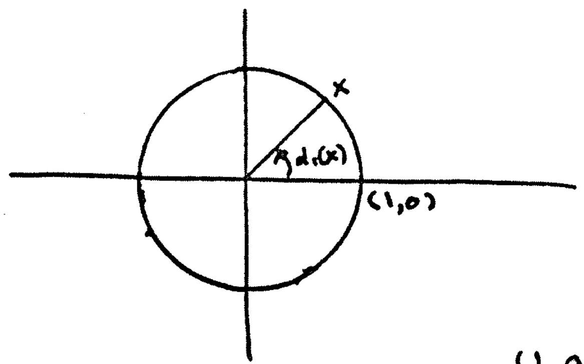
$$\Gamma = \{(U_i \times W_j, \alpha_i \times \beta_j)\}$$

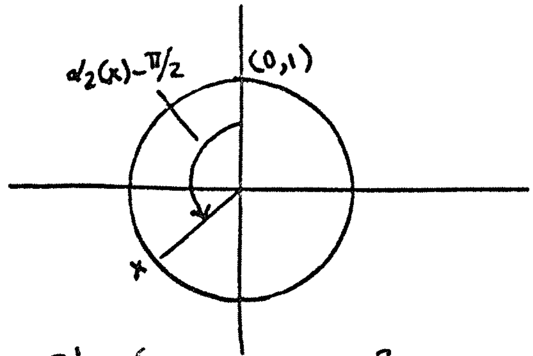
es una C^k estructura en $V_1 \times V_2$, donde $\alpha_i \times \beta_j (p,q) = (\alpha_i(p), \beta_j(q))$ para toda $(p,q) \in V_1 \times V_2$.

Ejemplo 5

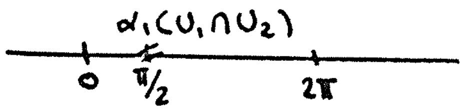
Sea S^1 la esfera unitaria, $U_1 = S^1 - \{(1,0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(0,1)\}$

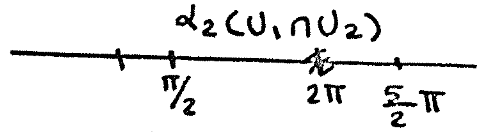
Definimos $\alpha_1(x)$ como el ángulo formado por x y $(1,0)$, y $\alpha_2(x)$ como el ángulo $+\pi/2$ formado por x y $(0,1)$.





$$U_1 \cap U_2 = S^1 - \{(1,0),(0,1)\}$$
$$\alpha_1(U_1 \cap U_2) = (0, 2\pi) - \{\pi/2\}$$
$$\alpha_2(U_1 \cap U_2) = (\pi/2, 5/2\,\pi) - \{2\pi\}$$





Entonces

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ x & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

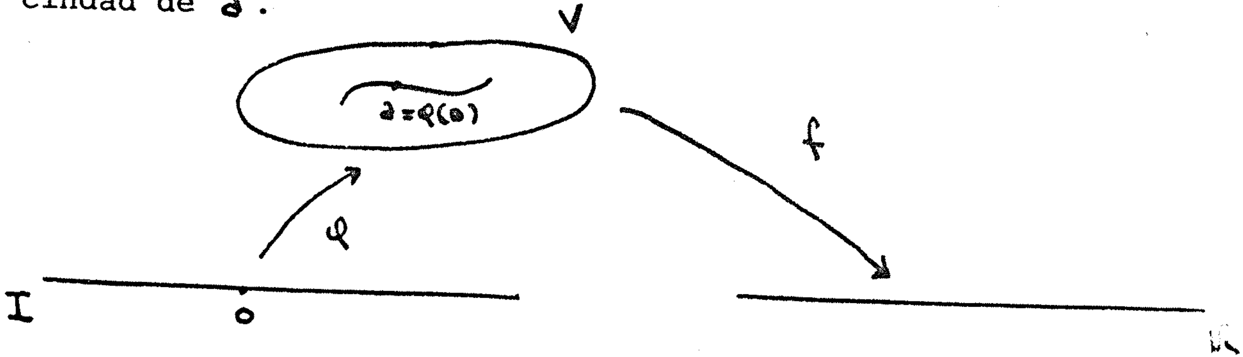
$$\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \\ x - 2\pi & \text{si } 2\pi < x < \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

Si definimos al toro de dimensión $n\,(T^n)$ como el producto $S^1 \times \ldots \times S^1$, entonces la familia $\{(U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_n}, \alpha_{i_1} \times \ldots \times \alpha_{i_n})\}_{\substack{1 \le i_j \le 2 \\ 1 \le j \le n}}$ hace a T^n una C^∞ variedad de dimensión n.

2. Espacios tangentes

Sea V una C^k variedad y $a \in V$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que contiene al 0 y $\varphi : I \to V$ de clase C^k tal que $\varphi(0) = a$.

Sea f una C^1 función real en V, definida en una vecindad de a.



Definimos

$$D_\varphi(f) = \frac{d}{dt}(f\circ\varphi)\Big|_{t=0}$$

El mapeo

$$f \longrightarrow D_\varphi(f) \qquad \text{es lineal y además}$$

$$D_\varphi(fg) = f(a)\,D_\varphi(g) + g(a)\,D_\varphi(f)$$

Vamos a definir una relación de equivalencia en el conjunto $B = \{\varphi : I \to V \ : \varphi$ es de clase C^k y $\varphi(0) = a\}$ de la siguiente manera:

$$\varphi \sim \psi \iff D_\varphi(f) = D_\psi(f) \quad \forall\, f \in C^1(V, \mathbb{R})$$

Definición 3.6

Un vector tangente en a es un elemento de $B/\sim$. Al conjunto de vectores tangentes en a los denotamos por $T_a(V)$.

Para $f \in C^1(V,\mathbb{R})$ y $\xi = [\varphi]$ definimos $\xi(f) = D_\varphi(f)$ Por lo tanto ξ es una funcional lineal de $C^1(U,\mathbb{R})$ con U vecindad de a que ademas satisface que

$$\xi(fg) = f(a)\,\xi(g) + g(a)\,\xi(f)$$

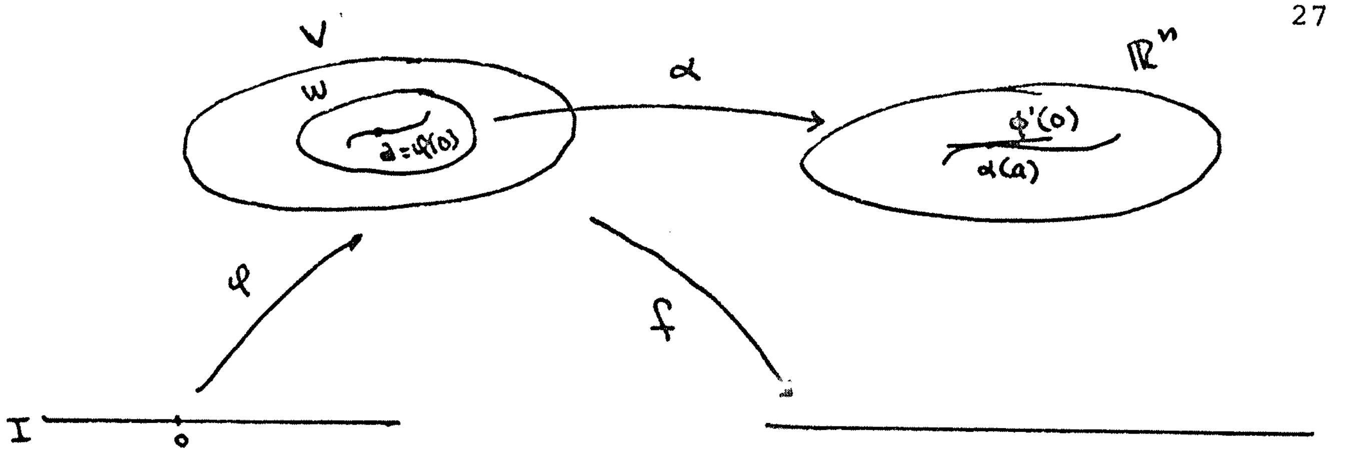
Ahora sea (U,α) un sistema de coordenadas tal que $a \in U$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(f\circ\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha^{-1})\circ(\alpha\circ\varphi)\Big|_{t=0}$$

Si $\quad \Phi = \alpha\circ\varphi \quad (\Phi : I \to \mathbb{R}^n)$ y

$\quad F = f\circ\alpha^{-1} \quad (F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

entonces Φ es una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$ y F una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.



Luego

$$D_\varphi(f) = dF_{\alpha(a)}(\Phi'(0)) = D_{\Phi'(0)}F(\alpha(a))$$

Si $\psi : I \to V$ con $\psi(0) = a$, podemos definir $\Psi = \alpha \circ \psi$ y se puede demostrar que

$$\psi \sim \varphi \quad \text{si y solo si} \quad \Phi'(0) = \Psi'(0) \tag{3.2}$$

Pero esto significa que a cada vector tangente le estamos asociando un vector en $\mathbb{R}^n$. En realidad la introducción del espacio $T_a(V)$ nos permite dar direcciones en V y $D_\varphi(f)$ se puede interpretar como el cálculo de la derivada direccional en la dirección $[\varphi]$.

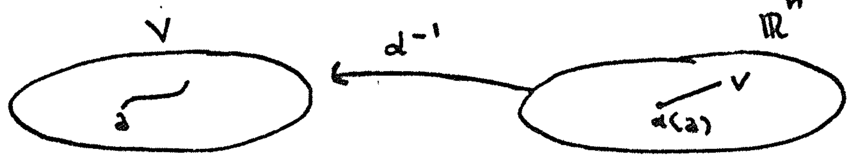
¿Cómo estamos mapeando $T_a(V)$ en $\mathbb{R}^n$?

Por (3.2) , para cada sistema de coordenadas (U,α) podemos definir el mapeo

$$\xi \longrightarrow (\alpha\circ\varphi)'(0) = \xi_\alpha \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \varphi \in \xi$$

Reciprocamente, para cada $v \in \mathbb{R}^n$ definimos $\varphi : I \to V$ como

$$\varphi(t) = \alpha^{-1}(\alpha(a) + tv)$$



Entonces $\varphi(0) = \alpha^{-1}(\alpha(a)) = a$, φ está definida en una vecindad del 0 y

$$(\alpha\circ\varphi)'(0) = (\alpha(a) + tv)'(0) = v$$

Si (W,β) es otro sistema de coordenadas entonces

$$\xi_\beta = (\beta\circ\varphi)'(0) = ((\beta\circ\alpha^{-1})\circ(\alpha\circ\varphi))'(0) = J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(\alpha(a))\,\xi_\alpha$$

Se puede dar una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ a $T_a(V)$ definiendo

$r\xi + s\eta = \gamma$ donde γ queda determinado por

$r\xi_\alpha + s\eta_\alpha = \gamma_\alpha$

Se puede demostrar que la transformación líneal $J_{\beta\circ\alpha^{-1}}(\alpha(a))$ es un automorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto $T_a(V)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ módulo un automorfismo de $\mathbb{R}^n$.

Vamos a encontrar una base para $T_a(V)$.

Sea (U,α) un sistema de coordenadas de V, $a \in U$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$\varphi_j : I \to V \qquad \text{como} \qquad \varphi_j(t) = \alpha^{-1}(\alpha(a) + te_j)$$

Entonces

$\varphi_j(0) = a$, $D_{\varphi_j}(f) = dF_{\alpha(a)}(\Phi'(0))$ donde

$F = f\circ\alpha^{-1}$, $\Phi = \alpha\circ\varphi_j = \alpha(a) + te_j$ para $f \in C'(U,\mathbb{R})$

Tenemos pues que

$$D_{\varphi_j}(f) = dF_{\alpha(a)}(e_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\alpha^{-1})(\alpha(a))$$

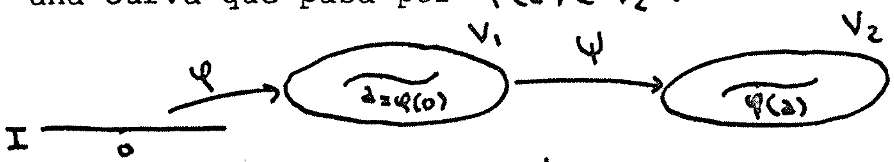
Definimos $[\varphi_j] = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a$.

Ya sabemos que con respecto a (U,α) existe un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y $T_a(V)$. Como isomorfismos mandan bases en bases tenemos que

Teorema 3.1

Los vectores tangentes $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$ son base del espacio $T_a(V)$

Sean V_1, V_2 dos C^k variedades y $\psi : V_1 \to V_2$ con $\psi \in C^k(V_1, V_2)$
Sea φ una curva que pasa por $a \in V_1$. Entonces $\psi \circ \varphi$ es una curva que pasa por $\psi(a) \in V_2$.



Vamos a ver que $\varphi \sim \varphi_1' \Rightarrow \psi \circ \varphi \sim \psi \circ \varphi_1$

$\varphi \sim \varphi_1 \Rightarrow (\alpha \circ \varphi)'(0) = (\alpha \circ \varphi_1)'(0)$ para algún sistema de coordenadas (U, α).

Ahora si (W, β) es un sistema de coordenadas en V_2 con $\psi(a) \in W$ entonces

$$(\beta \circ \psi \circ \varphi)'(0) = [(\beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}) \circ (\alpha \circ \varphi)]'(0) = J_{\beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}}(\alpha(a))(\alpha \circ \varphi)'(0) =$$
$$J_{\beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}}(\alpha(a))(\alpha \circ \varphi_1)'(0) = (\beta \circ \psi \circ \varphi_1)'(0)$$

Luego ψ induce un mapeo

$$\psi_{*a} : T_a(V_1) \to T_{\psi(a)}(V_2) \quad \text{dado por}$$
$$\eta_\beta = J_{\beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}}(\alpha(a))\, \xi_a \tag{3.3}$$

Se dice que ψ_{*a} es la diferencial de ψ en a y resulta ser un mapeo lineal contínuo.

Definición 3.7

Sean V_1, V_2 C^k variedades de dimensión n. Se dice que $\psi : V_1 \to V_2$ es regular en $a \in V_1$ si $\psi_{*a} : T_a(V_1) \to T_{\psi(a)}(V_2)$ es inyectiva.

Si ψ es regular en a para toda $a \in V$ se dice que ψ es regular.

3. Espacio cotangente

Sea V una C^k variedad de dimensión n y $a \in V$. El conjunto de funcionales lineales de $T_a(V)$ en $\mathbb{R}$ se llama espacio cotangente de V en a y se denota por $T_a^*(V)$ (Cómo $T_a(V)$ es de dimensión finita, cualquier funcional lineal es contínua)

Sea $f \in C^1(V,\mathbb{R})$.

La funcional en $T_a(V)$ que manda cada $\xi \in T_a(V)$ a $\xi(f)$ se denotará por $(df)_a$, i.e.

$$(df)_a : T_a(V) \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (df)_a\xi = \xi(f)$$

Claramente $(df)_a$ es lineal.

Sea (U,α) un sistema de coordenadas con $a \in U$ y $\alpha(a) = (x_1,\ldots,x_n) = (\alpha_1(a),\ldots,\alpha_n(a))$ con $x_i = \alpha_i : U \to \mathbb{R}$ para $j = 1,\ldots,n$.

Entonces podemos definir el vector cotangente $(dx_j)_a$ como $(dx_j)_a\xi = \xi(x_j)$.

Teorema 3.2

Los vectores cotangentes $(dx_1)_a,\ldots,(dx_n)_a$ son base de $T_a^*(V)$

Demostración

Sea $\xi \in T_a(V)$, Entonces existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(t) = \alpha^{-1}(\alpha(a) + tv)) \in \xi$$

Ahora bien $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ y

$$\xi(f) = dF_{\alpha(a)}(\Phi'(0)) = dF_{\alpha(a)}(\sum v_i e_i) = \sum v_i dF(e_i) = \sum v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a f$$

Por lo tanto $\xi = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$

Sea $\lambda \in T_a^*(V)$ y $\xi \in T_a(V)$, Entonces

$$\lambda(\xi) = \lambda\left(\sum v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a\right) = \sum v_i \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$$

pero $\xi(x_j) = (dx_j)_a\xi = \sum v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a x_j = v_j$ para $j = 1,\ldots,n$

Por lo tanto

$$\lambda(\xi) = \sum \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (dx_j)_a\xi \qquad \text{Q.E.D.}$$

Definición 3.8

Un campo vectorial en una C^k variedad V es un mapeo que a cada $a \in V$ le asocia un $\xi \in T_a(V)$.

Si X es un campo vectorial entonces

$$X(a) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(a)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \quad \eta_i(a) \in \mathbb{R}$$

Se dice que X es de clase C^r si η_i es de clase C^r para $i=1,\ldots,n$.

Al campo vectorial que a a le asocia $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$ lo denotamos por $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

4. Sub-variedades e inmersiones

Definición 3.9

Sea V una C^k variedad de dimensión n. Una C^k variedad W de dimensión m es una sub-variedad de V si existe un mapeo C^k

$$i: W \to V \qquad \text{regular e inyectivo}$$

y se dice que i es un encaje.

Se dice que W es una sub-variedad cerrada si $i(W)$ es cerrado en V y si para cada $v \in i(W)$, existe un sistema de coordenadas (U,α) , $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ con la propiedad que

$$v \in U \quad , \quad i(W)\cap U = \{x\in U \mid \alpha_{m+1}=\ldots=\alpha_n=0\}$$

o sea que $\alpha(i(W)\cap U)=\alpha(U)\cap\mathbb{R}^m$.

Definición 3.10

Se dice que $i: W\to V$ es una inmersión si i es regular.

¿Cuándo una C^k variedad V es una sub-variedad de $\mathbb{R}^m$ para alguna m ?

Para que V sea sub-variedad de $\mathbb{R}^m$ debe existir al menos un encaje $f: V\to\mathbb{R}^m$.

Para poder probar la existencia de f necesitamos caracterizar al conjunto de encajes de V en $\mathbb{R}^m$. Una forma de hacerlo es considerar $C^k(V,\mathbb{R}^m)$, definir una topología en este conjunto y demostrar propiedades de los encajes en el espacio topológico $C^k(V,\mathbb{R}^m)$.

Vamos a considerar sólo el caso en que V es compacta.

Sea $\{(U_i,d_i)\}_{i=1}^{n}$ una familia de sistemas de coordenadas de V, tal que $U_1,\ldots,U_n$ sea una cubierta de V.

Para cada $u \in C^k(V,\mathbb{R}^m)$ definimos

$$\|u\|_{U_i,d_i} = \sup_{|d|\leq k}\ \sup_{a\in U_i}\ \sup_{i,j} |D^d u(x)|, \quad y$$

$$\|u\| = \sup_{1\leq i\leq n} \|u\|_{U_i,d_i}$$

donde $D^d u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{d_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{d_n} u(x)$, $|d| = d_1 + \cdots + d_n$

Resulta que $\|\ \|$ es una norma y que $(C^k(V,\mathbb{R}^m), \|\ \|)$ es un espacio normado completo.

Observación

No es necesario que V sea compacto para darle una topología a $C^k(V,\mathbb{R}^m)$. Pero para V no compacta este espacio no es necesariamente metrizable. Para una referencia más completa se puede consultar [5.2].

No siempre va a existir un encaje f. En algunos casos, sólo se va a garantizar la existencia de una inmersión de V en $\mathbb{R}^m$.

Vamos a enunciar algunos resultados sin demostración que se refieren a propiedades de $C^k(V,\mathbb{R}^m)$ y otros resultados que garantizan la existencia de inmersiones y encajes de variedades en .

Teorema 3.3

El conjunto de C^k inmersiones $f: V \to \mathbb{R}^m$ es abierto en $C^k(V,\mathbb{R}^m)$ para $k \geq 1$. El conjunto de C^k encajes cerrados en V es abierto en $C^k(V,\mathbb{R}^m)$ para $k \geq 1$.

Es claro que para m no suficientemente grande, este conjunto es el vacio.

Teorema 3.4 (Whitney)

Si V es una C^k variedad de dimensión n y $m \geq 2n$, entonces el conjunto de C^k inmersiones de V en $\mathbb{R}^m$ es un abierto denso en $C^k(V,\mathbb{R}^m)$.

Teorema 3.5

Sea V una C^k variedad de dimensión n y $m \geq 2n+1$. Entonces el conjunto de encajes de V en $\mathbb{R}^m$ es denso en $C^k(V,\mathbb{R}^m)$ y el conjunto de encajes cerrados es denso abierto.

Teorema 3.6 (Whitney)

Sea V una C^k variedad de dimensión $n \geq 2$. Entonces existe una C^k inmersión cerrada en $\mathbb{R}^{2n-1}$ (para $n \geq 2$) y un encaje de clase C^k en $\mathbb{R}^{2n}$. Si V es compacto entonces existe un encaje cerrado en $\mathbb{R}^{2n}$.

5. Particiones de la unidad

Definición 3.11

Sea V una C^k variedad y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de V. Una familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ de C^k funciones en V es una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$ si

i) $0 \leq \varphi_i \leq 1$

ii) $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_i$ donde $\operatorname{sop} \varphi_i = \overline{\{a \in V : \varphi_i(a) \neq 0\}}$

iii) la familia $\{\operatorname{sop}\varphi_i\}_{i\in I}$ es localmente finita

iv) $\sum_{i\in I} \varphi_i(a) = 1$ para toda $a \in V$

Como V es de Hausdorff entonces por ser una C^k variedad es localmente compacta. Además

Proposición 3.1

Si V es localmente compacto de Hausdorff y es la unión numerable de compactos entonces V es paracompacto, i.e. cualquier cubierta abierta tiene un refinamiento abierto localmente finito. Ademas si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta localmente finita de V existe una cubierta abierta localmente finita $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada $i \in I$.

Lema 3.1

Existe una C^∞ función η en $\mathbb{R}^n$ con $\eta \geq 0$, $\eta(0) > 0$ y sop $\eta \subset \{x : |x| < 1\}$.

Demostración

Sea $0 < c < 1$ y

$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(r) = \begin{cases} e^{-1/(c-r)} & \text{si } r < c \\ 0 & \text{si } r \geq c \end{cases}$$

Como $s \in C^\infty$ hacemos

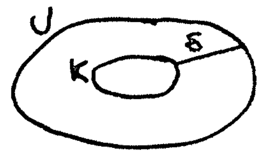
$$\eta(x) = s(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Q.E.D.

Lema 3.2

Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$, U un abierto con $K \subset U$. Entonces existe una C^∞ función φ en $\mathbb{R}^n$ con $\varphi(x) \geq 0$ para toda x , $\varphi(x) > 0$ para $x \in K$ y sop $\varphi \subset U$.

Demostración



Sea $\delta = d(K, \mathbb{R}^n - U) = \inf_{x \in K} \inf_{y \in \mathbb{R}^n - U} \{d(x,y)\}$

Para cada $a \in K$ sea $\varphi_a(x) = \eta\left(\frac{x-a}{\delta}\right)$, η como en el lema anterior.

Sea $V_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_a(x) > 0\}$ Como φ_a es continua, V_a es abierto.

Además

$$\varphi_a(a) = \eta\left(\frac{0}{\delta}\right) = s(0) > 0 \quad \therefore \; a \in V_a$$

$V_a \subset U$ porque si existe $x \in V_a$ con $x \notin U$ entonces $x \in \mathbb{R}^n - U$ y $|x-a| > \delta$, i.e. $\frac{|x-a|}{\delta} > 1$ $\therefore \; \varphi_a(x) = 0$

Siendo K compacto existe un número finito $a_1, \ldots, a_p \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_{a_i}$.

Definimos $\varphi = \Sigma \varphi_{a_i}$.

Claramente $\varphi \geq 0$. Si $x \in K$ entonces $x \in V_{a_i}$ para alguna i , i.e. $\varphi(x) > 0$.

$$V_a \subset U \text{ para } a \in K \Rightarrow \bigcup V_{a_i} \subset U \quad \therefore \text{ sop}\varphi \subset U$$

Q.E.D.

Proposición 3.2

Sea V una C^k variedad de dimensión n y (U,α) un sistema de coordenadas de V. Sea $K \subset U$, K compacto. Entonces existe una C^k función $\eta \geq 0$ en V tal que $\eta(x) > 0$ para $x \in K$ y sop $\eta \subset U$.

Demostración

Sabemos por el lema 3.2 que existe una C^∞ funcion ψ en $\mathbb{R}^n$ tal que

i) $\psi(x) \geq 0$

ii) $\psi(x) > 0$ para $x \in \alpha(K)$

iii) sop $\psi \subset \alpha(U)$

Entonces definimos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi\circ\alpha(x) & , x \in U \\ 0 & , x \notin U \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\varphi \geq 0 , \varphi(x) > 0 \text{ si } x \in K \text{ y sop } \varphi \subset U$$

Teorema 3.7 (Particiones de la unidad)

Sea V una C^k variedad de dimensión n con base numerable y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de V. Entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$.

Demostración

Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un refinamiento localmente finito de $\{U_j\}_{j\in J}$ (por proposición 3.1) tal que $\overline{V_i}$ sea compacto.

Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta de V tal que $\overline{W_i} \subset V_i$.

Por la proposición 3.2 existe una C^k función η_i en V tal que $\eta_i \geq 0$, $\eta_i(x) > 0$ para $x \in \overline{W_i}$ y sop $\eta_i \subset U_i$

Sea $\varphi_i' = \eta_i / \sum_{i\in I} \eta_i$. Esta suma es finita porque es localmente finita.

Claramente $\varphi_i' \geq 0$ m sop $\varphi_i \subset U_i$ y $\sum \varphi_i' = 1$

Sea $\pi: I \to J$ un mapeo tal que $V_i \subset U_{\pi(i)}$.

Sea $I_j \subset I$ el conjunto $\pi^{-1}(j)$ y $\varphi_j = \sum_{i\in I_j} \varphi_i'$

Como I_j son mutuamente ajenos y cubren I entonces $\sum \varphi_j = \sum \varphi_i' = 1$

Claramente sop $\varphi_j \subset U_j$. Como la familia $\{\text{sop}\,\varphi_i'\}$ es localmente finita entonces lo es $\{\text{sop}\,\varphi_j\}$.

Q.E.D.

CAPITULO IV

VARIEDADES RIEMANNIANAS.

1.- PRODUCTOS INTERIORES.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dim n.

Definición 4.1.

Un producto interior en X es una función bilineal

$$\phi : X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{tal que:}$$

1) ϕ es simétrica, i.e.

$$\phi(x,y) = \phi(y,x) \qquad \forall\, x,y \in X$$

2) ϕ es positiva definida, i.e.

$$\phi(x,x) > 0 \qquad \text{para } x \in X \text{ , } x \neq 0$$

De la bilinealidad de ϕ se deduce fácilmente que $\phi(0,0) = 0$

Sea $B^2(X) = \{ f : X \times X \to \mathbb{R} : f$ es bilineal $\} =$ conjunto de tensores covariantes de orden 2 en X.

Si definimos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{para } f, g \in B^2(X) \text{ , } \forall x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R} \text{ , } f \in B^2(X) \text{ , } \forall x \in X$$

entonces se le puede dar a $B^2(X)$ una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Sea $\quad I(X) = \{ f \in B^2(X) : f$ producto interior $\}$

$I(X)$ es un cono convexo de $B^2(X)$ porque

$$\phi_1 + \phi_2 \in I(X),\ \alpha\phi_1 \in I(X) \quad \text{para } \phi_1, \phi_2 \in I(X),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Sea $\mathfrak{O} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de X .

Entonces cada producto interior

$\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ determina una matriz de $n \times n$

$$M_\phi = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \phi(e_i, e_j)$$

De (1) y (2) de la definición 4.1 se puede demostrar que M_ϕ es una matriz simétrica positiva definida y se dice que M_ϕ es la matriz de ϕ con respecto a la base $\mathfrak{O}$.

Sea $\mathfrak{O}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base del dual de X , donde

$$e_i^*(x) = x_i \qquad \text{para} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$$

Proposición 4.1

Si $x, y \in X$ entonces

$$\phi(x,y) = \sum_{i,j} c_{ij}\, e_i^*(x)\, e_j^*(y)$$

Si $M = (m_{ij})$ es una matriz positiva definida entonces podemos definir

$$\phi : X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{como}$$

$$\phi(x,y) = \sum_{i,j} m_{ij}\, e_i^*(x)\, e_j^*(y) \tag{4.2}$$

Claramente ϕ es un producto interior. Por lo tanto hemos definido un mapeo de $I(X)$ en el conjunto de matrices simétricas positivas definidas (que denotaremos por $M(\mathbb{R})$

Se puede verificar fácilmente que este mapeo es biyectivo y lineal.

Si definimos $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{para} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad , y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

entonces ϕ es un producto interior y nos referimos a él como el producto canónico con respecto a la base $\mathfrak{A}$.

Proposición 4.2.

Hom (V, V^*) es isomorfo a $B^2(X)$

Demostración:

Sea $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$\lambda_\phi : X \rightarrow X^*$ como $\lambda_\phi(v)(w) = \phi(v,w)$

Si $\lambda : X \rightarrow X^*$ entonces la función

$\phi_\lambda(v,w) = \lambda(v)(w)$ es una función bilineal. Q.E.D.

Sea $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interior, Denotaremos cualquier $\phi \in I(X)$ por

$$\phi(x,y) = (x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Podemos definir una norma en X de la siguiente manera

$$|x| = (x,x)^{1/2}$$

Si $|x|=1$ decimos que x es un vector unitario y $x, y \in X$ son ortogonales si $(x,y)=0$

Una base $\mathfrak{A}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ en X es ortonormal si

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{si } i=j\end{cases}$$

Sea $\mathfrak{A}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal con respecto a ϕ

Entonces es claro que ϕ es el producto interior canónico con respecto a la base $\mathfrak{A}$.

2. TENSORES EN VARIEDADES.

Sea V una C^k variedad de dimensión n. Para cada $a\in V$ tenemos el espacio $T_a(V)$. Entonces podemos hablar de $B^2(T_a(V))$

Sea $L(T_a(V))\subset B^2(T_a(V))$ el conjunto de tensores simétricos covariantes de orden 2 en $T_a(V)$ y

$$L(V)=\bigcup_{a\in V} L(T_a(V))$$

Es claro que $I(T_a(V))\subset L(T_a(V))$ y definimos

$$I(V)=\bigcup_{a\in V} I(T_a(V))$$

Definición 4.2.:

Un campo tensorial simétrico g en V es un mapeo

$$g: V\to L(V) \text{ tal que } g(a)\in L(T_a(V)) \;\forall a\in V.$$

Sea $a \in V$, $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right)$ base de $T_a(V)$, y $((dx_1)_a, \ldots, (dx_n)_a)$ base de $T_a^*(V)$ con respecto a un sistema de coordenadas (U, α)

Como $g(a) \in L(T_a(V))$ entonces por (4.2)

$$g(a)(\xi,\eta) = \sum_{i,j} g_{ij}(a)(dx_i)_a\xi\,(dx_j)_a\eta \quad \text{para } \xi,\eta \in T_a(V)$$

donde $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$ con

$$g_{ij}(a) = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) \quad \text{para } i,j=1,\ldots,n \qquad (4.3)$$

Sea (W,β) otro sistema de coordenadas.

Entonces para $a \in W$

$$g(a)(\xi,\eta) = \sum_{k,l} h_{k,l}(a)(dy_k)_a\xi\,(dy_l)_a\eta$$

Si $a \in U \cap W$ entonces por (3.3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a = \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a)\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_a, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a = \sum_l \frac{\partial y_l}{\partial x_j}(a)\left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)_a$$

y

$$g_{ij}(a) = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a)\,\frac{\partial y_l}{\partial x_j}(a)\,h_{k,l}(a) \qquad (4.4)$$

De (4.4) vemos que si las funciones h_{ij} son diferenciables lo son también las g_{ij} en $U \cap W$.

Definición 4.3.

Un campo tensorial simétrico en V es de clase C^r $(0 \leq r \leq k)$ si y sólo si las funciones definidas por (4.3) son de clase C^r para cualquier sistema de coordenadas (U,α) en V. Denotamos al conjunto de campos tensoriales simétricos de clase C^r por $S^r(V)$

Sea V una C^k variedad compacta y $\{(U_i, d_i)\}_{i=1}^{n}$ una familia de sistemas de coordenadas de V, tal que $U_1, \ldots, U_n$ sea una cubierta de V.

Para cada $g \in S^r(V)$ definimos

$$\|g\|_{U_i, d_i} = \sup_{|d| \leq r} \sup_{a \in U_i} \sup_{i,j} |D^d g_{ij}(a)| \quad y$$

$$\|g\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|g\|_{U_i, d_i}$$

Al igual que para $C^k(V, \mathbb{R}^m)$ se puede demostrar que $(S^r(V), \| \ \|)$ es un espacio de Banach y que la selección de cubiertas finitas distintas genera normas equivalentes.

Definición 4.4.

Sea g un campo tensorial simétrico en V.

Si para cada $a \in V$, $g(a)$ es un producto interior entonces se dice que g es una métrica riemanniana y V es una variedad riemanniana.

Si g es de clase C^r entonces se dice que V es una variedad con una métrica C^r

Denotamos al conjunto de métricas riemannianas de clase C^r como $K^r(V)$

Ejemplo 1.

Sea V una superficie de $\mathbb{R}^3$. Para cada $a \in V$, $T_a(V)$ es el plano tangente de V en a. Entonces

$$g(a)(\xi,\eta) = (\xi,\eta) \quad \forall a \in V,\ \xi,\eta \in T_a(V)$$

es una métrica riemanniana donde $(\,,\,)$ es el producto interior canónico de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.

Sea $\mathbb{R}^2$ considerada como superficie. Entonces para $a \in V$, $T_a(V)$ es $\mathbb{R}^2$.

Sea $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con $h(a) \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^2$

Entonces definimos

$$(v,w) = \frac{v \cdot w}{h^2(a)} \qquad \text{para cada} \quad a \in V$$

Vamos a demostrar que a cualquier variedad se le puede inducir una métrica riemanniana.

Teorema 4.1.

Sea V una C^k variedad de dimensión n con base numerable. Entonces existe una métrica riemanniana de clase C^k en V.

Demostración.

Sea $A = \{(U_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ la estructura C^k en V. Entonces existe $B = \{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta refinamiento de A localmente finito. Por el Teorema 3.7 existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{W_i\}_{i\in I}$ tal que

i) $0 \leq \varphi_i \leq 1$

ii) $\operatorname{sop} \varphi_i \subset W_i$

iii) $\{\operatorname{sop} \varphi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita

iv) $\sum_{i \in I} \varphi_i(a) = 1 \quad \forall a \in V$

Sea W un elemento de $\mathcal{B}$. Entonces $W \subset U_i$ para alguna $i \in I$ y por lo tanto existe

$$\psi : W \to \mathbb{R}^n \quad \text{donde} \quad \psi = \alpha_i | U$$

Para cada $a \in W$

$$\mathcal{O}\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a \right\}$$ es una base de $T_a(V)$

con respecto al sistema de coordenadas (W, ψ)

Sea $\langle \, , \rangle$ el producto interior canónico con respecto a $\mathcal{O}\mathcal{L}_a$

Entonces tenemos un mapeo

$$K_U : W \to I(W)$$

que a cada elemento $a \in W$, le asocia el producto interior canónico con respecto a la base $\mathcal{O}\mathcal{L}_a$

Entonces podemos definir

$$g_W : V \longrightarrow L(V) \quad \text{como}$$

$$g_W(a) = \begin{cases} \varphi_W(a) K_U(a) & \text{si } a \in W \\ 0 & \text{si } a \in X - W \end{cases}$$

$$g_W(a) \in I(V) \text{ si y solo si } \varphi_W(a) \neq 0$$

Definimos

$$g : V \to L(V) \quad \text{como}$$
$$g(a) = \sum_{W\in\mathcal{B}} g_W(a) \quad \forall a \in V$$

$\sum g_W(a)$ es finita porque a está en un número finito de abiertos de $\mathcal{B}$.

Sea $a\in V$ Como $\sum_{i\in I} \varphi_i(a) = 1$ y $0 \le \varphi_i \le 1 \quad \forall i$ entonces existe φ_i tal que $\varphi_i(a) > 0$, i.e.

existe $W\in\mathcal{B}$ tal que $a \in \text{sop}\, \varphi_i \subset W$.

Por lo tanto

$$g_W(a) \in I(V) \quad \text{y} \quad g(a) \in I(V)$$

Es claro que $g(a) \in I(T_a(V))$

Para probar que g es de clase C^k vamos a ver que cada

$$g_{ij} : V \to \mathbb{R} \quad \text{es de clase } C^k$$
$$g_{ij}(a) = \sum_{W\in\mathcal{B}} g_{ij}^W(a) = \sum_{W\in\mathcal{B}} \varphi_W(a) K_{ij}^W(a)$$
$$= \sum_{W\in\mathcal{B}} \varphi_W(a) K_W(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right)$$

Por lo tanto g_{ij} es de clase C^r

Sea V una C^k variedad de dimensión n,

$$\psi : V \to \mathbb{R}^m, \quad \psi \in C^r(V, \mathbb{R}^m) \quad \text{y}$$

$(\ ,\ )$ el producto interior canónico en $\mathbb{R}^m$

Entonces para cada $a\in V$ definimos

$$g(a) : T_a(V) \times T_a(V) \to \mathbb{R} \quad \text{como}$$
$$g(a)(\xi, \eta) = (\psi_{*a}(\xi), \psi_{*a}(\eta))$$

Es fácil comprobar que $g(a)$ es bilineal.

Pero $g(a)$ no es necesariamente positivo definido.

Si ψ es constante entonces $\psi_{*a}(\xi)=0$ para $\xi \neq 0$

Esto significa que cada $\psi \in C^r(V,\mathbb{R}^m)$ induce un campo tensorial simétrico g en V

Como

$$g_{ij} = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) = \left(\psi_{*a}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \psi_{*a}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right)$$

con respecto a un sistema de coordenadas (U,α)

y ψ_{*a} está representada por $J_{\psi\circ\alpha^{-1}}(\alpha(a)) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1, & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_n}\psi_1 \\ \vdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_m, & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_n}\psi_m \end{pmatrix}$$

entonces $g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\psi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_\alpha$

De (4.5) se ve que si ψ es de clase C^r

entonces g_{ij} es de clase C^{r-1}

Vamos a ver que en el caso de inmersiones el campo tensorial inducido resulta ser una métrica riemanniana.

Teorema 4.2.

Si φ es una inmersión entonces g inducida por $\langle\ ,\ \rangle$ es una métrica riemanniana.

Demostración:

Por ser φ inmersión, φ_{*a} es una inyección para cada $a \in V$

Entonces

$$g(a)(\xi,\xi) = \langle \varphi_{*a}(\xi), \varphi_{*a}(\xi)\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\varphi_{*a}(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

Ahora bien, ¿cuándo una variedad riemanniana V con una métrica g es superficie de $\mathbb{R}^m$ para alguna m ? i.e. ¿cuándo V es una sub-variedad de $\mathbb{R}^m$ y su geometria intrínseca coincide con la geometría inducida por $\mathbb{R}^m$ a V.

Entonces necesitamos saber si existe Z encaje tal que el producto interior inducido por Z coincida con g,

$$g(a)(\xi, \eta) = \langle Z_{*a}(\xi), Z_{*a}(\eta)\rangle$$

En el capítulo 7 vamos a demostrar que si V es una C^∞ variedad compacta con una métrica C^∞ siempre existe alguna m y un encaje Z tal que

$$Z: V \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \text{es isométrico}$$

Por ello los teoremas que a continuación demostramos se refieren a variedades compactas o en particular a T^n.

Existen otros resultados sobre encajes o inmersiones isométricas que aquí no mencionamos. Para una referencia más completa se puede consultar [5.2].

Teorema 4.3

Sea V una C^k variedad de dimensión n, con base numerable, W una C^k variedad de dimensión m con una métrica riemanniana g de clase C^k.

Si W es una sub-variedad cerrada de V entonces existe una métrica riemanniana $\bar{g}$ en V de clase C^k tal que la métrica inducida por la inclusión $i: W \to V$ coincide con g.

Demostración

Sea $a \in W$, por ser W sub-variedad cerrada existe un sistema de coordenadas (U_a, α_a) en V tal que $i(a) \in U_a$ y $\alpha(U_a \cap i(W)) = \alpha_a(U_a) \cap \mathbb{R}^m$.

Podemos escoger $U_a' \subset U_a$ tal que

$$\alpha(U_a') = B^n \text{ (bola en } \mathbb{R}^n)$$
$$\alpha(U_a' \cap i(W)) = B^m \text{ (bola en } \mathbb{R}^m)$$

Sea

$$T: B^n \to B^m$$ donde π es la proyección y como α_a es un homeomorfismo podemos definir

$$\pi : U_a' \to U_a' \cap i(W)$$

Definimos para $x \in U_a'$

$$g'_{ij}(x) = \begin{cases} g_{ij}(\pi(x)) & \text{si } i,j \leq m \\ \delta_{ij} & \text{si } i \text{ ó } j > m \end{cases}$$

Entonces g'_a determinada por las g'_{ij} es una métrica riemanniana en U'_a .

Como $A = \{U'_a, V-W\}_{a \in W}$ es una cubierta abierta de V entonces existe una partición de la unidad $\{\eta_a, \eta\}_{a \in W}$ subordinada a A

Definimos

$$\bar{g}_a = \begin{cases} \eta_a g'_a & \text{si } x \in U'_a \\ 0 & \text{si } x \notin U'_a \end{cases}$$

Es claro que $\bar{g}_a \in C^k$.

Por ser $V-W$ un abierto en una variedad entonces $V-W$ es una variedad y por el Teorema 4.1 existe una métrica h en $V-W$ de clase C^k.

Definimos

$$\bar{g} = \sum_{a \in W} \bar{g}_a + \eta h$$

$\bar{g}$ es una métrica riemanniana de clase C^k . Además para $x \in W$ y $i,j \leq m$

$$\bar{g}_{ij}(x) = \sum_{a \in W} \eta_a(x) g'_{ij}(x) = \sum_{a \in W} \eta_a(x) g_{ij}(x) =$$
$$g_{ij}(x) \sum_{a \in W} \eta_a(x) = g_{ij}(x)$$

Corolario 4.1

Sea V una C^k variedad compacta de dimensión $n \geq 2$ con una métrica riemanniana g de clase C^k .

Entonces V es una sub-variedad cerrada en T^{2n} y existe $\bar{g}$ tal que la métrica inducida por la inclusión $i: V \to T^{2n}$ coincide con g .

Demostración:

Por el Teorema 3.6 existe un encaje cerrado de V en $\mathbb{R}^{2n}$

Como $\mathbb{R}^{2n} \subset T^{2n}$ entonces V es una sub-variedad cerrada de T^{2n} y por el Teorema anterior podemos extender la métrica g a T^n

Un campo tensorial puede representarse por las g_{ij} en forma matricial, i.e.

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Esta representación depende del sistema de coordenadas. Vamos a ver que en el caso del toro T^n la expresión de las g_{ij} es la misma para cualquier sistema de coordenadas.

Consideremos el ejemplo 5 del Cap. III en el caso del toro de dimensión 1.

Vimos que

$$\theta_2 \circ \theta_1^{-1}(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\theta_1 \circ \theta_2^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < 2\pi \\ x - 2\pi & \text{si } 2\pi < x < \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

con $U_1 = S^1 - \{(1,0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(0,1)\}$

Para $a \in U_1$

$$g_{ij}(a) = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) \quad \text{para} \quad i,j=1,\dots,n$$

y para $b \in U_2$

$$h_{k\ell}(b) = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)_a\right) \quad \text{para} \quad k,\ell=1,\dots,n$$

Si $a \in U_1 \cap U_2$ entonces por (4.3)

$$g_{ij}(a) = \sum_{k,\ell} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}(a)\, h_{k\ell}(a) \qquad i,j=1,\dots,n$$

Pero

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(a) = 1, \qquad \Rightarrow g_{11}(a) = h_{11}(a)$$

como $T^n = S^1 \times \dots S^1$ entonces $g = g_{ij}$ se puede identificar con el producto de n^2 funciones $g_{ij} : V \to \mathbb{R}$, i.e.

$$S^n(V) \simeq C^n(V, \mathbb{R})^{n^2}$$

CAPITULO V

OPERADORES DE ALISAMIENTO

1. Operadores de alisamiento para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Sea T^n el toro de dimensión n y

$$C^0(T^n) = \{f : T^n \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ continua y de periodo } 2\pi\}$$

Vamos a construir una familia de operadores de alisamiento para $C^0(T^n)$ i.e. una familia $\{S(t)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\geq 1}}$ tal que

$$S(t) : C^0(T^n) \to C^\infty(T^n)$$

con la propiedad

$$\lim_{t\to\infty} S(t)u = u \qquad , u \in C^0(T^n)$$

Este resultado es básico en la demostración del Teorema de Funciones Implícitos (cap. VI Teorema 6.2)

Antes de construir esta familia de operadores vamos a ver someramente esta construcción para el caso de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sea $f \in C^0(T^1)$ y el polinomio trigonométrico

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Es natural tratar de ver si f se puede aproximar por S_n. Podemos tomar varios criterior para saber si $S_n(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$.

Nosotros vamos a decir que la mejor aproximación de f por $S_n(x)$ va a ser cuando

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \qquad \text{sea mínimo} \qquad (5.1)$$

De (5.1) se puede deducir que los coeficientes a_k, b_k están dados por

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \qquad , \; k = 1, 2, \ldots$$

Podemos entonces definir una familia de operadores de alisamiento para $C^0(T^1)$ como

$$S(n) f(x) = S_n(x) \qquad , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cuando f satisface ciertas propiedades se puede demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} S(n) f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$$

Ahora vamos a considerar una familia de operadores de alisamiento para f reales contínuas en un conjunto acotado.

Sea $\{K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que llamaremos sucesión de Dirac que cumple con las siguientes propiedades:

i) $K_n(x) \geq 0 \quad \forall n \quad \forall x$

ii) K_n es continua por partes en cada intervalo finito y

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt = 1$$

iii) dada ε y δ existe N tal que si $n \geq N$

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n + \int_{\delta}^{\infty} K_n < \varepsilon \quad , \text{ i.e. para}$$

n suficientemente grande el área $\int_{-\infty}^{\infty} K_n$ se concentra en el origen

Ademas K_n es una función par, i.e.

$$K_n(x) = K_n(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definimos la convolución

$$f_n(x) = K_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K_n(x-y)\, dy \qquad (5.2)$$

Si f es acotada y continua en un compacto $K \subset \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \qquad (5.3)$$

si $K_n \in C^{\infty}$ entonces $f_n \in C^{\infty}$ y $\qquad (5.4)$

$$f_n' = (K_n * f)' = K_n' * f$$

Para demostrar (5.3), hacemos el cambio de variable $z = x - t$ y obtenemos que

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) K_n(z)\, dz$$

Por la propiedad ii)

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K_n(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_n(z)\, dz$$

Entonces

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-z) - f(x)] K_n(z)\, dz \qquad (5.5)$$

Por ser K compacto f es uniformemente continua en K i.e. dada $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon)$ tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow |f(x-z) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Sea M tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces existe N tal que si $n \geq N$

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n + \int_{\delta}^{\infty} K_n \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Tomando valor absoluto de (5.5)

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x-z) - f(x)| K_n(z)\,dz$$

Sabemos que

$$|f(x-z) - f(x)| \leq 2M$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x-z) - f(x)| K_n(z)\,dz \leq 2M \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} K_n(z)\,dz < \varepsilon$$

y

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-z) - f(x)| K_n(z)\,dz \leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon K_n(z)\,dz \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$

Ejemplo 1

Sea $K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $K \geq 0$, $K(x) = 0$ fuera de un acotado $S \subset \mathbb{R}$, K es continua por partes y

$$\int_{\mathbb{R}} K(t)\,dt = 1$$

Definimos $K_n(t) = n K(nt)$ para $n = 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} n K(tn)\,dt = 1$$

Y es obvio que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface también las propiedades ii) y iii) y por lo tanto es una sucesión de Dirac.

Ejemplo 2.

Sea $K_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}$, y $f \in C^0(T^1)$

Se puede demostrar que $\{K_n\}$ es una sucesión de Dirac y que

$$f * K_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

2. Espacio de Schwartz.

Definición 5.1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Se dice que f tiende rápidamente a cero en infinito si para cada entero positivo $m > 0$ el mapeo

$$x \longrightarrow (1+|x|)^m f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

está acotado para $|x|$ suficientemente grande, i.e. si

$$|(1+|x|)^m f(x)| \leq C \quad \text{para } |x| \text{ suficientemente grande.}$$

Definición 5.2

Se llama espacio de Schwartz o simplemente S al conjunto de funciones en $\mathbb{R}^n$ de clase C^∞ tal que la función y sus derivadas parciales de todos órdenes tiendan rápidamente a cero en infinito.

Es claro que S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$
Cualquier función C^{∞} que se anula fuera de un acotado está en S.

Definición 5.3

Si $f \in S$ entonces definimos su transformada de Fourier como

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \qquad (5.6)$$

Denotaremos la derivada parcial con respecto a la j-ésima variable por D_j y

$D^p = D_1^{p_1} \dots D_n^{p_n}$, $p_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $|p| = p_1 + \dots + p_n$

Definimos $M_j f$ como

$$(M_j f)(x) = x_j f(x) \quad y$$
$$(M^p f)(x) = (M_1^{p_1} \dots M_n^{p_n} f)(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} f(x)$$

Teorema 5.1

Si $f \in S$ entonces

i) $D^p \hat{f} = (-i)^{|p|} (M^p f)^{\wedge}$

ii) $(D^p f)^{\wedge} = (-i)^{|p|} M^p \hat{f}$

iii) $\hat{f} \in S$

iv) $\hat{\hat{f}} = f^{-}$ donde $f^{-}(x) = f(-x)$

Demostración

Tenemos que

$$|\hat{f}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-ixy}|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es acotada.

Como

$$\frac{\partial}{\partial y_j} f(x)e^{-ixy} = -i\, x_j\, f(x)\, e^{-ixy}$$

está acotada podemos derivar $\hat{f}(y)$

$$D_j \hat{f}(y) = \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ixy}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

$$= (-i) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,x_j\,e^{-ixy}\,dx = (-i)(M_j f)^{\wedge}$$

Por inducción se obtiene

$$D^p \hat{f} = (-i)^{|p|}(M^p f)^{\wedge}$$

Sea

$$y_j \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,y_j\,e^{-ixy}\,dx$$

Si integramos por partes con respecto a la j-ésima variable entonces

$$u = f(x) \qquad dv = y_j e^{-ixy}$$
$$du = D_j f(x) \qquad v = i\,e^{-ixy}$$

Como

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a f(m_1, \ldots, x_j, \ldots, m_n)\, e^{-i x_j y_j}\, dx_j = 0$$

entonces

$$M_j \hat{f}(y) = (-i) \int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x)e^{-ixy}\,dx = (-i)(D_j f)^{\wedge}(y)$$

y por inducción

$$M^p \hat{f}(y) = (-i)^{|p|}(D^p f)^{\wedge}(y)$$

Como $D^p f \in S$ entonces $M^p f$ está acotada y de la relación

$$(y_1 \dots y_n)^{1/n} \le \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)$$

se ve que $\hat{f} \in S$

Sea $g = D^q f \in S$ Entonces

$$M^p D^q \hat{f} = (-i)^{|p|} M^p (D^q f)^\wedge \quad \therefore \quad D^q \hat{f} \in S$$

Vamos a probar iv)

Sea $g \in S$ Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-ixy} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-ixz} e^{-ixy} g(x)\,dx\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,\hat{g}(z+y)\,dz$$

Sea $h \in S$ y $g(u) = h(au)$ para $a > 0$ Entonces

$$\hat{g}(u) = \frac{1}{a^n}\hat{h}(u/a) \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-ixy} h(ax)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{1}{a^n} \hat{h}\left(\frac{z+y}{a}\right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(au-y)\hat{h}(u)\,du$$

con el cambio de variable

$$u = \frac{(t+y)}{a} \qquad du = \frac{dz}{a^n}$$

Si $a \to 0$ entonces

$$h(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, e^{-ixy}\, dx = h(0)\,\hat{\hat{f}}(y) =$$

$$= f(-y)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(u)\, du = f(-y)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(u)\, e^{-i0u}\, du = f(-y)\,\hat{\hat{h}}(0)$$

Sabemos que si $h(x) = e^{-x^2/2}$ entonces

$$\hat{h} = h \quad y \quad h(0)\,\hat{\hat{f}}(y) = f(-y)\,h(0)$$ Q.E.D.

3. Operadores de alisamiento en

En el capítulo III introdujimos el espacio de Banach

$(C^k(T^n), \|\ \|)$ con

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha|\le k}\ \max_{x\in T^n} |D^\alpha u(x)|, \text{ donde}$$

$$D^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x) \quad \text{con}$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \ge 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

Lema 5.1

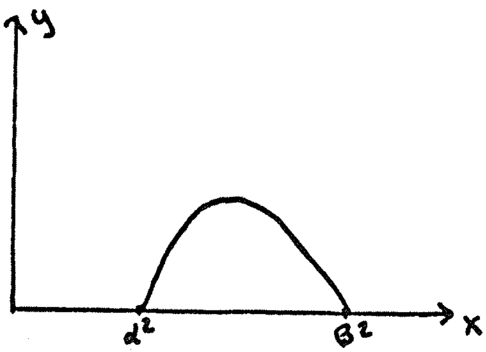
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $0 \le \alpha \le \beta$. Entonces existe $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in C^\infty$,

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le \alpha \\ 0 & \text{si } |x| \ge \beta \end{cases} \quad y \quad 0 \le a(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostracion.

Sea $\alpha_1 = \alpha^2$, $\beta_1 = \beta^2$ Definimos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{(1/t-\beta_1 - 1/t-\alpha_1)} & \text{si} \quad \alpha_1 < t < \beta_1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq \beta_1 , t \leq \alpha_1 \end{cases}$$



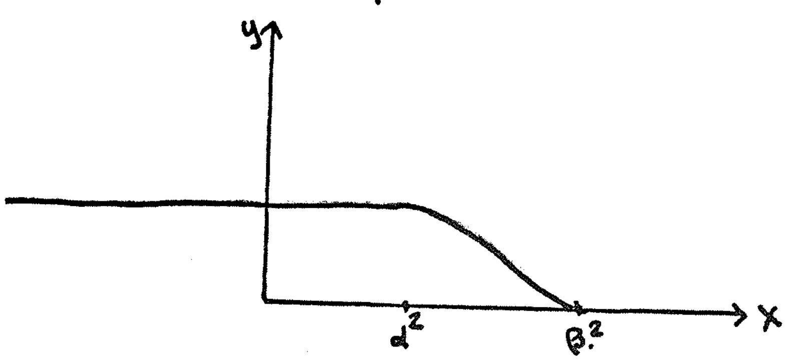
Definimos

$$\psi(x) = \int_x^{\beta_1} \phi(t)dt \Big/ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \phi(t)dt$$

Entonces

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq \alpha^2 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \beta^2 \end{cases} \quad y$$

$$0 \leq \psi(t) \leq 1$$



Definimos

$$a(\bar{x}) = \psi(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

Si $|\bar{x}|^2 \leq \alpha^2$ entonces $a(\bar{x}) = 1$

$|\bar{x}|^2 \geq \beta^2$ entonces $a(\bar{x}) = 0$ Q.E.D.

Sea a la función construida en el lema anterior. Claramente $a \in S$ y

$$\hat{a}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{-ixy}\, dx = b(y)$$

Como $\hat{a} \in S$ entonces para cada $\alpha > 0$ y para cada N existe $A(\alpha, N)$ tal que

$$|D^\alpha \hat{a}(y)| \leq A(\alpha, n)(1 + |y|)^{-N}$$

Lema 5.2

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(y)\, dy = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha b(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} M^\alpha b(y)\, dy = 0 \quad \text{para } |\alpha| > 0$$

Demostracion.

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} b(y) e^{-i0 \cdot y}\, dy = \hat{b}(0) = \hat{\hat{a}}(0) = a(-0) = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha b(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha b(y) e^{-i0y}\, dy = D^\alpha \hat{b}(0) = D^\alpha a(-0) = 0$$

Vamos a definir una familia de operadores

$\{S(t)\}_{\substack{t\geq 1\\ t\in\mathbb{R}}}$ en $C^k(T^n)$ de la siguiente manera

$$(S(t)u)(x) = t^n \int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))u(y)\,dy \quad , u\in C^k(T^n) \tag{5.1}$$

Lema 5.3

i) $S(t)u \in C^\infty$

ii) $D^\alpha S(t)u = S(t)D^\alpha u$ para $|\alpha|\leq k$

Demostracion

Como podemos diferenciar bajo el signo de integración porque $D^\alpha b \in S$ para toda α entonces

$$D^\alpha S(t)u(x) = t^n \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha(b(t(x-y))u(y)\,dy$$

$$= t^n \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha b(t(x-y))\, D^\alpha(t(x-y))u(y)\,dy$$

$$= t^{n+|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha b(t(x-y))u(y)\,dy$$

y queda demostrado i).

Si hacemos el cambio de variable $y = Q(z) = x - z$ entonces

$$(S(t)u)(x) = t^n \int_{\mathbb{R}^n} b(tx-ty)u(y)\,dy =$$

$$t^n \int_{\mathbb{R}^n} b(tz)u(x-z)\,dz$$

y para cada $|\alpha| \leq k$

$$D^{\alpha}(S(t)u)(x) = t^{n} \int_{\mathbb{R}^n} b(tz) D^{\alpha}u(x-z)\, dz$$

Ahora hacemos el cambio de variable $\varphi(y) = z = x - y$

y

$$D^{\alpha}(S(t)u)(x) = t^{n} \int_{\mathbb{R}^n} b(tx - ty) D^{\alpha}u(y) dy = (S(t) D^{\alpha}u)(x)$$

Q.E.D.

Vamos a ver que

$\lim_{t\to\infty} S(t)u = u$ y que además en un cierto rango.

de diferenciabilidad de u, el operador de alisamiento no altera demasiado las propiedades de u excepto por un factor.

Teorema 5.2.

Existe $M \geq 1$ tal que la familia de operadores $\{S(t)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\geq 1}}$ definida por (5.7) cumple con las siguientes propiedades

S1) $|S(t)u|_{\rho} \leq M t^{\rho - r} |u|_{r}$, $u \in C^{r}$

S2) $|(I - S(t))u|_{r} \leq M t^{r-\rho} |u|_{\rho}$, $u \in C^{\rho}$

S3) $|\frac{d}{dt} S(t)u|_{r} \leq M t^{r-\rho-1} |u|_{\rho}$, $u \in C^{\rho}$

S4) $\lim_{t\to\infty} |(I - S(t))u|_{r} = 0$, $u \in C^{r}$

con $k - \alpha \leq r \leq \rho \leq k + 10\alpha$

Demostración

Por el lema 5.3, $S(t)$ conmuta con operadores del esenciables y por lo tanto basta demostrar las propiedades para el caso $r=0$ y después aplicar ii) del lema 5.3 para la demostración de los casos en que $r>0$.

Entonces para S1 basta ver que

$$|S(t)u|_\rho \leq Mt^\rho |u|_0 \quad , u \in C^0$$

Sea $|\alpha| \leq \rho$ Tenemos que

$$D^\alpha S(t)u(x) = t^{n+|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha b(t(x-y))\, u(y)\, dy$$

Si hacemos el cambio de variable $z=\varphi(y)=t(x-y)$ entonces

$$D^\alpha S(t)u(x) = t^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha b(z)\, u(x-\frac{z}{t})\, dz$$

Tomamos valor absoluto

$$|D^\alpha S(t)u(x)| \leq t^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha b(z)||u(x-\frac{z}{t})|\, dz$$

Si M satisface que

$$\max_{|\beta|\leq k+10\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\beta(b(z))|\, dz \leq M$$

entonces

$$|D^\alpha S(t)u(x)| \leq t^{|\alpha|} M|u|_0 \leq t^\rho M|u|_0$$

La integral $\int_{\mathbb{R}^n} |D^\beta b(z)|\, dz < \infty$ porque $D^\beta b(z) \in S$.

Por lo tanto

$$|S(t)u|_\rho \leq Mt^\rho |u|_0 \tag{5.8}$$

Ahora sea $u \in C^r$ y $|\alpha| \leq r$ con $r>0$

Tenemos que

$$|D^\alpha S(t)u|_{\rho-r} = |S(t)D^\alpha u|_{\rho-r} \quad \text{y aplicando (5.8)}$$

$$|D^\alpha S(t)u|_{\rho-r} \leq Mt^{\rho-r} |D^\alpha u|_0 \leq Mt^{\rho-r} |u|_r$$

Entonces para β con $|\beta| = r$

$$|D^{\beta}S(t)u|_{p-r} = |S(t)D^{\beta}u|_{p-r} = \max_{|\alpha|\le p-r}\ \max_{x\in T^n} |D^{\alpha}S(t)D^{\beta}u(x)|$$

$$= \max_{|\alpha|\le p-r}\ \max_{x\in T^n} |D^{\alpha+\beta}S(t)u(x)| \le Mt^{p-r}|u|_r$$

Por lo tanto

$$|D^{\alpha+\beta}S(t)u|_0 \le Mt^{p-r}|u|_r \quad \text{para } |\alpha|\le p-r\,,\ |\beta|\le r \qquad (5.9)$$

y

$$|D^{\alpha}S(t)u|_0 \le |D^{\alpha}S(t)u|_{p-r} \le Mt^{p-r}|u|_r \quad \text{para } |\alpha|\le r \qquad (5.10)$$

Usando (5.9) y (5.10) obtenemos que

$$|S(t)u|_p = \max_{|\alpha|\le p} |D^{\alpha}S(t)u|_0 \le Mt^{p-r}|u|_r$$

y queda demostrada la propiedad i)

Para S2 con $r = 0$ necesitamos probar que

$$|(I - S(t))u|_0 \le Mt^{-p}|u|_p\ ,\quad u\in C^p$$

Por el teorema de Taylor

$$u(x+y) = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}\Big(\sum_{|\alpha|\le j} y^{\alpha}D^{\alpha}u(x)\Big) + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{|\alpha|=p} y^{\alpha}\int_0^1 (1-\mu)^{p-1}D^{\alpha}u(x+\mu y)\,d\mu \qquad (5.11)$$

Por otro lado tenemos que

$$t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))u(x)\,dy = u(x)\,t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))\,dy$$

Si hacemos el cambio de variable $z = t(x-y) = \varphi(y)$

entonces

$$u(x)t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))\,dy = u(x)\int_{\mathbb{R}^n} b(z)\,dz = u(x)$$

(por i) de lema 5.2)

Por lo tanto

$$u(x)-S(t)u(x)=t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))[u(x)-u(y)]\,dy \tag{5.12}$$

Aplicando (5.11) a (5.12) obtenemos

$$u(x)-S(t)u(x)=$$
$$t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))\left[\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}\left(\sum_{|\alpha|\le j}(x-y)^\alpha D^\alpha u(x)+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{|\alpha|=p}(x-y)^\alpha\int_0^1(1-\mu)^{p-1}D^\alpha u(x+\mu(x-y))\,d\mu\right]dy$$

Cada integrando de la forma

$$\frac{1}{j!}t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))(x-y)^\alpha D^\alpha u(x)\,dy \quad \text{con} \quad |\alpha|\le j$$

es igual a

$$\frac{1}{j!}D^\alpha u(x)\,t^n\int_{\mathbb{R}^n} b(t(x-y))(x-y)^\alpha\,dy \tag{5.13}$$

Haciendo el cambio de variable $z=t(x-y)=\varphi(y)$

tenemos que (5.13) es igual a

$$t^{|\alpha|}\frac{1}{j!}D^\alpha u(x)\int_{\mathbb{R}^n} b(z)z^\alpha\,dz=0$$ por la propiedad ii)

del lema 5.2.

Por lo tanto (5.12) se reduce a

$$u(x)-S(t)u(x)=\frac{t^n}{(p-1)!}\sum_{|\alpha|=p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 b(t(x-y))(x-y)^\alpha(1-\mu)^{p-1}D^\alpha u(x+\mu(x-y))\,d\mu\,dy$$

Si hacemos el cambio de variable $z=\varphi(y)=t(x-y)$

entonces

$$u(x)-S(t)u(x)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{|\alpha|=p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 b(z)\frac{z^\alpha}{t^\alpha}(1-\mu)^{p-1}D^\alpha u(x+\mu(tz))\,d\mu\,dz$$

Usando el Teorema 2.6 del cap. II

$$|u(x)-(S(t)u)(x)| \leq 2t^{-|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}|b(z)||z|^{\rho}dz\,|D^{\rho}u| \leq 2t^{-|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}|b(z)||z|^{\rho}dz\,|u|_{\rho}$$

Si M satisface que

$$\sup_{|\beta|\leq k+10\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|b(z)||z|^{\beta} \leq M/2 \quad \text{entonces}$$

$$|u(x)-(S(t)u)(x)| \leq t^{-\rho}M|u|_{\rho}$$

Por lo tanto

$$|u-S(t)u| \leq Mt^{-\rho}|u|_{\rho}$$

Sea $r > 0$ y $|\alpha| \leq r$

Como $u \in C^{\rho}$ entonces $D^{\alpha}u \in C^{\rho-r}$ y

$$|D^{\alpha}(u-S(t)u)(x)| \leq |(I-S(t))D^{\alpha}u(x)| \leq Mt^{-\rho+r}|D^{\alpha}u|_{\rho-r} \tag{5.14}$$

Pero

$$|D^{\alpha}u|_{\rho-r} = \max_{|\beta|\leq\rho-r}\max_{x\in T^n}|D^{\alpha+\beta}u(x)| \leq |u|_{\rho} \tag{5.15}$$

y usando (5.15) en (5.14) tenemos que

$$|D^{\alpha}(u-S(t)u)(x)| \leq Mt^{r-\rho}|u|_{\rho}$$

Por lo tanto

$$|(I-S(t))u|_{r} \leq Mt^{r-\rho}|u|_{\rho}$$

La propiedad S3 se demuestra en forma análoga.

La demostración de S4 es similar a la que hicimos en la sección 1 para la sucesión de Dirac y por esa razón la omitimos.

CAPITULO VI

TEOREMAS DE FUNCIONES IMPLICITAS

En el capítulo I, hemos utilizado el método de Newton para demostrar la existencia de una solución a la ecuación $f(x)=0$.

¿Se puede generalizar este método a espacios normados?

Recordemos que en el caso de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ definimos la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}(x_n)f(x_n)$$

Si queremos definir esta sucesión en un espacio normado es necesario que la derivada de Frechet $f'(x_n)$ como operador lineal continuo tenga inverso.

Vamos a ver que es suficiente pedir que exista un inverso por la derecha de $f'(x_n)$

Además nos restringiremos a espacios de Banach para garantizar la convergencia de sucesiones de Cauchy.

Teorema 6.1 (Funciones Implícitas).
Sea B un espacio de Banach, $S=\{x\in B : \|x\|\leq 1\}$
y $f:S\to B$ una función con las siguientes propiedades:

i) f tiene dos derivadas continuas de Frechet en S acotadas por una constante $M > 2$, *i.e.*

$$\|f'(x)\| \le M, \quad \|f^{(2)}(x)\| \le M \quad \forall\, x \in S$$

ii) existe un operador $L: S \to \beta(B)$ tal que

a) $|L(u)h| \le M|h|, \qquad h \in B,\ u \in S$

b) $df(u)L(u)h = h, \qquad h \in B, u \in S$

Entonces $0 \in f(S)$ si $|f(0)| < M^{-5}$

DEMOSTRACION:

Sea $K = 3/2$ y $\beta > 0$

Definimos una sucesión $\{U_n\} \subset B$ de la siguiente forma:

$$U_0 = 0$$
$$U_{n+1} = U_n - L(U_n)\, f(U_n)$$

Vamos a demostrar por inducción que:

$$(*) \quad U_{n-1} \in S$$
$$(**) \quad |U_n - U_{n-1}| \le e^{-\beta K^n} \qquad \text{para } n \ge 1.$$

Para $n = 1$

$$U_0 \in S$$
$$|U_0 - U_1| = |L(0) f(0)| \le M|f(0)| \le M M^{-5} = M^{-4}$$

Basta escoger β tal que

$$M^2 \ge e^{1/2 \beta K} \qquad (6.1).$$

para que

$$|U_0 - U_1| \le e^{-\beta K}$$

Supongamos que $(*)$ y $(**)$ son ciertas para $j \leq n$

Entonces,

$$|U_n| = |U_n - U_{n-1} + U_{n-1} - \ldots - U_0 + U_0| \leq$$
$$\sum_{i=1}^{n} |U_i - U_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta K^i} \leq$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta(K-1)j} = \frac{e^{-\beta(K-1)}}{1 - e^{-\beta(K-1)}}$$

Basta escoger β tal que $e^{-1/2\,\beta} \leq 1/2$ (6.2)

para que $|U_n| \leq 1$ $\therefore$ $U_n \in S$

Por la hipótesis i) tenemos que

$$f(u+h) = f(u) + Df(u)h + \int_0^1 (1-t)\,D^2 f(u+th)(h,h)\,dt$$

Ahora bien

$$|U_{n+1} - U_n| = |L(U_n)\,f(U_n)| \leq M\,|f(U_n)| =$$
$$M\,|f(U_{n-1} - L(U_{n-1})\,f(U_{n-1})| \leq$$
$$M\,|f(U_{n-1}) - Df(U_{n-1})\,L(U_{n-1})\,f(U_{n-1})| +$$
$$M\,\Big|\int_0^1 (1-t)\,D^2 f(U_{n-1} - t\,L(U_{n-1})f(U_{n-1}))$$
$$(L(U_{n-1})f(U_{n-1}), L(U_{n-1})f(U_{n-1})\,dt\Big| \leq$$
$$M^2\,|U_n - U_{n-1}|^2 \leq M^2\,e^{-2\beta K^n}$$

Basta escoger β tal que

$$M^2 e^{-2\beta K^n} \leq e^{-\beta K^{n+1}} \quad , \text{ i.e.}$$

$$M^2 \leq e^{(2-K)\beta K^n} = e^{1/2\,\beta K^n} \tag{6.3}$$

para que $\quad |U_{n+1} - U_n| \leq e^{-\beta K^{n+1}}$

Para que se cumplan (6.1) y (6.3) basta que

$$M^2 = e^{3/4\,\beta} \tag{6.4}$$

y como $M > 2$ entonces

$$4 < M^2 = e^{3/4\,\beta} \leq e^{\beta} \quad , \text{ i.e.}$$

Se satisface también la condición (6.2).

De (**) podemos demostrar que $\{U_n\}$ es una sucesión de Cauchy ya que

$$|U_{n+p} - U_n| \leq \sum_{i=1}^{p} |U_{n+i} - U_{n+i-1}| \leq \sum_{i=1}^{p} e^{-\beta K^{n+1}} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{p} e^{-\beta K^n (K-1) i} = \frac{e^{-\beta K^n (1/2)} - e^{-\beta K^n \frac{1}{2}(p+1)}}{1 - e^{-\beta K^n (1/2)}} \leq$$

$$\frac{e^{-\beta K^n (1/2)}}{1 - e^{-\beta K^n (1/2)}}$$

Como B es completo y S es cerrado en B entonces S es completo y existe $U \in S$ tal que $\lim_{n \to \infty} U_n = U$

Como f es continua entonces

$f(U_n)$ converge a $f(u)$ pero por otro lado

$$f(U_n) = df(U_n)L(U_n)f(U_n) = df(U_n)(U_n - U_{n-1})$$

y tomando valor absoluto

$$|f(U_n)| = |df(U_n)(U_n - U_{n-1})| \leq M e^{-\beta K^n}$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} f(U_n) = 0 \qquad \therefore \quad f(u) = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

Vamos a ver una generalización de este Teorema para los espacios $C^m(K)$ con K variedad compacta. Para ello vamos a utilizar la construcción de los operadores de alisamiento que vimos en el Capítulo IV.

Del Teorema 4.6 sabemos que si M es suficientemente grande, $M \geq 1$ entonces existe una familia de operadores $\{S(t)\}_{t\in W}$ que cumple con las siguientes propiedades.

$$(S1) \quad |S(t)u|_\rho \leq M t^{\rho-r} |u|_r \quad , u \in C^r$$

$$(S2) \quad |(I-S(t))u|_r \leq M t^{r-\rho} |u|_\rho \, , \quad u \in C^\rho$$

$$(S3) \quad \left|\frac{d}{dt} S(t) u\right|_r \leq M t^{r-\rho-1} |u|_\rho \, , \quad u \in C^\rho$$

$$(S4) \quad \lim_{t\to\infty} |(I-S(t))u|_r = 0 \, , \quad u \in C^r$$

con $\quad m-d \leq r \leq \rho \leq m+10d$

Sea $\mathcal{B}$ la bola unitaria de $C^m(K)$

Teorema 6.2 (Teorema de Funciones Implícitas de Nash)

Sea $f: B \to C^{m-d}$.

Si

i) f tiene dos derivadas de Frechet continuas, acotadas por M

ii) existe un mapeo

$$L: B \to \mathcal{B}(C^m, C^{m-d}) \quad \text{tal que}$$

iia) $|L(u)h|_{m-d} \leq M|h|_m \qquad u \in B,\ h \in C^m$

iib) $df(u)L(u)h = h \qquad u \in B,\ h \in C^m$

iic) $|L(u)f(u)|_{m+9d} \leq M(1+|u|_{m+10d}) \qquad u \in C^{m+10d}$

Entonces si

$$|f(0)|_{m+9d} \leq 2^{-90} M^{-202},$$

$$0 \in f(B)$$

Demostracion.

Sea $K = 3/2,\ \beta, \mu, \gamma > 0$.

Definimos

$$U_0 = 0$$
$$U_{n+1} = U_n - S_n L(U_n) f(U_n) \quad \text{con} \quad S_n = S(e^{\beta K^n})$$

Vamos a demostrar por inducción que:

(6.5) $U_n \in B$

(6.6) $|U_n - U_{n-1}|_m \leq e^{-\mu d \beta K^n}$

(6.7) $U_n \in C^{m+10d}$

(6.8) $1 + |U_n|_{m+10d} \leq e^{\gamma d \beta K^n}$

Para $n=1$

$$|U_1|_m = |S_0 L(0) f(0)|_m \le M(e^{\beta K^0})^\alpha |L(0) f(0)|_{m-\alpha} \le$$
$$M^2 e^{\beta K^0 \alpha} |f(0)|_m \le M^2 e^{\beta K^0 \alpha} 2^{-40} M^{-202} = 2^{-40} M^{-200} e^{\beta K^0 \alpha}$$

Basta que $2^{-40} M^{-200} \le e^{\beta\alpha(\mu+1)}$ para que se cumpla (6.5) y (6.6).

$$1 + |U_1|_{m+10\alpha} = 1 + |S_0 L(0) f(0)|_{m+10\alpha} \le$$
$$1 + M e^{\beta\alpha} |L(0) f(0)|_{m+9\alpha} \le 1 + M^2 e^{\beta\alpha}$$

Supongamos que (6.5) - (6.8) son ciertas para $j \le n$

Entonces.

$$|U_{n+1} - U_n|_m = |S_n L(U_n) f(U_n)|_m \le M e^{\alpha\beta K^n} |L(U_n) f(U_n)|_{m-\alpha} \le$$

$$\overset{(ii a)}{\le} M^2 e^{\alpha\beta K^n} |f(U_n)|_m \le \text{(por Taylor)}$$

$$\le M^2 e^{\alpha\beta K^n} [\,|f(U_{n-1}) - df(U_{n-1})(S_{n-1} L(U_{n-1}) f(U_{n-1})| +$$
$$M |U_n - U_{n-1}|^2_m \,] \overset{(ii b)}{\le}$$
$$\le M^2 e^{\alpha\beta K^n} |df(U_{n-1})(I - S_{n-1}) L(U_{n-1}) f(U_{n-1})|_m +$$
$$M^3 e^{\alpha\beta K^n} e^{-2\mu\alpha\beta K^n} \le$$

$$\le M^2 e^{\alpha\beta K^n} [M |(I - S_{n-1}) L(U_{n-1}) f(U_{n-1})|_m] + M^3 e^{\alpha\beta K^n} e^{-2\mu\alpha\beta K^n} \le$$

$$\overset{(S2)}{\le} M^2 e^{\alpha\beta K^n} [M e^{\beta K^{n-1}(-9\alpha)} |L(U_{n-1}) f(U_{n-1})|_{m+9\alpha} +$$
$$M^3 e^{\alpha\beta K^n} e^{-2\mu\alpha\beta K^n} \le$$

$$\leq M^3 e^{\alpha\beta K^n}\left[M e^{-9\alpha\beta K^{n-1}} |L(U_{n-1}) f(U_{n-1})|_{m+9\alpha} + e^{-2\mu\alpha\beta K^n}\right] \leq$$

$$\overset{(iic)}{\leq} M^5 e^{\alpha\beta K^n}\left[e^{-9\alpha\beta K^{n-1}}(1+|U_{n-1}|_{m+10\alpha}) + e^{-2\mu\alpha\beta K^n}\right] \leq$$

$$\leq M^5 e^{\alpha\beta K^n}\left[e^{-9\alpha\beta K^{n-1}} e^{\nu\alpha\beta K^{n-1}} + e^{-2\mu\alpha\beta K^n}\right] =$$

$$= M^5 \left[e^{\alpha\beta K^{n-1}(K-9+\nu)} + e^{\alpha\beta K^n (1-2\mu)}\right]$$

y queremos que esta expresión sea menor que

$$e^{-\mu\alpha\beta K^{n+1}}$$

Para eso basta que

$$M^5 e^{\alpha\beta K^{n-1}(\nu - 15/2)} \leq \frac{1}{2} e^{-\mu\alpha\beta K^{n+1}},$$

$$2M^5 \leq e^{\alpha\beta K^{n-1}(-9/4\,\mu - \nu + 15/2)} \quad \text{y que}$$

$$2M^5 \leq e^{\alpha\beta K^{n-1}(-9/4\,\mu - 3/2 + 3\mu)} = e^{\alpha\beta K^{n-1}(3/4\,\mu - 3/2)}$$

Entonces para β suficientemente grande y

$\frac{19}{2} > \frac{9}{4}\mu + \nu$. $\mu > 2$ se satisface la desigualdad.

De (6.6) resulta (6.5), (6.7) es obvia.

Ahora

$$1 + |U_{n+1}|_{m+10\alpha} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n} |S_j L(U_j) f(U_j)|_{m+10\alpha}$$

$$\leq 1 + M \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha\beta k^j} |L(U_j) f(U_j)|_{m+9\alpha}$$

$$\leq 1 + M^2 \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha\beta k^j} (1 + |U_j|_{m+10\alpha}) \leq 1 + M^2 \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha\beta(1+\nu)k^j}$$

Entonces si $\nu > 2$

$$(1 + |U_{n+1}|_{m+10\alpha}) e^{-\nu\alpha\beta k^{n+1}} \leq$$

$$\leq e^{-\nu\alpha\beta k^{n+1}} + M^2 \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha\beta k^j (1+\nu-k\nu)}$$

$$\leq e^{-\nu\alpha\beta k^{n+1}} + M^2 \sum_{j=0}^{n} e^{\alpha\beta(k-1)(j+1)(1-1/2\nu)}$$

$$= e^{-\nu\alpha\beta k^{n+1}} + M^2 \sum_{j=1}^{n+1} e^{\alpha\beta/2 \cdot j(1-1/2\nu)} \leq e^{-\nu\alpha\beta k^{n+1}} + M^2 \frac{e^{\alpha\beta/2(1-1/2\nu)}}{1 - e^{\nu\beta/2(1-1/2\nu)}}$$

y esta expresión puede hacerse menor que 1.

Por lo tanto (6.5)-(6.8) vale para toda n.

Al igual que en el Teorema 6.1 se puede demostrar que

es una sucesión de Cauchy utilizando la desigualdad (6.6) y por ser B cerrado y C^{m-d} completo $\{U_n\}$ converge a $u \in B$.

Tenemos que

$U_n \to u$, por ser f continua, $f(U_n) \to f(u)$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |f(U_n)| &\leq |f(U_{n-1}) - df(U_{n-1})S_{n-1}L(U_{n-1})f(U_{n-1})| + K|U_n - U_{n-1}|^2 \\ &\leq |df(U_{n-1})(I - S_{n-1})L(U_{n-1})f(U_{n-1})| + K|U_n - U_{n-1}|^2 \\ &\leq M|(I - S_{n-1})L(U_{n-1})f(U_{n-1})| + K|U_n - U_{n-1}|^2 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Si $n \to \infty$ entonces (6.9) tiende a cero y por lo tanto $f(u) = 0$

Q.E.D.

CAPITULO VII

TEOREMA DE NASH

Sea V una C^∞ variedad compacta de dimensión n con una métrica riemanniana de clase C^∞.

Vamos a demostrar que existe un encaje cerrado isométrico de V en algún espacio euclidiano, i.e. que existe

$$z : V \to \mathbb{R}^m \quad , \quad z \in C^\infty$$

tal que para cada $a \in V$

$$(\xi, \eta) = (z_{*a}(\xi), z_{*a}(\eta)) \quad \forall\, \xi, \eta \in T_a(V) \quad (7.1)$$

Dicho de otra manera, que la métrica inducida por z coincide con la métrica definida en V.

Sea $E^\infty(V)$ el conjunto de métricas inducidas por los encajes y $K^\infty(V)$ el conjunto de métricas riemannianas en $S^\infty(V)$

La demostración consiste básicamente de 3 partes:

i) el conjunto de las métricas inducidas por los C^∞ encajes de V en algún espacio euclidiano cubren un abierto de $S^\infty(V)$.

ii) $E^\infty(V)$ es un cono convexo denso en $K^\infty(V)$ con la topología de $S^\infty(V)$.

iii) $E^\infty(V) = K^\infty(V)$

La parte i) que es la que tiene mayor interés para nosotros se va a demostrar aplicando el Teorema de Funciones Implícitas (Cap. 6, 6.2).

Del paso iii) podemos concluir que existe un encaje $z \in C^{q}$ que cumple con (7.1)

Por el corolario 4.1 es suficiente hacer la demostración para el toro de dimensión n. Así, de aquí en adelante $V = T^n$

Vamos a definir una función f que a cada $z: V \to \mathbb{R}^m$ le asocia un campo tensorial en V.
Este campo tensorial no va a ser otro que el inducido por z.

Vamos a definir f en $C^k(V, \mathbb{R}^m)$ y a considerar $C^{\infty}(V, \mathbb{R}^m)$ como subespacio de $C^k(V, \mathbb{R}^m)$.

Vamos a ver que f satisface las propiedades del Teorema 6.2

1. Sea $z \in C^r(V, \mathbb{R}^m)$. Sabemos que para cada $a \in V$ y con respecto a un sistema de coordenadas (U, α),
z induce una transformación lineal:

$$z_{*a} : T_a(V) \to T_{z(a)}(\mathbb{R}^m)$$ definida por el

jacobiano

$$J_{z \circ \alpha^{-1}}(\alpha(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}(\alpha(a)) & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}(\alpha(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1}(\alpha(a)) & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n}(\alpha(a)) \end{pmatrix}$$

Además, para cada $a \in V$, z induce un tensor covariante simétrico de orden 2 en $T_a(V)$ de la siguiente manera:

$g(a)(\xi,\eta) = (z_{*a}(\xi), z_{*a}(\eta))$ con $\xi, \eta \in T_a(V)$

y $(\ ,\ )$ el producto interior en $\mathbb{R}^m$

Es decir, tenemos un campo tensorial g que queda determinado por las funciones

$$g_{ij}(a) = g(a)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) = \left(z_{*a}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a, z_{*a}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a\right) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}(\alpha(a)) \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j}(\alpha(a)) \qquad i,j = 1,\ldots,n \quad \forall a \in V$$

Como $z \in C^n$ es claro que $g_{ij} \in C^{n-1}$ para $i,j = 1,\ldots,n$ y por lo tanto $g \in S^{n-1}(V)$.

Entonces hemos definido una funcion

$$f : C^n(V, \mathbb{R}^m) \to S^{n-1}(V)$$ con

$$f(z) = {}^tJ_z\, J_z$$ ó expresado en coordenadas.

$$f(z)_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j} = g_{ij} \qquad (7.2)$$

Para demostrar el paso i) vamos a ver que f satisface las hipótesis del Teorema 6.2.

PROPOSICION 7.1

$f : C^n(V, \mathbb{R}^m) \to S^{n-1}(V)$ definida por (7.2) es una forma cuadrática.

DEMOSTRACION:

Sean $z, z_1, z_2 \in C^n(V,\mathbb{R}^m)$ y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ Entonces

$$\beta(\alpha z_1 + \gamma z_2, z) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2 + z) - f(\alpha z_1 + \gamma z_2) - f(z) =$$

$$(\alpha\, {}^tJ_{z_1} + \gamma\, {}^tJ_{z_2} + {}^tJ_z)(\alpha J_{z_1} + \gamma J_{z_2} + J_z) - (\alpha\, {}^tJ_{z_1} + \gamma\, {}^tJ_{z_2})(\alpha J_{z_1} + \gamma J_{z_2}) -$$
$${}^tJ_z J_z = \alpha\, {}^tJ_{z_1} J_z + \gamma\, {}^tJ_{z_2} J_z + \alpha\, {}^tJ_z J_{z_1} + \gamma\, {}^tJ_z J_{z_2} =$$
$$\alpha\, ({}^t(J_{z_1} + J_z)(J_{z_1} + J_z) - {}^tJ_{z_1} J_{z_1} - {}^tJ_z J_z) +$$
$$\gamma\, ({}^t(J_{z_2} + J_z)(J_{z_2} + J_z) - {}^tJ_{z_2} J_{z_2} - {}^tJ_z J_z) =$$
$$\alpha\, \beta(z_1, z) + \gamma\, \beta(z_2, z)$$

y como $\beta(\alpha z_1 + \gamma z_2, z) = \beta(z, \alpha z_1 + \gamma z_2)$ entonces β es bilineal.

$$f(\lambda z) = (\lambda\, {}^tJ_z)(\lambda J_z) = \lambda^2\, {}^tJ_z J_z = \lambda^2 f(z) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R},\ z \in C^n(V,\mathbb{R}^m)$$

Q.E.D.

Por el teorema 2.7 sobre formas cuadráticas, basta demostrar que f es continua para que f sea diferenciable.

PROPOSICION 7.2

f es continua y por lo tanto f tiene derivadas de Frechet de todos órdenes con:

$$f'(z)h = \beta(z,h), \quad f''(z) = \beta \qquad (7.3)$$

y las derivadas de orden mayor que 2 se anulan.

Ademas

$$|f'(z)| \le 2\|f\| |z|, \quad \|f''(z)\| = 2\|f\|$$

con

$$\|f\| = \frac{1}{2} \sup |\beta(x,y)|, \quad \|x\| \le 1, \quad \|y\| \le 1$$

DEMOSTRACION

Basta ver que β , la forma bilineal asociada a f es continua.

$$|\beta(z,z')| = |f(z+z') - f(z) - f(z')| =$$
$$|J_z{}^t J_{z'} + {}^t J_z J_{z'}| \leq |J_z{}^t J_{z'}| + |{}^t J_{z'} J_z|$$
$$\leq 2|J_z||J_{z'}| \leq 2|z||z'|$$

donde la norma de la matriz J_z es la norma sup Q.E.D.

¿es $f'(z)$ invertible, i.e.dada $g \in S^{n-1}(V)$ existe $h \in C^n$ tal que $f'(z)h = g$?

Vamos a ver que para una vecindad U de $C^{n+2}(V,\mathbb{R}^m)$ para alguna m existe un operador definido en $S^n(V)$ y con valores en $C^n(V,\mathbb{R}^m)$ que va a ser un inverso por la derecha de $f'(z)$ para $z \in U$ o sea que existe:

$$L(z): S^n \to C^n \qquad \text{tal que}$$
$$f'(z)L(z)g = g \quad , \; z \in U$$

De (7.3) tenemos que la derivada de Frechet de orden 1 de f expresada en coordenadas es:

$$(f'(z)h)_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_j} \right\}$$

Entonces para ver si $f'(z)$ es invertible necesitamos resolver el sistema de ecuaciones:

$$g_{ij} = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_j} \right\} \qquad (7.4)$$

Tenemos en (7.4) un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que bien sabemos puede presentar problemas. Ahora bien, como el subconjunto de funciones de $C^r(V, \mathbb{R}^m)$ que nos interesan son los encajes (por inducir métricas riemannianas), sabemos que $z(V)$ es una superficie en $\mathbb{R}^m$, entonces para cada i, la función $z_0 \alpha_i^{-1}$ es una curva de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq i \leq n)$ que está en $z(V)$ es decir su vector velocidad para cada $a \in V$ está en el plano tangente $T_{z(a)}(\mathbb{R}^m)$

Si pedimos la condición adicional, que los incrementos del encaje sean normales a la superficie, está condición queda expresada como que

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} h_\alpha = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (7.5)$$

(7.4) y (7.5) son un sistema de ecuaciones parciales de ler. orden.

Vamos a ver que se convierte en un sistema de ecuaciones lineales algebraícas.

Si derivamos (7.5) con respecto a x_j obtenemos:

$$\sum_\alpha \left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} h_\alpha \right] = 0$$ y por lo tanto

$$\sum_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_j} = - \sum_\alpha \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} h_\alpha$$

Substituyendo en (7.4) nos queda el sistema:

$$\sum_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} h_\alpha = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (7.6)$$

$$g_{ij} = -2 \sum_\alpha \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{para} \quad i, j = 1, \ldots, n \qquad (7.7)$$

Sea

$$v : V \longrightarrow \mathbb{R}^s \quad , v \in C^\infty$$

un encaje cerrado para s suficientemente grande. La existencia de v queda garantizada por el Teorema 3.6

Podemos definir

$$z = (v_1, \ldots, v_s, v_1^2, v_1 v_2, \ldots, v_2^2, v_2 v_3, \ldots, v_s^2) = (z_1, \ldots, z_s, z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{22}, z_{23}, \ldots, z_{ss})$$

con

$$z : V \longrightarrow \mathbb{R}^{s + 1/2(s)(s+1)}$$

Es suficiente probar que z es inyectiva para que sea un encaje, pero eso es claro ya que si $z(a) = z(b)$ entonces las primeras s coordenadas coinciden.

Como v es inyectiva entonces $a = b$

V es compacto, entonces podemos seleccionar una cubierta finita de abiertos de V, $\{U_i\}_{i=1}^N$ de tal forma que para cada U_i exista un sub-conjunto de las $\{z_i\}$ que sean coordenadas locales.

Sea $U = U_i$ para alguna i y supongamos que

$x_1 = z_1, \; . \; . \; . \; , x_n = z_n$

Si a nuestro sistema de ecuaciones (7.6), (7.7) lo rearreglamos de tal forma que las coordenadas de h queden

$h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots, h_s, h_{11}, \dots, h_{1n}, h_{22}, \dots, h_{2n}, \dots, h_{nn}, \dots$

y recordando que $g_{ij} = g_{ji}$

tenemos un sistema de $n+\frac{1}{2}(n)(n+1)$ ecuaciones con

$s+\frac{1}{2}(s)(s+1)$ incognitas y

para $1 \le \alpha \le n$

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = i \\ 0 & \text{si } \alpha \neq i \end{cases}$$

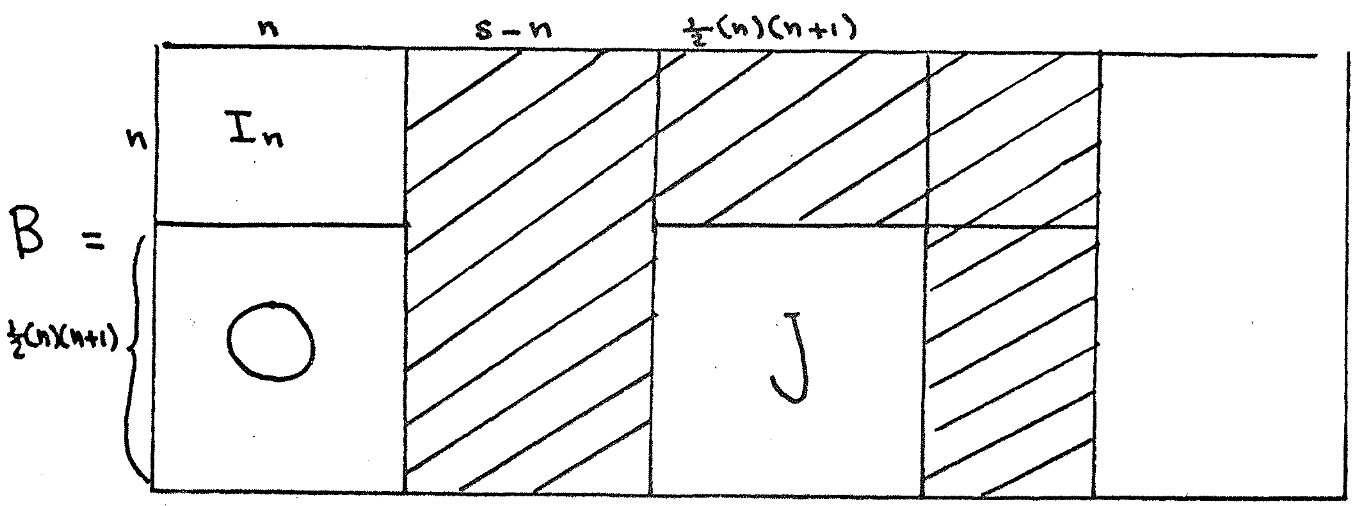
para $i \le \alpha \le n$

$$\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

para $1 \le i \le j \le n$

$$\frac{\partial^2 z_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k,\ j = l,\ i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j = k = l \end{cases}$$

Así que la matriz asociada a este sistema es:



donde J es una matriz de $\frac{1}{2}(n)(n+1) \times \frac{1}{2}(n)(n+1)$ de la forma

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & -4 & \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & -4 \end{pmatrix}$$

PROPOSICION 7.3.

Para cada $p \in U$ el sistema (7.6), (7.7) tiene una solución única $H = (h_1, \ldots, h_{s+\frac{1}{2}(s)(s+1)})$ que satisface la condición que $\sum_{\alpha} (h_\alpha)^2$ sea mínimo dada por

$$H = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}G \quad \text{donde} \tag{7.8}$$

$$G = (0, \ldots, 0, g_{11}, \ldots, g_{nn})$$

DEMOSTRACION:

Como B tiene rango máximo entonces existe una solución al sistema para cada $p \in U$.

El espacio de soluciones es un conjunto convexo. Luego, existe H solución tal que

$$\sum_{\alpha} (h_\alpha)^2 \quad \text{sea mínimo.}$$

¿Cuál es esa solución?

Por tener B rango máximo, el determinante de Gram de $B = \det(B^tB)$ es $\neq 0$ y por lo tanto B^tB es no singular.

Pero entonces la ecuación

$$(B^tB).D = G$$ tiene una solución única:

$$D = (B^tB)^{-1}G$$

Si hacemos

$H = {}^tBD = {}^tB(B^tB)^{-1}G$ es claro que es solución de

$$BH = G$$

Sea $\bar{H}$ otra solución de (7.5) y (7.6). Entonces $B\bar{H} = G$

y $(\bar{H}, H) - (H, H) = (\bar{H} - H, \bar{H} - H) + 2(H, \bar{H} - H)$.

Pero

$$(H, \bar{H} - H) = ({}^tBD, \bar{H} - H) = (D, B\bar{H} - BH) = 0$$

Por lo tanto

$(\bar{H}, \bar{H}) - (H, H) = (\bar{H} - H, \bar{H} - H)$, o sea que $(\bar{H}, \bar{H})$ es mínima cuando $\bar{H} = H$

Para $p \in U_i \cap U_j$, como H' y H'' satisfacen la condición que $\sum_\alpha (h'_\alpha)^2$, $\sum_\alpha (h''_\alpha)^2$ sea mínimo entonces H', H'' deben coincidir en p. Por lo tanto H puede definirse en V. Si alteramos convenientemente la matriz B, está sigue siendo de rango máximo.

Si no alteramos mucho la Z, podemos seguir haciendo $Z'_1 = X_1, \ldots, Z'_n = X_n$. Entonces

PROPOSICION 7.4

Existe una vecindad de Z donde (7.6), (7.7) tiene solución

De (7.8) se ve que $H \in C^n$ si $z \in C^{n+2}$ y $g \in S^n(V)$.

Sea $\mathcal{O}$ la vecindad de z donde (7.6) y (7.7) tiene solución.

Como el conjunto de encajes cerrados es abierto en $\mathbb{R}^{s'}$ entonces se puede tomar $\mathcal{O}$ de tal forma que sus elementos sean encajes cerrados.

Sea B una bola contenida en $\mathcal{O}$ y con $z \in B$

Para el caso del toro podemos identificar $S^r(T^n)$ con $C^r(T^n, \mathbb{R})^{n^2}$.

Consideremos f restringida a B :

$$f : B \subset C^{r+2}(T^n, \mathbb{R}^{s'}) \longrightarrow C^r(T^n)^{n^2}$$

con dos derivadas de Frechet acotadas por $2\|f\|$

Además existe

$$L : B \to \mathcal{B}(C^{r+2}(T^n)^{n^2}, C^r(T^n, \mathbb{R}^{s'}))$$

tal que para $z \in B$, $g \in C^{r+2}(T^n)^{n^2}$

$$d\,f(z)L(z)g = g$$

Es claro que f satisface las hipótesis del Teorema 6.2 con $f(z) = g$.

Entonces la imagen bajo f del conjunto de los C^∞ encajes cerrados en $\mathbb{R}^{s'}$ cubre una vecindad de g , producto interior y por lo tanto cubre un abierto de $S^\infty(V)$.

Lema 7.1

$\overline{E^\infty} \supset K^\infty$ en la topología de S^∞ y E^∞ es un cono convexo. (Ver demostración en [6.2].

TEOREMA 7.1 (NASH)

Sea V una C^∞ variedad compacta con una C^∞ métrica riemanniana. Entonces existe un C^∞ encaje isométrico de V en algún espacio euclidiano.

Por la parte ii) sabemos que E^∞ es denso en K^∞ i.e. $\bar{E}^\infty \supset K^\infty$ y por la parte i) E^∞ tiene puntos interiores

Sea $g \in K^\infty$, $g_0 \in \operatorname{Int} E^\infty$. Como K^∞ es convexo entonces $g_0 + t(g - g_0) \in K^\infty$ para $0 \leq t \leq 1$

Por ser K^∞ abierto existe una $\bar{g}$ tal que $\bar{g} = g_0 + t(g - g_0)$ para $t > 1$

Como $t > 1$ entonces $\frac{1}{t} < 1$ y

$$g = \frac{1}{t}\bar{g} + (1 - \frac{1}{t}) g_0 .$$

Ademas $\bar{g} \in K^\infty \Rightarrow \bar{g} \in \bar{E}^\infty$

Como $g_0 \in \operatorname{Int} E^\infty$ y $\bar{g} \in E^\infty$ entonces todos los puntos que están en el segmento que une a g_0 y $\bar{g}$ están en el $\operatorname{Int} E^\infty$, en particular $g \in E^\infty$, lo que implica que $g \in \bar{E}^\infty$

Por lo tanto $K^\infty = E^\infty$. Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

1	HENRICI PETER	ELEMENTS OF NUMERICAL ANALYSIS Wiley 1964
2	HU S.T.	DIFFERENTIABLE MANIFOLDS Holt,Rinehart and Winston,Inc. 1969
3	LANG SERGE	ANALYSIS II Addison-Wesley 1969
4	LOOMIS L.H. AND STERNBERG S.	ADVANCED CALCULUS Addison-Wesley 1968
5	NARASIMHAN R.	ANALYSIS ON REAL AND COMPLEX MANIFOLDS Masson and Cie. Editeur 1968
6	SCHWARTZ JACOB T.	NON LINEAR FUNCTIONAL ANALYSIS Gordon and Breach 1969
7	SORANI GIULIANO	AN INTRODUCTION TO REAL AND COMPLEX MANIFOLDS Gordon and Breach 1969