UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# ALGORITMOS PARA LA EVALUACION DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

PATRICIA MATA HOLGUIN

MEXICO, D. F. 1995

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ALGORITMOS PARA LA EVALUACION DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

realizado por PATRICIA MATA HOLGUIN

con número de cuenta 5801511-7 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dr. PABLO BARRERA SANCHEZ

M.enC. Ma.ELENA GARCIA ALVAREZ

Propietario M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA

Propietario FIS. FRANCO TOLEDO DE LA CRUZ

Suplente M.enC. JOSE GUERRERO GRAJALES

Suplente

Consejo Departamental de Matemáticas

M.C. ISABEL PUGA ESPINOSA

# D E D I C A T O R I A

A MIS HIJOS,
A QUIENES TANTO AMO

V I R G I N I A

R I C A R D O

P A T R I C I A

A MI FAMILIA:
TIOS, PRIMOS Y SOBRINOS.
A LA MEMORIA DE MIS PADRES
CARLOS Y ARMIDA
Y A LA DE
MI HERMANO CARLOS

# A G R A D E C I M I E N T O S

A mi amigo y condiscípulo PABLO BARRERA SANCHEZ, por su valiosa asesoría y dirección de tesis .

A mis maestros y compañeros de la Facultad, muy especialmente a RAFAEL PEREZ PASCUAL; quien me ayudó a tramitar mi historial académico.

A JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA. por su apoyo moral, ayuda bibliográfica y por sus consejos en la elaboración de este trabajo.

A mi sobrino JESUS RUIZ MATA ; quien me prestó su computadora para realizar este trabajo.

A MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ, FRANCO TOLEDO Y JOSE GUERRERO por fungir como sinodales en mi examen profesional y por sus consejos.

A HORTENSIA ORDOÑES RAMOS y GUILLERMO CORONEL ORTEGA , por darme su apoyo moral para la realización de mi tesis.

Al señor JESUS SOLORZANO , quien me ayudó a tramitar el servicio social.

A la señora Ma. DE LA LUZ HERNANDEZ MANCILLA, quién se tomó la molestia de buscar mi historial académico.

A todas las personas que dieron su apoyo durante mi carrera y durante la realización de mi tesis.

# I N D I C E

# I INTRODUCCION

Las funciones elementales son:

Algebráicas:

$f(x) = x^n$, con $0 \leq x$ y $n \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \sqrt{x}$, con $x > 0$

Logarítmicas: con $x > 0$ ,

$f(x) = \ln x$ ,

$f(x) = \log x$ ,

$f(x) = e^x$ , con $x \in \mathbb{Z}$ .

Trigonométricas:

Con $0 \leq x \leq \pi$ ,

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f(x) = \cos x$

$f(X) = \tan x$

Y sus recíprocas:

$f(x) = \cot x$

$f(x) = \sec x$

$f(x) = \csc x$

Las Instituciones docentes de Nivel Medio Superior contienen dentro sus programas de Matemáticas la enseñanza de las funciones elementales , sus definiciones , y cómo aplicarlas a la resolución de algunos problemas; cuyo planteo da lugar a este tipo de funciones; para encontrar las soluciones se consultan "tablas" especiales o se recurre a las calculadoras científicas de bolsillo.

Pero , con el auge de las corrientes constructivistas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje y a que cada vez, mayor número de profesores han asumido las teorías epistemológicas. A grandes razgos citaré: Teoría de Piaget, sustenta que el alumno tiene una estructura cognitiva, que él construye a partir de desestructurar sus conocimientos, mediante la problematización, para crear condiciones que propicien el desarrollo de la estructura de conocimientos nuevos y lograr un equilibrio temporal, hasta que el estudiante accede a nuevos conocimientos. Las teorias de Vigotsky, que aseveran que no hay desarrollo sin apredizaje, y la de Ausubel, quien ha descubierto que no puede haber aprendizaje,si éste no es sigificativo.

Debido a que el profesor ha retomado estos coceptos como estrategias didácticas para sus cursos de Matemáticas, el estudiante moderno (Del 90 a la fecha) ya no se conforma con que le proporcionen los conocimientos "digeridos" a través de TABLAS prefabricadas o de apretar un botón en sus calculadoras científicas. Afortunadamente, el estudiante de hoy en día, desea conocer la forma en que se realizan los cálculos para evualar las funciones elementales.

Para contestar estas preguntas el docente necesita recurrir a conocimientos mas avanzados que el Algebra Elemental y la Trigonometría, como son el Cálculo Diferencial e Integral y de una introducción al Análisis Numérico. Pero el nivel de los estudiantes, Medio o Medio Superior, no es suficiente, ya que, como se sabe, el conocimiento de las Matemáticas es progresivo y paulatino.

Ante tales inquietudes de los jóvenes y dilema de los profesores, decidí realizar esta tesis basada en un artículo del Doctor Pablo Barrera Sánchez, en el que propone algoritmos sencillos para la evaluación de las funciones elementales.

Con este propósito, incluí la forma usual en que se calcularon estas funciones, a las que llame "Algorítmos Clásicos", en seguida, propuse algunos algorítmos para evaluarlas, que por su sencillez, llame "Algorítmos Aritméticos".Y por último, una contrastación entre ambos métodos y las conclusiones de esta com - paración.

# II M E T O D O S C L A S I C O S
# P A R A E V A L U A R L A S
# F U N C I O N E S E L E M E N T A L E S

ALGORITMO PARA EVALUAR $X^n$

Para $0 \leq x$ , con $n \in \mathbb{Z}$.

Para evaluar $x^n$ , se realizan n - 1 multiplicaciones , es decir :

$$x^1 = x_o$$

$$x^2 = x \cdot x_o = x_1$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x = x_1 \cdot x_o = x_2$$

$$\vdots$$

$$x^n = x \cdot x \cdot x \ . \ . \ . \cdot x = x_{n-1}$$

Y esto proviene directamente de la propiedad asociativa de la multiplicación de los números reales

EJEMPLO , para evaluar $(5.5)^5$

$(5.5) = 5.5$

$(5.5)^2 = (5.5)(5.5) = 30.25$

$(5.5)^3 = (5.5)(5.5)(5.5) = (30.25)(5.5) = 166.375$

$(5.5)^4 = (5.5)(5.5)(5.5)(5.5) = (166.375)(5.5) = 915.0625$

$(5.5)^5 = 915.0625(5.5) = 5032.84375.$

Si $0 \leq x$ , con $x \in \mathbb{Z}$ , entonces:

$(-x)^n = + x^n$ . si n es par

$(-x)^n = - x^n$ , si n es impar

EJEMPLO:

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

Esto es claro de la regla de los signos para la multiplicación

Si n es un entero $\ni$ $n < 0$ , entonces de la definición:

$$(x)^{-n} = 1/x^{n} = (1/x)(1/x)(1/x) \ldots 1/x^{n} = 1/x_{n-1}.$$

Con n-1 multiplicaciones.

Además. por la regla de los signos para el producto:

$$(-x)^{-n} = 1/x^{n} > 0 \text{ . si n es par}$$

$$(-x)^{-n} = -(1/x)^{n} < 0 \text{ . si n es impar}$$

**EJEMPLO:**

$$(1.2)^{-4} = 1/2.0736 > 0$$

**EJEMPLO:**

$$(1.7)^{-3} = -1/(4.913) < 0.$$

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt{X}$ , con $X > 0$, número real.

$$|\sqrt{X}| = Y \quad , \text{ con } Y \in \mathbb{R}$$

donde:

$$X = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 . b_1 b_2 \ldots \quad , \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

es la expansion decimal de X, dondė :

$$Y = y_0 . y_1 y_2 \ldots y_n (10)^{j/2} \quad , \text{ con } j = k/2 \text{ , } j \in \mathbb{N}$$

es la expansión decimal de Y. (Si k es impar, se agrega un cero a la izquierda de X).

El algoritmo se aplica de la siguiente manera:

EJEMPLO:

Evaluar $\sqrt{1034}$

Como el número que vamos a evaluar tiene 4 dígitos, k=4; entonces el algoritmo se aplica separando las cifras de la parte entera de dos en dos:

Es decir:

Sean : $w_0 = a_k a_{k-1}$

$w_1 = a_{k-2} a_{k-3}$

$w_{k/2} = a_2 a_1$

Y, la parte decimal:

$b_1 b_2 = w_{k+1/2}$

$b_3 b_4 = w_{k+2/2}$

Entonces $X = w_0 w_1 \ldots w_k \, w_{k+1/2} \ldots = w_0 . w_1 \ldots w_k \quad (10)^{k/2} = 10.34(10)^2$

Entonces el algoritmo se aplica de la siguiente manera:

Primero buscamos un número dígito $y_0$, cuyo cuadrado sea el máximo número

$$Y_0^2 \leq w_0 < (Y_0 + 1)^2$$

$$3^2 \leq 10 < 4^2$$

Llamemos $X_0 = Y_0 = 3$

$W = w_0 w_1 = 10.34$

Entonces buscamos un número dígito $Y_1$

tal que sea el máximo dígito que cumpla la condición:

$$(X_0 + Y_1/10)^2 \leq W < (X_0 + (Y_1 + 1)/10)^2$$

$$9 + 6Y_1/10 + Y_1^2 / 10^2 < {}^0 10.34$$

$$2(60 + 2) = 124 \leq 134 < 3(63) = 189$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_1 = 2}$  Llamemos: $X_1 = Y_0 + Y_1/10 = 3.2$

Ahora busquemos otro número, tal que su cuadrado sea el máximo número que cumpla la condición:

$$( X_1 + Y_2/10^2 )^2 \leq W < ( X_1 + (Y_2+1)/10^2)^2$$

$$(3.2)^2 + 2(3.2)Y_2/10^2 + Y_2^2/10^4 \leq 10.34$$

Multiplicando por $10^4$ :

$$102\ 400 + 640Y_2 + Y_2^2 \leq 103\ 400$$

$$Y_2(640 + Y_2) \leq 1\ 000$$

$$1(641) = 641 \leq 1\ 000 < 2(642) = 1284$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_2 = 1}$  Llamemos $X_2 = X_1 + Y_2/10 = 3.21$

Ahora busquemos otro número, dígito, $Y_3$, tal que elevado al cuadrado sea el máximo número que cumpla que:

$$( X_2 + Y_3/10^3)^2 \leq W < ( X_2 + (Y_3 + 1)/10^3)^2$$

Entonces:

$$(3.21)^2 + 2(3.21)Y_3/10^3 + Y_3/10^6 \leq W$$

$$Y_3(6400 + Y_3) \leq 10\ 340\ 000 - 10\ 304\ 100 = 35\ 900$$

$$5(6425) = 32125 \leq 35\ 900 < 6(6426) = 38\ 556$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_3 = 5}$

$Y = 3.215(10) = 32.15$ ; $X = 10.34(10)^2 = 1\ 034$

$$(3\ 215)^2 = 1\ 033.6225 \simeq 1034$$

Si se requiere mayor precisión, el proceso continúa, ó si el residuo es cero, el algoritmo termina.

EJEMPLO:

Evaluar $\sqrt{535}$

Como X tiene 3 dígitos, k es impar, entonces para aplicar el algoritmo, agregamos un cero a la izquierda del número 0535, y procedemos a separar las cifras de dos en dos como en el ejemplo anterior:
Con $W = 05.35$ : $X = W(10)^2$ ; $Y = y_0 \cdot y_1 \ldots (10)$

Primero buscamos un número cuyo cuadrado sea el máximo número , tal que:

$$Y_o^{\,2} \leq W_o < (Y_o + 1)^2$$

$$2^2 = 4 \leq 5 < 3^2 = 9$$

El primer número buscado es $\underline{Y_o = 2}$ .

Ahora, busquemos otro dígito cuyo cuadrado sea el mayor número cuyo cuadrado cumpla la condición:

$$(Y_o + Y_1/10)^2 \leq W < (Y_o + (Y_1 + 1)/10)^2$$

$$2^2 + 4Y_1/10 + Y_1^2/10^2 \leq 5.35$$

Multiplicando por $10^2$ :

$$400 + 40Y_1 + Y_1^2 \leq 535$$

$$Y_1(40 + Y_1) \leq 535 - 400 = 135$$

$$3(43) = 129 \leq 135 < 4(44) = 176$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_1 = 3}$. Llamemos $X_1 = Y_o + Y_1/10 = 2.3$

Busquemos ahora otro número cuyo cuadrado sea el máximo:

$$(X_1 + Y_2/10^2)^2 \leq W < (X_1 + (Y_2 + 1)/10^2)^2$$

$$(2.3)^2 + 2(2.3)Y_2/10^2 + Y_2^2/10^4 \leq 5.35$$

Multiplicamos por $10^4$:

$$Y_2(460 + Y_2) \leq 53\,500 - 52\,900 = 600$$

Entonces, el número buscado es $Y_2 = 1$

$$1(461) = 461 \leq 600 < 2(462) = 924$$

Como $Y = 2.31(10)$ ; $X = 5.35(10)^2 = 535$

$$(23.1)^2 = 533.61 \simeq 535$$

Si se requieren mas decimales el procedimiento puede continuar o se termina si el residuo es cero.

ALGORITMO GENERAL:

En general, el algoritmo clásico se basa en las siguientes ideas:

Primero: Encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que sea convergente a

$|\sqrt{x}|$, es decir :

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = |\sqrt{x}|$$

Segundo: $\{Y_n\}$ debe ser seleccionada de tal manera que cada $Y_n$ sea dígito de la serie decimal que representa a Y, como se indicó en los ejemplos:

Si $X = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 . b_1 b_2 \cdots$, con k par.

Entonces el algoritmo se aplica separando las cifras de X, de la siguiente manera:

$$W_0 = a_k a_{k-1} \quad : \quad W_{k+1/2} = b_1 b_2$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3} \quad : \quad W_{k+2/2} = b_3 b_4$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$W_{k/2} = a_2 a_1 \quad : \quad W_{k+n/2}$$

Donde $X = W_0 . W_1 \ldots W_{k/2} \ldots W_{k+n/2} \ldots (10)^{k/2}$, con $k, n \in \mathbb{N}$

Y, ambos, k y n son pares, agregando un cero a la izquierda de X, si las cifras son impares $X = 0a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 . b_1 b_2 \cdots$ y/ó un cero a la derecha, si las cifra decimal de X es impar.

Entonces $Y_n = Y_0 . Y_1 \ldots Y_m \ldots (10)^{j/2}$, con $j = k/2$ ; $j, m \in \mathbb{N}$

Entonces conviene seleccionar $y_0$, tal que :

$$y_0 = \text{máx} \{ y \in \mathbb{N} \mid y^2 \leq x \}$$

entonces:

$$y_0^2 \leq W_0 < (y_0 + 1)^2$$

llamemos: $\begin{cases} y_0 = x_0 \\ W_0 - y_0^2 = z_0 \end{cases}$

De la desigualdad:

$$y_o^2 \leq W \leq y_o^2 + 2y_o + 1$$

obtenemos:

$$0 \leq z_o < 2y_o + 1$$
$$z_o < r_o$$

con $r_o = 2y_o + 1$

Considemos ahora la desigualdad:

$$(y_o + y_1/10)^2 \leq W \leq [y_o + (y + 1)/10]^2$$

entonces:

$$y_o^2 + 2y_o y_1/10 + y_1^2/10 \leq W$$

$Y_1 \in \mathbb{N}$, conforme a la selección de $Y_o$.

multiplicando por $10^2$

$$y_o^2 10^2 + 2y_o y_1 10 + y_1^2 \leq 10^2 W$$

factorizando:

$$y(2y_o 10 + y_1) \leq (W - y_o^2) 10^2$$

entonces, conviene seleccionar $y_1$, tal que:

$$y_1 = \text{máx} \{ y \in \mathbb{N} \mid y(2y_o 10 + y) \leq 10^2 z_o \}$$

con $y_1$ dígito

llamemos:
$$\begin{cases} x_1 = y_o + y_1/10 \\ z_1 = W - x_1^2 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$x_1^2 \leq \; < [y_o + (y_1 + 1)/10]^2 = (x_1 + \tfrac{1}{10})^2$$

se tiene que:

$$0 \leq W - x_1^2 < 1/10^2 (2x_1 10 + 1)$$
$$0 \leq W - x_1^2 < 2/10 ( x_1 + 1/20)$$
$$z_1 < r_1$$

con $r_1 = 2/10(x_1 + 1/20)$

Consideremos la desigualdad:

$$(y_o + y_1/10 + y_2/10^2)^2 = (x_1 + y_2/10^2)^2 \le$$

$$\le W < [x_1 + (y_2 + 1)/10^2]^2$$

De $(x_1 + y_2/10^2)^2 \le W$ , se tiene

$$x_1^2 + 2x_1y_2/10^2 + y_2^2/10^4 \le W < [x_1 + (y_2 + 1)/10]^2$$

multiplicando por $10^4$:

$$10^4x_1^2 + 2x_1y_2 10^2 + y_2^2 \le 10^4x$$

factorizando:

$$y_2(2x_1 10^2 + y_2) \le 10^4(W - x_1^4)$$

$$y_2(2x_1 10^2 + y_2) \le 10^4 z_1$$

Entonces conviene elegir $y_2$, tal que

$$y_2 = \text{máx}\{y \in \mathbb{N} \mid y(2x_1 10^2 + y) \le 10^4 z_1$$

con y dígito

llamemos: $\begin{cases} x_2 = x_1 + y_2^2/10 \\ z_2 = W - x_2 \end{cases}$

De la desigualdad:

$$x_2^2 \leq w < (x_2 + 1/10^2)^2 = x_2^2 + 2x_2/10^2 + 1/10^4$$

implica que:

$$0 \leq w - x_2^2 < 1/10^2 (2x_2 10^2 + 1/10^2)$$

$$0 \leq z_2 < 2/10^2 [x_2 10^2 + 1/2(10)^2]$$

$$z_2 < r_2$$

con $r_2 = 2/10 [x_2 \cdot 10^2 + 1/2 (10)^2]$

En general, por inducción:

Considemos la desigualdad:

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^2 \leq w < [x_{n-1} = (y_n + 1)/10^n]^2$$

con $y_n$ digito porque

$(y_{n-1} + 1)^2 > w$ conforme a la selección de $y_{n-1}$

De la desigualdad:

$$x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} y_n/10^n + y_n^2/10^{2n} \leq w$$

multiplicando por $10^{2n}$ tenemos que:

$$x_{n-1}^2 10^{2n} + 2x_{n-1} y_n 10^2 + y_n^2 \leq 10^{2n} w$$

$$2x_{n-1}y_n 10^2 + y_n^2 \leq 10^{2n} W - 10^{2n} x_{n-1}^2$$

factorizando:

$$y_n(2x_{n-1}10^2 + y_n) \leq 10^{2n}(W - x_{n-1}^2)$$

$$y_n(2x_{n-1}10^2 + y_n) \leq 10^{2n} z_{n-1}$$

Entonces conviene seleccionar $y_n$ , tal que :

$$y_n = \max \{y \in \mathbb{N} \mid y(2x_{n-1}10^2 + y) \leq 10^{2n} z_{n-1}\}$$

Llamemos: $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_n/10^n \\ z_n = W - x_n^2 \end{cases}$

Entonces de la desigualdad:

$$x_n^2 \leq W < (x_n + 1/10^n)^2$$

$$x_n^2 \leq W < x_n^2 + 2x_n/10^n + 1/10^{2n}$$

$$0 \leq W - x_n^2 < 2/10^{2n}[x_n 10^n + 1/2(10^n)]$$

$$z_n < r_n \quad \text{con} \quad r_n = 2/10^{2n}[10^n x_n + 1/2(10^n)]$$

Hasta aquí, se encontró una sucesión $\{y_n\}$ de tal manera que enécimo dígito es la expansión decimal de $\sqrt{x}$

Esto es: Como $X = W(10)^{k/2}$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = y_o + y_1/10 + y_2/10^2 + \ldots + y_n/10^n + \ldots$$

$$= y_o + \sum_{k=1}^{\infty} y_k/10^k = X^*$$

Es decir que $\{x_n\}$ tiende a un límite y ese límite es la expansión decimal de $X^*$.

$$x_k \leq x_{k-1} \leq x_{k-2} \leq \ldots \leq X^*$$

Ahora demostraremos que la sucesión residual $\{r_n\} \to 0$

$$r_o = 2y_o + 1$$

$$r_1 = 1/10^2 (2x_1 10 + 1) = 2/10 [x_1 + 1/2(10)]$$

$$r_2 = 1/10^4 (2x_2 10 + 1) = 2/10^2 [x_2 + 2/10(x_2 + \\ + 1/2(10)^2]$$

$$\vdots$$

$$r_n = 1/10^{2n}(2x_n 10 + 1) = 2/10^n[x_n + 1/2(10^n)]$$

Vamos a ver que: $\lim_{n\to\infty} \{ r_n \} \to 0$

Demostración:

$$r_n = 2/10^n \, [ x_n + 1/2(10^n) ]$$

además :

$$x_n = y_o + y_1/10 + \ldots + y_n/10^n < y_o + 1$$

entonces:

$$r_n < 2/10^n \, [y_o + 1 + 1/2(10^n) ]$$

por lo tanto: $\lim_{n\to\infty} \{r_n\} = 0$ ∎

Además: $0 < z_n < r_n$

Pero: $\lim_{n\to\infty} \{z_n\} = 0$

por tanto: $\lim_{n\to\infty} ( x - x_n^2 ) = 0$

por tanto: $x = \lim_{n\to\infty} x^2 = ( \lim_{n\to\infty} x_n )^2$

por tanto: $x = X^{*2} \Rightarrow |\sqrt{x}| = X^*$ ∎

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[3]{X}$ , con $X > 0$ , número real.

donde :

$$X = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 . b_1 b_2 \ldots$$ es la expansión decimal de

X, con $k = 1,2,\ldots$

El algoritmo se aplica: $1^{\underline{o}}$ )

Separando las cifras enteras de tres en tres

Esto es :

$$W_o = a_k a_{k-1} \qquad W_{(k+1)/3} = b_1 b_2 b_3$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3}$$

$$W_2 = a_{k-4} a_{k-5} \qquad W_{(k+2)/3} = b_4 b_5 b_6$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$W_{k/3} = a_3 a_2 a_1$$

Entonces: $X = W_o . W_1 \ldots W_{k/3} W_{k+1} \ldots (10)^{k/3}$

Si $W_o$ tiene 1 ó 2 dígitos, entonces agregamos 1 ó 2 ceros , para completar la terna.

EJEMPLO:

Si $X = 2\ 341 \Rightarrow W_0 = 003$ , $W_1 = 341$

Si $X = 25687 \Rightarrow W_0 = 025$ , $W_1 = 687$

De tal modo que : $W = W_o . W_1 W_2 \ldots$

Entonces: $X = W(10)^{k/3}$ , y aplicamos al algoritmo a $W$, donde:

$$Y = Y_o . Y_1 Y_2 \ldots Y_n \ldots (10)^j \text{ , con } j = k/3 .$$

EJEMPLO:

El algoritmo usual para calcular $\sqrt[3]{93}$

Primero

Examinamos los números cuyo cubo es menor ó igual a 93:

$$3^3 = 27 < 93$$

$$4^3 = 64 < 93$$

$$5^3 = 125 > 93$$

Entonces seleccionamos $y_o = 4$ como el primer dígito

Segundo: Observamos la desigualdad:

$$(4 + y/10)^3 < 93$$

$$64 + 3(4)^2 y_1/10 + 3(4)y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93$$

$$64 + 48y_1/10 + 12y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93$$

$$y_1/10 + 12y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93 - 64$$

$$y_1(4800 + 120y_1 + y_1^2) < 29$$

Entonces buscamos un dígito que cumpla la condición anterior:

Si $y_1 = 5$

$$5[4\ 800 + 120(5) + (5)^2] =$$

$$= 5[4\ 800 + 600 + 25] = 27\ 125 < 29\ 000$$

Si $y_1 = 6$

$$6[4\ 800 + 120(6) + 6^2] =$$

$$= 6[4\ 800 + 720 + 36] = 33\ 336 > 29\ 000$$

Entonces el mayor dígito que cumple la condición es $y_1 = 5$

Entonces la desigualdad:

$$(4.5 + y_1/10^2)^3 < 93$$

$$(91.125 + 3(4.5)^2 y_2/10^2 + 3(4.5)y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6) < 95$$

multiplicando por $10^6$. tenemos que:

$$91\ 125\ 000 + 607\ 500y_1 + 1\ 035y_2^2 + y_3^3 < 93\ 000\ 000$$

factorizando:

$$y_2(\ 607\ 500 + 1\ 035y_2 + y_2^2\ ) < 1\ 875\ 000$$

entonces buscamos un dígito que sea el mayor que cumpla la condición anterior:

Si $y_2 = 3$

$$3[607\ 500 + 1\ 035(3) + 3^2] =$$

$$= 3[607\ 500 + 3\ 105 + 9] = 1\ 831\ 842 = 1\ 875\ 000$$

Si $y_2 = 4$

$$4[607\ 500 + 1\ 035(4) + 4^2] =$$

$$= 4[607\ 500 + 4\ 140 + 16] = 2\ 446\ 624 > 1\ 975\ 000$$

Entonces el siguiente dígito que nos conviene elegir es 3, por tanto:

$$(4.53)^3 + 92.959677 \simeq 93$$

Si se requiere mayor precisión, se puede seguir seleccionando más dígitos decimales siguiendo el mismo procedimiento.

■

ALGORITMO GENERAL:

Se basa en las siguientes ideas:

1º) Seleccionar una sucesión de tal manera que sea convergente, esto es :

$$\lim_{n \to \infty} \{X_n\} = \sqrt[3]{X}$$

El algoritmo se aplica de la siguiente manera :

Si $X = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 . b_1 b_2 \ldots$

es la sucesión decimal de X, separemos X en ternas de dígitos:

Sean:

$$W_o = a_k a_{k-1} a_{k-2}$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3} a_{k-4}$$

$$\vdots$$

$$W_{k/3} = a_3 a_2 a_1$$

$$\vdots$$

Donde $k \in \mathbb{N}$ , k múltiplo de tres, porque si $W_o$ tiene uno ó dos dígitos, entonces agregamos uno ó dos ceros a la izquierda de $W_o$, para que k sea múltiplo de 3; y entonces aplicamos el algoritmo a W, donde $W = W_o W_1 \ldots W_{k/2} \ldots = X(10)^{-k/3}$

EJEMPLO:

Si X = 1 001 , entonces hacemos X = 001 001

y aplicamos el algoritmo a W, donde $W = 001.001 = X10^{-k/3}$

Si llamamos $W = W_o . W_1 \ldots \quad 10^{k/3} = X$

2º Selecionar la sucesión de tal manera que cada $\{y_n\}$ sea dígito de la serie decimal de Y.

Observemos la desigualdad:

$$y_o^3 \leq W_o < (y_o + 1)^3$$

con $y_o \in \mathbb{N}$, dígito

Entonces conviene seleccionar $y_o \ni$

$$y_o = \text{máx}\{ y \in \mathbb{N} \mid y^3 \leq W_o\}$$

Llamemos: $\begin{cases} y_o = x_o \\ z_o = W_o - y_o^3 \end{cases}$

De la desigualdad:

$$y_o^3 \leq W_o < (y_o + 1)^3$$

$$0 \leq W_o - y_o^3 < y_o^3 + 3y_o^2 + 3y_o + 1$$

Obtenemos:

$$0 \leq z_o < 3(y_o^2 + y_o + 1/3)$$

$$z_o < r_o \quad , \quad \text{con } r_o = 3(y_o^2 + y_o + 1/3)$$

Consideremos ahora, la desigualdad:

$$(y_o + y_1/10)^3 \leq W < [y_o + (y_1 + 1)/10)]^3$$

con $y_o$ dígito conforme a su selección

Observemos el primer miembro de la desigualdad:

$$(x_o + y_1/10)^3 \leq W$$

$$x_o^3 + 3y_1x_o^2/10 + 3y_1^2x_o/10^2 + y_1^3/10^3 \leq W$$

factorizando y multiplicando por $10^3$:

$$y_1[3(10^2)x_o^2 + 3(10)x_oy_1 + y_1^2] \leq 10^3(W - x_o^3)$$

$$y_1[3(10^2)x_o^2 + 3(10)x_oy_1 + y_1^2] \leq 10^3 z_o$$

Entonces conviene seleccionar $y_1$, tal que :

$$y_1 = \text{máx}\{ y \in \mathbb{N} \mid y[3(10^2)x_o^2 + 3(10)x_oy + y^2] \leq 10^3 z_o\}$$

con $y_1$ dígito.

Llamemos: $\begin{cases} x_1 = (x_o + y_1/10) \\ z_1 = W - x_1^3 \end{cases}$

De la desigualdad:

$$x_1^3 \leq W < x_0 + y_1/10^2 + 1/10^3 = (x_1 + (y_1+1)/10)^3$$

Obtenemos:

$$0 \leq W - x_1^3 < 3x_1^2(1/10) + 3x_1(1/10)^2 + 1/10^3 =$$

$$= 3/10^3 (x_1^2 10^2 + x_1 10 + 1/3)$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_1 < 3/10^3 (x_1^2 10^2 + x_1 10 + 1/3)$$

$$\Rightarrow z_1 < r_1$$

con $r_1 = 3/10^3 (x_1^2 10^2 + x_1 10 + 1/3$

Observemos ahora la desigualdad:

$$(y_0 + y_1/10 + y_2/10^2)^3 \leq W < [y_0 + y_1/10 + (y_2 + 1)/10^2]^3$$

con $y_2$ dígito conforme a la selección de $y_1$

Del primer miembro de la desigualdad anterior tenemos :

$$(x_1 + y_2/10^2)^3 \leq W$$

$$x_1 + 3x_1^2 y_2/10^2 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq W$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1 y_2/10^2 + 3x_1 y_2^2 10^4 + y_2^3/10^6 \le W - x_1^3 = z_1$$

multiplicando por $10^6$ :

$$3x_1 y_2/10^4 + 3x_1 y_2^2/10^2 + y_2^3 \le 10^6 z_1$$

factorizando tenemos que:

$$y_2(3x_1 10^4 + 3x_1 y_2 10^2 + y_2^2) \le 10^6 z_1$$

Entonces conviene seleccionar $y_2$, tal que :

$$y_2 = \max\{\, y \in N \mid y(3x_1 10^4 + 3x_1 y 10^2 + y^2) \le 10^6 z_1 \}$$

Llamemos: $\begin{cases} x_2 = x_1 + y_2/10^2 \\ z_2 = W - x_2^3 \end{cases}$

De la desigualdad:

$$x_2^3 \le W < (x_1 + y_2/10^2 + 1/10^2)^3 = (x_2 + 1/10^2)^3$$

Obtenemos:

$$0 \le W - x_2^3 < 3x_2^2(1/10)^2 + 3x_2(1/10^2)^2 + [1/10^3]^2 =$$

$$0 \le Z_2 = 3/10^6(x_2^2 10^4 + x_2 10^2 + 1/3)$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq z_1 < 3x_1^2(1/10)^2 + 3x_1 10 + 1/3) \quad =$$

$$\Rightarrow \qquad z_1 \quad < \quad r_1$$

$$\text{con } r_1 = 3/10^3(x_1^2 10^2 + x_1 10 + 1/3)$$

Observemos ahora la desigualdad :

$$(y_o + y_1/10 + y_2/10^2)^3 \leq w < [y_o + y_1/10 + (y_2 + 1)10^2]^3$$

con $y_2$ dígito conforme a la selección de $y_1$

Del primer miembro de la desigualdad anterior se tiene:

$$(x_1 + y_2/10^2)^3 \leq w$$

$$x_1^3 + 3x_1^2 y_2/10^2 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq w$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1 10^4 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq w - x_1^3 = z_1$$

multilicando por $10^6$:

$$3x_1 y_2/10^4 + 3x_1 y_2^2 10^2 + y_2^3 \leq 10^6 z_1$$

factorizando, tenemos que:

$$y_2(3x_1 10^4 + 3x_1 y_2 10^2 + y_2) \leq 10^6 z_1$$

$$\text{Llamemos :} \begin{cases} x_2 = x_1 + y_2/10^2 \\ z_2 = w - x_2^3 \end{cases}$$

Entonces, del segundo miembro de la desigualdad :

$$x_2^3 \leq w < ( x_1 + y_2/10^2 + 1/10^2 )^3 + (x_2 + 1/10^2 )^3$$

$$0 \leq w - x_2^3 < (x_2 + 1/10^2 )^3 - x_2^3$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq z_2 < 3x_2^2(1/10^2) + 3x_2(1/10^4) + 1/10^6$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq z_2 < 3[x_2^2/10^2 + x_2/10^4 + 1/3(10^6) ]$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq z_2 < 3/10^6(x_2^2 10^4 + x_2 10^2 + 1/3)$$

$$z_2 < r_2$$

$$\text{con } r_2 = 3/10^6(10^4 x_2^2 + 10^2 x_2 + 1/3)$$

■

EL ALGORITMO GENERAL , por inducción:

Considerando la desigualdad

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^3 \leq w < [x_{n-1} + (y_n + 1)/10^n]^3$$

$$\text{con} \quad 0 \leq y_n < 10$$

porque $(y_{n-1} + 1)^3 \leq w$, con $y_{n-1} \in \mathbb{N}$, $0 \leq y_n < 10$

De la desigualdad :

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^3 \leq w$$

Obtenemos:

$$x_{n-1}^3 + 3x_{n-1}^2 y_n/10^n + 3x_{n-1} y_n^2/10^{2n} + y_n^3/10^{3n} \leq w$$

de donde: **multiplicando por $10^{3n}$**:

$$y_n(3x_{n-1}^2 10^{2n} + 3x_{n-1} y_n 10^n + y_n^2) \leq 10^{3n} z_{n-1}$$

Entonces conviene seleccionar $y_n$, tal que :

$$y_n = \text{máx } \{ y \in \mathbb{N} \mid y(3x_{n-1}^2 10^{2n} + 3x_{n-1} 10^n y + y^2) \leq$$

$$\leq 10^{3n} z_{n-1}$$

Llamemos:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_n/10^n \\ z_n = w - x_{n-1}^3 \end{cases}$$

Entonces de la desigualdad:

$$x_n^3 \le w < (x_n^3 + 1/10^n)^3 \quad , \text{ obtenemos:}$$

$$0 \le w - x_n^3 < -x_n^3 + x_n^3 + 3x_n^2(1/10^n) + 3x_n(1/10^{2n}) + 1/10^{3n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le z_n < 3/10^{3n}(\, x_n^2 10^{2n} + x_n 10^n + 1/3\,)$$

$$z_n < r_n$$

$$\text{con } r_n = 3/10^{3n}(x_n 10^{2n} + x_n 10^n + 1/3$$

$$r_n = 3/10^{3n}\,[10^{2n}(x_n^2 + x_n/10^n) + 1/3(10^{2n})\,]$$

Además:

$$w_n = y_o + y_1/10^2 + \ldots + y_n/10^{2n} < y_o + 1$$

Entonces:

$$r_n < 3/10^n[\,(y_o + 1)^2 + (y_o + 1)/10^n + 1/3(10^{4n})]$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \{r_n\} = 0$$

$$0 < z_o < r_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{ z_n \} = 0$$

Entonces: $X = W10^{k/3}$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ( x - x_n^3 ) = 0$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \{x_n^3\} = (\lim_{n\to\infty} \{x_n\})^3$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \{x_n^3\} = (\lim_{n\to\infty} \{y_n\})^3$$

$$\Rightarrow x = X_n^{*3}$$

$$\Rightarrow |\sqrt[3]{x}| = X_n^{*}$$

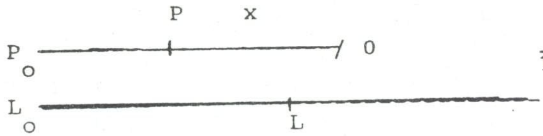
$\blacksquare$

## F U N C I O N   L O G A R I T M O

DEFINICION:

DEFINICION DE NAPIER : ( Siglo XVI )

Esta definición incluye dos puntos moviéndo se en diferentes líneas:




$\overline{P_oO} = 10^7$

El punto P se mueve con velocidad inicial $10^7$ a través de $\overline{PO}$ y con esta velocidad decrece. El punto L se mueve hacia la derecha con velocidad constante igual a $10^7$.

Entonces el segmento se define como $y = L_oL = 10^7 t$, con $t$ = intervalo de tiempo de manera que el logaritmo* de Napier se define como :

$$\text{Nog}x = n \quad , \text{ si } x = 10^7(1 - 10^{-7})^n$$

La idea de Napier se basó en construir una tabla de valores de la progresión geométrica :

$$x_k + 10^7(1 - 10^{-7})^k \quad ; \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

El usó las siguientes PROPIEDADES para n pequena :

1a $\quad 10^7(1 - 10^{-7}) \simeq n$

2a $\quad (1 - 10^{-7})^{100} \simeq (1 - 10^{-5})$

3a $\quad (1 - 10^{-5})^{50} \simeq (1 - 1/2000)$

4a $\quad (1 - 1/200)^{20} \simeq (1 - 1/100)$

Y así construye la tabla siguiente:

$$x_{pq} = 10^7(1 - 1/200)^{p-1}(1 - 1/100)^{q-1}$$

El logaritmo de Napier tiene las siguientes propiedades:

i) $x_m x_n = 10^7 x_{m+n}$

ii) $X_m / X_n = 10^{-7} X_{m-n}$

Y además sí :

$$\text{Nlog}(xy) = \text{Nlog}x + \text{Nlog}y + \text{Nlog}10^7$$

Demostración:

$$x = 10^7(1 - 10^{-7})^m$$

$$y = 10^7(1 - 10^{-7})^n$$

$$xy = 10^7\ 10^7\ (1 - 10^{-7})^{m+n}$$

$$10^7 = (1 - 10^{-7})^q$$

$$xy = 10^7(1 - 10^{-7})^{m+n+q}$$

$$\text{Nlog}(xy) = m + n + q$$

$$= \text{Nlog}x + \text{Nlog}y + \text{Nlog}10^7$$

demostración:

$$m = 10^{-4} n \quad , \quad n = 10^{4} m$$

$$x = (1 + 10^{-4})^{n} = (1 + 10^{-4})^{10^{4} m}$$

$$= \left( \left( 1 + 10^{-4} \right)^{10^{4}} \right)^{m}$$

2a

$$( 1 + 10^{-4} )^{10^{4}} \simeq e$$

$$\lim_{n \to \infty} ( 1 + 1/n)^{n} \simeq e$$

Entonces, aplicando la idea anterior, proveniente de la defincíón de Bürgi a la definición de Napier, tenemos que :

$$x = 10^{7} ( 1 - 10^{-7} )^{n}$$

$$= 10^{7} \left( ( 1 - 10^{-7} ) \right)^{10^{7}(n/10^{7})}$$

$$= 10^{7} \left( ( 1 - 10^{-7} )^{10^{7}} \right)^{n/10^{7}}$$

$$x \simeq 10^{7} e^{-n/10^{7}}$$

$$L\, x \simeq L\, 10^{7} - n/10^{7}$$

$$n/10^7 \simeq -L\,x + L\,10^7 - L(10^7/x)$$

$$n \cong 10^7\,L\,(10^7/x)$$

$$\boxed{\mathrm{Nog}\ x = 10^7 L(10^7/x)}$$

DEFINICION DE BÜRGI . ( Siglo XVI )

Esta definición es similar a la anterior, solo que Bürgi utilizó como radio vector a: $1 + 10^{-4}$.

Entonces:

$$\mathrm{Blog}x = 10^{-4}n \qquad \text{si} \quad x = (1 + 10^{-4})^n$$

Con las siguientes propiedades :

1a Si Blog x = m

$$x = \left((1 + 10^{-4})^{10^4}\right)^m$$

DEFINICION DEL NUMERO "e" . (Siglo XVII)

Para toda $x \in \mathbb{N}$ , con $n >> 1$ , "e" es el enécimo término término de la sucesión:

$$e = \{ a_n \} = (1 + 1/n)^n = 2.71828...$$

El $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$ existe y

por el Binomio de Newton :

$$(1 + 1/n)^n = 1 + n(1/n) + [n(n-1)/2!](1/n)^2 +$$

$$[n(n-1)(n-2)/3!](1/n)^3 + \quad ... \quad +$$

$$+ [n(n-1)(n-2)...(2)(1)/n!](1/n)^3$$

$$= 1 + 1 + [(n^2 - n)/2!](1/n^2) + \frac{1}{3!}(n^3 - 2n^2 - n^2 + 2n)(1/n^3)$$

$$+ \quad ... + [(n!)/(n!)](1/n)^n$$

$$= 1 + 1 + [(1)/(2!)](1 - 1/n) + [(1)/(3!)](1-1/n)(1-2/n)$$

$$+ ... + [(1/n!)](1 - 1/n)(1 - 2/n)...[1 - (n-1)/n](1/n)$$

Para n distinto de 1 :

$$(1 + 1/n)^n < 2 + 1/2! + 1/3! +...+ 1/n!$$

$$< 2 + 1/2 + 1/2^3 + \ldots + 1/(2^{n-1}) < 3$$

Ya que $n! < 1/2^{n-1}$, puesto que $2^{n-1} > n!$

Además, para $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/k! + \ldots$$
$$- 2.71828\ldots$$

■

DEFINICION DE BRIGS:

El esquema de la definición de Brigs, aún tiene vigencia y se enseña a los estudiantes de Nivel Medio y de Nivel Medio Superior.

$$\text{Si} \quad b^x = A \qquad \text{con} \quad b > 0$$

El logaritmo del número A, con base $b > 0$, se define como el exponente x de la base b.

■

DEFINICION DE GLASSER (Siglo XX)

Con la moderna notación del Cálculo, Glasser, basado en el esquema de Brigs, definió el logaritmo como:

$$\log x = \int_1^x dt/t$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS :

Según la definición de BRIGS :

$$\log_b A = x \quad \Rightarrow \quad A^x = b$$

Para todo $b > 0$ , $x \in \mathbb{R}$

1a Todo logaritmo es un exponente

Es claro de la definición.

■

2a Si $A \leq 0$ , el logaritmo no existe

De la definicón $b > 0$

Entonces

$$b^x > 0 \text{ , para todo } x \in \mathbb{R}$$

Pero $b^x = A \leq 0$ , lo cual contradice la hipótesis

■

3a Si $0 < \log_b A < 1 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

En efecto, si $A = b^{-x} = 1/b^x$

Como, por definición $b > 0$ , entonces :

$$0 < 1/b^x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < b^{-x} < 1$$

$$\Rightarrow \log_b A = -x$$

■

4ª La unidad es al logaritmo de la base ,

En efecto, $b^1 = b$, para toda $b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \log_b b = 1$

∎

5ª El cero es el logaritmo de la unidad.

En efecto , $b^o = 1$, para toda $b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \log_1 b = 0$

∎

6ª $\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$

$$\text{Si} \begin{cases} A = b^x & \Rightarrow \quad \log_b = x \\ B = b^y & \Rightarrow \quad \log_b B = y \end{cases}$$

Entonces:

$$AB = b^x \, b^y = b^{x + y}$$

$$\Rightarrow \log_b (AB) = x + y$$

∎

7ª $\log_b (AB) = \log_b A - \log_b B$

$$\text{Si} \begin{cases} A = b^x & \Rightarrow \quad \log_b A = x \\ B = b^y & \Rightarrow \quad \log_b B = y \end{cases}$$

Entonces:

$$A/B = b^{x}/b^{y} = b^{x-y}$$

$$\Rightarrow \quad \log_b(AB) = x - y$$

■

8a $\log_b(A)^m = m\log_b a$

Entonces

$$A^m = \left\{(b^{x})\right\}^m = b^{mx}$$

$$\Rightarrow \quad \log_b A^m = m\,x$$

■

9a Si $\log_b \sqrt[n]{A}$ , con $n \in \mathbb{N}$

Entonces:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = (1/n)\log_b A$$

$$\text{Si } A = b^{x} \Rightarrow \log_b A = x$$

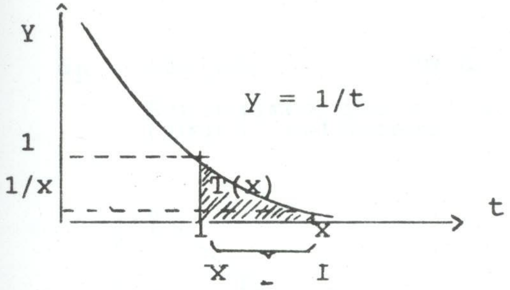
$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(b)}^{x} = (b)^{n/x} = (b^{1/n})^{x}$$

$$\Rightarrow \quad \log_b(\sqrt[n]{A}) = (1/n)\,x$$

■

PROPIEDADES Según la definición de GLASSER :

1a Todo logaritmo es el área bajo la curva $y = 1/t$ , entre 1 y x, según la figura :



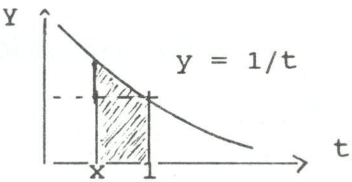

∎

2a Si $x < 0$ , el log x , no existe.

Es claro, porque sólo está definida para $x > 0$

∎

3a Si $x < 1 \Rightarrow \log x < 0$




De la figura: si $x < 1$ , entonces:

$$\int_1^x dt/t = -\int_x^1 dt/t < 0$$

∎

4a  Log 1 = 0

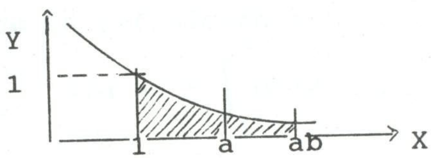
Si $x = 1$, entonces :

$$\int_1^1 dx/x = 0$$

■

6a  $\log(ab) = \log a + \log b$

Supongamos que $a < b$, según la figura, entonces:




$$\log(ab) = \int_1^{ab} dx/x =$$

$$= \int_1^{a} dx/x + \int_a^{ab} dx/x$$

Pero :

$$\int_a^{ba} dx/x = \int_1^{b} dx/x$$

Demostración :

Si $t = 1 \Rightarrow w = a$

Si $t = b \Rightarrow w = ab$

Entonces:

$$\int_{w=a}^{w=ab} dw/w = \int_{t=1}^{t=b} adt/at = \int_1^b dt/t$$

$$\Rightarrow \int_a^{ab} dw/w = \int_1^b dx/x$$

$$\Rightarrow \quad \log(ab) = \int_1^{ab} dx/x = \int_1^a dx/x + \int_1^b dx/x$$

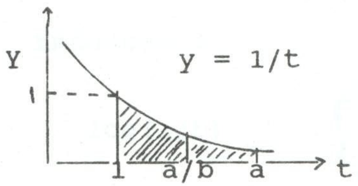
Pero de la definición :

$$\log a = \int_1^a dx/x \quad y \quad \log b = \int_1^b dx/x$$

$$\Rightarrow \quad \log ab = \log a + \log b \qquad \blacksquare$$

7a $\quad \operatorname{Log}(a/b) = \log a - \log b$

Si $a < b$ , con b distinto de 0, de la figura :




$$\log(a/b) = \int_1^{a/b} dx/x =$$

$$\log(a/b) = \int_1^a dx/x - \int_a^{a/b} dx/x$$

Pero:

$$\int_a^{a/b} dx/x = \int_1^{1/b} dx/x = -\int_1^b dx/x$$

Demostración :

Por la 6a propiedad, se vió que :

$$\int_a^{a/b} dx/x = \int_1^{1/b} dx/x \qquad \text{Pero} \qquad \int_1^{1/b} dx/x = -\int_1^b dx/x$$

Por la definición :

$$\log a = \int_1^a dx/x \quad \text{y} \quad \log b = \int_1^b dx/x$$

Por la 4a propiedad:

$$\log b = \int_1^b dx/x = -\int_1^{1/b} dx/x$$

Entonces :

$$\log(a/b) = \int_1^{a/b} dx/x = \int_1^a dx/x - \int_1^b dx/x$$

$$\Rightarrow \quad \log (a/b) = \log a - \log b \qquad \blacksquare$$

8a $\log a^m = m \log a$ , para $m \in \mathbb{N}$

Por definición $\log a^m = \int_1^{a^m} dx/x$

Pero :

$$\int_1^{a^m} dx/x = \int_1^{a} dx/x + \int_a^{a.a} dx/x + \int_{a.a}^{a^3} dx/x + \ldots + \int_{a^{m-1}}^{a^m} dx/x$$

Pero por la demostración anterior, dada en la propiedad 6a :

$$\int_1^{b} dx/x = \int_a^{ab} dx/x \quad , \qquad \text{si } a = b \text{ , entonces :}$$

$$\int_1^{a^m} dx/x = \int_1^{a} dx/x + \int_1^{a} dx/x + \ldots + \int_1^{a} dx/x = m\int_1^{a} dx/x$$

$$\Rightarrow \int_1^{a^m} dx/x = m\int_1^a dx/x = m\log a = \log a^m$$

∎

9a $\log \sqrt[n]{a} = (1/n)\log a$ , con $n \in \mathbb{N}$

Sea $z = a^{1/n} \Rightarrow a = z^n$

como $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_1^a dx/x = \int_1^{z^n} dx/x = n\int_1^z dx/x = n\int_1^{a^{1/n}} dx/x$$

$$\int_1^{a^{1/n}} dx/x = \int_1^a dx/x$$

$$\int_1^{a^{1/n}} dx/x = (1/n)\int_1^a dx/x$$

∎

## CONSTRUCCION DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS :

### TABLAS DE NAPIER Y BÜRGI :

La idea central consistió en relacionar una serie geométrica con una aritmética.

Es decir, si $x, y > 0$ son tales que se desea calcular el producto $xy$, entonces, como $x$ e $y$, son términos de las progresiones geométricas:

$$x = ar^m \quad , \quad y = ar^n \quad , \quad a \in \mathbb{Z} \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad xy = ar^m ar^n = a^2 r^{m+n}$$

$$\Rightarrow \quad xy/a = a r^{m+n}$$

El objeto fué sustituir las operaciones aritméticas de multiplicación y divisón, por las más sencillas de - suma y resta.

En las tablas, "a" es una potencia de 10 y $b \in \mathbb{R}^+$, esto es:

| Progresión aritmética | Progresión geométrica |
|---|---|
| b | ar |
| 2b | ar2 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| nb | arn |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| (m+n)b | $ar^{m+n}$ |

| En la tabla de Napier $b = 1,\ a = 10^{7},\ r = 1 - 10^{-7}$ | | En la tabla de Bürgi $b = 10,\ a = 10^{8},\ r = 1 + 10^{-4}$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | $10^{7}(1 - 10^{-7})$ | 10x1 | $10^{8}(1 + 10^{-4})$ |
| 2 | $10^{7}(1 - 10^{-7})^{2}$ | 10x2 | $10^{8}(1 + 10^{-4})^{2}$ |
| 3 | $10^{7}(1 - 10^{-7})^{3}$ | 10x3 | $10^{8}(1 + 10^{-4})^{3}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| n | $10^{7}(1 - 10^{-7})^{n}$ | 10xn | $10^{8}(1 + 10^{-4})^{n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

En la tabla de Bürgi para

$$10x23027 \qquad \left\{ 10^{8}(1 + 10^{-4}) \right\}^{23027} \simeq 10^{8}(1)$$

Puesto que n es el logarítmo de las bases $(1 - 10^{-7})^{n}$ y $\left(1 + 10^{-4}\right)^{n}$ para Napier y Bürgi , respectivamente, para Bürgi, fué la tabla de antilogarítmos, excepto por el punto decimal.

■

CONSTRUCCION DE TABLAS :

LOGARITMOS COMUNES (BRIGS) :

El logarítmo de BRIGS, En términos de NAPIER, está definido por la transformación:

$$\log 10^{n} x = n + \log x$$

$$G(x) = \frac{\mathrm{Nog}\ 1 - \mathrm{Nog}\ x}{\mathrm{Nog}\ 1 - \mathrm{Nog} 10}$$

Usando la relación de Napier :

$$\mathrm{Nog} x \simeq 10^{7} L\ (10^{7}/x)$$

veremos que : $G(x) = \log x$

Demostración:

$$G(x) = \frac{10^{7} L(10^{7}) - 10^{7} L(10^{7}/x)}{10^{7} L(10^{7}) - 10^{7} \mathrm{Nog}\ 10^{6}} = \frac{L(10^{7}) - L(10^{7}/x)}{L(10^{7}) - L(10^{6})}$$

$$G(x) = \frac{L\left(10^{7} \Big/ (10^{7}/x)\right)}{L\ (10^{7}/10^{7})} = \frac{Lx}{L10} = \underline{\log x}$$

$\Rightarrow \quad \log 1 = 0 \quad$ y $\quad \log 10 = 1$

Esto es consecuencia de los logaritmos que difieren sólo por el punto decimal

$$\log 10^{n} x = n + \log x$$

EJEMPLO :

$$\log 2 = 0.3010$$
$$\log 20 = 1.3010$$
$$\log 200 = 2.3010$$

La tabla comienza calculando sucesivamente las raices cuadradas de 10 , empezando por log 10 = 1 .

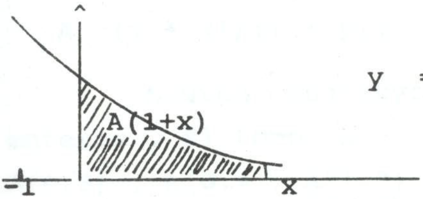
T A B L A D E B R I G S

| NUMEROS | | LOGARITMOS |
|---|---|---|
| 1o | 10.000 000 000,... | 1 |
| 2o | 3.162 277 660,... | 0.5 |
| 3o | 1.778 279 410,... | 0.25 |
| 4o | 1.333 521 432,... | 0.125 |
| 5o | 1.154 781 984,... | 0.625 |
| 6o | 1.074 607 828,... | 0.03125 |
| 7o | 1.036 632 920,... | 0.015625 |
| 8o | 1.010 015 217,... | 0.0078125 |
| . | | |
| . | | |
| . | | |
| 16o | 1.000 035 135,... | 0.000015255876 |
| . | | |
| . | | |
| . | | |
| 54o | 1.000 000 000,... | 0.0000000000000 |

CONSTRUCCION DE TABLAS DE LOGARITMOS.

METODO DE NEWTON:

Se basa en el cálculo de las integrales del área bajo la curva. De la figura:




$$y = \frac{1}{1 + x} \quad \text{para } x > -1$$

El área bajo la curva hiperbólica $A(1 + x)$ sobre el intervalo $[0,x]$ para $A(1 + x) \geq 0$ es :

$$y = 1/(1 + x)$$

Pero la serie :

$$y = 1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n} + x^{2n-1}$$

es el resultado de divir 1 entre 1 + x :

Como :

$$L\,x = \int_1^x (1/t)\,dt$$ , tomando integrales término a término, se tiene que:

$$A(1 + x) = L(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots -$$

$$- x^{2n}/2n + x^{2n-1}/(2n-1)$$

Por las propiedades de los logaritmos :

$$A\,[\,(1+x)^n\,] = A\,[\,n(1+x)\,] = n\,A\,(\,1+x\,)$$

$$A\,[\,(1+x)(1+y)\,] = A\,(1+x) + A\,(1+y)$$

$$A\,[(1+x)/(1+y)] = A\,(1+x) - A\,(1+y)$$

Newton construyó su tabla, primero para números enteros . El tomó $x = \pm\ 0.1$ , $\pm\ 0.2$ , y calculó A(0.8) , A(0.9), A(1,2) y A(1,1) hasta con 57 lugares decimales y notó que :

$$2 = [(1.2)(1.2)]/[(0.8)0.9)]$$

$$3 = [(1.2)(2)]/0.8$$

$$5 = [(2)(2)/0.8]$$

$$11 = 10(1.1)$$

$$10 = 2(5)$$

$$100 = 10(10)$$

Y así se obtiene :

$$A(2) = 2A(1.2) - A(0.8) - A(0.9)$$

$$A(3) = A(1.2) + A(2) - A(8)$$

$$A(5) = 2A(2) - A(0.8)$$

$$A(10) = A(2) + A(5)$$

$$A(11) = A(2) + A(1.1)$$

$$A(100) = A(10) + A(10)$$

Sustituyendo ahora x $\pm$ 0.02 , $\pm$ 0.01 , para para calcular A(0.98), A(1.02), A(0.999), A(1.001), esto le permite calcular los logaritmos de 7 , 13 y 17 porque :

$$7 = \sqrt{(100)(0.98)/2}$$

## USO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS :

El logarítmo se compone de un número real > 0 , tal que tiene una parte entera ( c ) , que se llama CARACTERISTICA y una parte fraccionaria ( m < 0 ) MANTISA , entonces : $\log x = c + m$

Las tablas proporcionan la matisa ; es decir , el área hiperbólica del intervalo [0,1] .

EJEMPLO:

Evaluar log 3.28
característica $c = 3$
mantisa $m = 28$

Los números comprendidos en el intervalo (0,1) tienen por característica 0 ; sabemos que por definición

$$10^0 = 1 \Rightarrow \log 1 = 0$$
$$10^1 = 10 \Rightarrow \log 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \Rightarrow \log 100 = 2$$
$$\vdots$$
$$10^n = 10^n \Rightarrow \log 10^n = n$$

entonces: $c \leq \log x \leq c + 1$

Para calcular la característica si x está escrito en forma decimal , y c tiene d dígitos,se le resta una unidad , i.e.,

$$d - 1 \leq \log x \leq d$$

EJEMPLO:

$$\log 3.28 = 0.51587$$

$$\log 328 = 2.51587$$

Las tablas proporcionan la mantisa de un número x, el cual no varía si se multiplica por una potencia de 10, como vimos anteriormente:
En efecto, si x = c + m

$$\log (x\, 10^{d}) = \log x + d = (c+ d) + m$$

con $c + d \in \mathbb{Z}$ , $0 < m < 1$ .

Si $m = .d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$ , en la primera columna de las tablas se buscan los dígitos $d_1 d_2$ se encontrará el número buscado en la intersección de la fila donde se localiza la columna del dígito $d_3$, el siguiente dígito $d_4$ se busca en la intersección de la Parte proporcional y se le sumará a los números encontrados .

EJEMPLO:

$$\log .8727 = 0 + 9727\ (10^{-1})$$

característica = 0 , mantisa 8727

entonces :el número para la mantisa

es 9405 + 3 = 9408

=> log 0.8727 = -1.9408

tablas de
# LOGARITMOS DECIMALES CON CUATRO CIFRAS

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Partes proporcionales 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| **20** | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| **30** | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **40** | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **50** | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

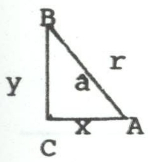
## Logaritmos decimales con cuatro cifras

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Partes proporcionales 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

**DEFINICIONES:**

**EUCLIDES :**




**Sea ABC un triángulo rectángulo**
**x el cateto opuesto,**
**y el cateto adyascente,**
**r la hipotenusa**

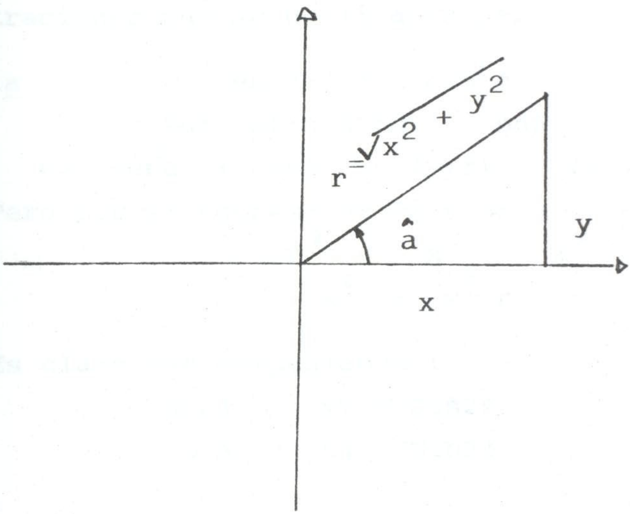
Las funciones trigonométricas se definen :

$$\operatorname{sen} \hat{a} = y/r$$
$$\cos \hat{a} = x/r$$
$$\tan \hat{a} = y/x$$

Y sus recíprocas como :

$$\cot \hat{a} = 1/\tan \hat{a}$$
$$\sec \hat{a} = 1/\cos \hat{a}$$
$$\csc \hat{a} = 1/\operatorname{sen} \hat{a}$$

definición de DESCARTES:




Entonces las definiciones en el plano cartesiano, son las mismas .

$$\text{sen } \hat{a} = y/r$$

$$\cos \hat{a} = x/r$$

$$\tan \hat{a} = y/x$$

Y sus recíprocos:

$$\cot \hat{a} = 1/\tan\hat{a} = r/y$$
$$\sec \hat{a} = 1/\cos\hat{a} = r/x$$
$$\csc \hat{a} = 1/\text{sen}\hat{a} = x/y$$

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Sólo se mencionarán las propiedades y las demostraciones que se utilizarán para evaluar las funciones.

1a $$\operatorname{sen}^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{a} = 1$$

Por definición $\operatorname{sen} \hat{a} = y/r$ , $\cos \hat{a} = x/r$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{a} = (y/r)^2 + (x/y)^2 = (y^2 + x^2)/r^2$$

Pero por el teorema de Pitágoras , se tiene que :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)r^2 = 1$$

Es claro que despenjando :

$$\operatorname{sen} \hat{a} = \sqrt{1 - \cos 2a}$$

$$\cos \hat{a} = \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2a}$$

$\blacksquare$

2a $$\tan \hat{a} = \operatorname{sen} \hat{a}/\cos$$

De la definición:

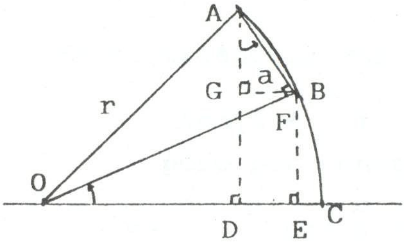
$$\operatorname{sen} \hat{a}/\cos \hat{a} = (y/r)/(x/r) = y/x = \tan \hat{a}$$

Similarmente : $\cot \hat{a} = \cos \hat{a}/\operatorname{sen} \hat{a}$

$$\cos \hat{a}/\operatorname{sen} \hat{a} = (x/r)/(y/r) = x/y = \cot \hat{a}$$

$\blacksquare$

$3^{\underline{a}}$ sea ( a + b ) = sena cosb + cosa senb




Por construcción sea ABC un círculo unitario de radio r con centro en 0.

$$\Rightarrow \quad \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r = 1$$

Sean $\overline{AD} - \overline{OC}$ , $\overline{OB} - \overline{AF}$ , $\overline{GF} \,//\, \overline{DC}$ y $\overline{EF} \,//\, \overline{GD}$

De aquí que, por construcción, los triángulos AFG, OEF, OAF y OAD son triángulos rectángulos, por lo que OEF $\simeq$ AFG porque tienen un ángulo congruente y dos lados proporcionales, que son :

$\overline{OE} \,//\, \overline{GF}$ . $\overline{AG} \,//\, \overline{EF}$ , y el ángulo recto congruente; entonces se tiene que :

En el triángulo OEF :

$$\operatorname{sen}\hat{a} = \overline{EF}/\overline{OF} \quad \Rightarrow \quad \overline{EF} = \overline{OF}\operatorname{sen}\hat{a} \qquad \ldots (1)$$

En el triángulo AFG :

$$\cos\hat{a} = \overline{AG}/\overline{AF} \quad \Rightarrow \quad \overline{AG} = \overline{AF}\cos\hat{a} \qquad \ldots (2)$$

En el triángulo OAF :

$$\hat{senb} = \overline{AF}/r \quad \Rightarrow \quad \hat{senb} = \overline{AF} \qquad \ldots (3)$$

$$\hat{cosb} = \overline{OF}/r \quad \Rightarrow \quad \hat{cosb} = \overline{OF} \qquad \ldots (4)$$

En el triángulo OAD :

$$sen(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{AD}/\overline{OA} = \overline{AD} = \overline{AG} + \overline{GD} \quad ,$$

pero por construcción : $\overline{GD} = \overline{EF}$

$$\Rightarrow \quad sen(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{AG} + \overline{EF} \qquad \ldots (5)$$

Sustituyendo (1) , (2) , (3) y (4) en (5) :

$$sen(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{AF}\, cos\hat{a} + \overline{OF}\, sen\hat{a}$$

$$\Rightarrow \quad sen(\hat{a} + \hat{b}) = sen\hat{b}\, cos\hat{a} + cos\hat{b}\, sen\hat{a}$$

∎

De la misma figura :

$$cos(\hat{a} + \hat{b}) = cos\hat{a}\, cos\hat{b} - sen\hat{a}\, sen\hat{b}$$

En el triángulo OAD :

$$cos(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{OD}/r = \overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\Rightarrow \quad cos(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{OE} - \overline{GF}$$

En el triángulo OAD :

$$\cos(\hat{a}+\hat{b}) = \overline{OD}/r = \overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE} \qquad \ldots (6)$$

pero como $\overline{DE} = \overline{GF}$ , se tiene que :

$$\cos(\hat{a}+\hat{b}) = \overline{OE} - \overline{GF}$$

En el triángulo OEF :

$$\cos\hat{a} = \overline{OE}/\overline{OF} \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OF}\cos\hat{a} \qquad \ldots (7)$$

En el triángulo OAF :

$$\cos\hat{b} = \overline{OF}/r = \overline{OF} \qquad \ldots (8)$$

$$\operatorname{sen}\hat{b} = \overline{AF}/r = \overline{AF} \qquad \ldots (9)$$

En el triángulo AFG :

$$\operatorname{sen}\hat{a} = \overline{GF}/\overline{AF} \Rightarrow \overline{GF} = \overline{AF}\operatorname{sen}\hat{a} \qquad \ldots (10)$$

Sustituyendo (7) , (8) , (9) y (10) en (6), se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\hat{a}+\hat{b}) = \overline{OF}\cos\hat{a} - \overline{AF}\operatorname{sen}\hat{a}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{a}+\hat{b}) = \cos\hat{a}\cos\hat{b} - \operatorname{sen}\hat{a}\operatorname{sen}\hat{b}$$

∎

De la propiedad anterior :

$$\text{sen}(2\hat{a}) = 2\ \text{sen}\hat{a}\ \cos\hat{a}$$

Puesto que :

$$\text{sen}(2\hat{a}) = \text{sen}(\hat{a} + \hat{a}) = \text{sen}\hat{a}\ \cos\hat{a} + \text{sen}\hat{a}\ \cos\hat{a} =$$
$$= 2\ \text{sen}\hat{a}\ \cos\hat{a}$$

Y , también :

$$\cos(2\hat{a}) = \cos 2\hat{a} - \text{sen} 2\hat{a}$$

$$\cos(2\hat{a}) = \cos(\hat{a} + \hat{a}) = \cos\hat{a}\ \cos\hat{a} - \text{sen}\hat{a}\ \text{sen}\hat{a}$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

4a Si $|\hat{a}| < 1 \Rightarrow \text{sen}\hat{a} \simeq \hat{a}$

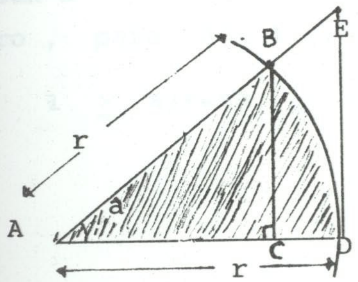



Figura :

Sea ^BD un arco de circunferencia unitaria de radio r tal que : AB = AD = 1

Los segmentos BC ⊥ AD

DE ⊥ AD

=> BC // ED

Triángulo ABC $\simeq$ triángulo AED

Entonces:

área triángulo AED $\geq$ área A^BD $\geq$ área triángulo ABC

Como:

$$\text{área } \triangle \text{ AED} = 1/2\ \overline{AC}\ \overline{BC}$$

$$\text{área } A\hat{\ }BD = \pi r^2 (\hat{a}/2\pi) = 1/2 . \hat{a}$$

$$\text{área} \triangle \text{AED} = 1/2\ \overline{AD} \cdot \overline{ED}$$

Sustituyendo, se tiene :

$$1/2\ \overline{AC} \cdot \overline{BC} \geq 1/2\ \hat{a} \geq 1/2\ \overline{AD}\ \overline{ED}$$

Además por definición:

$$\tan\hat{a} = \overline{ED}/\overline{AD} = \overline{AD}/r = \overline{ED} \quad , \quad \cos\hat{a} = \overline{AC}/\overline{AB} = \overline{AC}/r = \overline{AC}$$

$$\operatorname{sen}\hat{a} = \overline{BC}/\overline{AB} = \overline{BC}/r = \overline{BC}$$

Sustituyendo se tiene que:

$$1/2(1)\tan\hat{a} \geq 1/2\hat{a} \geq 1/2\cos\hat{a} \cdot \operatorname{sen}\hat{a}$$

Dividiendo entre $1/2\operatorname{sen}\hat{a}$ y utilizando la 2a propiedad:

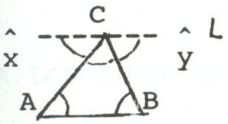
$$\frac{\operatorname{sen}\hat{a}/\cos\hat{a}}{\operatorname{sen}\hat{a}} \geq \hat{a}/\operatorname{sen}\hat{a} \geq \cos\hat{a} \Rightarrow 1/\cos\hat{a} \geq \hat{a}/\operatorname{sen}\hat{a} \geq \cos\hat{a}$$

Pero , para $\hat{a} \ll 1$ , $\hat{a} \to 0^\circ$ , $\cos 0^\circ = 1$

$$\Rightarrow 1 \geq \hat{a}/\operatorname{sen}\hat{a} \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\hat{a} = \operatorname{sen}\hat{a}}$$

■

5a Los ángulos interiores de todo triángulo suman 180°




De la figura:

Si $\triangle$ ABC es un triángulo cualquiera

$\hat{a}$ , $\hat{b}$ , $\hat{c}$ son los ángulos interiores

L es un recta que pasa por C // al lado $\overline{AB}$;

$\hat{x}$ , $\hat{y}$ , $\hat{C}$ son ángulos suplementarios de L

$$\Rightarrow \quad \hat{x} + \hat{y} + \hat{C} = 180^\circ$$

Pero $\hat{B} = \hat{y}$ , $\hat{A} = \hat{x}$ por ser ángulos alternos internos

$$\Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

De esta propiedad se tiene que:

Si $\triangle$ ABC es equilátero => sus ángulos son de 60°

Si $\triangle$ ABC es un triángulo rectángulo isósceles => sus ángulos agudos son de 45° cada uno .

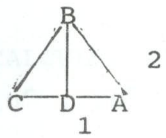
ALGORITMOS PARA EVALUAR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS:

PARA LOS ANGULOS 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

De acuerdo a la definción dada para el plano cartesiano se pueden calcular directamente con radio radio r = 1 , dadas en la siguiente tabla:

| función \ grados / rad | 0° / 0 | 90° / $\pi/2$ | 180° / $\pi$ | 270° / $3\pi/2$ | 360° / $2\pi$ | rango de las funciones |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $\hat{a}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | [-1,1] |
| cos $\hat{a}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | [-1,1] |
| tan $\hat{a}$ | 0 | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ | 0 | $(-\infty, +\infty)$ |

PARA LOS ANGULOS DE 30° y 60° :




De la figura:

Sea ABC un triángulo equilátero cuyos lados sean = 2 y DB la altura. Por la 5a propiedad, cada lado tiene 60°. Entonces DB es bisectriz del $\hat{B}$ y vale 30 . Además, por el Teorema de Pitágoras, se tiene que $BD = \sqrt{3}$.

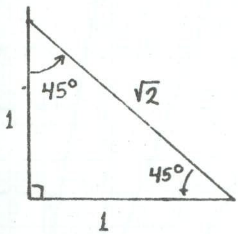
Entonces, los valores de los ángulos son :

$\text{sen}30^\circ = 1/2$ , $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ , $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$

$\text{sen}60^\circ = \sqrt{3}/2$ , $\cos 60^\circ = 1/2$ , $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

---

PARA EL ANGULO DE 45° :




De la figura :

Sea $\Delta$ ABC rectángulo isósceles de catetos = 1 . Por el Teorema de Pitágoras la hipotenusa = $\sqrt{2}$

Y por la 5a los ángulos valen 45°.

Entonces por definición :

$\text{sen}45^\circ = \sqrt{2}/2$

$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$

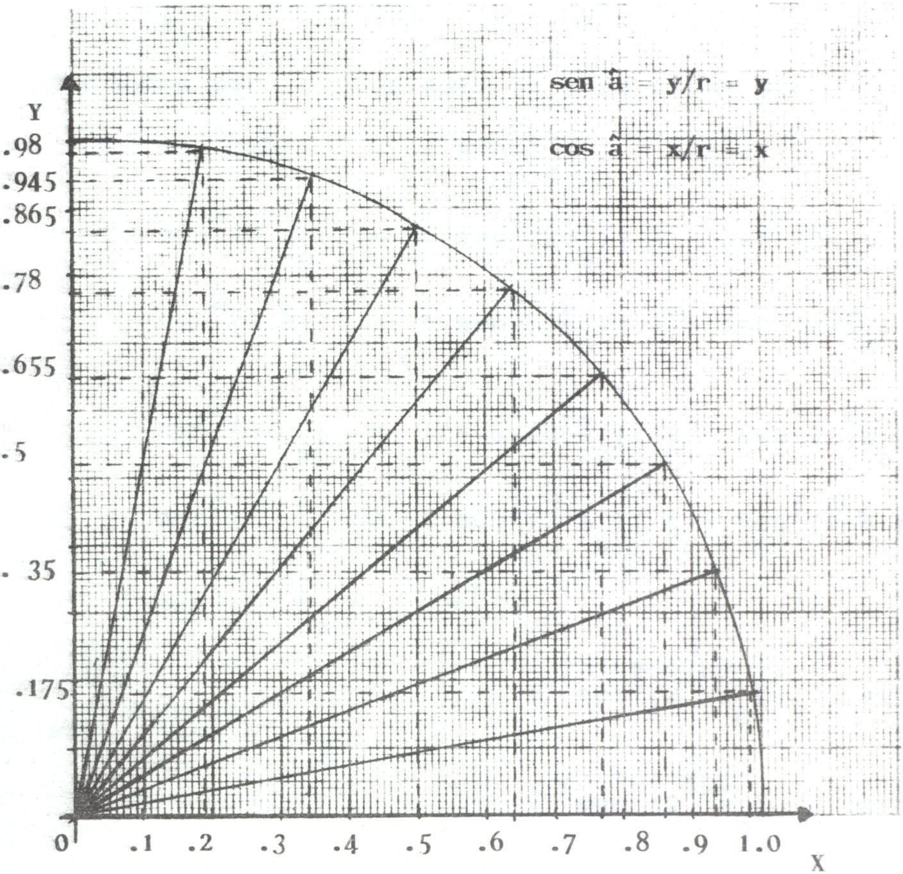
$\tan 45^\circ = 1$

---

CALCULO DE LOS VALORES PARA LOS ANGULOS DE 10° , 20° , 30°, 40° , 50° , 60° , 70° , 80° y 90° .

METODO GEOMETRICO: De la figura:

Con ayuda del papel milimétrico, se traza un círculo unitario y directamente de las definiciones se calculan los valores de las funciones trigonométricas.




r = 1

PARA LOS VALORES DE CUALQUIER ANGULO
(Método de Ptolomeo):

Con dominio $\hat{a} \in (-\pi,\pi)$ si $n = 10$ y $a_o = |a|/2^{10}$

$$\Rightarrow \quad |\hat{a}_o| = |\hat{a}|/2^{10} \leq 2\pi/2^{11} < 1.54 \times 10^{-4}$$

Entonces por la propiedad 3<u>a</u> , se tiene que :

$$\operatorname{sen}^2(2\hat{a}_o) = 4\operatorname{sen}^2\hat{a}_o(1 - \operatorname{sen}^2\hat{a}_o)$$

$$\operatorname{sen}^2(2^2\hat{a}_o) = 4\operatorname{sen}^2(2\hat{a}_o)(1 - \operatorname{sen}^2(2\hat{a}_o))$$

$$\operatorname{sen}^2(2^3\hat{a}_o) = 4\operatorname{sen}^2(2\hat{a}_o)(1 - \operatorname{sen}^2(2^2\hat{a}_o))$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{sen}^2(2^9\hat{a}_o) = 4\operatorname{sen}^2(2^8\hat{a}_o)(1 - \operatorname{sen}^2(2^8\hat{a}_o))$$

$$\operatorname{sen}^2(2^{10}\hat{a}_o) = 4\operatorname{sen}^2(2^9\hat{a}_o)(1 - \operatorname{sen}^2(2^9\hat{a}_o))$$

$$\operatorname{sen}^2(2^{10}\hat{a}_o) = \operatorname{sen}^2\hat{a}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\hat{a} = \begin{cases} +\sqrt{\operatorname{sen}^2(2^{10}\hat{a}_o)}\,, & \text{si } \hat{a} > 0 \\ -\sqrt{\operatorname{sen}^2(2^{10}\hat{a}_o)}\,, & \text{si } \hat{a} < 0 \end{cases}$$

Demostración:

Por la propiedad 3a, se tiene que :

$$\text{sen}^2(2\hat{a}) = (2\text{sen}\hat{a}\cos\hat{a})^2 = 2^2\,\text{sen}\hat{a}\sqrt{1-\text{sen}^2\hat{a}}$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2(2\hat{a}) = 4\,\text{sen}^2\hat{a}[(\sqrt{1-\text{sen}2\hat{a}})]^2 = 4\text{sen}^2\hat{a}(1-\text{sen}^2\hat{a})$$

$$\text{sen}^2(2^2\hat{a}) = \text{sen}^2(4\hat{a}) = \text{sen}^2(2\hat{a}+2\hat{a}) = (2\text{sen}2\hat{a}\cos 2\hat{a})^2$$

$$= 4\,\text{sen}^2(2\hat{a})\cos^2(2\hat{a}) = 4\text{sen}^2(\hat{a})(1-\text{sen}^2(2\hat{a})$$

$$\text{sen}^2(2^3\hat{a}) = \text{sen}^2(8\hat{a}) = \text{sen}^2(4\hat{a}+4\hat{a}) = (2\text{sen}4\hat{a}\cos 4\hat{a})^2 =$$

$$= 4\,\text{sen}^2(2^2\hat{a})[1-\text{sen}^2(2^2\hat{a})]$$

$$\vdots$$

$$\text{sen}^2(2^9\hat{a}) = 4\,\text{sen}^2(2^8\hat{a})[1-\text{sen}^2(2^8\hat{a})]$$

Si $n = 10 \Rightarrow \hat{a}_0 = |\hat{a}|/2^{10}$

Entonces :

$$\text{sen}^2(2^{10}\hat{a}) = 4\text{sen}^2(2^9\hat{a})[1-\text{sen}^2(2^9\hat{a})] = \text{sen}(2^{10}|\hat{a}|/2^{10})$$

$$= \text{sen}(|\hat{a}|)$$

Por inducción :

$$\text{sen}^2(2^n\hat{a}) = \text{sen}^2(2^{n-1})[1-\text{sen}^2(2^{n-1}\hat{a})]$$

Entonces para n+1 :

$$\text{sen}^2(2^{n+1}\hat{a}) = \text{sen}^2(2^n\hat{a})[1-\text{sen}^2(2^n\hat{a})]$$

Si $\hat{a}_o = |\hat{a}|/2^{n+1}$, entonces :

$$\text{sen}^2(2^{n+1}\hat{a}_o) = \text{sen}^2(2^{n+1}\hat{a}/2^{n+1} = \text{sen}^2(\hat{a})$$

$$\Rightarrow \text{sen}\hat{a} = \sqrt{\text{sen}^2(2^{n+1}\hat{a}_o)}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n >> 1$, con $|\hat{a}| \in (-\pi/2, \pi/2)$

Para evaluar las demás funciones, Ptolomeo tomó como base el cálculo del $\operatorname{sen}\hat{a}$ con $a \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Entonces:

$$\cos \hat{a} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{a}}$$

$$\tan \hat{a} = \operatorname{sen} \hat{a} / \cos \hat{a}$$

Pero:

$$\tan \hat{a} = \frac{\operatorname{sen} \hat{a}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{a}}}$$

$$\cot \hat{a} = \frac{1/\operatorname{sen} \hat{a}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} \hat{a}}}$$ por definición de $\cot a = 1/\tan \hat{a}$

Entonces:

$$\cot \hat{a} = \frac{1/\operatorname{sen} \hat{a}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{a}}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{a}}}{\operatorname{sen} \hat{a}}$$

$$\sec \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{a}}}$$ , ya que por definición $\sec\hat{a} = 1/\cos\hat{a}$

por definición $\csc \hat{a} = 1/\operatorname{sen}\hat{a}$ , entonces:

$$\csc \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \hat{a}}}$$

USO DE LAS TABLAS TRIGONOMETRICAS :

Las tablas contienen los valores para los ángulos de oo a 90o , divididos de la siguiente manera

En la primera columna se indican los grados y los minutos para cada función trigonométrica , dada en la primera fila. En la segunda columna , se proporciona la conversión de grados a radianes , conforme a la definición :

$$1^{\circ} = \pi/180^{\circ} \text{ rad.}$$

$$x^{\circ} = x^{\circ}(\pi/180^{\circ}) \text{ rad.}$$

hasta 45°. A partir de 46° , la última columna de abajo hacia arriba indica tanto grados como su conversión en radianes en la penúltima columna y el valor de las funciones trigonométricas está dada en la última columna

EJEMPLO :

Calcular sen 82° 30′

La tercera columna proporciona mas de 45o, así que hay que buscar la función seno en la última fila, de abajo hacia arriba donde diga 82o 30′ y la intersección; el valor de la tabla es:

$$\text{sen } 82^{\circ}\ 30' = .9890$$

## TABLA VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS)

| Grados | Radianes | Sen | Csc | Tan | Cot | Sec | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° 0′ | .0000 | .0000 | —— | .0000 | —— | 1.000 | 1.0000 | 1.5708 | 90 0′ |
| 10′ | 029 | 029 | 343.8 | 029 | 343.8 | 000 | 000 | 679 | 50′ |
| 20′ | 058 | 058 | 171.9 | 058 | 171.9 | 000 | 000 | 650 | 40′ |
| 30′ | .0087 | .0087 | 114.6 | .0087 | 114.6 | 1.000 | 1.0000 | 1.5621 | 30′ |
| 40′ | 116 | 116 | 85.95 | 116 | 85.94 | 000 | 0.9999 | 592 | 20′ |
| 50′ | 145 | 145 | 68.76 | 145 | 68.75 | 000 | 999 | 563 | 10′ |
| 1° 0′ | .0175 | .0175 | 57.30 | .0175 | 57.29 | 1.000 | .9998 | 1.5533 | 89° 0′ |
| 10′ | 204 | 204 | 49.11 | 204 | 49.10 | 000 | 998 | 504 | 50′ |
| 20′ | 233 | 233 | 42.98 | 233 | 42.96 | 000 | 997 | 475 | 40′ |
| 30′ | .0262 | .0262 | 38.20 | .0262 | 38.19 | 1.000 | .9997 | 1.5446 | 30′ |
| 40′ | 291 | 291 | 34.38 | 291 | 34.37 | 000 | 996 | 417 | 20′ |
| 50′ | 320 | 320 | 31.26 | 320 | 31.24 | 001 | 995 | 388 | 10′ |
| 2° 0′ | .0349 | .0349 | 28.65 | .0349 | 28.64 | 1.001 | .9994 | 1.5359 | 88° 0′ |
| 10′ | 378 | 378 | 26.45 | 378 | 26.43 | 001 | 993 | 330 | 50′ |
| 20′ | 407 | 407 | 24.56 | 407 | 24.54 | 001 | 992 | 301 | 40′ |
| 30′ | .0436 | .0436 | 22.93 | .0437 | 22.90 | 1.001 | .9990 | 1.5272 | 30′ |
| 40′ | 465 | 465 | 21.49 | 466 | 21.47 | 001 | 989 | 243 | 20′ |
| 50′ | 495 | 494 | 20.23 | 495 | 20.21 | 001 | 988 | 213 | 10′ |
| 3° 0′ | .0524 | .0523 | 19.11 | .0524 | 19.08 | 1.001 | .9986 | 1.5184 | 87° 0′ |
| 10′ | 553 | 552 | 18.10 | 553 | 18.07 | 002 | 985 | 155 | 50′ |
| 20′ | 582 | 581 | 17.20 | 582 | 17.17 | 002 | 983 | 126 | 40′ |
| 30′ | .0611 | .0610 | 16.38 | .0612 | 16.35 | 1.002 | .9981 | 1.5097 | 30′ |
| 40′ | 640 | 640 | 15.64 | 641 | 15.60 | 002 | 980 | 068 | 20′ |
| 50′ | 669 | 669 | 14.96 | 670 | 14.92 | 002 | 978 | 039 | 10′ |
| 4° 0′ | .0698 | .0698 | 14.34 | .0699 | 14.30 | 1.002 | .9976 | 1.5010 | 86° 0′ |
| 10′ | 727 | 727 | 13.76 | 729 | 13.73 | 003 | 974 | 1.4981 | 50′ |
| 20′ | 756 | 756 | 13.23 | 758 | 13.20 | 003 | 971 | 952 | 40′ |
| 30′ | .0785 | .0785 | 12.75 | .0787 | 12.71 | 1.003 | .9969 | 1.4923 | 30′ |
| 40′ | 814 | 814 | 12.29 | 816 | 12.25 | 003 | 967 | 893 | 20′ |
| 50′ | 844 | 843 | 11.87 | 846 | 11.83 | 004 | 964 | 864 | 10′ |
| 5° 0′ | .0873 | .0872 | 11.47 | .0875 | 11.43 | 1.004 | .9962 | 1.4835 | 85° 0′ |
| 10′ | 902 | 901 | 11.10 | 904 | 11.06 | 004 | 959 | 806 | 50′ |
| 20′ | 931 | 929 | 10.76 | 934 | 10.71 | 004 | 957 | 777 | 40′ |
| 30′ | .0960 | .0958 | 10.43 | .0963 | 10.39 | 1.005 | .9954 | 1.4748 | 30′ |
| 40′ | 989 | .0987 | 10.13 | .0992 | 10.08 | 005 | 951 | 719 | 20′ |
| 50′ | .1018 | .1016 | 9.839 | .1022 | 9.788 | 005 | 948 | 690 | 10′ |
| 6° 0′ | .1047 | .1045 | 9.567 | .1051 | 9.514 | 1.006 | .9945 | 1.4661 | 84° 0′ |
| 10′ | 076 | 074 | 9.309 | 080 | 9.255 | 006 | 942 | 632 | 50′ |
| 20′ | 105 | 103 | 9.065 | 110 | 9.010 | 006 | 939 | 603 | 40′ |
| 30′ | .1134 | .1132 | 8.834 | .1139 | 8.777 | 1.006 | .9936 | 1.4573 | 30′ |
| 40′ | 164 | 161 | 8.614 | 169 | 8.556 | 007 | 932 | 544 | 20′ |
| 50′ | 193 | 190 | 8.405 | 198 | 8.345 | 007 | 929 | 515 | 10′ |
| 7° 0′ | .1222 | .1219 | 8.206 | .1228 | 8.144 | 1.008 | .9925 | 1.4486 | 83° 0′ |
| 10′ | 251 | 248 | 8.016 | 257 | 7.953 | 008 | 922 | 457 | 50′ |
| 20′ | 280 | 276 | 7.834 | 287 | 7.770 | 008 | 918 | 428 | 40′ |
| 30′ | .1309 | .1305 | 7.661 | .1317 | 7.596 | 1.009 | .9914 | 1.4399 | 30′ |
| 40′ | 338 | 334 | 7.496 | 346 | 7.429 | 009 | 911 | 370 | 20′ |
| 50′ | 367 | 363 | 7.337 | 376 | 7.269 | 009 | 907 | 341 | 10′ |
| 8° 0′ | .1396 | .1392 | 7.185 | .1405 | 7.115 | 1.010 | .9903 | 1.4312 | 82° 0′ |
| 10′ | 425 | 421 | 7.040 | 435 | 6.968 | 010 | 899 | 283 | 50′ |
| 20′ | 454 | 449 | 6.900 | 465 | 6.827 | 011 | 894 | 254 | 40′ |
| 30′ | .1484 | .1478 | 6.765 | .1495 | 6.691 | 1.011 | .9890 | 1.4224 | 30′ |
| 40′ | 513 | 507 | 6.636 | 524 | 6.561 | 012 | 886 | 195 | 20′ |
| 50′ | 542 | 536 | 6.512 | 554 | 6.435 | 012 | 881 | 166 | 10′ |
| 9° 0′ | .1571 | .1564 | 6.392 | .1584 | 6.314 | 1.012 | .9877 | 1.4137 | 81° 0′ |
| | | Cos | Sec | Cot | Tan | Csc | Sen | Radianes | Grados |

## TABLA VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS) (Continuación)

| Grados | Radianes | Sen | Csc | Tan | Cot | Sec | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9° 0'** | .1571 | .1564 | 6.392 | .1584 | 6.314 | 1.012 | .9877 | 1.4137 | **81° 0'** |
| 10' | 600 | 593 | 277 | 614 | 197 | 013 | 872 | 108 | 50' |
| 20' | 629 | 622 | 166 | 644 | 6.084 | 013 | 868 | 079 | 40' |
| 30' | .1658 | .1650 | 6.059 | .1673 | 5.976 | 1.014 | .9863 | 1.4050 | 30' |
| 40' | 687 | 679 | 5.955 | 703 | 871 | 014 | 858 | 1.4021 | 20' |
| 50' | 716 | 708 | 855 | 733 | 769 | 015 | 853 | 1.3992 | 10' |
| **10° 0'** | .1745 | .1736 | 5.759 | .1763 | 5.671 | 1.015 | .9848 | 1.3963 | **80° 0'** |
| 10' | 774 | 765 | 665 | 793 | 576 | 016 | 843 | 934 | 50' |
| 20' | 804 | 794 | 575 | 823 | 485 | 016 | 838 | 904 | 40' |
| 30' | .1833 | .1822 | 5.487 | .1853 | 5.396 | 1.017 | .9833 | 1.3875 | 30' |
| 40' | 862 | 851 | 403 | 883 | 309 | 018 | 827 | 846 | 20' |
| 50' | 891 | 880 | 320 | 914 | 226 | 018 | 822 | 817 | 10' |
| **11° 0'** | .1920 | .1908 | 5.241 | .1944 | 5.145 | 1.019 | .9816 | 1.3788 | **79° 0'** |
| 10' | 949 | 937 | 164 | .1974 | 5.066 | 019 | 811 | 759 | 50' |
| 20' | 978 | 965 | 089 | .2004 | 4.989 | 020 | 805 | 730 | 40' |
| 30' | .2007 | .1994 | 5.016 | .2035 | 4.915 | 1.020 | .9799 | 1.3701 | 30' |
| 40' | 036 | .2022 | 4.945 | 065 | 843 | 021 | 793 | 672 | 20' |
| 50' | 065 | 051 | 876 | 095 | 773 | 022 | 787 | 643 | 10' |
| **12° 0'** | .2094 | .2079 | 4.810 | .2126 | 4.705 | 1.022 | .9781 | 1.3614 | **78° 0'** |
| 10' | 123 | 108 | 745 | 156 | 638 | 023 | 775 | 584 | 50' |
| 20' | 153 | 136 | 682 | 186 | 574 | 024 | 769 | 555 | 40' |
| 30' | .2182 | .2164 | 4.620 | .2217 | 4.511 | 1.024 | .9763 | 1.3526 | 30' |
| 40' | 211 | 193 | 560 | 247 | 449 | 025 | 757 | 497 | 20' |
| 50' | 240 | 221 | 502 | 278 | 390 | 026 | 750 | 468 | 10' |
| **13° 0'** | .2269 | .2250 | 4.445 | .2309 | 4.331 | 1.026 | .9744 | 1.3439 | **77° 0'** |
| 10' | 298 | 278 | 390 | 339 | 275 | 027 | 737 | 410 | 50' |
| 20' | 327 | 306 | 336 | 370 | 219 | 028 | 730 | 381 | 40' |
| 30' | .2356 | .2334 | 4.284 | .2401 | 4.165 | 1.028 | .9724 | 1.3352 | 30' |
| 40' | 385 | 363 | 232 | 432 | 113 | 029 | 717 | 323 | 20' |
| 50' | 414 | 391 | 182 | 462 | 061 | 030 | 710 | 294 | 10' |
| **14° 0'** | .2443 | .2419 | 4.134 | .2493 | 4.011 | 1.031 | .9703 | 1.3265 | **76° 0'** |
| 10' | 473 | 447 | 086 | 524 | 3.962 | 031 | 696 | 235 | 50' |
| 20' | 502 | 476 | 4.039 | 555 | 914 | 032 | 689 | 206 | 40' |
| 30' | .2531 | .2504 | 3.994 | .2586 | 3.867 | 1.033 | .9681 | 1.3177 | 30' |
| 40' | 560 | 532 | 950 | 617 | 821 | 034 | 674 | 148 | 20' |
| 50' | 589 | 560 | 906 | 648 | 776 | 034 | 667 | 119 | 10' |
| **15° 0'** | .2618 | .2588 | 3.864 | .2679 | 3.732 | 1.035 | .9659 | 1.3090 | **75° 0'** |
| 10' | 647 | 616 | 822 | 711 | 689 | 036 | 652 | 061 | 50' |
| 20' | 676 | 644 | 782 | 742 | 647 | 037 | 644 | 032 | 40' |
| 30' | .2705 | .2672 | 3.742 | .2773 | 3.606 | 1.038 | .9636 | 1.3003 | 30' |
| 40' | 734 | 700 | 703 | 805 | 566 | 039 | 628 | 1.2974 | 20' |
| 50' | 763 | 728 | 665 | 836 | 526 | 039 | 621 | 945 | 10' |
| **16° 0'** | .2793 | .2756 | 3.628 | .2867 | 3.487 | 1.040 | .9613 | 1.2915 | **74° 0'** |
| 10' | 822 | 784 | 592 | 899 | 450 | 041 | 605 | 886 | 50' |
| 20' | 851 | 812 | 556 | 931 | 412 | 042 | 596 | 857 | 40' |
| 30' | .2880 | .2840 | 3.521 | .2962 | 3.376 | 1.043 | .9588 | 1.2828 | 30' |
| 40' | 909 | 868 | 487 | 2994 | 340 | 044 | 580 | 799 | 20' |
| 50' | 938 | 896 | 453 | .3026 | 305 | 045 | 572 | 770 | 10' |
| **17° 0'** | .2967 | .2924 | 3.420 | .3057 | 3.271 | 1.046 | .9563 | 1.2741 | **73° 0'** |
| 10' | 996 | 952 | 388 | 089 | 237 | 047 | 555 | 712 | 50' |
| 20' | .3025 | .2979 | 357 | 121 | 204 | 048 | 546 | 683 | 40' |
| 30' | .3054 | .3007 | 3.326 | .3153 | 3.172 | 1.048 | .9537 | 1.2654 | 30' |
| 40' | 083 | 035 | 295 | 185 | 140 | 049 | 528 | 625 | 20' |
| 50' | 113 | 062 | 265 | 217 | 108 | 050 | 520 | 595 | 10' |
| **18° 0'** | .3142 | .3090 | 3.236 | .3249 | 3.078 | 1.051 | .9511 | 1.2566 | **72° 0'** |
| | | Cos | Sec | Cot | Tan | Csc | Sen | Radianes | Grados |

TABLA . VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS) (Continuación)

| Grados | Radianes | Sen | Cos | Tan | Cot | Sec | Cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18° 0' | .3142 | .3090 | 3.236 | .3249 | 3.078 | 1.051 | .9511 | 1.2566 | 72° 0' |
| 10' | 171 | 118 | 207 | 281 | 047 | 052 | 502 | 537 | 50' |
| 20' | 200 | 145 | 179 | 314 | 3.018 | 053 | 492 | 508 | 40' |
| 30' | .3229 | .3173 | 3.152 | .3346 | 2.989 | 1.054 | .9483 | 1.2479 | 30' |
| 40' | 258 | 201 | 124 | 378 | 960 | 056 | 474 | 450 | 20' |
| 50' | 287 | 228 | 098 | 411 | 932 | 057 | 465 | 421 | 10' |
| 19° 0' | .3316 | .3256 | 3.072 | .3443 | 2.904 | 1.058 | .9455 | 1.2392 | 71° 0' |
| 10' | 345 | 283 | 046 | 476 | 877 | 059 | 446 | 363 | 50' |
| 20' | 374 | 311 | 3.021 | 508 | 850 | 060 | 436 | 334 | 40' |
| 30' | .3403 | .3338 | 2.996 | .3541 | 2.824 | 1.061 | .9426 | 1.2305 | 30' |
| 40' | 432 | 365 | 971 | 574 | 798 | 062 | 417 | 275 | 20' |
| 50' | 462 | 393 | 947 | 607 | 773 | 063 | 40[illegible] | [illegible] | 10' |
| 20° 0' | .3491 | .3420 | 2.924 | .3640 | 2.747 | 1.064 | [illegible] | | 70° 0' |
| 10' | 520 | [illegible] | 901 | 673 | 723 | 065 | | | 50' |
| 20' | 549 | | 878 | 706 | 699 | 06[illegible] | | | [illegible] |
| 30' | .3578 | | [illegible]855 | .3739 | 2.675 | | | | |
| 40' | [illegible] | | [illegible] | 772 | 651 | | | | |
| 50' | | | | 805 | [illegible] | | | | |
| 21° 0' | | | | .3839 | | | | | |
| | | | | [illegible] | | | | | |
| | | | | 45[illegible] | | | | | |
| | | | [illegible]6 | .6494 | | | | | 0' |
| | | | 828 | 536 | 5[illegible] | | | | 50' |
| 20' | | | 820 | 577 | 520 | | | [illegible] | 40' |
| 30' | .5[illegible] | [illegible]19 | 1.812 | .6619 | 1.511 | 1.[illegible] | | .9861 | 30' |
| 40' | 876 | 544 | 804 | 661 | 501 | 20[illegible] | | 832 | 20' |
| 50' | 905 | 568 | 796 | 703 | 1.492 | 204 | [illegible]07 | 803 | 10' |
| 34° 0' | .5934 | .5592 | 1.788 | .6745 | 1.483 | 1.206 | .8290 | .9774 | 56° 0' |
| 10' | 963 | 616 | 781 | 787 | 473 | 209 | 274 | 745 | 50' |
| 20' | 992 | 640 | 773 | 830 | 464 | 211 | 258 | 716 | 40' |
| 30' | .6021 | .5664 | 1.766 | .6873 | 1.455 | 1.213 | .8241 | .9687 | 30' |
| 40' | 050 | 688 | 758 | 916 | 446 | 216 | 225 | 657 | 20' |
| 50' | 080 | 712 | 751 | .6959 | 437 | 218 | 208 | 628 | 10' |
| 35° 0' | .6109 | .5736 | 1.743 | .7002 | 1.428 | 1.221 | .8192 | .9599 | 55° 0' |
| 10' | 138 | 760 | 736 | 046 | 419 | 223 | 175 | 570 | 50' |
| 20' | 167 | 783 | 729 | 089 | 411 | 226 | 158 | 541 | 40' |
| 30' | .6196 | .5807 | 1.722 | .7133 | 1.402 | 1.228 | .8141 | .9512 | 30' |
| 40' | 225 | 831 | 715 | 177 | 393 | 231 | 124 | 483 | 20' |
| 50' | 254 | 854 | 708 | 221 | 385 | 233 | 107 | 454 | 10' |
| 36° 0' | .6283 | .5878 | 1.701 | .7265 | 1.376 | 1.236 | .8090 | .9425 | 54° 0' |
| | | Cos | Sec | Cot | Tan | Csc | Sen | Radianes | Grados |

# I I I M E T O D O S A R I T M E T I C O S

## ALGORITMO PARA EVALUAR $a^n$:

La idea se basa en lo siguiente :

Primero : si n es par , entonces :

$$a^n = (a^2)^{n/2}$$

Segundo : si n es impar , entonces :

$$a^n = a\, a^{n-1}$$

Es decir, necesitamos dos números naturales que $a^n = bc^m$ , con $m \geq 0$ , $m \in N$ , donde b y c conviene seleccionarlos de la siguiente manera:

$$b_o = 1 \quad , \quad c_o = a \quad , \quad m_o = m$$

hasta obtener $c_k$ , para alguna $k \in \mathbb{N}$ , tal que $m_k = 0$ .

Sea $m_o$ impar : entonces hacer :

$$\left( a_o b_o \right)^{m_o} = \left( a_o b_o \right)^{m_o - 1} = ( a_o b_o ) b_o^{m_o - 1} = a_1 b_1^{m_1}$$

donde $a_o b_o = a_1$ , $b_o = b_1$ y $m_o - 1 = m_1$

Sea $m_o$ es par , entonces hacer :

$$\left( a_o b_o \right)^{m_o} = a_o \left( b_o \right)^{(m_o)/2} = \left( a_1 b_1 \right)^{m_1}$$

donde $a_o = a_1$ , $b_1 = b_o^2$ , $m_1 = m_o/2$

EN GENERAL , si $m_k > 0$ , $m_k$ es impar , hacer :

$$\left( a_k b_k \right)^{m-k} = a_k b_k \left( b_k \right)^{m_{k-1}} = a_{k+1} b_{k+1} \left( b_{k+1} \right)^{m_{k+1}}$$

donde : $a_{k+1} = a_k b_k$ , $b_{k+1} b_k$ , $m_{k+1} = m_{k-1}$

Y si $m_k > 0$ . $m_k$ es par , hacer :

$$\left( a_k b_k \right)^{m-k} = a_k b_k ( b_k )^{m_k /2} = \left( a_{k+1} b_{k+1} \right)^{m_{k-1}} =$$

donde : $a_k = a_{k+1}$ , $b2_k = b_{k+1}$ , $m_{k+1} = m_{k/2}$

EJEMPLO :

CALCULAR $(345)^4$

$(345)^4 = (345)^2 (345)^2$ , donde $(345)^2 = 119\ 025$

$\Rightarrow (345)^4 = (119\ 025)(119\ 025) = 141\ 666\ 950\ 625$

EJEMPLO :

Calcular $x^{17}$

$x = (x)^8 x = (x^2 x^2)(x^2 x^2)\ x$

Entonces

$x\,x = x^2$

$x^2 x^2 = x^4$

$x^4 x^4 = x^8$

$x^8 x^8 = x^{16}$

$x^{16} x = x^{17}$

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt{x}$ , con $x > 0$

El cálculo está basado en las siguientes ideas :

Si $a_k$ , $b_k > 0$ son una pareja de números reales , con $k \in N$ . seleccionados de tal manera que :

$$b_k = x / a_k \quad \text{y} \quad a_k = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$$

Seleccionamos primero $a_o > 0$ arbitrariamente y $b_o = x/a_o$

Entonces $\sqrt{x} - |b_n| = |a_n|$ para alguna $k = n$

donde :

$(a_n, b_n) \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \subset \ldots \subset (a_1, b_1) \subset (a_o, b_o)$

y cada $a_k$ es intervalo abierto .

Demostración :

Sea $L_o = | b_o - a_o|$ la longitud del intervalo ( $a_o$, $b_o$ )

y supongamos que $b_o > 0$, puesto que $b_o, a_o > 0$ y que $b_o$ es distinto de $a_o$ .

Entonces $L_o = b_o - a_o \geq$

Sea $a_1 = ( a_o + b_o) \Rightarrow a_2 < a_1 < b_o$ por ser punto medio.

$\Rightarrow \quad 1/a_o < (a_o + b_o)/2 < b_o$

$$\Rightarrow \quad 1/a_o > \frac{1}{(a_o + b_o)/2} > 1/b_o \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x/a_o > \frac{1}{(a_o + b_o)/2} > x/b_o \;, \quad x > 0$$

Como $b_o = x/a_o$ ; $x/a_1 = a_1$ ; $x/b_o = a_o$ :

$\Rightarrow \; b_o > a_1 > a_o \;\; \Rightarrow \;\; b_o > b_1 > a_1 > a_o \;\; \Rightarrow \;\; L_1 C L_o$

Sea $L_2 = | b_2 - a_2 |$ ; con $b_2 - a_2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; b_2 \geq a_2$

Entonces :

$a_1 < (a_1 + b_1)/2 < b_1$ ; por ser punto medio de $(a_1, b_1)$

$\Rightarrow a_1 < a_2 < b_1 \Rightarrow 1/a_1 < 1/a_2 < 1/b_1 \Rightarrow x/a_1 < x/a_2 < x/b_1$

con $x > 0$ ;

$\Rightarrow \; b_1 > b_2 > a_2 > a_1 \;\; \Rightarrow \;\; L_2 \; C \; L_1 \; C \; L_o$

En GENERAL, por inducción :

Sea $L_{n-1} \; C \; L_{n-2} \; C \dots C \; L_2 \; C \; L_1 \; C \; L_o$

Entonces : $L_n \; C \; L_{n-1}$

Si $a_n$ , $b_n$ son seleccionadas de tal manera que :

$$a_n = \left\{ a_{n-1} \; b_{n-1} \right\} / 2 \qquad y \qquad b_n = x / a_n$$

$\Rightarrow a_n < ( a_{n-1} \; b_{n-1} )/2 < b_n$ por ser el punto medio del intervalo $(a_{n-1}, b_{n-1})$

Sea : $L_n = | b_n - a_n | \geq 0$ la longitud del intervalo y supongamos que $b_n - a_n \geq 0$ , esto es , $b_n \geq a_n$

Entonces :

$$a_{n-1} < ( a_{n-1} + b_{n-1} )/2 < b_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n-1} < a_n < b_{n-1} \quad \Rightarrow \quad 1/a_{n-1} > 1/a_n > 1/b_{n-1}$$

$$= > \quad x/a_{n-1} < x/a_n < x/b_{n-1} \quad ; \quad \text{para toda } x > 0$$

$$\Rightarrow \quad b_{n-1} > b_n > a_n \; ; \quad \text{como } b_n \geq a_n$$

$$\Rightarrow \quad b_{n-1} > b_n \geq a_n > a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad L_n \subset L_{n-1} \subset \ldots \subset L_o$$

Además $\sqrt{x} \in L_n \subset L_{n-1} \subset \ldots \subset L_1 \subset L_o$ ; $x > 0$

Demostración:

Demostraremos también que $\sqrt{x} - |b_n| - |a_n|$ para alguna $k = n$ .

$b_o$ se escogió, de manera que $b_o^2 = x / a_o$

con $L_o = b_o - a_o \geq 0$, para $a_o > 0$, arbitrario

$\Rightarrow b_o \geq a_o \Rightarrow b_o b_o \geq b_o a_o = x \Rightarrow b_o^2 \geq x$

$\Rightarrow b_o \geq \sqrt{x} \geq a_o \Rightarrow \sqrt{x} \in (a_o, b_o)$

Además, como $a_1$, $b_1$ fueron seleccionadas tal que :

$a_1 = (a_o, b_o)$, $b_1 = x/a_1$ con $L_1 = b_1 - a_1 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq a_1$

debido a que $a_1$ es punto medio de $L_o = (a_o, b_o)$

$$\Rightarrow a_o < a_1 < b_o$$

Entonces :

$$a_1 = (a_o, b_o) = (a_o + x/a_o)/2 = (a_o^2 + x)/2a_o$$

$$= (a_o^2 + 2a_o\sqrt{x} \quad x - 2a_o\sqrt{x})/ 2a_o = (a_o - \sqrt{x})^2 + \sqrt{x} > \sqrt{x}$$

puesto que : $(a_o - \sqrt{x})^2 > 0$, $a_o > 0$, $x > 0$

$\Rightarrow a_1 > \sqrt{x} \Rightarrow a_o \leq \sqrt{x} < a_1 \leq b_1 \leq b_o \Rightarrow \sqrt{x} \leq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ E $(a_1, b_1)$ C $(a_o, b_o)$

En general , por inducción :

$L_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1} \geq 0$ , para $k = n-1$. con $b_{n-1} \geq a_{n-1}$,

y $\sqrt{x} \in (a_{n-1}, b_{n-1})$

Sea $L_n = b_n - a_n \geq 0$ , para alguna n $\Rightarrow$ $a_n$ es el punto medio del intervalo $L_n$ ;

Entonces:

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_{n-1} - \sqrt{x})^2 /2a_{n-1} + \sqrt{x} > \sqrt{x}$$

$\Rightarrow a_n > \sqrt{x} \Rightarrow a_o \leq a_1 \leq \ldots < \sqrt{x} \leq a_n = b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_o$

$\Rightarrow \sqrt{x} \in L_n$.

Pero como $a_n$ es el punto medio para alguna $k = n$, suficientemente grande : $b_n - a_n = 0$ .

$\Rightarrow b_n \geq \sqrt{x} \geq a_n$ , con $b_n = a_n$

Entonces $\sqrt{x} = b_n = a_n$

■

EJEMPLO:

Evaluar $\sqrt{19}$

Primero seleccionamos un número entero cuyo cuadrado se acerque a 19: $4^2 = 16$ ó $5^2 = 25$ , entonces

$4^2 = 16$ es el más cercano, esto es :

$$|19 - 16| = 4 \qquad y \qquad |19 - 25| = 6$$

Seleccionamos $4 = b_o$

$a_o = x/b_o = 19/4 = 4.75 \quad y \quad b_1 = 19/4.75 = 4$

$a_1 = (4 + 4.75)/2 = 8.75/2 = 4.375; \; b_2 = 19/4.375 = 4.342857$

$a_2 = (4.375 + 4.342857)/2 = 4.35892857; \; b_3 = 4.145885416$

$a_3 = 4.3602325 \quad ; \quad b_4 = 4.468065$

$a_4 = 4.358902895 \quad ; \quad b_5 = 4.358894992$

$a_5 = 4.35889894354 \quad ; \quad b_6 = 4.35889945168$

$a_6 = 4.35889919761 \quad ; \quad b_7 = 4.35889868947$

$a_7 = 4.35889894354 \quad ; \quad b_8 = 4.35889894354$

Entonces $\sqrt{19} = a_7 = b_8 = 4.35889894354$
con 11 decimales de aproximación .

Comprobación: $(\sqrt{19})^2 = a_7^2 = a_8^2 = 18.9999999999... \simeq 19$

EJEMPLO:
Evaluar $\sqrt{.5454...} = \sqrt{x}$

$\sqrt{x}$ puede convertirse a racional mediante el siguiente

ALGORITMO PARA CAMBIAR X DECIMAL A RACIONAL

Sea $x_o = a/b \in \mathbb{Q}$, con b distinto de cero, tal que $x = x_o$

Multiplicamos por $10^n$, donde n es el número de cifras de la serie decimal de $x = 0.d_1 d_2 \ldots d_n d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

$10^n x_o = x\, 10^n = x_2 + x_1 10^n$ donde $x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1 = x$

con $x_2 = d_1 d_2 \ldots d_n$, cada $d_k$ es dígito y $k = 1,2,3,\ldots n$,

Entonces $\quad 10^n x_o = x_2 + x_1$

restando $\quad x_o = x_1$

$$10^n x_o - x_o = x_2$$

$\Rightarrow \quad x_o (10^n - 1) = x_2$

$x_o = x_2 / 10^n - 1 = a/b$ con $b = 10^n - 1$ con b distinto de cero

Del ejemplo: $x_o = .545454\ldots$

n = 2 cifras decimales que se repiten, entonces multiplicamos por $10^n$

$$10^n x_o = 10^n(.5454\ldots) = 54.5454\ldots$$

$$- x_o = - 0.5454\ldots$$

Entonces : $x_o (100 - 1) = 54$

$$99x_o = 54$$

$$x_o = 54/99 = 6/11$$

Entonces resulta mas sencillo evaluar $\sqrt{6}/\sqrt{11} = \sqrt{.5454...}$.

Con el procedimiento anterior :

$\sqrt{6}/\sqrt{11} = 2.449489766278/3.316624790355 = 0.7385489519$

donde $(0.7385489519)^2 = .54545455435 \simeq .5454...$

con siete decimales de aproximación.

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[3]{x}$ , con $x \in \mathbb{R}$ .

Está basado en las siguientes propiedades de los exponentes:

$$x^{0} = 1 \text{ , por definición.}$$

$$x^{m} x^{n} = x^{m+n} \text{ , por la propiedad asociativa de los R.}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \text{ , por definición.}$$

$$\left( x^{m} \right)^{n} = x^{mn}$$ , por la propiedad asociativa de los números $\mathbb{R}$ .

El algoritmo consiste en seleccionar los números: $x_{o}, x_{1}, x_{2}, \ . \ . \ . \ x_{k}$ , de la siguiente manera :

1o) Escoger un número $x_{o} > 0$ , tal que $x_{o}^{3} \simeq x$ , $x_{o}^{3} < x$ ,

Entonces multiplicamos x por $x_{o}^{3}/x_{o}^{3}$ :

$$x = x(x_{o}^{3}/x_{o}^{3}) = (x/x_{3})(x_{o}^{3})$$

$$x^{1/3} = x_{o}(x/x_{o}^{3})^{1/3}$$

2o) Seleccionar otro número $x_{1} = x/ x_{o}^{3}$

entonces se tiene que:

$$x^{1/3} = (x_{1})^{1/3} x_{o} = x_{o}(x_{1}^{1/3})^{2/2} = x_{o}(x_{1}^{1/2})^{2/3}$$

Ahora seleccionemos $x_2 = x_1^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad x^{1/3} = x_o(x_2)^{2/3} = x_o x_2^{(2/3)(2/2)} = x_o(x_2^{1/2})^{4/3}$$

$$= x_o(x_2^{1/2})^{3/3}(x_2^{1/2})^{1/3}$$

Ahora seleccionemos $x_3 = x_2^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad x^{1/3} = x_o x_3 (x_3)^{1/3} = x_o x_3 (x_3^{1/3})^{2/2} = x_o x_3 (x_3^{1/2})^{2/3}$$

Ahora seleccionemos: $x_4 = x_3^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad x^{1/2} = x_o x_3 (x_4)^{2/3}$$

Por inducción , selecionando sucesivamente se tiene:

$$x_n = (x_{n-1})^{1/2}$$

De donde : $x^{1/3} = x_o x_3 x_6 \ldots (x_{3k})(x_{2k}) \ldots$

Pero $x_n = (x_1)^{1/(2^k)}$ , porque así se seleccionó

Entonces para una k suficientemente grande:

$1/2^k \to 0 \quad , \quad x_k^{o} - 1 \quad ,$ para alguna $k \in \mathbb{N}$.

$$x^{1/3} = x_o\, x_3\, x_6 \ldots x_k^{o} = x_o\, x_3\, x_6 \ldots \quad (1) .$$

EJEMPLO: Evaluar $\sqrt[3]{279}$

$x = 6 \quad , \quad$ porque $x_o^3 = 216 < 279 = x_o$

$$\text{Entonces } \sqrt[3]{279} = 6(\sqrt{1.2916})^{2/3} = 6(1.1232393)^{2/3}$$

$$= \cdot \quad 6(1.259801)^{4/3} = 6(1.02948)(1.02948)^{1/3}$$

$$= (6.17688)(1.02948)^{1/3} = (6.17688)(1.014633)^{2/3}$$

$$= (6.1768)(1.0073)^{4/3} = (6.5219)(1.0073)^{1/3}$$

$$= (6.5219)(1.00182)^{1/3} = (6.5333)(1.000182)^{1/3}$$

$$= (6.5333)(1.00009)^{2/3} = (6.53389)(1.00004499)^{4/3}$$

$$= (6.534183959)(1.00002249)^{1/3} = (6.534283959)(1.00001)^{2/3}$$

$$= (6.534257)(1.0000055)^{1/3} \simeq 6.534257$$

$$= (6.534257)^3 = 278.98999902$$

Si se requiere mayor aproximación , el proceso puede continuar hasta que alguna $x_k$ sea $\simeq 1$ . ∎

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[m]{x^{n}}$, con m, n $\in \mathbb{N}$ , $x > 0$.

$\sqrt[m]{x^{n}} = x^{m/n}$, con m distinto de 0 . $n/m = m_o < 1$ .

Entonces :

$$\left( x \right)^{m_o} = \left( x^{1/2} \right)^{2m_o} = \left( x_1 \right)^{m_1} \quad ;$$

$$\text{con } x_1 = \sqrt{x_1} \;;\quad m_2 = 2m_1$$

Si $m_1 > 1$ , hacer :

$$\left( x_1 \right)^{m_1} = x_1 \left( x_1 \right)^{m_1 - 1} = y_1 \left( x_1 \right)^{m_2} \;;\ \text{con } y_1 = x_1;$$

$$x_2 = x_1 \;;\quad m_2 = m_1 - 1$$

EN GENERAL:

$$\text{Si } x^{m} = y_k \left( x_k \right)^{m_k} , \qquad m_k < 1$$

Entonces:

$$x^{m} = y_k \left( x_k^{1/2} \right)^{2m_k} = y_{k+1} \left( x_{k+1} \right)^{m_{k+1}} \;;\ \text{con } y_{k+1} = y_k;$$

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k} \;;\quad m_{k+1} = 2m_k$$

Si $m_k > 1$ , entonces se tiene que:

$$x^m = y_k\, x_k \left( x_k \right)^{m_k - 1} = y_{k+1} \left( x_{k+1} \right)^{m_{k+1}}$$

con $y_{k+1} = y_k\, x_1$ ; $x_{k+1} = x_k$ ; $m_{k+1} = m_k - 1$ ;

El algoritmo dá un resultado muy próximo, cuando $x_k$ se aproxima a 1 y la solución es :

$$x^m \simeq y_k$$

EJEMPLO: Evaluar $(.327)^{.32}$

$(.327)^{.32} =$

$=(.5718391)^{.64} = (.7562)^{1.28} = (.7562)(.7562)^{.28} = y_1(.7562)^{.28}$

$= y_1(.7562)^{.28} = y_1(.86695978353)^{.56} = y_1(.93252232)^{1.12}$

$= y_2(.93252232)^{.12} = y_2(.96567195)^{.24} = y_2(.98268609)^{.48}$

$= \quad y_2(.99130524563)^{.96} \quad = \quad y_2(\ .99564313166)^{1.92}$

$= \quad y_3(.99564314)^{.92} \quad = \quad y_3(\ .99781918785)^{1.68}$

$$= \quad y_5 \, ( .9989 )^{.68} \quad = \quad y_5 \, ( .99945435 )^{1.36}$$

$$= \quad y_6 ( .999455435 )^{.36} \quad = \quad y_6 (.99945435 )^{.86}$$

$$= \quad y_6 ( .999727138)^{1.72} \quad = \quad y_7 (.999727138)^{.72}$$

$$= \quad y_7 (.9998635597)^{1.44} \quad = \quad y_8 (.9998635597)^{.44}$$

$$= \quad y_8 ( 99993177752)^{.88} \quad = \quad y_8 (.999965888)^{1.76}$$

$$= \quad y_9 (.999965888)^{.76} \quad = \quad y_9 ( .999982944)^{1.52}$$

$$= \quad y_{10} (.999982944)^{.52} \quad = \quad y_{10} (.99999147196)^{1.04}$$

$$= \quad y_{11} (.99999147196)^{.04} = \quad y_{12} (.99999573597)^{.08}$$

$$= \quad y_{12} (.999997866798)^{.16} = \quad y_{13} (.999989)^{.32} - y_{13} (1)$$

$$=> \quad (.327)^{.32} \cong \; y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9 y_{10} y_{11} y_{12} \quad =$$

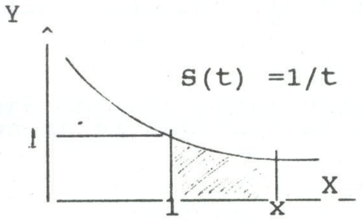
$$= \; .75131796322$$

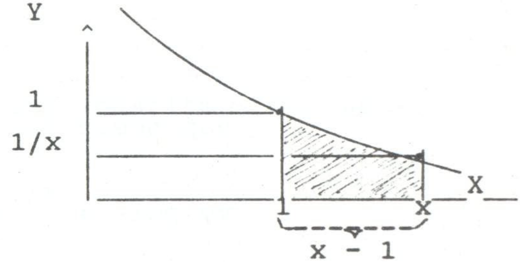
**Si se requiere mayor precisión , se puede continuar con el procedimiento.**

ALGORITMO PARA EVALUAR LN X , X > 0 .

El método se basa en la interpretación geométrica de que $S(x) = 1/t$ , es la función que determina el área bajo la curva igual log x ; ( Es uno de los métodos clásicos utilizado por GREGORY).

Y se trata de calcular el área por aproximaciones sucesivas, de acuerdo a las siguientes figuras :



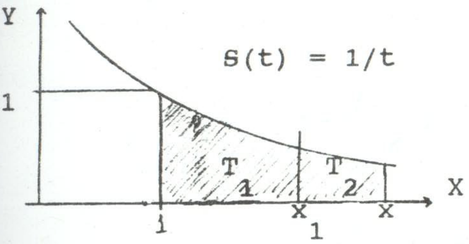

El área del trapecio A(T) de dimensiones :
altura x - 1 ,
base mayor 1 ,
base menor 1/x
es :

$$A(T) = 1/2(1 + 1/x)(x - 1) = 1/2(x - 1 + 1 + 1/x) =$$
$$= 1/2(x + 1/x) = L_1$$

Para una mayor aproximación , se toma un punto intermedio entre 1 y x . Sea $x_1$ ese punto, entonces :

$$1 < x_1 < x$$

De acuerdo a la figura :




$$A(T) = A(T_1) + A(T_2) = L_2$$
$$= 1/2(1 + x_1)(x_1 - 1) \quad +$$
$$+ \; 1/2(1/x_1 - 1/x)(x - x_1)$$

Pero por las propiedades de los logarítmos que se vieron en el Capítulo anterior, se tiene que :

$$(1/2)\log x \;=\; \log x^{1/x} \;=\; \log \sqrt{x}$$

Entonces, para desarrollar el logaritmo, nos conviene elegir $\sqrt{x} = x_1$ :

$$\Rightarrow \quad L_2 = 1/2(1 + 1/\sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) + 1/2(1/\sqrt{x} + 1/x)(x - \sqrt{x})$$
$$= \; 1/2(\sqrt{x} + 1 - 1 - 1/\sqrt{x}) \; + \; 1/2(x/\sqrt{x} + 1 - 1 + \sqrt{x}/x)$$
$$= \; 1/2(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}) \; + \; 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$
$$= \; \sqrt{x} \; - 1/\sqrt{x} \;\; = \;\; (\, x - 1 \,)/\sqrt{x}$$

Repitiendo el proceso para una mayor aproximación,

$$A(T) = 1/2(x - 1/x) \;\; = \;\; L_1$$

$$L_2 = (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$$

$$L_3 = 2(\sqrt[4]{x} - 1/\sqrt[4]{x})$$

.

.

.

$$L_{n-1} = 2^{n-3}\left( x^{(1/2)^{n-2}} - 1/\,x^{(1/2)^{n-1}} \right)$$

$$L_n = 2^{n-2}\left( x^{(1/2)^{n-1}} - 1/\,x^{(1/2)^{n-1}} \right)$$

Simplificando el proceso para obtener $\ln x$ , a partir de $\ln x - 1$ :

$$L_2 = L_1/c_1(x) \qquad \text{con} \quad c_1(x) = 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}}{1/2(x - 1/x)} = \frac{(x-1)/\sqrt{x}}{1/2(x^2-1)/x} = \frac{(x-1)\,x}{1/2(x^2-1)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\,(x-1)}{1/2(x^2-1)} = \frac{\sqrt{x}}{1/2(x+1)} = \frac{2\sqrt{x}}{1/2(x^2-1)\sqrt{x}}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})}$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = L_1/c_1 \qquad \text{con} \quad c_1 = 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$

$$\frac{L_3}{L_2} = \frac{2(\sqrt[4]{X} - 1/\sqrt[4]{X})}{\sqrt{X} - 1/\sqrt{X}} = \frac{2(\sqrt{X} - 1)/\sqrt[4]{X}}{(x - 1)/\sqrt{X}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{X} - 1)\sqrt{X}}{(x - 1)\sqrt[4]{X}} = \frac{2(\sqrt{X} - 1)\sqrt[4]{X}}{x - 1} = \frac{2(\sqrt{X} - 1)\sqrt[4]{X}}{(\sqrt{X} + 1)(\sqrt{X} - 1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt[4]{X})/2(\sqrt[4]{X})}{(\sqrt{X} + 1)/2(\sqrt[4]{X})} = \frac{1}{(\sqrt{X} + 1)/2(\sqrt[4]{X})} = \frac{1}{1/2(\sqrt{X} + 1)/\sqrt[4]{X})}$$

$$= \frac{1}{1/2\left\{(\sqrt{X} + 1)/\sqrt[4]{X}\right\}} = \frac{1}{1/2\left\{\sqrt[4]{X} + 1/(\sqrt[4]{X})\right\}}$$

$$\Rightarrow \quad L_3 = L_2/c_2, \quad \text{con} \quad c_2 = 1/2\,(\sqrt[4]{X} + 1/(\sqrt[4]{X}))$$

Observemos que $c_1 - c_2$, entonces :

$$c_2^2 = 1/4\,(\sqrt{X} + 2 + 1/\sqrt{X}) = 1/4\left\{2 + (\sqrt{X} + 1/\sqrt{X})\right\} =$$

$$= 1/4\,(2 + c_1)$$

$$= 1/2\,(\sqrt{X} + 1/\sqrt{X}) = (1 + c_1)/2$$

$$\Rightarrow \qquad c_2 = \sqrt{(1 + c_1)/2}$$

EN GENERAL :

$$c_{n+1} = \sqrt{(1 + c_n)/2}$$

De aquí , se puede proponer el algoritmo simplificado para evaluar $\ln x$ , con $x > 0$ .

PROCEDIMIENTO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR $\ln X$ , $X > 0$:

Sean:

$$L_1 = 1/2(x - 1/x) \qquad , \qquad c_o = 1/2(x + 1/x)$$

$$L_2 = L_1/c_1 \qquad , \qquad c_1 = \sqrt{(1 + c_o)/2}$$

$$L_3 = L_2/c_2 \qquad , \qquad c_2 = \sqrt{(1 + c_1)/2}$$

$$\vdots$$

$$L_n = L_{n-1}/c_{n-1} \qquad , \qquad c_{n-1} = \sqrt{(1 + c_{n-2})/2}$$

Cuando $c_{n-1} \simeq 1$ , entonces

$$\ln x = L_n = L_{n-1}/c_{n-1} = L_{n-1}$$

EJEMPLO:

Evaluar $\ln 4$

$c_o = 1/2(4 + 1/4) = 2.125$

$L_1 = 1/2(4 - 1/4) = 1.875, \quad c_1 = \sqrt{(1 + 2.125)/2} = 1.5625$

$L_2 = (1.875)/c_1 = 1.2 \quad , \quad c_2 = \sqrt{(1 + 1.5625)/2} = 1.28125$

$L_3 = 1.2/c_2 = .93658 \quad , \quad c_3 = \sqrt{1.93658/2} = .984017276$

$L_4 = .93658/c_3 = .876927 \quad , \quad c_4 = \sqrt{1.876927/2} = 1.068$

$L_5 = .876927/c_4 = .862387 \quad , \quad c_5 = \sqrt{2.068/2} = 1.01686$

$L_6 = .862387/c_6 = .85518 \quad , \quad c_6 = \sqrt{2.01686/2} = 1.00843$

$L_7 = .85518/c_6 = .85338788 \quad , \quad c_7 = \sqrt{2.00843/2} = 1.0021$

$L_8 = .85338788/c_7 = .8529358, \quad c_8 = \sqrt{2.0021/2} = 1.00052$

$L_9 = .8529358/c_8 = .8528249, \quad c_9 = \sqrt{2.00052/2} = 1.00013$

$L_{10} = .8528249/c_9 = .8527976, \quad c_{10} = \sqrt{2.00013/2} = 1.000032$

$L_{11} = .8527976/c_{10} = .85279, \quad c_{11} = \sqrt{2.000032/2} = 1.000008$

$L_{12} = .85279/c_{11} = .852788 \quad , \quad c_{12} = \sqrt{2.000008/2} = 1.000002$

$L_{13} = .852788/c_{12} = .85278758, \quad c_{13} = \sqrt{2.000002/2} = 1.00000049$

$$\Rightarrow \ln 4 \simeq .85278758$$

Si se requiere mayor aproximación, se puede continuar.

Demostración:

Sea $|\sqrt{x}|$ para $x > 0$

$$S_1(x) = x^{1/2}$$

$$S_2(x) = x^{1/4}$$

$$S_3(x) = x^{1/8}$$

$$\vdots$$

$$S_n(x) = x^{1/2^n}$$

Entonces la sucesión $\{x_n\} = \{ x^{1/2}, x^{1/4}, \ldots, x^{1/2^n}, \ldots\}$

tiende a uno, para alguna n.

$$1/2^n \to 0 \quad \text{para} \quad n > 0$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \sqrt{(1 + c_{n-1})/2} = \sqrt{x^{1/2^n}} \simeq \sqrt{x^0} = \sqrt{1} = 1$$

■

ALGORITMO PARA EVALUAR SEN $\hat{a}$ .

Para desarrollar el procedimiento, se usa el método de Ptolomeo, visto en el capítulo anterior:

Sea $\hat{a}$ tal que $\hat{a}_o = |\hat{a}|/2^n$ donde $\hat{a} \in (-\pi/2, \pi/2)$

para $n > 0$ , como $\hat{a}_o$ es muy pequeño, por la propiedad vista en el Capítulo anterior , se tiene que :

$$\text{sen}\hat{a} \simeq \hat{a}$$

Además, por las propiedades vistas en el mismo Capítulo para calcular el seno del ángulo duplo, se tiene lo siguiente :

$$\cos^2(\hat{a}) = 1 - \text{sen}^2\hat{a} \Rightarrow \cos\hat{a} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\hat{a}}$$

$$\text{sen}(2\hat{a}) = 2\text{sen}\hat{a}\cos\hat{a}$$

Entonces :

$$\text{sen}(2\hat{a}) = 2\,\text{sen}\hat{a}\cos\hat{a} = 2\,\text{sen}\hat{a}(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2\hat{a}})$$

$$\text{sen}(2\hat{a}) = 4\text{sen}^2\hat{a}(1 - \text{sen}2\hat{a})$$

Para $n = 10$ , con $\hat{a} \in (-\pi/2, \pi/2)$, se tiene :

$$|\hat{a}_o| = |\hat{a}|/2^{10} \leq (\pi/2)/2^{10} \leq \pi/2 < 1.54(10)^{-4}$$

Por lo tanto se tiene lo siguiente :

$$\text{sen}^2(2\hat{a}_o) = 4\,\text{sen}^2\hat{a}_o(1 - \text{sen}^2\hat{a}_o)$$

$$\text{sen}^2(2^2\hat{a}_o) = 4\,\text{sen}^2(2\hat{a}_o)[1 - \text{sen}^2(2\hat{a}_o)]$$

$$\text{sen}^2(2^3 \hat{a}_o) = 4\,\text{sen}^2(2^2 \hat{a}_o)[1 - \text{sen}^2(2^2 \hat{a}_o)]$$

$$\vdots$$

$$\text{sen}^2(2^9 \hat{a}_o) = 4\,\text{sen}^2(2^8 \hat{a}_o)[1 - \text{sen}^2(2^8 \hat{a}_o)]$$

$$\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_o) = 4\,\text{sen}^2(2^9 \hat{a}_o)[1 - \text{sen}^2(2^9 \hat{a}_o)]$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}^2(a^{10} \hat{a}_o) = \text{sen}^2 \hat{a}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\, \hat{a} \simeq \begin{cases} +\sqrt{\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_o)} & , \text{ si } \hat{a} < 0 \\ -\sqrt{\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_o)} & , \text{ si } \hat{a} > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO: Evaluar sen $37^\circ$

$$\text{sen}\, 37^\circ = \text{sen}\,(37^\circ \pi/180^\circ) = \text{sen}(0.645771277)$$

$$\text{sen}\, \hat{a}_o = \hat{a}/2^{10} = (.644771277)/1024 = 6.305246\,(10)^{-4}$$

$$\text{sen}^2(\hat{a}_o) = 3.97555\,(10)^{-7}$$

$$\text{sen}^2(2\hat{a}_o) = 1.580499\,(10)^{-6}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^2 \hat{a}_o) = 2.497997\ (10)^{-6}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^3 \hat{a}_o) = 6.239889\ (10)^{-6}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^4 \hat{a}_o) = 3.893662\ (10)^{-5}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^5 \hat{a}_o) = 1.516027\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^6 \hat{a}_o) = 2.298337\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^7 \hat{a}_o) = 5.282356\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^8 \hat{a}_o) = 2.790328\ (10)^{-2}$$

$$\operatorname{sen}^2(2^9 \hat{a}_o) = 7.78593\ (10)^{-2}$$

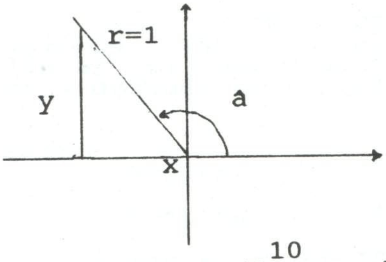
$$\operatorname{sen}^2(2^{10} \hat{a}_o) = 6.016807\ (10)^{-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \hat{a} \cong 0.6016807$$

EJMPLO : Evaluar sen $132^o$

Como $\hat{a} \in (3\pi/2, \pi/2)$ , $\hat{a} > 90^o$ , **entonces :**

$\text{sen}\,\hat{a} = |\,\text{sen}(\hat{a} - 90^\circ)\,|$ , puesto que â está en en el tercer cuadrante del plano cartesiano $R^2$:




$\text{sen}\,\hat{a} = y/r = y$

Entonces hagamos :

$\hat{a} = 132^\circ - 90^\circ = 43$

Sea $\hat{a}_o = \hat{a}_1/2^{10} = (42^\circ\pi/180^\circ)/2^{10} = (.7330377)/1024$

Siguiendo el procedimiento anterior ,

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\hat{a}_o = \text{sen}\,\hat{a} \simeq .6691752961$$

ALGORITMO PARA EVALUAR COS $\hat{a}$ :

PRIMER METODO :

Como $\cos \hat{a} = \sqrt{1 - sen^2 \hat{a}}$ , por la propiedad vista en el capítulo anterior. Se puede calcular el coseno usando la fórmula para evaluar el seno y después esta propiedad.

EJEMPLO :

Evaluar $\cos 18^{\circ}$

Entonces $\cos 18^{\circ} = \sqrt{1 - sen^2(18)}$

$sen 18o = sen\ 18\pi/180o = sen(.314159)$

Sea $\hat{a}_o = a_1/2^{10} = 3.05660214\ (10)^{-4}$

Usando el procedimiento anterior :

$sen 18^{\circ} = .0954808$

$\Rightarrow \quad \cos 18^{\circ} = \sqrt{1 - .0954808} = \sqrt{.9045192}$

$\cos 18^{\circ} = .95106214$

■

$$\hat{a}_o = 1.159\ (10)^{-3}$$

$$\cos \hat{a}_o = 1 - [1.159(10)^{-3}]^2 = 1 - 6.716405(10)^{-6} =$$
$$= .9999993$$

$$\cos(2\hat{a}_o) = 1 - 2(.999993)^2 = .9999972$$

$$\cos(2^2\hat{a}_o) = 1 - 2(.9999972)^2 = .9999888$$

$$\cos(2^3\hat{a}_o) = 1 - 2(.999988)^2 = .9999552$$

$$\cos(2^4\hat{a}_o) = 1 - 2(.9999552)^2 = .9998205$$

$$\cos(2^5\hat{a}_o) = 1 - 2(.9998208)^2 = .9992832$$

$$\cos(2^6\hat{a}_o) = 1 - 2(.9992632)^2 = .9971341636$$

$$\cos(2^7\hat{a}_o) = 1 - 2(.9971341636)^2 = .98855308042$$

$$\cos(2^8\hat{a}_o) = 1 - 2(.98855308042)^2 = .09544743856$$

$$\cos(2^9\hat{a}_o) = 1 - 2(.09544743856)^2 = .82204270552$$

$$\cos(2^{10} \hat{a}_o) = 1 - 2(.82204270552)^2 = .35150841938$$

$$\cos(2^{10} \hat{a}_o) = \cos \hat{a} - 0.35150841938$$

**TERCER METODO :** Como $\cos \hat{a} = \operatorname{sen}(\pi/2 - \hat{a})$ con $\hat{a} \in (0, \pi)$.

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\pi/2 - \hat{a}) = \operatorname{sen} \hat{a} \Rightarrow \hat{a} \quad (-\pi/2 , \pi/2)$

Entonces, se puede usar el algoritmo para evaluar el seno.

Demostración:

Sea $\triangle$ ABC un triángulo rectángulo y sean $\hat{x}$, $\hat{y}$ los ángulos agudos del triángulo; $\hat{C} = 90^\circ = \pi/2$ .


Entonces por la propiedad de que todos los ángulos interiores de cualquier triángulo suman $180^\circ$

$$\hat{x} + \hat{y} + \pi/2 = 180^\circ = \pi$$

$$\Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = \pi/2$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \pi/2 - \hat{y} \quad ó \quad \hat{y} = \pi/2 - \hat{x}$$

$$\cos \pi/2 \cos(-\hat{x}) - \operatorname{sen} \pi/2 \operatorname{sen}(-\hat{x})$$

Como $\quad \cos \pi/2 = 0 \quad , \quad \operatorname{sen} \pi/2 = 1$

$$\Rightarrow \cos(\pi/2 - \hat{x}) = \operatorname{sen}(-\hat{x})$$

$$\Rightarrow \hat{x} \in (0 - \pi/2, \pi - \pi/2) = (-\pi/2, \pi/2)$$

∎

ALGORITMO PARA EVALUAR TAN $\hat{a}$

PRIMER METODO

Como $\tan\hat{a} = \operatorname{sen}\hat{a}/\cos\hat{a}$ , con $\hat{a} \in (-\pi/2,\pi/2)$. Se puede evaluar $\operatorname{sen}\hat{a}$ con el método descrito y sustituir $\cos\hat{a}$ con alguno de los métodos descritos anteriormente :

EJEMPLO:

Evaluar tan 32°

$$\hat{a} = 32^{\circ}\pi/180^{\circ} = .5585$$

$$\hat{a}_o = \hat{a}/2^{10} = .5585/ 1024 = 5.4541\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}2(\hat{a}_o) = 2.9747\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}^2 2\hat{a}_o = 8.84884\ (10)^{-7}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^2\hat{a}_o = 7.83019709383\ (10)^{-6}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^3\hat{a}_o = 6.13119865282\ (10)^{-5}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^4\hat{a}_o = 3.75915969203\ (10)^{-4}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^5\hat{a}_o = 1.41312815901\ (10)^{-3}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^6\hat{a}_o = 1.99693119378\ (10)^{-2}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^7\hat{a}_o = 3.98765728732\ (10)^{-2}$$

$$\operatorname{sen}^2 2^8\hat{a}_o = 1.59020239915\ (10)^{-1}$$

$\operatorname{sen}^2 2^9 \hat{a}_0 = 2.32874367026\ (10)^{-1}$

$\operatorname{sen}^2 2^{10} \hat{a}_0 = 5.30455804253\ (10)^{-1}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} \hat{a} \quad - \quad .530155804253$

Usando, por ejemplo, la fórmula trigonométrica para el coseno:

$\cos \hat{a} \quad = \quad \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2\hat{a}}$

$\cos 32^\circ \quad - \quad \sqrt{1 - (.530155804253)}$

$- \sqrt{1 - .28102509392} \quad - \quad \sqrt{.71897490} \quad - \quad .8479238763$

$\Rightarrow \tan 32^\circ - .530155802/.8479238763 - .62498982526$

SEGUNDO METODO :

En el ejemplo anterior, se sustituyó el valor del seno por el coseno, una variante sería :

Como $\quad \operatorname{sen}^2 \hat{a} \; = 1 - \cos^2 \hat{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\hat{a} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{a}}$

$\Rightarrow \quad \tan\hat{a} \; = [\; \sqrt{1 - \cos^2 \hat{a}} \;]/\cos^2 \hat{a}$

Y evaluar el coseno por cualquiera de los métodos descritos anteriormente .

EJEMPLO :

Evaluar $\tan 32^\circ$

$\cos 32^\circ \quad = \quad .84801532697$

$\operatorname{sen} 32^\circ \quad = \quad \cos(\pi/2 - 32^\circ) \quad = \quad .62498925387$

$\tan 32^\circ \quad = \quad .62498925387$

## PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

El procedimiento consiste en evaluar cualquiera de las funciones trigonométricas con los métodos descritos anteriormente y, después tomar el recíproco, esto es:

Si el dominio de $f(\hat{a})$ está definida en el intervalo $(-\pi/2\ ,\ \pi/2)$ , existe y es distinto de cero, entonces :

$$1/f(\hat{a}) \text{ también existe .}$$

Por defínción las funciones trigonométricas están definidas en el intervalo de $(-\pi/2,\pi/2)$, para los valores del rango se vió en el capitúlo anterior, y por la defínción de funciones trigonométricas recíprocas se tiene por consiguiente :

$$\tan\hat{a} = 1/\cot\hat{a}$$

$$\sec\hat{a} = 1/\cos\hat{a}$$

$$\csc\hat{a} = 1/\text{sen}\hat{a}$$

EJEMPLO:

Evaluar cot $32^\circ$

Como $\tan\hat{a} = 1/\cot\hat{a}$, se puede evaluar tan $\hat{a}$ por cualquiera de los métodos anteriores:

$\Rightarrow \tan 32^\circ = .62498982526 \quad \Rightarrow \quad \cot 32^\circ = 1/.62498982526$

$\Rightarrow \cot 32^\circ = 1.6000260475$

EJEMPLO :

Evaluar sec $32^\circ$

Como $\sec\hat{a} = 1/\cos\hat{a}$ , se puede calcular el coseno por cualquiera de los mètodos anteriores :

$sec32 = 1/cos32^{o} = 1/.8479238763 = 1.179351161$

EJEMPLO :
Evaluar $csc32^{o}$

Como senâ = 1/cscâ => cscâ = 1/senâ , para senâ distinto de cero.

$\Rightarrow csc32^{o} = 1/.530155802 = 1.88623796292$

Las variantes para calcular las funciones trigonométricas, pueden determinanse utilizando cualquiera de los métodos de cálculo propuestos .

# C O N C L U S I O N E S

Los algoritmos Clásicos tienen la ventaja de proporcionar el origen y desarrollo de las funciones elementales.

En la Grecia Clásica, los métodos para evaluar las funciones trigonométricas, se realizaba a base de regla y compás; Euclides explica este método en su "Elementos", pero conforme se fué desarrollando la Geometría; Ptolomeo propone un método a base de relacionar el arco con el radio de la circunferencia, y los teoremas que usamos en ambos capítulos; el método euclideano , interpretado en coordenas cartesianas,resulta de utilidad para enseñar a los jóvenes estudiantes de secundaria, como se pueden construir las tablas de las funciones trigonométricas, no sólo por su sencillez, sino para proporcionarles una visualización mas completa que los introduzca a la comprensión de los conceptos trigonométricos básicos,y que puedan acceder, de manera natural a la Geometría Analítica. En el nivel Medio Superior , es esta materia,la que cuenta con mayor reprobación escolar, y la que constituye el cuello de botella propio para la deserción escolar ; y el principal motivo es -

esa falta de percepción geométrica de la que se habló. Consideramos que el estudio del origen y desarrollo de las funciones trigonométricas , puede ayudarles a que incorporen en sus estructuras cognoscitivas el acceso a la abstracción requerida para el estudio de las Matemáticas.

Los algoritmos para evaluar las funciones $f(x) = x^n$ , $f(x) = |\sqrt{x}|$, con $x > 0$ , y , $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aunque son lentos y las operaciones que se deben realizar son cuantiosas , resultan indispensables para la comprensión de su primer curso de Algebra, paso ineludible para incorporar sus conocimientos a su vida académica, en la resolución de problemas de Matemáticas y de otras asignaturas.

Durante el descubrimiento de América, las operaciones para calcular las nuevas rutas de los viajeros resultaban excesivas y suamente largas; pero los pioneros del análisis numérico, inventaron los logarítmos, Napier dedicó su vida entera (25 años) en construir tablas que facilitaran los cálculos; al sustituir,una progresión geométrica por una aritmética; al idear un cambio de operaciones de multiplicación y división ,por otras mas sencillas como son adición y sustracción; utilizando para ello una -

curiosa definición que desencadenó una serie de repercu ciones que dieron inicio al Cálculo Integral, desde las Correcciones realizadas por Bürgi, Brigs, Gregory , - Newton, Leibnitz y otros hasta la moderna definición de Glasser en el Siglo Pasado.

Es muy importante dar a conocer a los estudiantes del - nivel medio superior un panorama del desarrollo de las Matemáticas, porque como dice Ausubel, uno de los pedagogos más importantes de nuestra década, "el conocimien to solo se aprende cuando es significativo". Los alum - nos deben conocer el origen de la evaluación de las - funciones elementales para que valoren el trabajo que - le costado a la humanidad avanzar hasta las estructuras matemáticas que se les muestran , y al mismo tiempo ,es importante que observen que hay otras opciones para eva luar las funciones elementales, que no son tan laborio- sas y que les pueden ayudar a resolver sus problemas - cuando requieren hacer cálculos con estas funciones, si no disponen de computadoras o calculadoras científicas. Lo cual es usual en el bachillerato.

Los algoritmos Clásicos, desde luego, resultan útiles - para que el alumnado obtenga un grado cognoscitivo mas avanzado, pero no resultan prácticos para evaluar las funciones elementales cuando se requieren cálculos muy laboriosos. Para ello, se presentaron los algoritmos aritméticos, que aunque no son muy rápidos, son más sencillos de ejecutar que los clásicos y más eficientes;además, tienen la ventaja que están bién sustentados en una base matemática sólida, no solo los clásicos ; de comprender mas sencilos, puesto que no recurren a conocimientos muy avanzados.

Por último los algoritmos aritméticos pueden ser utilizados por estudiantes de Nivel Medio y Medio Superior , que no tengan conocimientos de Cálculo , y constituyen un medio introductorio , tanto a la Geometría Analítica como al Cálculo; y una herramienta para resolver problemas, cuyo planteo , involucra la evaluación de las funciones elementales.

Para finalizar, pueden enseñarse durante los cursos elementales de Algebra , para explicar a los alumnos como se calculan las funciones elementales.

# B I B L I O G R A F I A

BARRERA,S.P.; " Algoritmos Sencillos para la Evaluación de las Funciones Elementales"; Revista Matemática y ... algo más " ; Facultad de Ciencias, UNAM; ART. 4, págs. 47 a 74; México, C.U., 1991.

BOSH, G. y HERNANDEZ, O.; "Cálculo Diferencial e Integral"; Publicaciones Cultural; Capítulo 6, Función logarítmo natural, pás. 197 a 228; México, D.F.; 1992.

EDWARDS, C.H.; "The Historical Development of the Calculus"; Springer-Verlang New York Inc.; Capítulos 6 a 10; págs. 142 a 276; Universidad de Georgia, E.U.A.; 1979.

GUZMAN, H. A.; "Geometría y Trigonometría"; Publicaciones Cultural, S. A. de C.V. ; Tabla 4 , Valores de las Funciones Trigonométricas, págs. 185 a 189; México, D. F., 1979.

GOLDSTINE, H. H.; "A History of Numerical Analisis.From the 16th. thoug the 19th. Century"; Springer - Verlang New York Inc.; Capítulos I y II; págs. 1 a 117 ; E. U. A., 1977.

KEPLER, D. y RAMSEY, N.; "Curso Rápido de Cálculo Diferencial e Integral"; Apéndices A1, A3 y A8; Págs.: 267, 272 , 278; México, D.F.; 1982.

PHILLIPS,E.P. et. al.; "Algebra con Aplicaciones"; Editorial Harla ; Capítulo II, Series Aritméticas y Geométricas; págs. 649 a 660 ; Mexico, D. F.; 1988.

PULSKAMP,R.J. y DELANEY,J.A.; "Of Elementary Function" Dept. of Math. y Comp. Csience; Xavier University ; COMAP; Arlington, England, 1991.

SPIEGEL, M.R.; "Estadística y Probabilidad"; Schawms Series Outline, McGraw - Hill de México, S.A. de C.V.; Apéndice V; Logarítmos decimales con cuatro cifras; págs. 346 y 347. México, D.F. ; 1961.

SHIVELY, L. S.; "Introducción a la Geometría Moderna"; Cía Editorial Continental; Cap.II, Construcciones con regla y compás; págs. 148 y 151; México, D. F.; 1961.

ZUBIETA, R. F.; "Algebra Elemental"; Cap. XIII, Exponentes y Logaritmos"; págs. 225 a 242; 1966.

Wenzelburger, G.E.; Recopilación de Matemáticas III; Art.2;

ESTRADA, M. J. M.; uacpyp - CCH , UNAM y C. DE B. "Construcciones con regla y compás, una Introducción Histórica a la Geometría"; págs. 34 a 84; México, 1994.