UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESPACIO VECTORIAL EN ALGUNOS TEXTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ROSA MARÍA CHARGOY ESPÍNOLA

TUTOR
DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Agradezco a la

Universidad Nacional Autónoma de México

la oportunidad que me brindó de estudiar dentro de sus aulas,

a mis padres:

María de Jesús†

y

Anselmo†,

por el apoyo incondicional que siempre me brindaron.

I N D I C E

Introducción

RESUMEN

El objetivo en este trabajo es analizar cómo se presenta el concepto de espacio vectorial en algunos libros de texto. Empleamos como marco teórico para nuestra investigación los modos de pensamiento sintético y analítico Sierpinska, (2000).

Para tal fin iniciamos con una investigación sobre los antecedentes históricos del espacio vectorial. En primer lugar en los sistemas de ecuaciones lineales, en la geometría y por último en el establecimiento axiomático de los espacios vectoriales.

Con el propósito de tener más elementos para la investigación consideramos los antecedentes contemporáneos del álgebra lineal. Incluimos investigaciones sobre la esencia del álgebra lineal, sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la materia; investigaciones en el enfoque de los modos de pensamiento sintético y analítico y las investigaciones que hemos encontrado sobre el espacio vectorial.

Continuamos con un análisis sobre las diferentes formas de introducir el espacio vectorial en algunos textos. Insistimos en el espacio vectorial R^2, porque en éste los conceptos pueden escribirse mediante propiedades que son inherentes a él. Asimismo varios libros de texto emplean los espacios R^2 y R^3 como primer acercamiento a los espacios vectoriales.

Observamos que la noción de espacio vectorial se presenta en los libros privilegiando alguno de los modos de pensamiento sintético o analítico. De tal manera, que si se emplea uno de ellos para encontrar la solución a un problema sin usar el otro se puede tener un conocimiento parcial del concepto. Si se considera un análisis más del modo sintético, el conocimiento no estará estructurado. Si únicamente se desarrollan los conceptos en el modo estructural, puede suceder que se conozca la definición, sin embargo, no se ha entendido el concepto.

0.1 Antecedentes

El estudio del álgebra lineal es importante porque se requiere en la mayoría del currículum universitario. Hay quienes sugieren su estudio desde el bachillerato como temas selectos de álgebra lineal. Sin embargo, en la práctica docente los profesores observamos las grandes dificultades de los alumnos en los cursos de álgebra lineal, esto se hace patente en el alto índice de reprobación, así como en la deserción escolar.

Intentando buscar el origen de la problemática, iniciamos un estudio en la historia y epistemología del álgebra lineal, así como las investigaciones más recientes en el tema. Todos ellos nos conducen a detectar algunos de los problemas para el entendimiento del álgebra lineal.

Analizamos cómo el origen de la problemática se encuentra en diversas fuentes, por ejemplo: el lenguaje y la notación propia del álgebra lineal. Sin embargo, hay otras causas como el desconocimiento de conceptos previos por parte del estudiante, por ejemplo, de la teoría de los conjuntos o la lógica empleada en los razonamientos. Encontramos además de estas fuentes de dificultad otra, en la forma como usualmente acostumbran trabajar los estudiantes.

"¿Por qué los estudiantes tienen dificultad en el entendimiento de los conceptos del álgebra lineal?" Para contestar esta pregunta es necesario tomar en cuenta la gran cantidad de símbolos, definiciones, propiedades, otros conceptos y teoremas que un estudiante debe entender y requieren en algunos casos, un alto grado de abstracción, en otros de cálculo, además de razonamientos y de un lenguaje específico.

Respecto a los problemas del lenguaje, el alumno por una parte, necesita conciliar los lenguajes cotidianos con los empleados en el aprendizaje del álgebra lineal. Por otra parte, como Hillel y Sierpinska mencionan, hay una dificultad no tan evidente en relación con el lenguaje utilizado en la teoría de los espacios vectoriales, por los niveles de descripción. En el primer nivel, de los espacios R^2 y R^3, se emplean términos geométricos como ortogonalidad, líneas, planos, ecuaciones, etc.; en la teoría de los espacios R^n, n-adas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones, etc. y el lenguaje de la teoría más general de espacios vectoriales subespacios, dimensión, operadores, núcleo, etc.:

> *Los lenguajes de estos tres niveles de descripción coexisten, pero no son equivalentes. El constante intercambio entre ellos es una fuente de dificultad conceptual*” (Hillel & Sierpinska, 1994).

El proceso de generalización de un espacio geométrico como R^2 a un espacio R^n involucra modificar ideas. Por ejemplo, una base en R^2 puede verse como dos vectores no colineales, sin embargo, la idea geométrica no puede generalizarse a los espacios R^n, ni a los espacios más generales. Para generalizar las ideas del espacio geométrico al más abstracto, se requiere una reconstrucción del esquema mental; Tall se refiere a este proceso de generalización y abstracción como expansivo y reconstructivo. En Matemáticas se usan los términos generalización y abstracción para denotar procesos en los cuales los conceptos y el producto de esos procesos se ven en un contexto más amplio. Por ejemplo, cuando se generaliza la solución de una ecuación lineal en dos y tres dimensiones a n-dimensiones y se abstrae de este contexto la noción de espacio vectorial, en este caso se producen dos objetos mentales muy diferentes: la generalización a R^n y la abstracción a un espacio vectorial V sobre un campo F. Tall se expresa de la siguiente manera:

> “*Prácticamente los matemáticos a menudo ven un espacio vectorial como ambos procesos: una abstracción y una generalización de aspectos de espacio vectorial de dos dimensiones y entonces es importante usar el término de una manera que concuerde con el uso en matemáticas. Pero el educador matemático debe buscar el proceso cognitivo involucrado, y aquí vemos diferencias sutiles entre los dos ejemplos dados. La generalización R^n simplemente extiende la cadena de ideas desde R^1 a R^2 a R^3 y así sucesivamente, lo cual se describe aplicando procesos aritméticos usuales a cada coordenada. La abstracción a V es un objeto mental muy diferente, que se define por una lista de axiomas. Mientras que el primero simplemente involucra una extensión de procesos familiares, el último requiere una reorganización mental masiva*” (Tall, 1991).

Entonces, el entendimiento de los conceptos del álgebra lineal es difícil, porque requiere procesos mentales reorganizadores. En otro aspecto, para Dorier (1995b) los conceptos del álgebra lineal son difíciles de entender por su naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta y las teorías axiomáticas de espacios vectoriales no fueron creadas como otros elementos matemáticos, para resolver nuevos problemas. El objetivo principal fue encontrar un método general para resolver diferentes problemas con las mismas herramientas y generalizar y unificar los conceptos anteriores.

Respecto a los signos empleados en el álgebra lineal, se observa una problemática cuando el mismo símbolo puede representar diferentes elementos, por ejemplo, (1,0) puede representar diferentes vectores en diferentes bases, asimismo, un punto o un vector.

En álgebra lineal por un lado, los alumnos necesitan emplear conceptos de los que posiblemente no tienen fundamentos suficientemente sólidos. Por ejemplo, para el entendimiento de la base de un espacio vectorial, el concepto de independencia lineal implica el manejo de cuantificadores, de lógica y teoría de conjuntos. Por el otro, los estudiantes suelen emplear técnicas algebraicas al margen del álgebra lineal y así tratar los temas abstractos desarrollando un trabajo mecánico y algorítmico. Sobre el proceso de formalización Dorier se expresa en los siguientes términos:

> "*El álgebra lineal es el resultado de un proceso de formalización, que unifica y da resultados económicos y analogías de todos los problemas que revelan la linealidad. Para tener acceso a esas resoluciones, es necesario dominar un cierto grado de formalismo: el estudiante debe trabajar sobre las ecuaciones olvidando momentáneamente lo que representan pero saber regresar cuando es necesario, reemplazar las transformaciones explícitas por tablas de números, jugar con diferentes bases sin representación explícita, razonar sea sobre los vectores sea sobre sus coordenadas, sin confundirlos, etc. Para esto el estudiante también necesita trabajar con estructuras identificando lo que aporta la estructura dada: propiedades, restricciones. En particular debe establecer las igualdades de conjuntos, distinguir los objetos de sub-objetos, así como los morfismos y los subconjuntos que se les asocian*" (Dorier, 1997).

Del nivel de abstracción y el formalismo que deben alcanzar los estudiantes de álgebra lineal, Sierpinska (1999) nos dice que la queja más común de los estudiantes de licenciatura es que los cursos de álgebra lineal son más abstractos que cualquier otro que hayan visto en matemáticas. Por su parte los maestros de álgebra lineal se quejan porque los estudiantes trabajan a menudo en un nivel de formas de expresión, escribiendo proposiciones sin sentido y confundiendo categorías de los objetos.

Para facilitar su trabajo y evitar la abstracción, los maestros pueden emplear técnicas algorítmicas en lugar de hacer hincapié en los significados de los conceptos. A este respecto, en los libros de consulta empleados en el nivel medio superior, los autores usualmente privilegian los métodos de algoritmización (Eslava, 1999).

El nivel de abstracción y la formalización que requiere el estudio del álgebra lineal, añade a las dificultades ya mencionadas, el obstáculo del formalismo. Sobre este obstáculo Dorier expresa lo siguiente:

> *"Los conocimientos de los estudiantes pueden ser muy limitados para alcanzar la abstracción de los ejemplos que conocen, en particular, la estructura de espacio vectorial… Para una mayoría de estudiantes el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que no se llegan a representar; además son sumergidas en una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos*" (Dorier *et al*. 1997).

Considerando este panorama tan amplio, elegimos un tema central del álgebra lineal para nuestra investigación, el concepto de espacio vectorial. Analizar cómo se presenta la noción en los libros de texto de álgebra lineal.

0.2 Marco teórico

Para la investigación empleamos el marco teórico de los modos de pensamiento; éstos nacen en la historia. Según Sierpinska (2000) el modo sintético-geométrico surge primero y de manera subsiguiente el analítico-aritmético y el analítico-estructural. Sierpinska opina que estos modos de pensamiento se manifiestan en los estudiantes y menciona que en ellos aparecen de la misma manera. Sin embargo, estos pensamientos no se pueden separar y considerar aislados por lo cual es difícil distinguirlos; sobre los modos de pensamiento ella expresa lo siguiente:

> "*Se podría decir que el desarrollo del álgebra lineal es en cierto sentido el resultado de una tensión entre los modos de razonamiento. Para la enseñanza, la pregunta no es cuál modo de razonamiento vale más para fomentar en el estudiante, sino cómo llevar a los estudiantes al uso flexible y consciente de ellos. Más que ver los modos de razonamiento en el álgebra lineal como niveles en el desarrollo del pensamiento algebraico, es preferible verlos como modos de pensamiento igualmente útiles cada uno en su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando ellos interactúan*" (Sierpinska, 2000).

De esta manera, no se puede decir que un modo de pensamiento sea más relevante que el otro, ellos coexisten e interactúan en el álgebra lineal; en esta interacción estriba su importancia. Por lo cual es saludable fomentar un equilibrio dinámico entre los modos de pensamiento y evitar un desequilibrio entre ellos al enfatizar uno en detrimento del otro (*op. cit*.).

Los modos de pensamiento no se pueden aislar; no obstante, Sierpinska afirma que en álgebra lineal tienen un sistema específico de representaciones y lenguaje. El modo sintético-geométrico emplea el lenguaje de las figuras y representaciones gráficas; por ejemplo una recta puede verse como un objeto en el espacio. En el modo analítico-aritmético los objetos se dan indirectamente, se construyen por la definición de sus elementos. Las figuras se entienden como conjuntos de n-adas de números que satisfacen ciertas condiciones; por ejemplo, un sistema de ecuaciones se podría escribir con todos los coeficientes explícitamente. El pensamiento analítico-estructural sintetiza los elementos algebraicos de la representación analítica en elementos estructurales; por ejemplo, el sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial (*op. cit.*).

Hemos tomado el enfoque de los modos de pensamiento sintético y analítico para el análisis en nuestra investigación considerando, por un lado, la forma natural de surgir los conceptos del álgebra lineal y en particular el de espacio vectorial, y por el otro, como Sierpinska observa, los modos de razonamiento que se presentan en los estudiantes.

0.3 Definición de la problemática y los objetivos del trabajo

Nuestra investigación se centra en el espacio vectorial dado que este concepto es medular del álgebra lineal. Presentamos un análisis del concepto en algunos textos de álgebra lineal en el marco teórico de los modos de pensamiento sintético y analítico.

Sabemos que pasar de R^2 a R^3, de R^3 a R^n y de R^n a cualquier espacio vectorial puede ser fuente de dificultad, pues requiere del entendimiento de conceptos de naturaleza distinta. Asimismo hemos visto en varios libros de texto el empleo de los espacios R^2 y R^3 como ejemplos para un primer acercamiento a los espacios vectoriales. Nos preguntamos de qué manera puede ayudar este enfoque al estudiante.

Las fuentes de dificultad que se le presentan al estudiante para entender un espacio vectorial pueden ser diversas. Al respecto, caben algunas preguntas: ¿la intuición del modo sintético-geométrico y su lenguaje pueden ayudar al entendimiento de un espacio vectorial? ¿Si desarrolla un trabajo mecánico con el empleo del modo analítico-aritmético y el uso del modo analítico-estructural le puede resultar difícil?

Hemos observado una separación entre los enfoques sintético y analítico, que consideramos necesario franquear. Por ejemplo, cuando el estudiante trabaja sólo en el modo analítico, usualmente desarrolla algoritmos y en ocasiones llega a memorizarlos. Respecto al uso de algoritmos Carlson opina lo siguiente:

> *"Los estudiantes están familiarizados con algoritmos computacionales que son menos difíciles, no así con los conceptos para los que tienen poca experiencia, como el*

> *aprendizaje de ideas. Los estudiantes no tienen experiencia en usar, y mucho menos en determinar, diferentes algoritmos para trabajar con un concepto en diversos marcos"* (Carlson, 1997).

Es posible por un lado, que cuando un estudiante utiliza el modo sintético-geométrico adecuadamente, le ayude a generar una intuición y ésta a su vez le ayude a interpretar los resultados analíticos. Por otro lado su empleo exclusivo resultaría en un conocimiento no formal y lo puede llevar a concepciones erróneas.

A la fecha en las investigaciones sobre álgebra lineal, se abordan aspectos importantes como la historia, el currículum, propuestas metodológicas, la incorporación de la tecnología al aula; sin embargo, un análisis conceptual del espacio vectorial en textos de álgebra lineal, en los modos de pensamiento no lo hemos encontrado.

En los cursos de álgebra lineal usualmente se recurre a las representaciones geométricas de los vectores, sin embargo, no se puede asegurar que esta práctica sea efectiva. Creemos que debe cuidarse la profundización de los conceptos en el modo sintético-geométrico, relacionándolo con el analítico-aritmético y el analítico-estructural. De esta manera se pueden lograr interpretaciones coherentes de los conceptos por medio de las representaciones geométricas y la teoría formal. Además es importante dar tiempo al estudiante para madurar dichos conceptos.

La falta de madurez en algunos estudiantes de la licenciatura puede deberse a la creencia extendida en el medio escolar de que hacer matemáticas es trabajo mecánico y desarrollo de algoritmos (Alvarado, 1998). Estas ideas pueden surgir de la manera como se enseñan los cursos de matemáticas sin un enfoque conceptual, pues algunas veces, el estudiante no ve hacia dónde va y cuál es el propósito de todo el lenguaje desarrollado.

Para el entendimiento de los conceptos del álgebra lineal, el estudiante debe ir más allá del nivel de memorización y mecanización. Necesita estructurar sus ideas, desarrollar procesos teóricos y niveles de abstracción. El álgebra lineal requiere el nivel de formalización del conocimiento para su axiomatización. A este respecto Vergnaud afirma:

> "*Las ideas matemáticas crecen y cambian en un largo periodo de desarrollo cognitivo, a través de una variedad de situaciones y actividades, el conocimiento axiomático sólo puede ser el último estado de desarrollo del conocimiento del estudiante*" (Vergnaud, 1990).

0.4 Contenido de los Capítulos

En la primera parte del capítulo 1 presentamos un análisis histórico–epistemológico de un espacio vectorial, con el objetivo de entender la naturaleza del concepto por su origen tanto geométrico, como algebraico, así como por su ubicación dentro de la teoría generalizadora y unificadora de los espacios vectoriales. En la segunda parte de este capítulo incluimos una presentación sobre el origen de la teoría de los modos de pensamiento sintético y analítico.

En el capítulo dos resumimos investigaciones contemporáneas del álgebra lineal, algunas de las cuales atienden a aspectos teóricos y epistemológicos, y otras a la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. Asimismo mencionamos trabajos que se han realizado en el enfoque de los modos de pensamiento.

En el capítulo tres presentamos un análisis del concepto de espacio vectorial en algunos libros de texto de álgebra lineal. Investigamos la forma de introducir el concepto, así como el uso de los distintos modos de pensamiento. Pretendemos determinar ventajas y desventajas de cada enfoque.

En el capítulo cuatro presentamos nuestros comentarios finales y nos permitimos expresar algunas recomendaciones respecto al estudio del concepto de espacio vectorial, así como de los conceptos de independencia-dependencia lineal, generar vectores y base.

Por último tenemos la bibliografía.

1. Antecedentes Históricos del Concepto de Espacio Vectorial y los Modos de Pensamiento Sintético y Analítico

1.0 Introducción

Mediante un análisis histórico del álgebra lineal, podemos obtener información sobre cómo surgen los conceptos, cómo van evolucionando hasta llegar a su forma actual, en qué contexto tienen su origen, así como sus propiedades. Un análisis histórico-epistemológico, también nos da luz sobre la naturaleza de los conceptos, y de las dificultades intrínsecas que causan problemas a los estudiantes. La investigación histórico-epistemológica es de gran importancia para la didáctica porque puede aportar mayor claridad sobre el proceso de apropiación del concepto y los obstáculos que los estudiantes enfrentan para comprenderlo.

En este capítulo presentamos un estudio histórico-epistemológico centrado en el concepto un espacio vectorial. De esta manera, por un lado podemos comprender mejor la compleja naturaleza del concepto, por el otro, estudiar cómo surge en la historia y las fuentes que dan origen al concepto. Asimismo, este análisis nos proporciona información de las dificultades que se les presentan a los estudiantes para entenderlo. De manera general, Sierpinska expresa que estudiar la historia de las matemáticas puede ayudar en el diseño de la enseñanza para encontrar contextos significativos para la introducción de los conceptos:

> "*Si además el estudio de la historia es epistemológico, tiene interés de puntualizar sobre lo que se entiende por un concepto matemático, método o teoría y sobre la naturaleza de las dificultades de los estudiantes para entenderlo*" (Sierpinska, 1996a).

Del análisis histórico del álgebra lineal, Dorier nos dice que permite pensar más sobre la dificultad de los estudiantes para generar el formalismo, inherente a la presentación de la teoría de los espacios vectoriales y la función de éste en la comprensión y utilización de los conceptos del álgebra lineal. Sin embargo, no se trata de intentar reconstruir las condiciones históricas de la constitución de conceptos en la clase sino elaborar un dispositivo didáctico:

> *Se trata de apoyar en una reflexión epistemológica y didáctica englobando el conocimiento del contexto histórico y los contratos de la enseñanza* (Dorier, 1997).

Intentamos aclarar que el concepto de espacio vectorial que se estudia en una clase, es el resultado descontextualizado de su evolución histórica, pues al paso de los años, las nociones fundamentales de su origen, así como las razones de quienes lo crearon, no se dan a conocer. A este respecto Brousseau escribe:

> "*El productor de conocimiento despersonaliza, descontextualiza y atemporaliza lo más posible los resultados*" (Brousseau, 1986).

En búsqueda de mayor funcionalidad y aprendizaje de los estudiantes, el contenido de la teoría se modifica. Para el proceso enseñanza-aprendizaje, los contenidos de la teoría que se va a enseñar se adecuan en los diferentes momentos de su aplicación a la enseñanza. En el caso del espacio vectorial, tratando de simplificar el concepto, a veces se le presenta como una simple generalización en el proceso de enseñanza, trabajándolo superficialmente; así, en ocasiones se puede crear una dificultad para su entendimiento. De las transformaciones y arreglos que se hacen del objeto de enseñanza, Chevallard expresa:

> "*Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas para hacerlo apto, para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo de transformar un objeto de saber a enseñar, en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica*" (Chevallard, 1991 p. 45).

1.1 Análisis Histórico-Epistemológico del concepto de espacio vectorial

En esta sección presentamos un análisis histórico-epistemológico del álgebra lineal, enfocado al espacio vectorial. Para nuestro estudio, definimos en primer lugar, el sentido del término epistemología, debido a que este concepto ha evolucionado con el paso del tiempo y tiene varias acepciones. De forma sucinta y sin pretender definir, entendemos por epistemología del álgebra lineal un estudio crítico de sus principios, hipótesis y resultados. Así, nos proponemos un estudio histórico-epistemológico, en el sentido de G. Canguilhem:

> "*La historia de una ciencia no es una simple colección de biografías, ni una relación cronológica de hechos y anécdotas. Debe ser una historia de la formación, de la deformación y de la rectificación de conceptos científicos. No se trata de una descripción de hechos, sino de una investigación coherente interna a través de diferentes problemas y conceptos que dan sentido a una ciencia. Así la historia de una ciencia es inseparable de un cuestionamiento epistemológico que puede ser una parte más o menos importante de análisis*" (Canguilhem, 1968 referenciado en Dorier, 2000).

Con este punto de vista, iniciamos un estudio histórico-epistemológico, tratando de descubrir posibles condiciones en que emerge el concepto de espacio vectorial: observando por un lado, los errores, las rutas falsas, diversos obstáculos que en un momento evitaron o retrasaron su aparición, por el otro, intuiciones, ensayos y titubeos, que se presentaron para dar lugar al nacimiento del concepto. Nos interesamos además, en comprender relaciones entre las esferas de la organización del conocimiento y la enseñanza-aprendizaje. Es decir, un estudio epistemológico relativo a la evolución del concepto de espacio vectorial, considerando la forma como se estructuró y como se ha llevado a las aulas a partir de los primeros textos.

Para iniciar el estudio histórico-epistemológico, puntualizamos el álgebra lineal como la ciencia objeto de nuestra investigación y consideramos en particular el concepto de espacio vectorial. La noción tiene su origen en diversas fuentes: En los sistemas de ecuaciones lineales, en la evolución del vector en la geometría a espacio vectorial, en la teoría de la extensión de H. Grassmann y finalmente en la axiomatización de la teoría. Como punto de partida presentamos un análisis en los sistemas de ecuaciones lineales. Realizamos este análisis en cuatro etapas: La primera a partir del estudio sistemático de los sistemas de ecuaciones lineales con los trabajos de Leibniz; la segunda etapa cuando Euler empieza a tratar los sistemas de ecuaciones lineales que no tienen solución única; la tercera simultánea a la segunda, con los trabajos de Cramer en el enfoque de la teoría de los determinantes; y la cuarta etapa con las investigaciones de Frobenius, que conducen a la definición de la base de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

1.1.1 ORIGEN DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Algunos historiadores de la matemática consideran el punto de partida del origen del álgebra, en la escuela de Alejandría, cuando Diofanto (ca. 250 D. C.) formuló los problemas de la aritmética en términos simbólicos (Boyer, 1956 p. 35).

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron estudiados desde la antigüedad; sin embargo, en su análisis sólo se consideraban algunas soluciones numéricas. Cuando el álgebra se constituyó como disciplina independiente, el tema central y único para los sistemas de ecuaciones lineales, fue encontrar su solución.

Inicialmente, los sistemas contenían tantas incógnitas como ecuaciones y en la mayoría de los casos estudiados las ecuaciones eran linealmente independientes. En ese período sólo se trató la resolución de ecuaciones particulares por tanteos sucesivos; el método aplicado fue puramente empírico y cada ecuación fue objeto de un tratamiento particular. En el siglo

XVIII comenzó plenamente la búsqueda de métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y el planteamiento de problemas generales tales como la existencia o no-existencia de soluciones (Dorier, 1990).

A continuación detallamos las cuatro etapas arriba mencionadas.

Primera etapa. Consideramos la primera etapa, cuando Leibniz desarrolló un método de eliminación de incógnitas que involucraba un “determinante” y aparecieron nuevas formas de notación, para dar comienzo al estudio sistemático de los sistemas de ecuaciones lineales. Leibniz dirigió una carta al Marqués de L’Hospital en 1693; en ella escribió un conjunto de ecuaciones simultáneas usando números para indicar renglones y columnas (sistema no homogéneo de tres ecuaciones con dos incógnitas). Anticipándose al empleo de los determinantes, escribe un arreglo de 3x3 elementos y explica su interpretación de los índices y cómo elimina las incógnitas (Cajori, 1929 p. 87).

El algoritmo para la construcción de ese determinante fue dado por Leibniz de manera confusa y la condición de anulación del determinante y la regla de los signos no es clara. Se especula que el método para la solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes, de dos, tres y 4 incógnitas fue creado por Maclaurin, probablemente en 1729, y publicado en su obra póstuma *Tratado de Álgebra*, 1748, (Dorier, 1990).

Segunda etapa. Una segunda etapa comenzó hacia 1750, con las investigaciones de Euler sobre la paradoja de Cramer. En estos estudios vislumbramos que se abre una brecha al modo de pensamiento analítico-estructural, cuando Euler en su texto titulado: *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*, estableció la confrontación de dos resultados que se tenían por ciertos en esa época, a saber:

> *1) Dos curvas algebraicas distintas de orden m y n se cortan en tantos puntos como el producto de sus órdenes mn. Se sabía que algunos podían ser múltiples, complejos o infinitos, sin embargo, también se conocían ejemplos para los cuales estos puntos eran todos simples y reales.*
> *2) Para determinar una curva algebraica de orden n son necesarios y suficientes n(n+3)/2 puntos. Es decir, que una curva de orden n queda determinada de manera única por n(n+3)/2 puntos* (Dorier, 1997).

La paradoja aparece para $n \geq 3$; en este caso $n^2 \geq n(n+3)/2$. Por ejemplo, si dos curvas de grado tres, se cortan en 9 puntos, entonces se tienen dos curvas definidas para esos 9 puntos. Por lo tanto, una curva no está definida de manera única por los 9 puntos como expresa el segundo resultado.

Euler identificó la naturaleza del problema explicando: la proposición 2 puede no ser cierta; n ecuaciones pueden no ser suficientes para determinar n valores (Dorier, 1995a). Para aclarar este hecho, consideró sistemas de *n* ecuaciones lineales en *n* incógnitas, sin solución única. Euler trabajó con dos, tres y 4 ecuaciones con dos, tres y 4 incógnitas. Comenzó por analizar el problema para *n=2*, y como ejemplo propuso dos ecuaciones:

1) $3x - 2y = 5$
2) $4y = 6x - 10$

Euler expresó: es un "incidente" que las dos ecuaciones sean iguales. Para *n=3*, dos ecuaciones pueden ser idénticas y la tercera el doble de la suma de las otras. Concluyó: para determinar las tres incógnitas es suficiente tener tres ecuaciones y falta aclarar si realmente las tres ecuaciones difieren entre ellas, o si ninguna está incluida o comprendida en las otras (*op. cit.*).

Para *n=4*, Euler escribió: en ciertos casos dos incógnitas pueden quedar indeterminadas y consideró el siguiente ejemplo:

1) $5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$
2) $2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$
3) $x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$
4) $3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$ (*op. cit.*)

De estas ecuaciones sólo valdrán dos, despejando *x* y *y*, las otras cantidades *z* y *v* quedan indeterminadas. Euler por eliminación y substitución, obtuvo las expresiones para x y y:

$$x=-23z+33v+212 / 29 \quad y=33z-36v-52 / 29$$

Después de estos ejemplos, Euler concluyó con un enunciado general:

> "*Cuando uno dice que para determinar n cantidades desconocidas, es suficiente tener en n ecuaciones sus relaciones mutuas, debe agregarse la restricción de que todas las ecuaciones sean diferentes entre sí, o que ninguna esté "encerrada" en las otras*" (Euler referenciado en Dorier, 1995a).

Para Euler es un accidente cuando ciertas incógnitas quedan indeterminadas y una ecuación implicada por (encerrada o comprendida en) otra, es decir, las ecuaciones no difieren realmente. Esta dependencia de las ecuaciones no es explícitamente dependencia lineal;

Dorier la llama dependencia inclusiva (Dorier, 1996). Actualmente vemos una relación lineal entre las ecuaciones. Lo que Euler expresa en lenguaje intuitivo como una ecuación comprendida o encerrada, ahora lo podemos entender en términos del concepto de "dependencia lineal" y cuando se refiere a la indeterminación de las dos variables, podemos pensar en el origen del concepto de rango de manera intuitiva. Este enfoque para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales no se continuó. Simultáneamente a los trabajos de Euler, apareció el trabajo de Cramer como vemos en el siguiente apartado.

Tercera etapa. Consideramos una tercera etapa contemporánea a la de Euler, con los trabajos de Cramer. En el año de 1750, Cramer publicó su obra *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques*. En ella se encuentra una de las primeras notaciones que permite escribir un sistema de ecuaciones lineales donde los coeficientes se relacionan a cada variable y a cada ecuación del sistema. Cramer introdujo los primeros cálculos de determinantes para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuadrado. Este inicio de la teoría de determinantes sería el marco de estudio de los sistemas de ecuaciones lineales por mucho tiempo (Dorier, 1991).

Los determinantes indudablemente representan una herramienta para la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, generan gran complejidad respecto a las técnicas en su empleo y encubren ciertos aspectos intuitivos en la naturaleza de las ecuaciones lineales; esto marca una diferencia entre este enfoque y el de Euler. Al estudiar los sistemas de ecuaciones lineales con la teoría de los determinantes, las ideas de Euler no florecieron, se postergaron prácticamente por un siglo y las cuestiones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales indeterminados e inconsistentes fueron relegadas.

Hacia la segunda mitad del siglo XIX, aproximadamente de 1840 a 1879, se desarrolló de manera significativa el estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones lineales. Dentro del marco de la teoría de determinantes, aparecieron los primeros conceptos de rango y dualidad. En esta etapa las investigaciones requerían de herramientas más sofisticadas, y para su uso se necesitaba más técnica (Dorier, 1995a). En este período se establecieron los siguientes resultados sobre la dependencia (inclusiva) de las ecuaciones y ganó importancia el máximo menor diferente de cero del arreglo de los coeficientes:

> *Un sistema de n+1 ecuaciones lineales homogéneas en n incógnitas tiene una solución no cero formada por los n, (nxn) menores extraídos del arreglo de los coeficientes de las primeras n ecuaciones.*
> *La dependencia de ecuaciones era interpretada desde el punto de vista inclusivo, sin embargo, fue asociada con el valor cero de los determinantes más grandes extraídos del arreglo de los coeficientes. En este marco el máximo menor no cero del arreglo de los coeficientes apareció como el objeto central de estudio* (Dorier, 1996).

Cuarta etapa. Necesitamos considerar una cuarta etapa para el desarrollo de la noción de un espacio vectorial. Hacia 1875 George Frobenius introdujo un cambio muy importante de enfoque en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. En un texto titulado *Über das Pfaffsche Problem*, definió en términos modernos las nociones de dependencia e independencia lineal, sin el uso de los determinantes, al incluir explícitamente el concepto de dependencia lineal para ecuaciones. Demuestra que la dependencia lineal de las ecuaciones es equivalente a la dependencia inclusiva. Introduce la dependencia lineal de las n-adas y establece la equivalencia con la dependencia de las ecuaciones cuyos coeficientes son las componentes de las n-adas (Dorier, 1996).

Esta presentación estableció las bases para el uso de la dualidad. Frobenius trató los dos objetos, n-adas y ecuaciones, como dos versiones de un mismo concepto, de esta manera dio un paso decisivo hacia la noción moderna de vector:

> *Varias soluciones particulares $A_1^{(x)}$, $A_2^{(x)}$, ..., $A_n^{(x)}$, (x = 1,...,k) se dicen independientes o diferentes cuando $c_1A_\alpha^{(x)} + c_2A_\alpha^{(x)} + ...+ c_nA_\alpha^{(x)}$, no pueden ser cero para α = 1,..., n, sin que las c_1, ..., c_k sean todas cero, en otras palabras, cuando las k formas lineales $A_1^{(k)}u_1 + A_2^{(k)}u_2 +, ..., + A_n^{(k)}u_n$, son independientes* (Frobenius, 1875 referenciado en Dorier, 1995a).

Frobenius definió la base de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales e introdujo la noción de sistema asociado o adjunto: Dado un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, se llamará asociado un sistema homogéneo, si los coeficientes de sus ecuaciones constituyen una base de soluciones del sistema inicial (Dorier, 1995a).

Gracias a esta herramienta, Frobenius estableció la noción de dualidad al considerar n-adas y ecuaciones, objetos semejantes al verlos desde dos ángulos: Muestra que el máximo orden de un menor no nulo (para un sistema de ecuaciones cualesquiera) es un invariante del sistema y también del conjunto de soluciones; todo sistema con el mismo conjunto de soluciones tiene el mismo orden, el orden del máximo menor no nulo. Este número igualmente permite medir el número del conjunto de soluciones y el número máximo de ecuaciones linealmente independientes (*op. cit*.).

Frobenius en el texto de 1879, llamó Rango del Determinante, al valor de m cuando en un determinante todos los menores de orden ($m+1$) se anulan, pero aquellos de orden m no son todos nulos. Demostró que si m es el orden del menor más grande no nulo, cualesquiera m soluciones independientes permiten generar todas las soluciones del sistema. El término de rango está ligado a la teoría de los determinantes, tanto en la definición como en la demostración. En la publicación de 1905 Frobenius estructuró los resultados teóricos sobre el estudio de las ecuaciones lineales y puede considerarse que el concepto de rango alcanza su madurez en la teoría de los determinantes (*op. cit.*).

Continuando con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, entre 1886 y 1891, A. Capelli y G. Gabrieri demostraron los siguientes resultados para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

> *1º Cualquier sistema lineal de rango r es equivalente a uno triangular de r ecuaciones.*
> *2º El rango r de una matriz es igual en las columnas que en los renglones.*
> *3º Un sistema de ecuaciones es consistente si y sólo si el rango del arreglo de coeficientes es el mismo que el rango del arreglo aumentado por los términos constantes.* (*Op. cit.*)

El espacio vectorial en los sistemas de ecuaciones lineales

En el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, se manifiestan los primeros brotes del concepto de espacio vectorial: La dependencia inclusiva, como la llama Dorier y el rango. Las nociones emergen progresivamente dentro del marco de la teoría de los determinantes y la dualidad juega un papel fundamental para organizar y enfatizar sobre las soluciones linealmente independientes de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales y para relacionar los aspectos que se presentan naturalmente: La dependencia en las ecuaciones y generación en el conjunto de soluciones.

En el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, en los trabajos de Euler vemos surgir el concepto de dependencia lineal. Frobenius da significado a la independencia lineal cuando introduce la dualidad n-adas/sistemas de ecuaciones lineales; define base de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, y posteriormente un espacio vectorial.

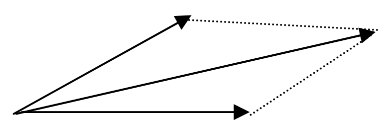
1.1.2 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL VECTOR EN LA GEOMETRÍA

En esta sección consideramos la evolución histórica de los conceptos de vector y espacio vectorial en la geometría. Para este fin, consideramos 5 etapas en nuestro análisis. En la primera etapa analizamos el papel desempeñado por el paralelogramo de suma de fuerzas en la historia; en la segunda consideramos la propuesta de Leibniz para la creación de una Geometría de Situación o intrínseca. En la tercera etapa recopilamos investigaciones que condujeron a la representación geométrica de los números complejos. En la cuarta etapa presentamos la transición de número complejo al concepto de vector y en la quinta el proceso de generalización del vector geométrico de R^2 a R^3 y al vector analítico en R^n.

a) Concepto del paralelogramo de fuerzas

Una idea fundamental en la primera etapa del análisis vectorial es la suma de vectores en la física (figura 1). Algunas cantidades como velocidades y fuerzas se suman de la misma forma, es una correspondencia para proporcionar utilidad al análisis vectorial. La idea del paralelogramo de velocidades o fuerzas se conoce desde la más remota antigüedad; no obstante, era el medio práctico de representar la resultante de dos fuerzas y no de simbolizar una suma de dos vectores geométricos en el sentido algebraico del término. Históricamente el acercamiento entre álgebra y geometría, respecto al álgebra lineal, comienza en los orígenes de la geometría analítica (Dorier, 1997).

Figura 1



La idea del paralelogramo de velocidades origina un mito sobre las relaciones entre la geometría y el álgebra lineal, proveniente del vocabulario común a los dos dominios: La palabra vector es para algunos un símbolo del origen geométrico del álgebra lineal, sin embargo, éste representaba simplemente suma de velocidades o de fuerzas. A pesar de que la sola idea del paralelogramo de fuerzas no pudo provocar directamente la creación de un sistema vectorial, su influencia fue indirecta pero importante, porque fue el primero y más obvio de los ejemplos en los cuales los métodos vectoriales podían ayudar a la física (Crowe, 1967 p. 2).

b) Propuesta de Leibniz para la creación de una Geometría de Situación (Situs).

Con los métodos analíticos introducidos por Descartes y Fermat en geometría, la linealidad fue un punto de partida o una cuestión central en muchos problemas: Como consecuencia de la aritmetización de la geometría, Leibniz planteó la posibilidad de crear una geometría de situación, un sistema que pudiera servir como método directo de análisis espacial. La idea de Leibniz de crear una Geometría de Situación, fue un factor decisivo para el desarrollo de sistemas empleando métodos de análisis espacial y dio origen a los espacios vectoriales. En 1679 Leibniz expresó en una carta, la idea que el álgebra no proporcionaba los métodos más cortos o las más hermosas construcciones en geometría:

> *Creo que en lo que concierne a la geometría necesitamos otro análisis que sea esencialmente geométrico o lineal y que exprese la situación (situs) directamente, así como el álgebra expresa magnitudes directamente. Creo que he encontrado la forma y que puedo representar figuras y aun máquinas y movimientos por características; como el álgebra representa números y magnitudes.*
> *He descubierto ciertos elementos de nuevas características enteramente diferentes del álgebra lo cual será una gran ventaja en la representación mental exactamente y en una forma confiable en su naturaleza aunque sin figuras, todo depende de la percepción de los sentidos. El álgebra es la característica para números o magnitudes solamente, sin embargo, no expresa situaciones, ángulos y movimiento directamente. Por lo cual a menudo es difícil analizar las propiedades de una figura por cálculos y aún más difícil encontrar demostraciones geométricas y construcciones aún cuando se hayan hecho todos los cálculos algebraicos...* (*op. cit*. p. 3).

Leibniz sugirió una nueva álgebra, donde las cantidades geométricas se muestran simbólicamente y los símbolos esperados se representan directamente. Sin embargo, falló en obtener un sistema de elementos geométricos que pudieran sumarse, restarse y multiplicarse; también al conceptuar por ejemplo, AB y BA (-AB), como entidades diferentes. A la dirección de un segmento Leibniz no le dio significado, esto lo hace parcialmente iniciador del concepto de vector (*op. cit*. p. 4).

La propuesta de Leibniz se retrasó hasta el año de 1833, cuando la carta fue publicada. La idea de crear una Geometría de Situación o un cálculo geométrico intrínseco, tuvo respuesta a partir de esta fecha cuando se divulgó el escrito. En ese tiempo, algunas investigaciones habían avanzado sobre la posibilidad de representar geométricamente cantidades imaginarias; de manera independiente varios matemáticos habían trabajado en este sentido (*op. cit*. p. 5). A continuación analizamos algunas de estas investigaciones.

c) Representación geométrica de los números complejos.

Es importante exponer la historia de la representación geométrica de los números complejos, porque además de considerarse un sistema vectorial, Hamilton en el curso de su investigación, descubrió los cuaternios al tratar de obtener un sistema análogo a los números complejos en dimensión 3.

Wessel (1745-1818) en su publicación titulada *Om Directionens Analytiske Betegning* (1799), pensó esencialmente los números complejos $a+bi$, como puntos con coordenadas (a,b), donde los números reales a y b, se grafican sobre los ejes real e imaginario respectivamente. Definió las cuatro operaciones con complejos en términos prácticamente geométricos como se estudian en la actualidad. Desgraciadamente, la publicación de Wessel fue considerada solo después de traducirse al francés en 1897. En 1806, Argand y el abad Buée publicaron independientemente tratados sobre la representación de los números complejos. En 1828 se dio la misma coincidencia: Mourey y John Warren trataron los números imaginarios. Con el trabajo de Carl F. Gauss publicado en 1831, la representación de los números complejos fue aceptada y utilizada por los matemáticos. Gauss representó $a+bi$ como un punto (no como un vector) en el plano complejo; también describió la suma geométrica y la multiplicación. La publicación de Gauss fue la más corta y precisa y la que tuvo mayor influencia de estas representaciones independientes (*op. cit*. p. 11).
En 1833, Hamilton expuso sus ideas sobre los números complejos, como parejas ordenadas de números reales (a,b). Definió las operaciones entre ellos en términos de las reglas de operación de números reales, y demostró la equivalencia de las parejas y los complejos de la forma $a+bi$ (*op. cit*. p. 25).

d) Transición de número complejo al concepto de vector

Möbius en su memoria Der *Barycentrische Calcul* (1827), empleó vectores en lugar de los puntos del espacio geométrico, posicionó los puntos y les asoció magnitudes. Al principio subrayó el interés de distinguir las características de orientación y de dirección en diversas magnitudes geométricas; introdujo las ideas, tanto de segmento orientado (vector geométrico), como las de triángulo y pirámides orientadas. No obstante, definió la suma de dos segmentos orientados sólo en el caso de ser colineales. En 1843, generalizó la adición a segmentos cualesquiera en el trabajo *Elemente der Mechanik des Himmels*, realizando así, la primera presentación de la estructura lineal de vectores del espacio geométrico. Finalmente, en 1887, Möbius en la obra *Üeber Geometrische Addition und Multiplication,* definió la adición de segmentos no colineales, su multiplicación por cualquier número y dos clases de producto de segmentos de línea obteniendo un álgebra de puntos. Sin embargo, su intención no era presentar una estructura algebraica, él dirigía sus trabajos hacia las necesidades de un método práctico y eficiente para resolver problemas geométricos y físicos. Aunque Möbius puntualizó algunos aspectos de la geometría vectorial, su teoría se basó en la percepción física del espacio, así que no podía ofrecer la posibilidad de extensión a un concepto más general de espacio vectorial (Crowe, 1967 pp. 48-52).

Por su parte Bellavitis, en 1835, publicó sus resultados en la obra *Calcolo delle Equipollenze* (equivalencias). Definió la primera noción de vector geométrico, como clase de equivalencias de bipuntos, así como el principio de la adición para las clases y su multiplicación por un escalar. Enseguida introdujo la multiplicación de dos vectores coplanares, inspirándose en la memoria del abad Buée, sobre la representación geométrica de números complejos. Bellavitis ilustró su método en la solución de problemas de geometría y de física. Aunque su cálculo sólo aporta la representación geométrica de los complejos, lo novedoso y original de su trabajo se debe al hecho de utilizar elementos puramente geométricos (*op. cit.* pp. 52-54).

e) Generalización del concepto de vector tridimensional a n-dimensional

En la evolución de número complejo a vector geométrico, cuando las investigaciones trataban de describir analíticamente problemas, considerando cuerpos bajo la acción de fuerzas en el espacio y sus soluciones, se propició la generalización de los números complejos a tres dimensiones. En 1843, Hamilton obtuvo cantidades en cuatro dimensiones llamadas cuaternios; este ejemplo es significativo por ser la primera estructura algebraica cuya multiplicación no es conmutativa ni asociativa. Para nuestro estudio, la importancia reside en que los cuaternios representan el primer intento para generalizar los vectores a tres dimensiones. Hamilton trató los cuaternios como vectores, demostró esencialmente que forman un espacio vectorial lineal sobre el campo de los números reales y empezó a trabajar con las n-adas, o hiperplanos (*op. cit.* pp. 30-32).

En 1845, Arthur Cayley generalizó los cuaternios e introdujo los elementos unidad 1, e_1, e_2,..., e_7, junto con las operaciones algebraicas. Para considerar sus productos, definió los octonios como $x=x_0+x_1e_1+x_2e_2$ +,...,$+x_7e_7$, donde x_i es un número real; definió $N(x) = ((x_1)^2+...+x_7)^2)^{½}$ como la norma. Cayley buscaba la generalización del espacio geométrico a dimensiones mayores de tres, como era la tendencia total en los métodos modernos. En 1848, Cayley recopiló todos los resultados descubiertos en las dos décadas precedentes, y los publicó en un reporte detallado y cuidadosamente organizado: "*A Memoir on the Theory of Matrices*" (op. cit. pp. 211-213).

Los espacios geométricos

El origen geométrico de un espacio vectorial se remonta a la antigüedad con el paralelogramo de fuerzas, pasando a la aritmetización de la geometría, con la creación de la geometría analítica, y después al intentar sacar el álgebra de la geometría, es decir, la desaritmetización de la geometría. Vemos en este largo camino de la historia, el juego entre la geometría sintética y el álgebra: El empleo de coordenadas en la geometría analítica, y posteriormente la llegada al número complejo $a+bi$ como un punto en el plano complejo. Podemos pensar que en esta etapa los vectores y la base de un espacio vectorial nacen en los números (1+0i) y (0+i) que generan el plano complejo.

Las investigaciones generalizaron las características de orientación y dirección de los segmentos, así como las operaciones algebraicas entre ellos, del espacio geométrico del plano, al espacio geométrico de dimensión 3. Sin embargo, la percepción física del espacio no hacía posible la extensión a un concepto más general de espacio vectorial.

Una vez que se establece el vector geométrico como una clase de equivalencia con los trabajos de Hamilton y Cayley, el panorama se abre a la concepción de los espacios aritméticos de dimensión n-R^n y finalmente se tienen los elementos para definir un espacio vectorial.

De esta manera, por un lado el origen de un espacio vectorial, si bien es cierto se puede considerar en el modo sintético, por el lenguaje y la representación gráfica con el paralelogramo de fuerzas, la construcción de los espacios vectoriales a partir de los números complejos es en el modo analítico-aritmético.

1.1.2.1 EL ESPACIO VECTORIAL EN LA TEORÍA DE LA EXTENSIÓN DE H. G. GRASSMANN

Debido a la importancia de la obra de Hermann Günter Grassmann: *Teoría de la Extensión y Filosofía de la Ciencia*, hemos dedicado esta sección para su análisis. Intentamos extraer las nociones fundamentales y pensarlas como la piedra angular de su teoría. Estudiamos las ideas donde surge el vector y espacio vectorial. La Teoría de la Extensión no fue entendida por la comunidad matemática de su época, y no se le dio seguimiento; sin embargo, Peano desarrolló un análisis de ella que condujo a la definición de espacio vectorial. A continuación describimos someramente las obras de Grassmann.

Grassmann inició sus investigaciones sobre un análisis espacial en 1832, al percatarse de que dos segmentos se pueden sumar y restar formalmente, aun cuando no estén en la misma recta. Al considerar la dirección y sentido de los segmentos obtiene la ecuación AB + BC = AC, no sólo cuando AB y BC tienen igual sentido, sino sentido contrario y también si A, B y C no están alineados. Estas ideas las expuso en su trabajo sobre mareas: Theorie der Ebbe and Flat. En 1833, cuando se dio a conocer la propuesta de Leibniz de crear un cálculo geométrico intrínseco, la Sociedad Matemática Alemana, Jablonowski Gesellschaft, ofreció un premio por el desarrollo propuesto. Grassmann entró al concurso ganando el premio, sin embargo, él ya había creado su sistema antes de oír las ideas de Leibniz (Crowe, 1967 pp. 54-56).

En 1844, Grassmann publicó *Die Lineale Ausdehnungslehre*, La Teoría de la Extensión; una obra fuertemente influenciada por su filosofía. En la introducción, la filosofía fue una barrera que muchos matemáticos de su tiempo no pudieron superar. Grassmann creía haber descubierto un sistema puramente formal e independiente de la geometría; efectivamente era una teoría autónoma de todas las matemáticas conocidas en ese tiempo; una estructura de álgebra universal, en la cual los elementos no tenían necesariamente un contenido real, sino podían tomar un significante contenido geométrico cuando fuera deseado (*op. cit*. pp. 63-66).

La Teoría de la Extensión no sólo es una obra sorprendente por lo abstracta y general, sino por la dificultad y complejidad para leerla. De esta manera, *Die Lineale Ausdehnungslehre* recibió la indiferencia y ciertos ataques de la comunidad matemática de su época. En 1862, Grassmann escribió la segunda versión de su teoría; empleó el estilo de la redacción de acuerdo a la tradición Euclidiana, incluyó en ella nuevos resultados y borró tanto el fundamento filosófico como las aplicaciones de la física (*op. cit*. pp. 89-90).

Entonces la idea de evitar el álgebra en las construcciones geométricas, paradójicamente dio como resultado la Teoría de la Extensión, en palabras de Dorier, un sistema algebraico generalizador y unificador de conceptos: el álgebra lineal. A continuación analizamos la teoría *Die Lineale Ausdehnungslehre*; consideramos en primer término la versión de 1844 y posteriormente la de 1862. Tomamos las citas de la versión de 1844 de la traducción de 1947.

En la primera versión, Grassmann se basa en una intuición geométrica y una posición formalista; la teoría se distingue por la forma de construir los conceptos y por la explotación de principios muy simples que lo llevaron a una teoría general; podemos comprender lo peculiar de su obra sólo a través de su posición filosófica y epistemológica. En la introducción y a lo largo del trabajo expone su enfoque, estructurando así su presentación. Grassmann (traducción 1947, p. 11) propone una teoría general, una nueva disciplina matemática no situada en el campo de la geometría, sino que en la geometría tiene una aplicación, y con este método podía llegar a resultados generales.

Grassmann establece las matemáticas como la teoría de formas y la geometría respecto a las matemáticas depende de cómo la intuición del espacio se relaciona con el pensamiento puro.

Grassmann define las entidades de acuerdo a las propiedades de sus operaciones; éstas son creadas a través de una evolución o de variación. Tanto en forma general, como en la geometría introduce la noción de magnitud extensiva (elemento variable) o generador del sistema de la magnitud extensiva; la forma[1] extensiva o conjunto generado es el conjunto de todos los elementos que coinciden con el elemento generador, durante la variación continua de éste. En la teoría del espacio, el punto es un elemento, una variación continua de éste es el desplazamiento o movimiento; el segmento es una extensión simple, la recta infinita corresponde al sistema, de tal forma que podríamos establecer la siguiente relación con los conceptos actuales:

Magnitud extensiva (variable) ↔ Vector (generador)
Forma extensiva (conjunto generado) ↔ Espacio vectorial (generado)
Segmento (elemento geométrico) ↔ Vector (generador)

Grassmann genera las formas extensivas de 1°, 2°, 3^er grado, etc. En la geometría genera un sistema de primer grado (la recta) por la acción continua de la misma variación fundamental; una variación aplicada a los elementos del sistema de primer grado generará un sistema de segundo grado (el plano); al agregar una dirección independiente a un sistema de segundo grado obtiene el espacio. De acuerdo con Grassmann, en la teoría de la extensión se puede seguir así sucesivamente hasta el infinito (*op. cit*. p. 30).

Grassmann establece las clases de equivalencia de los vectores para definir el concepto de espacio vectorial, tanto en el caso particular de los vectores geométricos, como en el más

1 Platón, al darse cuenta de la relativa permanencia de las cosas y de cómo la gente distingue, por lo general, entre una mera apariencia y lo real, concibió la realidad absoluta formada por Formas o Ideas independientes de la percepción sensorial y absolutamente permanentes, extratemporales, eternas (Filloy, 1998 p. 54).

general de la teoría de formas. Construye los espacios vectoriales geométricos, paso a paso, con direcciones independientes (escalón independiente), los llama sistemas de primero, segundo y tercer grado. Sin embargo, la teoría de la extensión le permite seguir aumentando una cantidad infinita de direcciones independientes, de esta manera relaciona los conceptos de generación, independencia y dimensión. Considera métodos fundamentales de variación de manera independiente, esto es, que ninguno está incluido en un sistema generado por alguno de los otros, y así, *n* cambios se encuentran privilegiados. En esencia, generación e independencia lineal se encuentran asociados con los fundamentos mismos de la teoría de la extensión, y en el sistema ellos y la dimensión se presentan como un aspecto natural.
Cuando Grassmann dice: "Un sistema de orden m se genera por m métodos de cambio que le pertenecen y son mutuamente independientes", tiene la noción equivalente al concepto de base. Asigna al valor m un significado cercano al concepto de dimensión; aunque no explica que m sea el mínimo número de los métodos de evolución o cambios que requiere el sistema, se infiere cuando menciona: si un sistema se genera por m modos de variar cualesquiera, puede reemplazar cualquiera de ellos por un nuevo modo de variación (p) que pertenece al mismo sistema de orden m e independiente de los restantes (m-1), y usando éste en combinación con los otros (m-1), generan el sistema dado. Para probar el resultado anterior, Grassmann emplea un método de paso a paso, demostrando que un modo de evolución puede reemplazarse por otro independiente de los restantes. Este método es conocido como el **método del cambio**:

> *Si el sistema se genera por ciertas m maneras de variar, se puede, para generar el sistema, reemplazar una cualquiera de ellas por otra (p) que sea independiente de las (m-1) restantes.* (*op. cit.* p. 66).

Grassmann establece propiedades de la base respecto a los sistemas de cambio:

> *Todo segmento de un sistema de grado m puede representarse como suma de m segmentos pertenecientes a m maneras independientes de variar del sistema, y esto de una sola manera (op. cit.* p. 67).
> *Todo sistema de grado m puede ser pensado generado a partir de un elemento arbitrario de él y mediante m maneras independientes arbitrarias de variar que le pertenecen, es decir, se pueden así generar todos los elementos del sistema (op cit.* p. 68).

En esencia, Grassmann desarrolló las teorías actuales para espacios lineales de dimensión finita; asimismo analizó los subespacios, sus uniones e intersecciones; estableció y probó teoremas equivalentes a los resultados sobre subespacios, tales como el teorema de la dimensión: $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$, donde S y T son subespacios de un espacio vectorial V; también definió diferentes productos de cantidades extensivas, por ejemplo, el producto interior entre ellas lo denotó por $\sqrt{\alpha\alpha} = \sqrt{\Sigma\langle\alpha_i\rangle^2}$.

Para $n=3$, las unidades primarias fueron representadas geométricamente por segmentos de recta de longitud unitaria, cada una dirigida a lo largo de los tres ejes mutuamente ortogonales. Las $\alpha_i e_i$ son múltiplos de las unidades primarias, y se representan por las longitudes $|\alpha_i|$ a lo largo de los respectivos ejes, mientras que α se representa por un segmento de recta dirigido en el espacio, cuyas proyecciones sobre los ejes son las longitudes $|\alpha_i|$.

En la versión de 1862, Grassmann formaliza la presentación de su teoría: Un sistema de n-orden puede representarse como un sistema lineal, generado por una base de n elementos, o el conjunto de todas las combinaciones lineales de n elementos base. En esta versión suprimió la introducción filosófica y la teoría general de formas; adoptó una presentación euclidiana para definir las magnitudes extensivas por entidades formales y por sus relaciones, sin intuición o referencia geométrica. En oposición a la presentación de 1844, las primeras dos definiciones son relativas a generación y dependencia lineal en el marco numérico: una magnitud a se dice derivada de las magnitudes b, c,… por los números β, γ,… si $a = \beta b + \gamma c +,\ldots$; dos o más magnitudes se dice que están en relación numérica, si una se deriva numéricamente del resto. En este marco, un sistema original de elementos base: e_1, e_2,..., -conjunto de magnitudes establecidas y no relacionadas numéricamente, reemplaza los métodos fundamentales de evolución. Una magnitud de primer orden es una magnitud a derivada de un sistema original $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 +\ldots$, donde las α_1, α_2,… son llamados números de derivación (Dorier, 1996).

El fundamento ontológico de las dos versiones es diferente, en la segunda sólo presenta los aspectos formales de los conceptos en la teoría de la base; en esta versión el empleo de los números sugiere el isomorfismo con R^n. Como consecuencia de la suma de magnitudes y multiplicación por un número, Grassmann introduce la operación sobre los números de derivación. Siguiendo las definiciones de cada operación, enlista las propiedades como los axiomas de espacios vectoriales en la forma moderna, llamándolas fórmulas fundamentales, porque son suficientes para deducir todas las leyes de la adición, substracción, multiplicación y división (*op. cit.*).

La versión de 1862 contiene resultados sobre los conceptos de base y dimensión: Un dominio de orden n se define como la colección de todas las magnitudes derivadas de n magnitudes, y no menos que n de tales magnitudes. En esta presentación el criterio es el número mínimo de generadores y no la independencia de estos generadores. La llave para deducir que un dominio de n-orden se deriva de cualquier subconjunto de n magnitudes independientes, está precedido por dos teoremas que Grassmann deduce del teorema del cambio (*op. cit.*):

1) Una serie de magnitudes independientes puede completarse a una base.
2) Si n magnitudes son derivables de menos de n, ellas son dependientes. De este punto es claro que un dominio de orden n no puede derivarse de menos de n magnitudes.

El espacio vectorial en la Teoría de la Extensión

Grassmann, con ideas intuitivas del espacio, dimensión, dependencia e independencia lineal, genera los espacios vectoriales. En la Teoría de la Extensión se genera o construye el espacio vectorial con n direcciones linealmente independientes y la dimensión está ligada a la idea de variación continua, es decir, a la idea de movimiento.

En la publicación de 1844, Grassmann genera los espacios vectoriales escalón por escalón, con direcciones independientes, en esta versión con fundamento geométrico surgen en primer lugar las nociones de generar e independencia lineal. En la versión de 1862, cuando Grassmann aritmetiza su teoría, tienen origen en primer lugar los conceptos de dependencia lineal y generar. Vemos delineados los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial más explícitamente en esta versión.

El origen del álgebra lineal en la Teoría de la Extensión, se propició al tratar de evitar las coordenadas de la geometría analítica. Con el desarrollo de la intuición y en un enfoque filosófico, Grassmann encontró una rama de las matemáticas; elaboró en forma puramente abstracta leyes análogas a las que aparecen en la geometría ligadas al espacio.

Actualmente en el álgebra lineal, puede ser difícil entender los conceptos en el modo sintético-geométrico. La relación entre la base y el espacio vectorial generado pueden ser complicadas; por ejemplo, generar un plano por la variación de elementos sin área, y la generación del espacio de dimensión tres, con elementos sin volumen. Vislumbramos la necesidad de considerar otros elementos, como la continuidad de la variación, que implica un movimiento, así como tiempo y espacio. Sin embargo, en el medio escolar se tiene la idea generalizada de que por el lenguaje y las representaciones, los espacios vectoriales geométricos se pueden entender de manera más sencilla.

En la Teoría de la Extensión (1844), Grassmann genera los espacios vectoriales con la idea de escalón independiente. Por un lado la noción de dimensión está ligada a la construcción, por otro, la noción de generar es intuitiva y la base no necesariamente es la canónica. Al analizar la base en la Teoría de la Extensión a la luz de los modos de pensamiento, en esta versión, se puede ver su origen en el modo sintético-geométrico, a través de la intuición, el lenguaje y las representaciones geométricas. Con elementos numéricos en la versión de 1862, Grassmann la establece en el modo analítico-aritmético; podemos pensar en los espacios aritméticos R^n.

1.1.3 LA AXIOMATIZACIÓN DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Como hemos visto, los conceptos del álgebra lineal se desarrollaron en los marcos de los sistemas de ecuaciones lineales y en la geometría. En los sistemas de ecuaciones se encuentran los orígenes de los conceptos, y cómo evolucionaron los primeros resultados teóricos, tales como dependencia lineal y rango; en el marco geométrico jugaron un papel muy importante el lenguaje, las nociones de generar e independencia lineal. Ahora a partir de estos dos enfoques trataremos de seguir el camino que conduce a la teoría axiomática de espacios vectoriales.

Pasar de una problemática de solución de ecuaciones a un enfoque más descriptivo y cualitativo, permitió a los conceptos fundamentales entrar en juego en el análisis teórico de los sistemas de ecuaciones lineales. En este marco, Frobenius definió el sistema adjunto y a través de la dualidad relaciona las ecuaciones y las n-adas de soluciones. Así, en la dualidad se elaboraron los primeros conceptos lineales y en particular el rango, por la unificación del concepto de dependencia lineal en las ecuaciones y en las n-adas.

A partir de 1880 surgieron los primeros acercamientos axiomáticos del álgebra lineal, así como los primeros trabajos sobre problemas lineales en dimensión infinita. Estos dos aspectos permanecieron independientes hasta el inicio de 1920 y formaron verdaderamente una teoría a principios de los años 30. A fines del siglo XIX, de manera esquemática para la generalización a una teoría de dimensión infinita, por un lado, están los matemáticos que trabajaban conservando las herramientas y los objetos de la dimensión finita, pasando a un número infinito de variables, y por el otro, algunos matemáticos que ensayaban un enfoque axiomático, sin tratar de resolver nuevos problemas de dimensión infinita, sino con la idea de fundamentar formalmente las cuestiones lineales. Estos dos puntos de vista, finalmente convergen para dar origen a la teoría moderna del álgebra lineal (Dorier, 1997).

Giuseppe Peano fue uno de los primeros matemáticos en difundir la obra de Grassmann. En 1888 publicó su *Calcolo geometrico secundo l'Ausdhenungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle Operazioni della Logica Deductiva.* Sus interpretaciones no tienen la generalidad y riqueza ontológica de la obra de Grassmann, pues limita gran parte de su tratado al espacio de tres dimensiones. No obstante, la obra de Peano facilita el acceso a la Teoría de la Extensión y su enfoque es decisivo en cuanto a la axiomatización de la teoría lineal (Dorier, 1996).

En el último capítulo titulado: "Transformaciones de Sistemas Lineales", Peano define axiomáticamente un *Sistema Lineal*, que corresponde a la versión moderna de espacio vectorial; define independencia-dependencia lineal y dimensión de un sistema lineal:

> *Definición. Varias entidades a_1 a_2 ... a_n de un sistema lineal se llaman mutuamente dependientes si se pueden determinar n números m_1 m_2 ... m_n, no todos cero, para los cuales se tiene:*
> *$m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_n a_n = 0$. En este caso una de las entidades cuyo coeficiente no es cero se puede expresar como una función lineal homogénea de las restantes. Si las entidades a_1 a_2 ... a_n son mutuamente independientes y si entre ellas existe una relación $m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_n a_n = 0$, se deduce que $m_1 = 0, ... m_n = 0$*
> *Definición. El número de dimensiones de un sistema lineal es el máximo número de entidades mutuamente independientes del sistema que se pueden tomar.* (Peano, 1888 p. 120)

Peano define dimensión como una propiedad del sistema, en la cual está ausente la noción de generación; en contraste, Grassmann la relaciona con un conjunto de generadores. En el siguiente teorema Peano demuestra la relación entre la definición de dimensión y generación:

> *Si el sistema A tiene n dimensiones, si se toman n elementos independientes a_1,… a_n del sistema y a es un nuevo elemento, uno puede siempre determinar n números x_1,… x_n, para los cuales $a = x_1a_1+… +x_na_n$ además ellos son únicos* (*op. cit*. p. 121).

Este enfoque no prueba explícitamente, que en un sistema lineal n-dimensional podrían existir menos de n generadores linealmente independientes, o desde otro ángulo, no indica si cualquier conjunto maximal de elementos independientes tiene el mismo número de elementos. Demuestra que n elementos independientes en un sistema n-dimensional constituyen una base y muestra la relación entre independencia y generar. La noción de dimensión es diferente en el marco de Peano y en el de Grassmann: Para el primero, el modo de generación es el punto de partida y la dimensión surge como medida de la extensión del proceso de generación; para el segundo, surge de un proceso de lo particular a lo general, a través de la investigación de independencia del sistema, en su modo original de generación, de la intuición geométrica que conduce al proceso de extensión.

Para Peano no hay un procedimiento inicial de generación, y el número de dimensión evalúa el grado de independencia en el sistema, que solamente se relaciona a la noción de generar el sistema en una fase posterior. Asimismo, la noción de dimensión no surge como parte de la constitución de generalización. El concepto es generalizado desde el punto de vista de la misma geometría. Como consecuencia, la dimensión no se introduce como una medida de la extensión, sino como una característica del límite de la extensión. A la sazón, la definición de Peano no establece el modo de generación, sino el límite del número de elementos independientes. La generalización del espacio geométrico se caracteriza por su limitación a tres direcciones independientes, no obstante, con un proceso dinámico de generalización geométrica generaliza por la posibilidad de encontrar direcciones independientes (o métodos de evolución) (Dorier, 1996).

Sobre este punto Lewis dice:

> *Para Grassmann la generalización no es el objetivo matemático sino un polo de contraste que gobierna su método… esta generalidad es de una clase que esclarece obscuridades y problemas sobre niveles bajos* (Lewis, 1977 p. 161, referenciado en Dorier, 1996).

Cesare Burali-Forti y Roberto Marcolongo fueron sucesores de Peano; en 1909 publicaron un tratado sobre análisis vectorial, *Omografie Vettorialli*. En su obra respaldada por los trabajos de Peano, se refieren a Grassmann como iniciador de su tratado. Al inicio exponen la definición axiomática de los sistemas lineales y transformaciones; la introducción es muy similar al último capítulo del *Calcolo Geometrico* de Peano, y no van más allá de éste en la elaboración de una teoría axiomática. Utilizan el vocabulario y los conceptos formales de la teoría axiomática para las cuestiones geométricas en dimensión 3, sin embargo, es la primera publicación sobre análisis vectorial que inicia con una presentación axiomática. La definición de dimensión es muy semejante a la de Peano (Dorier, 1996).

Otro pionero de la axiomatización de la teoría de espacios vectoriales fue Hermann Weyl, quien publicó en 1918, la primera edición de su obra *Raum-Zeit-Matterie*. En el primer capítulo titulado "Foundations of Affine Geometry", Weyl definió espacio afín axiomáticamente, basándose en la definición de espacio vectorial (*Lineare Vektor-Mannigfaltigkeit*). Weyl no menciona los trabajos de Peano o de Burali-Forti y Marcolongo; por otro lado, en una nota expresa que Grassmann en su *Ausdehnungslehre* de 1844, trata la geometría afín en dimensión mayor de tres.

En la teoría de Weyl, el concepto de dimensión no progresa mucho respecto al de Peano y Burali-Forti y Marcolongo. Weyl no se limita a la dimensión tres, emplea los espacios vectoriales de dimensión cuatro a todo lo largo de su tratado, con el interés de presentar la teoría de la relatividad. Weyl comenta sobre lo establecido, y agrega a su definición de variedad vectorial lineal, el axioma dimensional: De esta propiedad (la cual puede deducirse de la definición original, con la ayuda de resultados elementales sobre ecuaciones lineales) se sigue que el número dimensional es una característica de la variedad. Así, Weyl estaba consciente de la posibilidad de deducir el axioma dimensional de la teoría de ecuaciones lineales. No obstante, esta proposición no es absolutamente correcta, se necesita suponer la existencia de un conjunto finito de generadores, para poder deducir el axioma dimensional de la teoría de ecuaciones lineales. Finalmente entre 1920 y 1930, debido en gran medida al desarrollo del análisis funcional, se axiomatiza el álgebra lineal (*op. cit.*).

La axiomatización de los espacios vectoriales progresó en otra corriente de origen algebraico, la teoría de campos: Una extensión de un campo es un espacio vectorial sobre el campo base. Aunque la cuestión de invariancia del número de elementos de una base de un campo extensión fue considerada obvia por un tiempo, Richard Dedekind la retomó y la resolvió con gran cuidado en 1893, en el 11º suplemento de la cuarta edición de la obra póstuma de Gustav Dirichlet: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. En este suplemento un párrafo constituye una aproximación general a la estructura lineal; Dedekind inicia con la definición de dependencia lineal:

> Definición: Dado un campo A, un sistema T de m números ($\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$), se dice reducible respecto a A, si hay m números $a_1, \ldots a_m$ en A no todos cero tales que $a_1\omega_1 + \ldots + a_m\omega_m = 0$.

Dedekind prueba: 1) Cualquier subsistema de un sistema irreducible es irreducible. 2) Si un sistema contiene un subsistema reducible, es reducible. Define la noción de espacio, "*Schaar*", Ω como el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto irreducible de n números. Llama a estos elementos una base de Ω, y define las coordenadas de un elemento de Ω, que lo representan, como los coeficientes de la combinación lineal única de los elementos de la base. Enuncia 3 propiedades características de un conjunto Ω:

1. *Los números de Ω se reproducen por adición y substracción, es decir, la suma y la diferencia de dos números cualesquiera de Ω está en Ω.*
2. *Cualquier producto de un número de Ω por un número de A es un número de Ω.*
3. *Hay n números independientes en Ω, pero cualesquiera n+1 números de Ω son siempre dependientes entre ellos.* (Dirichlet, 1893 referenciado en Dorier, 1996).

Dedekind subraya que sólo la segunda parte de la propiedad 3 tiene razón de ser demostrada; por inducción la demuestra: Supone cierta la propiedad para un espacio con una base de menos de n elementos, toma *n+1* elementos, α, α_1, α_2, ... α_n en un espacio Ω con una base de n elementos:

> *Si uno de ellos es cero, por ejemplo $\alpha = 0$, entonces estos elementos son dependientes; si no, se puede asumir que por ejemplo la primera coordenada de α no es cero, así, obviamente se pueden encontrar n números c_1, c_2, ... c_n en A, tales que la primera coordenada de cada número $\alpha_1+c_1\alpha$, $\alpha_2+c_2\alpha$ ...,$\alpha_n+c_n\alpha$ es cero, entonces estos números pertenecen a un espacio cuya base contiene solamente n-1 elementos ω_2, ..., ω_n, y son dependientes, consecuentemente hay n números a_1, a_2, ..., a_n en A, tales que no son todos cero y $a_1(\alpha_1 + c_1\alpha) + a_2(\alpha_2 + c_2\alpha), +... +a_n(\alpha_n + c_n\alpha) = 0$, como la suma $a = a_1c_1 + a_2c_2 +... + a_nc_n$ está también en A, se sigue que los n+1 números α, α_1, α_2, ...α_n son dependientes uno de otro* (Dirichlet, 1893 referenciado en Dorier, 1996).

Este resultado equivale al que Grassmann obtuvo con el teorema del cambio, no obstante, su enfoque es diferente; en esta prueba no emplea la teoría de ecuaciones lineales, aunque sí emplea la representación con coordenadas. Dedekind deduce la propiedad: cualquier sistema irreducible de n elementos es una base de Ω; también prueba que un sistema de n números es irreducible, si y sólo si el determinante de sus coordenadas sobre la base original no es cero (Dorier, 1996).

Aunque permite caracterizar la dimensión, Dedekind no establece explícitamente el problema de la eventual existencia de una familia generatriz de menos de *n* elementos. Siguiendo la línea de Grassmann (1844), esta cuestión se podría resolver fácilmente; la definición de un *Schaar* comprende el modo de generación, así, si es generado por $p<n$ números, entonces $p+1$ serían siempre dependientes entre ellos. Después de Grassmann, Dedekind es uno de los primeros en abordar el concepto de dimensión de una manera completa; para ambos, el concepto de generación es la base de la teoría. Dedekind proporciona una definición casi axiomática de un subespacio vectorial de dimensión *n*. Este

trabajo es uno de los puntos de partida para el álgebra moderna, organizado en los primeros 30 años del siglo XX (*op. cit*).

En el camino de la axiomatización de espacios vectoriales, la teoría de campos ha jugado un papel importante y el trabajo de Ernest Steinitz (1910), *Algebraische Theorie der Körper*, es fundamental respecto a la linealidad. Steinitz define de forma precisa, tanto la dependencia lineal sobre un campo R, como una extensión finita de orden n.

Steinitz demuestra que en una extensión de orden n del campo, para cualquier conjunto de n elementos, la independencia lineal es equivalente al hecho de que cualquier elemento de la extensión no se puede expresar en más de una forma, en combinación lineal de n elementos. Para Steinitz una base de L es un conjunto de elementos tales que cualquier elemento de L puede expresarse de manera única como una combinación lineal de ellos. La finalidad de Steinitz es probar que cualquier base tiene n elementos, y cualquier conjunto de n elementos independientes es una base de L. Para llegar al objetivo, necesita probar que el orden de una extensión no puede exceder el número de generadores; en otras palabras, necesita relacionar un resultado relativo a generar con una proposición de dependencia. Define la base sobre un sistema de coordenadas, así, establece la demostración en el contexto de las n-adas y las ecuaciones lineales (Dorier, 1996).

Después de Grassmann ésta es la primera prueba explícita, de que el número de elementos generadores no puede ser menor que el número de la dimensión. Steinitz emplea algo muy cercano al método del cambio, en el contexto de extensiones trascendentes, donde la dependencia algebraica reemplaza la dependencia lineal. Steinitz expone tres teoremas finales de dependencia algebraica, resultados semejantes al teorema del cambio: 1) Teorema de completar un sistema independiente a una base, 2) La invariancia del número de elementos en todas las diferentes bases del mismo espacio lineal, 3) La propuesta de la dimensión de un subespacio de un espacio lineal de dimensión finita. Este párrafo lo presenta en una forma progresiva deductiva, cercana a una definición axiomática del concepto general de dependencia (se podrían incluir tanto la algebraica como la lineal); de ella se pueden deducir los conceptos de base y dimensión. Después de 20 años dos de los sucesores de Steinitz, Bartel L. van der Waerden (1930-1931) y Emmanuel Sperner en el trabajo de Otto Schreier (1931-1935), usaron el método del cambio por primera vez en el contexto de la dependencia lineal (*op. cit.*).

El tratado de B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, basado en los cursos de Emmy Noether y Emil Artin, es una compilación de los fundamentos del álgebra moderna, salidos a la luz en las dos décadas precedentes. Para muchos matemáticos es un libro de referencia, en el estudio de la teoría de espacios vectoriales, en el enfoque axiomático. En la segunda edición (1937), el lugar del álgebra lineal resulta más importante y la noción de espacio vectorial es central. Trata la teoría de ecuaciones enteramente como una aplicación de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales, y el papel de los determinantes es considerablemente reducido. En este tratado, el estudio de problemas lineales se unifica con un enfoque teórico; el fundamento de los espacios vectoriales se presenta en una forma usual, en la mayoría de las investigaciones y de los libros de texto actuales (*op. cit.*).

La axiomatización de los Espacios Vectoriales

De lo anterior, vemos que Grassmann a partir de una intuición geométrica, espacio y tiempo y dada una base construye los espacios vectoriales. Peano desarrolló su investigación a partir de la Teoría de la Extensión de Grassmann: considera la base existente y define la dimensión como grados de libertad, con el apoyo de los modelos geométricos. A partir del enfoque de Peano, el estudio del álgebra lineal prácticamente evolucionó en el modo analítico y las investigaciones se encaminaron al modo estructural.

Weyl por su lado sigue la línea de Grassmann, desarrolla su trabajo en el modo analítico-estructural. Sin embargo, tanto en las investigaciones de Weyl, Buraly-Forte y Marcolongo, así como en las de Peano sobre el espacio vectorial, el concepto de dimensión no progresó. Con los trabajos de Dirichlet, Dedekind y Steinitz, el estudio axiomático de los espacios vectoriales se desarrolló en los modos analítico-aritmético y estructural y la teoría de espacios vectoriales se estableció en estos modos.

El trabajo de Bartel L. van der Waerden substituye con el método axiomático, las descripciones en términos de coordenadas. De esta manera se establece el estudio de los espacios vectoriales en el modo estructural: Por un lado, se unifica la teoría de espacios vectoriales y por el otro se generaliza a diferentes disciplinas tales como Ecuaciones Diferenciales, Sucesiones y Series.

En la Teoría de la Extensión vemos la creación del espacio vectorial relacionada con el modo de generación y elementos independientes; se establece el vínculo de los conceptos generar, independencia y dimensión de manera natural al crear los espacios vectoriales. En el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, surgen inicialmente la dependencia lineal y el rango, así, estas nociones nacen desvinculadas del espacio vectorial. El concepto de generar se fundamenta, cuando se desarrolla la dualidad entre sistemas de ecuaciones lineales y las n-adas. En la teoría de campos se establecen tanto la noción de espacio vectorial como las nociones de independencia / dependencia lineal y dimensión así como la base. Vemos cómo la intuición de Grassmann pudo concebir toda una teoría, sin embargo, para fundamentarla se necesitaron casi 100 años.

En la naturaleza del álgebra moderna, la teoría de espacios vectoriales es central, en los enfoques sintético y analítico. De la propuesta de Leibniz para la creación de una geometría de situación, a la publicación de Bartel L. van der Waerden, la historia nos proporciona elementos para análisis; observamos cómo la interacción entre los modos de pensamiento condujo al establecimiento de la teoría. De la misma manera, nos podemos dar cuenta que los conceptos del álgebra moderna se llevaron a las aulas en la forma analítica-estructural, al proponer como libro de texto: *Modern Algebra* de Bartel L. van der Waerden y posteriormente cuando Birkhoff & MacLane publicaron la primera edición (1941) de su libro *Álgebra Moderna*, que analizaremos en el capítulo 3.

Hemos visto cómo el concepto de dimensión en la geometría surge en la construcción de los espacios, con el concepto de generar de manera fundamental. No obstante, en los sistemas de ecuaciones la noción de dimensión nace aun sin el concepto de espacio vectorial y surgen los conceptos de rango y dependencia lineal de manera fundamental.

1.2 Modos de Pensamiento Sintético y Analítico

En la historia vemos que las interacciones en el estudio de la geometría y el álgebra dieron origen al álgebra lineal. Con los métodos analíticos introducidos en la geometría por Descartes y Fermat, surgieron problemas con un nuevo enfoque, la linealidad. Por su parte, Leibniz inició la llamada *Geometría de Situación*, con la idea de que las demostraciones en geometría fueran menos complicadas con el uso de los métodos analíticos. El nuevo enfoque marcó la pauta para las investigaciones en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, iniciado con los trabajos de Euler y Cramer. Los conceptos de rango y dualidad se desarrollaron ligados a la linealidad y a la unificación de las nociones comunes a las ecuaciones y a sus soluciones.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales desde la perspectiva de Euler propició una relación intuitiva entre la geometría y el álgebra y posteriormente llevó a la construcción de los espacios vectoriales desde un enfoque sintético-geométrico. En el enfoque de Cramer resolver los sistemas de ecuaciones lineales dio lugar a la creación de los determinantes, herramienta con métodos complicados, que oculta aspectos intuitivos y a la vez puede propiciar algoritmia.

Cuando intentaron trabajar la geometría sin el álgebra, se facilitó el desarrollo de las dos disciplinas. Estas investigaciones que iniciaron el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y dieron principio al desarrollo del álgebra lineal, nos muestran el origen analítico y geométrico de los conceptos. En el análisis histórico podemos observar el juego de la geometría en la evolución del álgebra; a su vez, ésta facilitó el crecimiento de la geometría. Los trabajos posteriores a la *Geometría de Situación* de Leibniz dieron origen a la representación geométrica de los números complejos, poco tiempo después, al álgebra de los cuaternios, al inicio de los espacios vectoriales, y culmina con el establecimiento del álgebra lineal en el método axiomático.

La evolución histórica de la geometría sintética, el desarrollo de la geometría analítica, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y el establecimiento axiomático del álgebra lineal, dan origen a los modos de pensamiento; Sierpinska lo expresa en así:

> "*Mientras los modos de pensamiento aparecen en la historia de manera subsecuente, no sucede que uno de ellos elimine a los otros dos. El desarrollo del álgebra lineal debe mucho a su constante interacción. Más que ver los modos de razonamiento en el álgebra lineal como niveles en el desarrollo del pensamiento algebraico, es preferible verlos como modos de pensamiento igualmente útiles, cada uno en su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando interactúan*." (Sierpinska, 2000).

1.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO SINTÉTICO Y ANALÍTICO

De acuerdo con Sierpinska, no es fácil distinguir exactamente los rasgos de los modos sintético y analítico, e identificarlos con claridad, sin embargo, cada uno de ellos tiene un lenguaje y usa un sistema específico de representaciones y signos en álgebra lineal como vemos a continuación:

> *a) En el modo sintético-geométrico, los objetos están dados directamente a la mente, que entonces trata de describirlos, emplea el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas (una recta puede verse como*

un objeto dado previamente de una cierta figura en un lugar en el espacio; las propiedades de la recta sólo la describen, no la definen).
b) En el modo analítico-aritmético los objetos se dan indirectamente, ellos se construyen por la definición de sus elementos. Las figuras se entienden como conjuntos de n-adas de números que satisfacen ciertas condiciones, que se escriben, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades. Las componentes numéricas de los objetos geométricos como puntos o vectores son importantes; por ejemplo, un sistema de ecuaciones podría escribirse con todos los coeficientes explícitamente:

1) $a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$

m) $a_{m1}\,x_1 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m$

c) El pensamiento analítico-estructural, va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de la representación analítica en elementos estructurales; entonces el sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *o en forma vectorial* $x_1\mathbf{A_1} + \ldots + xn\mathbf{A}n = \mathbf{b}$.
Respecto a los sistemas de ecuaciones hay otra diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural; lo importante desde el punto de vista del primero, es encontrar métodos para la solución de sistemas de ecuaciones; en el modo de pensamiento estructural, la cuestión podría ser relativa a las condiciones sobre la matriz ***A*** *y el vector* ***b*** *para la existencia y unicidad de la solución. Las propiedades de la matriz serían más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricas.*
El desarrollo del álgebra lineal empezó como un proceso de pensamiento analítico del espacio geométrico; se pueden distinguir en este desarrollo dos grandes etapas relacionadas con estos dos procesos: la aritmetización del espacio, que toma lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n. *La otra fue la desaritmetización del espacio o su estructuralización, por la cual los vectores perdieron sus coordenadas que los anclaban al dominio de los números, para llegar a los elementos que definen su comportamiento por un sistema de propiedades o axiomas* (op. cit).

La interacción entre las formas de pensamiento posibilita el desarrollo del álgebra lineal. Vemos por ejemplo en los trabajos de Euler, cuando expresa "para que el sistema de 3 ecuaciones lineales en 3 incógnitas tenga solución, falta aclarar que las 3 ecuaciones difieran realmente entre ellas o que ninguna esté comprendida en las otras". De esta forma, la tensión entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético, determinó el desarrollo del modo analítico-estructural. Euler emplea un modo intermedio, dado que no tiene la solución a ese problema; así los estudiantes en ocasiones emplean modos intermedios, por ejemplo, cuando trabajan en el modo analítico-aritmético y no ven la solución o encuentran tedioso el desarrollo, posiblemente lo intenten en el modo estructural.

Tomando en cuenta que para el desarrollo de la enseñanza lo importante no es promover uno de los modos de razonamiento entre los estudiantes, sino llevarlos a un empleo consciente y flexible de ellos, el estudio de los conceptos en los modos de pensamiento, puede ayudar a los estudiantes a superar diversas dificultades para entenderlo. Si el estudiante es capaz de reconocer el concepto bajo diferentes representaciones, podrá comprender su esencia en ellas. Cuando un concepto se define en el modo analítico, sin relacionarlo con el sintético, la simplificación de la idea puede resultar confusa para el alumno, y su representación, las nociones que lo componen y las relaciones implícitas entre ellas pueden carecer de sentido. Por ejemplo, si el estudiante tiene la noción de base canónica, posiblemente no vea la vinculación entre las nociones de independencia y generar para definir un espacio vectorial.

Para la enseñanza presentar un problema en los distintos modos de pensamiento puede producir ganancias. En el modo sintético, podría ayudar al estudiante a desarrollar la intuición espacial, en el modo analítico-aritmético, sin caer en la mecanización, preparar un trabajo algorítmico y en el modo estructural, establecer las bases del conocimiento axiomático para el desarrollo de la abstracción.

En el sistema educativo si se pone más interés al enfoque analítico-aritmético, descuidando tanto el modo sintético-geométrico como el analítico-estructural, en algunos casos esto puede dar lugar a un conocimiento en el nivel de algoritmización, debido al poco desarrollo de los otros acercamientos. Para aclarar más el papel que juega la representación para el alumno, mencionamos a continuación la siguiente cita de Duval:

> "*Toda representación puede referirse a un objeto al menos para el sujeto que la produce. Pero si el sujeto no dispone más que de esta sola representación, el objeto que él piensa identificar a través de ella, no puede ser disociado de esta representación: el objeto se confunde con la representación y entonces hay tantos objetos como representaciones. El conocimiento, científico o no, comienza cuando el sujeto es capaz de identificar un mismo objeto bajo diferentes representaciones, es decir, cuando dispone de varias representaciones para un mismo objeto. Esto se traduce por el hecho de que el sujeto puede pasar de una representación a otra, según las necesidades de un tratamiento a efectuar*" (Duval, 1998 citado por Sierpinska *et al*, 1999).

Duval en su ensayo sobre Signo y Objeto recuerda cómo del trabajo de Bolzano y Frege, emerge el pensamiento de ver los objetos de conocimiento científico, no como ideas independientes de la realidad, ni como contenidos de representaciones mentales en el sujeto psicológico, sino como invariables en las referencias de diversas representaciones semióticas (Duval, 1998, citado por Sierpinska *et al*, 1999).

De esta manera, pensamos que la flexibilidad en el empleo de los modos de pensamiento, así como el tránsito entre ellos, puede crear en el estudiante tanto versatilidad, como oportunidades para el desarrollo de su pensamiento, reflejándose en un entendimiento del álgebra lineal y en particular de un espacio vectorial.

Comentarios

En los trabajos de Euler, en el enfoque analítico de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas, vislumbramos la necesidad del concepto de dimensión, como idea germinal que daría lugar a la base y al espacio vectorial. Podemos decir que se gestan las nociones de independencia-dependencia lineal que conducen a la de base de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. En el modo analítico-aritmético, con una raíz profundamente geométrica, surge la base de un espacio vectorial en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales; cuando Euler estudia la paradoja de Cramer, trata de resolver los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos que resultan de problemas geométricos. Posteriormente, Frobenius en sus investigaciones define el concepto de rango para resolver los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y finalmente se llega a la definición de la base, sin mencionar el concepto de espacio vectorial.

Entre las interacciones del álgebra y la geometría, observamos que al especular Grassmann con una intuición geométrica, obtiene como resultado una teoría puramente algebraica, contrariamente a lo propuesto por Leibniz de crear una geometría sin álgebra. Para Grassmann eran fundamentales las ideas de espacio y tiempo, logra establecer una teoría con ideas filosóficas. Vemos la intuición del espacio como piedra angular para establecer la teoría de la extensión, una teoría que puede abarcar dimensiones mayores a 3. En el enfoque de la geometría, construye intuitivamente los espacios vectoriales. Al pasar del plano al espacio y finalmente a los espacios aritméticos R^n, con la base se genera el espacio vectorial; la idea germinal de la base es un conjunto de elementos que generan otros vectores, pero en ese conjunto ninguno de los vectores puede ser generado por uno de ellos mismos. Finalmente en la notación unificada y simplificada de la teoría axiomática, los elementos del espacio vectorial se representan por medio de los vectores de la base.

A las ideas de Grassmann del modo sintético y analítico-aritmético, la comunidad matemática no le dio seguimiento, no obstante, los trabajos de Peano y Burali-Forti y

Marcolongo con fundamento en ellas, continúan en un enfoque más del modo analítico-estructural y los trabajos de Dedekind y Steinitz establecen formalmente el estudio de los espacios vectoriales en el modo analítico-estructural. En el tránsito de los espacios vectoriales aritméticos R^n a la teoría de espacios más generales, se define el espacio vectorial axiomáticamente.

En el contexto geométrico, el espacio vectorial se construye y se expresa aritméticamente; en contraste, en el contexto estructural el espacio vectorial se define. El análisis nos muestra una simiente del álgebra lineal y por ende de los espacios vectoriales intuitiva, es decir, sintética en la obra de Grassmann. Con el desarrollo de las investigaciones se lleva a un modo analítico-aritmético culminando con el analítico-estructural. En este enfoque el espacio vectorial puede ser un concepto más de los del álgebra lineal, si no se hace hincapié sobre sus propiedades.

Vemos que en el modo sintético el entendimiento del espacio vectorial puede ser difícil, ya que requiere de intuición, así como madurez del conocimiento (Vergnaud, 1990). Sin embargo, encontramos en algunos libros de álgebra lineal la idea de hacer accesible el conocimiento relacionándolo con los espacios vectoriales geométricos. Este tratamiento de los espacios vectoriales puede conducir en ocasiones a que los estudiantes no profundicen en los razonamientos y los conceptos, en consecuencia el conocimiento puede resultar superficial. Por ejemplo, podrían ver los espacios vectoriales de manera simplificada como elementos intermedios entre geométricos y del álgebra lineal y pensar únicamente en la base canónica.

Si los conceptos se desarrollan en el modo analítico y en particular en el analítico-aritmético, puede resultar en el estudiante la algoritmia, sin el entendimiento de las nociones. En el modo analítico-estructural, una vez definido el espacio vectorial, si no se profundiza en los conceptos, puede no entender por ejemplo, que la base es necesaria para expresar los elementos del espacio vectorial, sino una noción más del cúmulo que constituye el álgebra lineal. Consideramos conveniente el estudio del álgebra lineal tratando de integrar los tres modos de pensamiento, para evitar el conocimiento superficial o la mecanización y algoritmia en el estudiante.

Por último hacemos hincapié sobre el origen del álgebra lineal en general y en particular del espacio vectorial: sintético-geométrico y analítico-aritmético en los sistemas de ecuaciones lineales; en la teoría generalizadora y unificadora de los espacios vectoriales su origen es analítico-estructural. En este análisis vemos los caminos seguidos por las nociones, sin embargo, en la didáctica estas nociones a veces se definen sin relacionar, como elementos de una estructura estática y fragmentada, sin establecer vinculación entre ellos, evitando en ocasiones su entendimiento.

2. Antecedentes Contemporáneos en Álgebra Lineal

2.0 Introducción

En el capítulo anterior analizamos cómo surge un espacio vectorial en la historia, vinculado al concepto de base o a los conceptos que componen ésta. Al reflexionar sobre su naturaleza compleja, vemos lo difícil que puede resultar su entendimiento. Ahora nos proponemos resumir, así como clasificar bajo diferentes aspectos, algunas de las investigaciones más recientes del álgebra lineal; éstas puntualizan sobre los obstáculos para su entendimiento y nos llevan a comprender dificultades debidas a su naturaleza. En la primera sección presentamos algunos estudios sobre la esencia del álgebra lineal; en la segunda sección investigaciones sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la materia, entre ellas se cuentan algunas propuestas y sugerencias metodológicas para su estudio. En la tercera parte incluimos investigaciones en el enfoque de los modos de pensamiento sintético y analítico y en la cuarta parte exponemos algunas investigaciones sobre la noción de espacio vectorial ligada a la base y dimensión.

2.1 Investigaciones teóricas y epistemológicas sobre el álgebra lineal

En esta sección analizamos un grupo de investigaciones recientes sobre aspectos fundamentales del álgebra lineal y la enseñanza; en primer lugar encontramos investigaciones sobre su naturaleza, en segundo lugar resumimos aquéllas que estudian la forma de trabajar de los estudiantes y por último las que desarrollan análisis de libros de texto.

a) Para el estudio de las investigaciones epistemológicas consideramos varias características, una de ellas es sobre los niveles de abstracción de los espacios vectoriales: Cuando se generaliza de los espacios vectoriales geométricos R^2, R^3, a espacios aritméticos R^n, o a los espacios más generales, por ejemplo de polinomios o funciones, a veces los alumnos piensan que tratar con espacios de dimensiones mayores de cuatro no tiene sentido, pues no es la realidad conocida por ellos y consideran poco pertinente hablar de estos espacios vectoriales.

Hillel & Sierpinska (1994) consideran entre las fuentes de dificultad conceptual, por un lado, la existencia de varios lenguajes para los espacios vectoriales por su nivel de abstracción, a saber: el lenguaje geométrico de R^2 y R^3, el lenguaje de los espacios aritméticos R^n, n-adas y el lenguaje de la teoría más general de espacios vectoriales. Por otro lado, se encuentra el constante intercambio entre ellos, así como su coexistencia. También puntualizan sobre la dificultad para entender las representaciones, de vectores y operadores lineales, en diferentes bases. Con referencia al marco teórico de Piaget y García, Hillel y Sierpinska conceptúan otra fuente de dificultad para los estudiantes que deben operar en el trans-nivel para manejar los conceptos más generales del álgebra lineal; no obstante, muchos de ellos se encuentran en el inter-nivel. Podemos resumir los niveles de conocimiento del marco teórico de Piaget y García -intra, inter y trans, de la siguiente manera:

> *Las etapas intra, inter y trans corresponden a períodos sucesivos en el desarrollo de las operaciones. El intra, llamado preoperatorio, en el curso del cual se constituyen poco a poco acciones repetibles, modificadoras de los objetos, pero que no se transforman entre ellas; el segundo, inter, llamado de operaciones concretas, donde éstas se organizan en sistemas que involucran ciertas transformaciones de las operaciones mismas y el tercero, trans, que se caracteriza por operaciones hipotético-deductivas con síntesis de las transformaciones.* (Piaget y García, 1994 pp. 163-168).

Respecto al significado de las representaciones visuales de un objeto matemático, a veces se consideran una ayuda para el estudiante; sin embargo, Sierpinska *et al* (1999) las consideran una paradoja. Si el estudiante no posee el conocimiento entonces no puede verlas como una ayuda, la interpretación de las mismas requiere del conocimiento de lo que ellas son; si el estudiante ya posee el conocimiento ya no requiere “la ayuda”.

Si el estudiante se acostumbra a visualizar empleando los espacios geométricos y el lenguaje propio de ellos, es decir, se sitúa en el modo sintético-geométrico, cuando transita a los espacios aritméticos, y posteriormente a los espacios vectoriales más abstractos, para él esto puede carecer de sentido, pues por un lado no puede visualizar y por el otro, para pensar en dimensiones mayores de tres debe hacer generalizaciones de tipo expansivo y reconstructivo de sus ideas (Tall, 1991).

Sobre la naturaleza de los conceptos del álgebra lineal, Dorier (1995b) nos dice que son difíciles de entender por su naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta, y además las teorías axiomáticas de espacios vectoriales no fueron creadas como otros elementos matemáticos, para resolver nuevos problemas. El objetivo principal fue encontrar un método general para resolver diferentes problemas con las mismas herramientas, y generalizar y unificar los conceptos anteriores, es decir, que a la axiomatización del álgebra lineal no se llegó por la posibilidad de encontrar una solución a un problema no resuelto, sino del poder de generalización y unificación y consecuentemente simplificación de los conceptos. Como resultado, el enfoque axiomático requiere un nuevo nivel en abstracción para considerar elementos ya abstractos como los vectores geométricos, n-adas, polinomios, series, o funciones con las mismas propiedades. Para el proceso en la construcción de los conceptos unificadores y generalizadores, Dorier expresa:

> *Este proceso exige no sólo un buen entendimiento de los objetos a ser abstraídos, sino también requiere la habilidad de identificar las características comunes que definen su representación formal abstracta. Este proceso inevitablemente requiere un paso a un lado, para ver los conocimientos previos desde el nuevo ángulo* (Dorier, 1995b).

Para el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos generalizadores y unificadores, la propuesta de Dorier es el meta-nivel. En éste se necesita demostrar un mínimo de las habilidades relevantes, de todos los conocimientos previos menos formales que deben estar integrados en un proceso de abstracción, es decir, reconsiderar y evidenciar características comunes para ser generalizadas y unificadas, dejando de lado las características particulares intrínsecas por resultar obsoletas o inadecuadas en el nuevo enfoque. Se precisa una buena transferencia de habilidades del nivel inicial al superior, para desarrollar las capacidades no sólo en los conocimientos previos sino al relacionarlos entre ellos. El contexto nuevo, siendo más complejo hace a los conocimientos previos y competencias inter-dependientes, de tal manera que si falta alguna de las relaciones, ninguna se tiene realmente y todas fallan al operar en el nuevo nivel. El proceso requiere un paso lateral para ver retrospectivamente los conocimientos y las habilidades anteriores bajo el nuevo ángulo (*op. cit.*).

b) De las investigaciones teóricas del álgebra lineal, encontramos algunas referentes a la forma de trabajar de los estudiantes. El análisis muestra el álgebra lineal como resultado de un proceso de formalización, que asimismo unifica y posibilita soluciones análogas en los problemas. Entonces el estudiante puede alcanzar las soluciones, madurando un proceso de formalismo. Sin embargo, en ocasiones los estudiantes desarrollan formas de trabajo algorítmico. A este respecto, Dorier y Sierpinska mencionan que, usualmente, los alumnos desarrollan tareas en el marco de la algoritmia y no en el conceptual, pues están más familiarizados con algoritmos, y el entendimiento de los conceptos y estructuras matemáticas representan para ellos una dificultad. Del obstáculo del formalismo, Sierpinska nos dice:

> "*El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes, cuando operan en el nivel de una forma de expresión, sin ver que estas expresiones se refieren a algo más. Uno de los síntomas es la confusión entre categorías de objetos matemáticos, por ejemplo, considerar los vectores como números, las transformaciones como vectores, etc. Con este obstáculo el estudiante en ocasiones reproduce el discurso del maestro o el del libro de texto y, tratando de ser eficiente, desarrolla conductas automáticas*" (Sierpinska *et al*, 1999).

Otro elemento que dificulta el entendimiento del álgebra lineal es que ésta no corresponde a una necesidad de resolver problemas, sino a una obligación de la didáctica; en ocasiones el estudiante no ve la exigencia para su estudio. De este aspecto Dorier *et al*. expresan:

> *La utilización del álgebra lineal en problemas no es indispensable si no aporta una simplificación, y también a condición de que el álgebra lineal represente una ayuda para usar con eficacia sus métodos y conceptos... Para el principiante no es fácil comprender el interés del uso del álgebra lineal, sobre todo si el enunciado del problema que se le propone resolver no se acompaña de un "metadiscurso" sobre la generalidad del método impuesto a seguir* (Dorier, *et al*., 1997).

Dubinsky (1997) considera dos aspectos importantes como fuentes de dificultad para entender los conceptos del álgebra lineal: Por un lado los estudiantes nunca han tenido la oportunidad de construir sus propias ideas respecto a dichos conceptos y por otro, no se usan estrategias pedagógicas para darles esa oportunidad.

En su artículo más reciente, Dubinsky (2001) enfatiza tanto en el material que en su opinión se debe emplear en los cursos de álgebra abstracta y de álgebra lineal, en el nivel de licenciatura, como en las dificultades conceptuales de los estudiantes para el entendimiento del álgebra lineal. Propone un enfoque para ayudar a superar esos obstáculos y un proyecto para transferir la orientación del álgebra abstracta a un estudio y desarrollo curricular del álgebra lineal.

Dubinsky considera dos niveles de abstracción del álgebra lineal, uno para el estudio de las transformaciones lineales en espacios vectoriales, donde se necesita gran abstracción y otro, de al menos igual importancia en el aspecto concreto de las matrices y los vectores. Debido a la naturaleza del álgebra lineal, Dubinsky expresa razonable preparar cursos de álgebra lineal que incluyan ambas orientaciones, porque proporciona la oportunidad de construir una síntesis entre lo abstracto y lo concreto.

Siguiendo estos lineamientos Trigueros y Oktaç (2005) presentan una descomposición genética del concepto de espacio vectorial, donde describen las construcciones mentales que pueden hacer los estudiantes cuando están aprendiendo este concepto. Asimismo, explican con detalle los propósitos en términos de la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) de una serie de ejercicios que se encuentran en el libro Weller, *et al*. (2002) acerca de espacio vectorial.

Fischer (2005) en el enfoque de los modos de pensamiento funcional y fundamentado de Schwank (1999), presenta parte de un estudio piloto sobre las imágenes que tienen los estudiantes del concepto de espacio vectorial. En entrevista pidió a tres estudiantes modelar una situación real con la herramienta matemática de un espacio vectorial. Menciona que el entendimiento del concepto cambia de acuerdo a las necesidades de una situación matemática particular, por lo que es deseable estudiar los espacios vectoriales como conjuntos de objetos específicos que siguen ciertas relaciones y como un principio de construcción que sigue ciertas reglas.

c) A continuación exponemos algunas investigaciones sobre la presentación del álgebra lineal en los libros de texto. Éstas tratan sobre los ejemplos introductorios en general y algunos enfoques observados para introducir los conceptos.

Sierpinska (1996b) opina que usualmente se cree que los ejemplos introductorios motivan para el estudio del álgebra lineal, sin embargo, no siempre es así. Por un lado, éstos se pueden resolver sin necesidad de álgebra lineal ya que son simples ejercicios de cálculo; por otro, se le dice al estudiante que las aplicaciones del álgebra lineal existen en teorías más elaboradas y complejas que no alcanzará a estudiar en el primer curso. Del estatus epistemológico de los ejemplos introductorios Sierpinska nos dice:

> *El principio didáctico "de lo concreto a lo abstracto", se basa en una suposición implícita de una jerarquía genética entre los modos de pensamiento sintético y analítico de que este último se construye mentalmente sobre el primero. Sin embargo, es más como una oposición entre los dos modos de pensamiento que como un pasaje suave de uno al otro* (Sierpinska, 1996b).

Para motivar el estudio del álgebra lineal e integrar nuevas ideas matemáticas con lo que ya se ha estudiado, se han desarrollado diversas estrategias. Harel (1987) en su análisis de 32 libros de texto del álgebra lineal, observó cuatro tipos de enfoque para introducir los conceptos: analogía, abstracción, isomorfismo y justificación o aplazamiento.

La *analogía* en la introducción de conceptos describe similitudes entre las ideas que se analizan y las que son familiares al estudiante. Identifica dos clases de analogías, unas de contenido no matemático y otras con algún contenido matemático. Según Harel esta estrategia es importante en la enseñanza porque tiene efectos motivacionales y beneficios cognitivos. No obstante, cuando el estudiante trata de abstraer la analogía y distinguir entre los aspectos relevantes y no relevantes, se pueden debilitar los efectos motivacionales anticipados y en algunos casos se pueden confundir los conceptos.

La estrategia de *abstracción* introduce al estudiante en situaciones particulares de las que debe abstraer el concepto. Por ejemplo, teoremas generales como el de la dimensión: ($\dim[W_1 + W_2] = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim [W_1 \cap W_2]$) son generados desde casos particulares en modelos de espacios vectoriales de n-adas y el espacio de los segmentos dirigidos.

La estrategia de *isomorfización* relaciona dos estructuras matemáticas, una de las cuales es familiar al estudiante, por ejemplo, si R^n le es familiar, las operaciones sobre polinomios se definen como un isomorfismo entre R^n y P_{n-1}.

En algunos textos, en el material introductorio se afirma la importancia y la necesidad de las ideas que, por no ser obvias, se estudiarán más tarde; Harel llama a esta estrategia de *aplazamiento*.

En nuestra investigación el análisis de los libros de texto tiene un enfoque general; en el capítulo 3 desarrollaremos un análisis conceptual sobre un espacio vectorial, en algunos textos, en el enfoque de los modos de pensamiento.

A continuación presentamos algunas de las investigaciones que contienen propuestas y sugerencias sobre la enseñanza del álgebra lineal.

2.2 Investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal

Esta sección la dividimos en dos partes; en la primera agrupamos en orden cronológico algunas tesis de maestría y al final una de doctorado en álgebra lineal, todas ellas se dirigen hacia aspectos importantes, como son: propuestas de características motivacionales, el currículum, la metodología y la incorporación de la tecnología en el aula. En la segunda parte encontramos diversos estudios en la materia, entre las que se encuentran propuestas metodológicas para el estudio del álgebra lineal y las formas de trabajar en el aula. Todas estas investigaciones muestran la preocupación por el estudio del álgebra lineal, sin embargo, los enfoques son diferentes al motivo de nuestra investigación.

a) *Tesis de Maestría y Doctorado en Matemática Educativa*

Joubert (1987) en su tesis: *Análisis Vectorial. Un curso desarrollado con el Sistema de Instrucción Personalizada (SIP)*, enfatiza la necesidad de un cambio en el sistema de enseñanza-aprendizaje, donde el alumno ponga en práctica su propia iniciativa dentro de un marco de libertad, y al mismo tiempo toma en cuenta las características y circunstancias individuales de cada uno. Para tal efecto, propone el método SIP; éste puntualiza en el aprendizaje del alumno, a diferencia de la enseñanza tradicional cuya principal intención es enseñar.

Aguilar (1991) en su tesis: *Una propuesta para calcular la mejor solución aproximada a un Sistema de Ecuaciones Lineales Inconsistente*, se propone ayudar a profesores y estudiantes para calcular la mejor solución aproximada, al resolver problemas cuya solución plantea un modelo de Sistemas de Ecuaciones Lineales Inconsistentes.

García (1992) desarrolla una propuesta para actualizar los métodos de Análisis Estructural en las carreras de Ingeniería Civil, de la Dirección General de Institutos Tecnológicos, en su tesis: *El Álgebra Lineal aplicada al Análisis Estructural*.

Castro (1992) en su tesis: *Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de Álgebra Lineal en las carreras de Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Morelia Michoacán*, expone un desarrollo curricular para dicho curso, en la institución mencionada.

Torres (1992) en su tesis: *Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de Álgebra Lineal en las carreras del área de Ciencias Sociales y Administración de la Universidad de Michoacán de San Nicolás de Hidalgo*, ofrece un desarrollo curricular para el curso de álgebra lineal en la institución mencionada.

Vázquez (1992) basado en el método de Gauss, desarrolla en su tesis el programa para Calculadora para Álgebra Lineal (CAL), para resolver un sistema de ecuaciones lineales: *Programa de apoyo para un curso de Álgebra Lineal. (Software de apoyo en la educación)*.

Castellanos (1994), en su tesis: *Estudio experimental sobre una propuesta metodológica que contribuya a la comprensión de la resolución de problemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas*, con una metodología propia, clasifica la información del enunciado de los problemas para su resolución.

Molina (2004) en su tesis: *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la Transformación Lineal en contexto Geométrico*, fundamenta el análisis en la teoría de Fischbein (1987) sobre la intuición y los modelos intuitivos. En entrevista aplica preguntas a cinco estudiantes sobre la transformación lineal. Comenta que los modelos intuitivos detectados en todos los estudiantes sobre el concepto, son casos particulares de transformaciones lineales que se conocen en el ambiente escolar, tales como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de ellas. Cuando las preguntas involucran transformaciones lineales en R^2 como universo, la mayoría de los estudiantes determinan modelos con rasgos específicos, constituidos por movimientos geométricos asociados a sus prototipos de transformaciones. Así, la noción intuitiva que da forma o que hace intuitivamente aceptables a estos modelos es la idea de movimiento.

Soto (2003) en su tesis: *Un estudio sobre las dificultades para la conversión Gráfico-Algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la Teoría de Espacios Vectoriales en R^2 y R^3*, emplea el marco de la teoría de Duval (1998) sobre registros de representación semiótica. El análisis incluyó un estudio piloto con profesores y estudiantes, entrevistas a dos estudiantes y por último diseñó un ambiente tecnológico con el paquete Cabri Géomètre II. Entre las conclusiones generales menciona que en la enseñanza universitaria se usan dos registros de representación gráfica sin precisar diferencias. Cuando en los problemas se han usado flechas con un origen común y una letra en su extremo para representar vectores arbitrarios, los estudiantes entrevistados no siempre interpretaron esta representación con ese nivel de generalidad; parece que una flecha así trazada en un sistema cartesiano ocupa el lugar de un vector específico, cuyas coordenadas incluso pueden estimarse. La ausencia de articulación entre los dos registros explica que algunos estudiantes no pudieran convertir una ecuación vectorial de una recta en ecuación cartesiana.

b) *Algunas investigaciones sobre la didáctica del álgebra lineal, así como de los conocimientos previos que deben tener los estudiantes*

Dorier *et al*. (1997) observaron durante el año de 1990 los cursos de álgebra lineal en la licenciatura en Francia, con el propósito de caracterizar los conocimientos de los estudiantes y las formas de adquirirlos. De esta tarea refieren las siguientes consideraciones:

Observaron que en los cursos de álgebra lineal existe una dicotomía respecto a las tareas que se les proponen a los estudiantes durante el año escolar. Por un lado, se aplican en conocimientos externos al álgebra lineal (polinomios, series, funciones, etc.) donde los conceptos y los métodos del álgebra lineal intervienen como herramientas de solución y por el otro, se desarrollan en un marco formal (espacio vectorial) donde se consideran los conceptos como objetos.

Advirtieron otra dicotomía más clásica y no específica del álgebra lineal en las tareas del año escolar, unas son de cálculo o algorítmicas en la resolución numérica de un sistema de ecuaciones lineales, cálculo de un determinante, cálculo de valores propios, etc. y otras de un nivel más conceptual como la investigación sobre el uso de diferentes bases. Notaron además al inicio del curso las tareas variadas, pero con el paso del tiempo tratan sólo problemas en el espacio de dimensión tres y excepcionalmente en dimensión cuatro; paralelamente observaron que las tareas son cada vez más algorítmicas.

Dorier *et* al. (1997) prepararon un taller en el año de 1994 para determinar la naturaleza de ciertas dificultades de los estudiantes en el entendimiento del álgebra lineal. Observan que los estudiantes no han adquirido el estatus en lógica y teoría de conjuntos; sus expresiones muestran restricciones para tratar las ecuaciones como un objeto geométrico. Dorier *et al*., recomiendan el estudio de la geometría cartesiana, insistiendo sobre el análisis de lugares geométricos. Expresan que sin restringirse al dominio de la recta y el plano y bajo ciertas condiciones sobre los algoritmos, la geometría analítica, con enfoque en los lugares geométricos, proporciona imágenes mentales a varios conceptos del álgebra lineal. Permite valorar problemas de interés lineal y construcciones abstractas generales, pero sobre todo se adquiere la relación del carácter lógico y de conjuntos entre ecuaciones y objetos geométricos, además de ser un campo muy amplio de ilustraciones y motivaciones. Esta orientación sobre la investigación de lugares geométricos, con cambio de marcos: geométrico y analítico y cambios de puntos de vista entre las ecuaciones no paramétricas y las paramétricas, puede ser un medio de ayudar a adquirir el estatus de lógica y teoría de conjuntos, asimismo, de la noción de ecuación de un objeto geométrico (*op. cit.*).

Otro investigador que dedicó muchos de sus estudios al Álgebra Lineal fue Harel; a continuación sintetizamos varias de sus investigaciones:

En su tesis doctoral, sostiene que la enseñanza del álgebra lineal puede iniciarse al final del nivel de secundaria y a principios del nivel superior (Harel, 1985, citado en Dorier, 1990).

Harel (1989) considera importante el estudio del álgebra lineal debido a que se requiere en la mayoría del currículum universitario; sugiere su estudio en el bachillerato como temas selectos de álgebra lineal. Para Harel el problema de los estudiantes para entender los conceptos estriba: 1) Los dominios de aplicación del álgebra lineal no son familiares al estudiante. 2) Propone rápidamente el estudio de los conceptos abstractos y generaliza situaciones específicas, sin establecer primero una base visual firme e intuitiva.

En la misma investigación Harel propone una introducción al álgebra lineal con fundamento en una hipótesis de naturaleza epistemológica y cognitiva, que ayude al alumno a superar las dificultades para su estudio. Para conducir gradualmente a la abstracción plantea un enfoque de tres fases o etapas. En la primera etapa analiza los modelos de vectores del espacio R^3 y del plano R^2, con el fin de proporcionar al estudiante un modelo visual intuitivo de las nociones básicas. A través de la geometría, el estudiante trata no sólo con conceptos, sino en la construcción de procesos en el espacio vectorial geométrico; en este contexto, al definir la base en espacios geométricos, explora el concepto como un conjunto generador.

Después de haber estudiado exhaustivamente los conceptos de combinación lineal, dependencia-independencia lineal, base y dimensión en los espacios vectoriales geométricos, en la segunda etapa construye los modelos coordenados R^1, R^2 y R^3. Con la idea de vector coordenado, así como los conceptos centrales en el proceso de abstracción, examina el espacio vectorial R^n. De acuerdo a Harel, los estudiantes construyen estos espacios vectoriales con una ayuda mínima. Este enfoque es de valor pedagógico, porque los estudiantes ven el ambiente concreto de un sistema matemático y pueden transferirlo a un sistema isomorfo, adaptable a técnicas computacionales. Finalmente establece los conceptos centrales de R^n.

En la tercera etapa, el estudiante ya familiarizado con elementos de la geometría afín, puede abstraer y rebasar el modelo geométrico. Por medio de los sistemas de ecuaciones lineales estudia los espacios vectoriales abstractos de dimensión menor o igual a tres. La importancia pedagógica de esta etapa es que el estudiante comprende la idea de álgebra lineal dependiendo solamente de los axiomas de espacio vectorial. Harel dice haber realizado una experiencia y los resultados obtenidos son significativamente mejores en los estudiantes de la enseñanza experimental que los de la enseñanza tradicional.

Harel (1990) para introducir las nociones básicas del álgebra lineal propone el uso de un vector aritmético al resolver un problema geométrico; en este enfoque implementa el principio de necesidad, pues considera que la visualización no es suficiente para el aprendizaje de las teorías del álgebra lineal. Por este principio el estudiante puede ver la necesidad del curso de álgebra lineal. Harel incluye los factores que deben asumirse por dicho principio y explica que por un lado, el estudiante aprende a manipular símbolos, es decir, distinguir entre el significado de los conceptos y lo que ellos representan. Por el otro, ve cómo un sistema matemático es isomorfo a otro que puede ser mejor para técnicas computacionales y enlaza conocimientos conceptuales con procedimentales.

Sobre la didáctica del álgebra lineal, encontramos la tesis doctoral de G. Gueudet-Chartier (2000): *Papel de la Geometría en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal*. Gueudet-Chartier nos dice que usualmente se considera el enfoque de la geometría para facilitar a los estudiantes el álgebra lineal, no obstante, le parece que se debe mencionar a qué geometría se refiere: si se trata de la geometría vectorial, analítica o euclidiana en el sentido histórico del término o de la geometría practicada en la enseñanza secundaria con un soporte intuitivo o una noción asociada a la posibilidad de visualización.

Gueudet-Chartier define Geometría como una Teoría que tiene por objeto la modelización del espacio físico y se relaciona de manera específica con la realidad (en este caso particular la geometría se limita a la dimensión tres). Toda Geometría es geométrica, y una forma de recurrir a la geometría es empleando en álgebra lineal un ejemplo resultado de una geometría. Gueudet-Chartier plantea dos preguntas: ¿Cuáles son las posibilidades de recurrir a modelos geométricos y figurativos en álgebra lineal? En Francia, ¿cuáles son los recursos efectivamente practicados por quienes enseñan y por quienes estudian álgebra lineal?

Para responder a sus preguntas, desarrolla un estudio histórico sobre modelos geométricos del origen del álgebra lineal. Analiza el proceso de transposición didáctica de la forma moderna del álgebra lineal, al texto actual y estudia la articulación álgebra lineal-geometría en los textos actuales, bajo el ángulo de la evolución de conceptos resultado de la geometría. Para tal fin, cuestiona a quienes enseñan y a quienes estudian licenciatura en la universidad, asimismo, observa sesiones y trabajos dirigidos para determinar recursos geométricos empleados en álgebra lineal. Encuentra los siguientes resultados:

> *El álgebra lineal no puede presentarse como una simple generalización de la geometría, sin embargo, las relaciones con la geometría se pueden explotar en la introducción al álgebra lineal, además de que existen también rupturas con la geometría. La presentación del álgebra lineal en dimensión 3 permite abordar ciertas nociones y propiedades, que pueden constituir un soporte para la introducción de la teoría general.* (Gueudet-Chartier, 2000)

Gueudet-Chartier expone argumentos para declarar la imposibilidad de presentar el álgebra lineal como generalización de una geometría a objetos de dimensión superior a 3:

> *El estudio indica que en los trabajos donde ha constituido avances significativos el papel de la geometría en el origen del álgebra lineal, siempre ha sido por la interacción con otros dominios.*
> *El estudio de los fenómenos de transposición didáctica que han conducido a la introducción del álgebra lineal en los programas del liceo en 1969, muestran la relación entre álgebra lineal y geometría acentuada en el saber enseñado, sin comparación con el saber sabio. Esto se debe al hecho de que esta introducción tuvo lugar después de la reforma de las matemáticas modernas y se ha asociado a la renovación de la enseñanza de la geometría.*
> *Además la limitación a la dimensión 3 induce restricciones al evocar las posibilidades ofrecidas por el álgebra lineal limitada a la dimensión 3* (*op. cit.*).

Gueudet-Chartier obtiene un balance de rupturas, en la evolución de diferentes nociones, entre ellas presenta: La enseñanza se inicia en el liceo y se desarrolla en el marco de la geometría afín euclidiana. El aspecto afín señala el punto como primer elemento; los subespacios considerados son afines, igualmente las aplicaciones sólo tratan sobre los puntos. Cuando se introduce el vector, se relaciona con la noción de translación; esta introducción implica dificultades didácticas conocidas, por ejemplo, en lo concerniente a la separación entre un vector y un representante de ese vector. El primer objeto es el punto; el vector toma importancia después de la definición de producto escalar. Lo afín y lo euclidiano están fuertemente asociados y su separación parece contraria a la intuición en este marco, la ortogonalidad y la norma son nociones naturales. En el liceo, el plano y el espacio se estudian separadamente con diferencia de vocabulario (es notable el empleo de plano y de espacio y no de espacios de dimensión 2 y 3; el término dimensión no se emplea). Asimismo, las rectas y los planos del espacio aparecen como objetos de naturaleza completamente diferente de los espacios completos, la estructura común no se subraya.

Gueudet-Chartier preparó un cuestionario para quienes enseñan álgebra lineal, tratando de determinar qué tanto emplean el dibujo en sus clases; fue evidente que ellos tienen pocos recursos en el dibujo, más precisamente, no parecen emplear un diseño específico para el desarrollo del álgebra lineal. Relacionan poco las enseñanzas del álgebra lineal con la geometría del liceo. La mitad de los cuestionados emiten serias reservas sobre la posibilidad de su empleo. Al parecer no han desarrollado una práctica específica del dibujo en álgebra lineal, emplean diseños poco variados y representan casi siempre rectas, planos y vectores, sobre todo para ilustrar los ejemplos en R^2 o R^3. A menudo las figuras contienen una referencia; prácticamente no existen dibujos de situaciones en el espacio. Entonces, se puede suponer que los estudiantes practiquen poco el dibujo en el álgebra lineal.

Gueudet-Chartier aplicó un cuestionario a los estudiantes de álgebra lineal; como resultado del análisis explica que algunos pueden tener dificultad al recurrir a la geometría del liceo. Entre aquellos que utilizan los dibujos, algunos emplean un modelo figurativo afín; este recurso está asociado a dificultades en álgebra lineal. Algunos estudiantes que al parecer no tienen dificultades en álgebra lineal, no recurren a algún modelo figurativo.

Sobre la didáctica del álgebra lineal, Porter (1997) describe un experimento con enfoque pedagógico, en un curso para los estudiantes con poco conocimiento de las matemáticas. Usa un texto con aplicaciones, pero de escasa teoría. Como complemento al texto, asigna a cada estudiante de la clase la tarea de escribir un capítulo explicando los conceptos de subespacio, base y dimensión. Para motivar la idea de subespacio ellos toman como punto de partida el espacio vectorial solución de un sistema de ecuaciones lineales, éste a su vez motivará la idea de base. Se les pide relacionar estos conceptos con las nociones de líneas, planos, hiperplanos y dimensión. Porter menciona que en términos del aprendizaje de los estudiantes y sus actitudes respecto al material teórico, su experimento tuvo éxito.

Sobre la enseñanza del álgebra lineal, Dorier expresa que algunos estudiantes pueden tener conocimientos escasos para abstraer de los ejemplos que conocen, la estructura de espacio vectorial y para entender la necesidad de las demostraciones; las diversas técnicas que se emplean en ellas o se confunden al usar las condiciones necesarias y suficientes. Manifiesta que para la mayoría de estudiantes el álgebra lineal es solo un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar y están sumergidas bajo una avalancha de palabras, de símbolos, de definiciones y de teoremas nuevos *(*Dorier *et al*, 1997*).*

En Dorier (1995b), encontramos un enfoque para la enseñanza de los llamados conceptos unificadores y generalizadores de diferentes métodos ya operativos en varios contextos, como es el caso de la estructura de un espacio vectorial. Para la enseñanza de ellos, propone usar una secuencia basada sobre un análisis epistemológico; creando un contexto artificial para motivar a los estudiantes a desarrollar los axiomas de espacio vectorial. Según Dorier existen argumentos para incentivar la enseñanza del álgebra lineal en el nivel meta, por ejemplo, en una perspectiva interaccionista, hablar con los estudiantes para justificar la enseñanza de dichos conceptos.

En este mismo artículo, sobre el nivel meta, Dorier nos dice que los conocimientos en matemáticas se necesitan para resolver un problema y tener éxito rápido, con menor gasto de energía cada vez; “las ayudas para la acción” son suficientemente generales para ser recicladas y autogenerar, a diferencia de las recetas. Los elementos de tipo “meta” pueden considerarse como una interface explícita entre los alumnos y las matemáticas, como un todo de conocimientos por adquirir. Los alumnos necesitan integrar los nuevos conocimientos a los precedentes como son representaciones, conocimientos y automatismos. Los conocimientos-meta pueden participar en esta integración, en ciertos momentos precisos, de manera limitada y diferente, según los individuos y bajo ciertas condiciones.

El Grupo de Estudio del Currículum de Álgebra Lineal (en inglés Linear Algebra Curriculum Study Group LACSG) propone el curso de álgebra lineal orientado hacia sus aplicaciones, como un curso de servicio y desarrollado en forma matricial (Carlson *et al*. 1997). Los miembros de este grupo consideran difíciles de entender por los estudiantes, los siguientes temas centrales del álgebra lineal: subespacio, conjunto generador de un subespacio, subespacio generado por un conjunto de vectores, independencia y dependencia lineal, aspectos de la base y dimensión. Según Carlson (1997) las razones de tales dificultades se pueden catalogar en cuatro grupos:

a) El curso se enseña a estudiantes no sofisticados. b) Los estudiantes están familiarizados con algoritmos computacionales menos difíciles y con los conceptos tienen poca experiencia. c) Los estudiantes no tienen experiencia en usar, y mucho menos en determinar, diferentes algoritmos para trabajar con un concepto en diversos marcos. d) Los conceptos se introducen sin conexión substancial a las experiencias anteriores de los estudiantes.

Por su parte Dubinsky (1997) difiere con lo expresado por Carlson *et al.*; comenta que cuando se diseña un curso de álgebra lineal para que tanto estudiantes de matemáticas, como de varias disciplinas lo consideren necesario, planeado con un enfoque desde un punto de vista abstracto, hacia uno más práctico orientado a las matrices, a menudo se comete el error que sugiere identificar lo abstracto con lo poco práctico y la orientación matricial con lo útil. Dubinsky propone las siguientes estrategias pedagógicas: empezar con un análisis de las construcciones mentales específicas de los estudiantes usando la computadora, con un software como *ISETL* para el entendimiento de un cierto concepto. Entonces los estudiantes se encuentran ante situaciones problema, diseñadas para alimentar tales construcciones. Finalmente, en las interacciones entre los estudiantes, el instructor y el problema, los estudiantes tratan de obtener la solución del problema; el instructor induce a los estudiantes a revisar sus construcciones, hacerlas más efectivas al resolver el problema, así como consistentes con las construcciones del instructor.

2.3 Investigaciones en los Modos de Pensamiento Sintético y Analítico

De las investigaciones en álgebra lineal, últimamente han surgido algunas en el medio de la Matemática Educativa, en el enfoque de los modos de pensamiento sintético y analítico. En esta sección en la primera parte presentamos las tesinas de especialidad, en la segunda las tesis de maestría en álgebra lineal y en la tercera una tesis de licenciatura con esta orientación.

a) Tesinas de especialidad

Marines y Monroy (1998) en la tesina de especialidad: "*Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables*", presentan entrevistas a ocho profesores que han impartido cursos de álgebra lineal en nivel superior. Los autores observaron serias dificultades en los profesores para transitar del pensamiento sintético al analítico; los profesores evidenciaron que en sus cursos normales no tratan los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, no obstante, estos temas forman parte de los programas de estudio y son considerados en los libros de texto.

Barrera *et al*. (1998) en la tesina de especialidad: "*Coexistencia del pensamiento sintético y analítico y el concepto de solución en un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables*", muestran los resultados de entrevistas a ocho profesores que han impartido cursos de álgebra lineal en el nivel superior. Los autores refieren los siguientes resultados: Es evidente que la mayoría de los entrevistados trata el concepto de solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a través de la definición, más no lo han entendido, tienen dificultades al aplicarlo en una situación geométrica. Por ejemplo, las gráficas de sistemas que no tienen solución, de planos intersecados por pares y en el caso de dos planos paralelos y uno que interseca, los profesores consideran las rectas de intersección como las soluciones de los sistemas de ecuaciones correspondientes.

Eslava y Villegas (1998) en la tesina de especialidad: "*Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*", exponen entrevistas a cuatro alumnos de educación media superior que han cursado dos semestres de álgebra y uno de trigonometría y geometría analítica. Como resultado de las entrevistas, los autores observan los siguientes puntos: 1) A los estudiantes se les dificultó relacionar los pensamientos sintético y analítico. 2) Los estudiantes no tenían claro el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Como resultado de estos tres trabajos, podemos observar tanto en estudiantes como en profesores la dificultad para relacionar los modos de pensamiento, asimismo, el poco dominio de unos y otros del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas. Pensamos que sería necesario insistir en este concepto ya que es fundamental para el entendimiento de un espacio vectorial. Los estudios iniciados en las tesinas de especialidad se han continuado con algunas tesis de maestría, mismas que presentamos en la segunda parte de esta sección.

b) Tesis de Maestría en Ciencias

Eslava (1999) en su tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemática Educativa: *Análisis de libros de texto de álgebra en el tema de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, en la perspectiva de los modos de razonamiento sintético y analítico*, nos proporciona algunos datos interesantes sobre el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto, propios del bachillerato en México, que pueden explicar la preferencia de maestros y estudiantes por los procesos algorítmicos:

1) *La mayoría de los autores privilegian procedimientos algorítmicos, algunos en un exceso de mecanización al aplicar los métodos de solución de sistemas, propician un acondicionamiento cognitivo para que el alumno resuelva cualquier tipo de ejercicios sin dificultad aparente, aun sin comprender lo que representa gráficamente un sistema de ecuaciones lineales y las diferentes categorías de sus soluciones.*
2) *En algunos textos el lenguaje es complicado o rebuscado, obstaculizando la comprensión de los conceptos.*
3) *Los textos propician más el modo de razonamiento analítico-aritmético* (Eslava, 1999).

Guadarrama (2000) en su tesis de maestría: "*Estudio de la Interpretación Geométrica del Concepto de Solución en los Sistemas de Ecuaciones Lineales*", a la luz de los modos de pensamiento sintético y analítico, con base en las observaciones de las tesinas de especialidad antes mencionadas, presenta una visión de las concepciones de los docentes de las representaciones gráficas asociadas al concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Guadarrama nos dice que existe una fuerte tendencia de profesores y estudiantes a traducir la solución del sistema de ecuaciones lineales al contexto algebraico, desprendiéndose de lo geométrico.

Mora (2001) en su tesis de maestría: "*Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*", preparó una secuencia de problemas y la aplicó a siete estudiantes de licenciatura. De su análisis reporta entre otros, los siguientes puntos:

1) *Los estudiantes manejan un pensamiento analítico y un pensamiento geométrico más o menos elaborado, pero no logran establecer una relación clara entre ambos pensamientos, que fortalezca sus nociones y conceptos.*

2) *Aunque los estudiantes ofrecieron respuestas satisfactorias, no significa que han establecido adecuadamente una conexión entre los modos de pensamiento, transitan entre éstos para llegar a una explicación de la solución que tenga sentido en esos modos.*
3) *En el análisis de expresiones verbales y escritas de los estudiantes, se pueden detectar rasgos de pensamiento analítico y sintético-geométrico, este último les proporciona una idea más común para ellos, de tal manera que pueden contestar correctamente ciertas cuestiones matemáticas. Es en esta interacción entre ideas intuitivas y formales que los estudiantes no logran establecer las equivalencias entre una expresión analítica y una representación geométrica.*
4) *La secuencia aplicada a los estudiantes logró que ellos establecieran una relación entre los modos de pensamiento, sin embargo, no alcanzaron a establecer las equivalencias conceptuales entre los modos analítico y sintético* (Mora, 2001).

Cutz (2005) en su tesis de maestría "*Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*", se interesa en detectar dificultades y estrategias de los estudiantes al momento de hacer interpretaciones en el modo sintético-geométrico y al pasar de este modo de pensamiento al analítico, durante el tratamiento de los sistemas de ecuaciones con dos y tres variables. Diseñó y aplicó un cuestionario a un grupo de estudiantes antes de iniciar el curso de álgebra lineal. Del análisis de los cuestionarios seleccionó 5 estudiantes para aplicarles una entrevista, para observar si las concepciones de los estudiantes persisten o se modifican al concluir el curso de álgebra lineal. Menciona entre otros resultados que muchas de las concepciones y nociones observadas en el análisis del cuestionario diagnóstico y que se relacionan con el concepto de solución, persisten en el estudiante después de haber concluido el curso de álgebra lineal. La mayoría de los entrevistados tienen grandes dificultades para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y si éstos se representan gráficamente con rectas y planos sobrepuestos, los estudiantes afirman que tales sistemas no tendrán solución.

c) Tesis de licenciatura

Ramírez (2005) en su tesis de licenciatura "*Dificultades que presentan los estudiantes en los Sistemas de Ecuaciones Lineales en los Modos Geométrico y Analítico*", analiza el caso de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Ramírez aplicó un cuestionario de diagnóstico a un grupo de estudiantes que ingresaban a la Universidad de Chapingo, en el área de Ingeniería. Del análisis del cuestionario seleccionó a 5 estudiantes y les aplicó una entrevista cuando habían terminado un curso de matemáticas que duró aproximadamente 6 semanas en el que habían hecho uso del software Graphics para representar los sistemas de ecuaciones lineales. Entre otras presenta las siguientes observaciones: Cuando se les pide a los estudiantes graficar dos rectas que tengan más de un punto en común, la mayoría no logra contestar satisfactoriamente. Si se les proporciona a los estudiantes la representación gráfica de dos rectas encimadas sin referencia (sin valores numéricos en la gráfica) la mayoría de los estudiantes no logra plantear un sistema de ecuaciones equivalentes.

2.4 Trabajos relacionados con un espacio vectorial

Tanto la noción de espacio vectorial que se define aproximadamente de 1920 a 1930, así como su proceso didáctico, nos ofrecen un campo fértil para la investigación. Consideramos los conceptos de base y dimensión ligados al de espacio vectorial, ya que los elementos de éste se definen en relación a una base dada. Es decir, dada la base los elementos del espacio vectorial quedan definidos. A la fecha la noción de espacio vectorial ha sido abordada en trabajos que la mayoría de los autores desarrollan dentro de una investigación general sobre los conceptos del álgebra lineal. En esta sección, presentamos cómo han evolucionado algunas propuestas e investigaciones de este concepto en diferentes enfoques; las referimos en orden cronológico.

Hillel & Sierpinska (1994) expresan que los estudiantes tienen fallas debido a la representación matricial de operadores lineales en diferentes bases. Por este motivo diseñaron dos cursos de álgebra lineal en el nivel de licenciatura; en el primero se les enseñó a los estudiantes cómo representar un mapeo lineal en una base dada y la relación entre dos representaciones matriciales de un operador lineal. En el proceso, los estudiantes aprendieron a encontrar las coordenadas de un vector en una base dada, algunos sólo aprendieron el proceso en un sentido y no podían deshacer lo que habían hecho, habiendo encontrado para un operador lineal una matriz de representación en una base; aun tenían problemas para leer con esta matriz el valor del transformado $T(v)$. En un proceso siempre implica mayor dificultad encontrar el proceso inverso (pensamiento inverso), por lo cual, es conveniente observar el desempeño de los estudiantes en estas situaciones de conflicto.

Hillel & Sierpinska explican la causa de este problema en términos del lenguaje piagetiano: la actividad de representar un mapeo lineal por una matriz en una base no había sido internalizada como una operación. La persistencia de este tipo de errores en esta clase de problemas revela la existencia de un obstáculo de naturaleza conceptual y no relacionada a dificultades del procedimiento operacional. Este problema conceptual es el llamado obstáculo epistemológico, cuya superación puede requerir una discusión con los estudiantes en el nivel meta del problema matemático con el cual se enfrentan, por medio de un debate abierto sobre la naturaleza y el estatus del lenguaje en álgebra lineal, para profundizar su entendimiento.

Saldanha (1995) en su tesis de maestría: T*he Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties*, a partir de un análisis histórico-epistemológico, didáctico-conceptual y empírico, Saldanha desprende posibles fuentes de dificultad para el entendimiento de los conceptos independencia-dependencia lineal. Destaca que usualmente los estudiantes establecen el primer contacto con dichas nociones, a través de la definición formal:

> *Un conjunto de vectores* $\{v_1,..., v_k\}$ *en un espacio vectorial V sobre un campo K es linealmente independiente* $\Leftrightarrow [c_1 v_1 +... +c_k v_k] = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 =... = c_k = 0]$, *donde* $c_j \in K$. *Un conjunto de vectores es linealmente dependiente* $\Leftrightarrow$ *no es linealmente independiente* (Saldanha, 1995).

La forma de definir los vectores v_j depende de la naturaleza del espacio vectorial V. Si la estructura es abstracta, se definen por los axiomas como elementos que satisfacen ciertas propiedades y tienen ciertas funciones. Por otro lado si V es el espacio R^n entonces estos vectores pueden definirse por la construcción de n-adas.

Saldanha aclara que la noción de dependencia lineal se define con referencia a la negación de independencia lineal. Así, las condiciones son mutuamente excluyentes: un conjunto de vectores debe ser dependiente o independiente y nunca ambos. Esta introducción de los conceptos presenta la independencia lineal como noción central y la dependencia como noción auxiliar, sin embargo, deben ser igualmente importantes.

Según menciona Saldanha, el concepto se introduce de esta manera por varias razones: 1) Las afirmaciones son categóricas, ofrecen concisión y economía en la exposición. 2) Las definiciones son concluyentes, las afirmaciones son lo suficientemente abstractas y generales para aplicarse en todos los casos y contextos. 3) La afirmación ofrece consistencia y unificación de lenguaje en el enfoque de la teoría de conjuntos, para la construcción de la teoría del álgebra lineal. 4) Estas definiciones operacionales, en espacios R^n (y espacios isomorfos), proveen utilidad para la independencia-dependencia lineal, reduciendo la cuestión de dependencia a una existencia de soluciones no triviales para ciertos sistemas de ecuaciones homogéneas.

Saldanha considera posibles fuentes de dificultad para los estudiantes en el entendimiento de la noción de independencia lineal las siguientes: 1) En este enfoque el lenguaje de la teoría de conjuntos va contra la intuición. 2) La construcción lógica de la definición de independencia es complicada, pues involucra una implicación compuesta; en general las afirmaciones compuestas son difíciles de usar y aplicar por su naturaleza abstracta.

Saldanha desarrolla un análisis de las nociones en libros de texto de álgebra lineal. Del texto de Griffel (1989): *Linear Algebra and its Applications*, sobre el concepto de base de espacio vectorial, observa que se encuentra en el contexto de la geometría, definido en lenguaje de coordenadas. Una base para los vectores en el plano se define como un par de vectores no nulos en diferentes direcciones y una base para los vectores en el espacio es un conjunto de tres vectores no nulos y no en el mismo plano. De esta manera, el nombre de *base* se otorga de manera natural. La base juega un papel muy importante al describir todo el espacio; esto quiere decir que el conjunto tiene ciertas propiedades fundamentales: Los vectores de la base forman un esqueleto sobre el cual se ancla todo el espacio.

Según Saldanha en este enfoque los estudiantes pueden tener serias dificultades para entender los conceptos, pues se necesita mucho tiempo para generalizar de los espacios geométricos, de dos y tres dimensiones al espacio n-dimensional y a los espacios vectoriales generales. El lenguaje geométrico es una primera dificultad para describir los espacios, por la caracterización en términos completamente algebraicos. La transición del espacio R^n a los espacios vectoriales generales es una segunda dificultad, por la forma drásticamente diferente de definir los elementos. La tercera dificultad consiste en que los conceptos en R^n para $n>3$ no se pueden visualizar y se deben formular algebraicamente.

Saldanha también analiza el texto de Fletcher (1972): *Linear Algebra through its applications*. Sobre el enfoque de Fletcher, refiere que los conceptos se introducen en contexto, de manera completamente informal. Para Fletcher un vector es cualquier objeto matemático que cumple las siguientes condiciones: *(i)* puede sumarse con otro *(ii)* puede multiplicarse por escalares"; el espacio vectorial es "El conjunto de vectores con estas dos operaciones". Los conceptos de base y dimensión se introducen informalmente en el contexto de progresiones aritméticas. Según Saldanha, en este enfoque una posible fuente de dificultad para los estudiantes es la falta de definiciones formales de los conceptos básicos del álgebra lineal.

Hillel (1997) analiza el problema de la representación de los vectores por medio de una base; expresa que origina el máximo de confusión a los estudiantes pasar de la representación abstracta a la algebraica, cuando el espacio vectorial de referencia es R^n. En este caso, una n-ada se representa por otra n-ada relativa a una base β. Así, el objeto y su representación son n-adas, aún si no es exactamente igual la lista de números. Lo propio se puede decir de una transformación matricial A que inicialmente se considera como un operador lineal con una representación matricial (eventualmente diferente) relativa a una base dada. En el momento en que los estudiantes encuentran los vectores por primera vez principalmente en el contexto de los espacios R^n, identifican la lista de números con los vectores. No obstante, cuando representan los vectores o los operadores lineales en diferentes bases, entonces la lista de números puede ser la representación del vector en la base canónica o la representación del vector relativa a otra base, entonces el vector se puede representar por diferentes listas de números.

La tesis doctoral de Nardi (1996): *The Novice Mathematician's Encounter With Mathematical Abstraction: Tensions in Concept-Image Construction and Formalisation*, es una investigación más general en álgebra lineal y abstracta; en ella converge un análisis sobre los conceptos de generar y base de un espacio vectorial. Nardi, al observar un curso de álgebra lineal diseñado para establecer una transición entre las operaciones con matrices y los contextos más generales de espacios vectoriales, encuentra tensiones del principiante en matemáticas para el entendimiento de la imagen-concepto, construcción y formalización en el proceso de abstracción matemática.

Nardi explica que cuando se proporciona a los estudiantes definiciones más prácticas del concepto de generar y conjunto generado parece que olvidan las definiciones de las lecturas. El tutor mismo se tensa en una clase de álgebra lineal, en el momento de establecer la noción de generar, pues no se había percatado que la definición de generar dada en las lecturas era tan abstracta. La transición de las operaciones matriciales a los contextos más generales de espacios vectoriales no es fácil ni está exenta de problemas. Evidencia la tensión subyacente en estas sesiones, entre la novedad del concepto de generar y la familiaridad de los estudiantes con la metáfora geométrica del plano. Del grado de abstracción de los conceptos, nos dice que las clases tutoriales son un ejemplo característico de la enorme influencia ejercida por los tutores sobre los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Sobre los problemas de lingüística, expone dificultades del estudiante con la nueva terminología del álgebra lineal y encuentra una complicación adicional entre conjunto generado y conjunto generador. La dificultad semántica para los principiantes representa una relación equivocada de los términos, de la misma manera refleja la relación equivocada de causa y efecto conceptual. Estas deficiencias lingüísticas, posiblemente revelan y determinan parcialmente restricciones del entendimiento de los principiantes en estos conceptos nuevos para ellos. Otro elemento de dificultad lo representa el vector cero, por la ambivalencia del término cuando se interpreta como nada: "puesto que cero es nada, produce nada". Algunos estudiantes no pueden ver clara la generación de un espacio vectorial por el vector cero, a saber, el espacio vectorial formado por el vector cero.

Una dificultad más surgió con el concepto de generar: cuando a un estudiante se le pidió el conjunto generado con dos vectores en un plano, pensó en las dos rectas que contienen los vectores y no vio que con los dos vectores podía generar el plano. Lo mismo sucedió al pasar del plano al espacio de dimensión 3. Nardi expresa que para el estudiante representa una conveniencia aprender bien la receta de la línea, el plano y el espacio. En un sentido es como aprender imitando, para adquirir el hábito de razonamiento en una forma no completamente razonada.

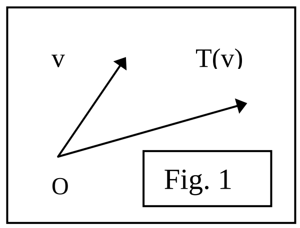
Sobre teoremas como el de la dimensión: $\dim(X+Y)=\dim X+\dim Y-\dim(X\cap Y)$ donde X y Y son espacios vectoriales, emplearon varios argumentos matemáticos persuasivos para lograr la aceptación del estudiante, no obstante, notan una expresión de queja generalizada de los estudiantes al ver la lectura, sólo perciben un excesivo cúmulo de conocimientos teóricos. Por ejemplo, de la base usual del espacio vectorial de los polinomios, Nardi expresa que por un lado, el conocimiento de los estudiantes es descontextualizado y por el otro, consideran ambigua la naturaleza del 1 (1 por ejemplo, como un número o como la función constante de valor uno).

Nardi (1997) presenta algunos resultados de su proyecto doctoral acerca de las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático principiante en su encuentro con la abstracción matemática. Hace una entrevista a estudiantes de la carrera de matemáticas en la Universidad de Oxford para que expongan sus conceptos de las nociones algebraicas de espacio generado y conjunto generador. En las entrevistas se dieron a los estudiantes las palabras *generar, ser generado por, conjunto generador, espacio generado*. Nardi encuentra una tendencia dominante en ellos de mantener una imagen conceptual de un conjunto generador que es al mismo tiempo linealmente independiente, es decir, que es base del espacio vectorial en cuestión.

Maracci (2003) reporta la primera parte de un proyecto de investigación en proceso, cuyo objetivo es identificar en los estudiantes de licenciatura dificultades y errores al resolver problemas de álgebra lineal. En particular se enfoca en las nociones de la teoría de espacios vectoriales y especialmente en el concepto de combinación lineal. El análisis de Maracci es en términos de la dualidad proceso-objeto Sfard (1991). Establece que las nociones abstractas pueden pensarse en dos formas diferentes, como procesos estructuralmente y como objetos operacionalmente. Maracci destaca que algunos fracasos de los estudiantes pueden ser consecuencia de la dificultad de percibir la combinación lineal simultáneamente como objeto y como proceso.

Dorier *et al*. (1997) expresan que el álgebra lineal requiere madurar cierto grado de formalismo, pues es el resultado de un gran proyecto de formalización, el cual unifica y posibilita soluciones económicas y análogas a los problemas donde se revela la linealidad, por ejemplo, hace falta trabajar sobre las ecuaciones olvidando momentáneamente lo que representan y regresar a ellas cuando sea necesario. Encontramos las siguientes reflexiones en Dorier *et al*.: Los estudiantes tienen solamente un dominio operatorio al establecer la correspondencia entre subespacios y ecuaciones. A partir de las ecuaciones lineales homogéneas, saben calcular una base de un subespacio “asociado” e inversamente, saben encontrar las ecuaciones paramétricas para un subespacio dado. Los estudiantes trabajan aun si no comprenden el sentido de los algoritmos, no obstante, el contrato didáctico exige aplicar para el aprendizaje ciertos algoritmos sobre numerosos ejercicios; ésta es la fuerza y la debilidad de la didáctica.

Sierpinska *et al*. (1999) diseñaron actividades empleando el Cabri-géomètre II, con el objetivo de evitar el obstáculo del formalismo en los estudiantes, quienes debían verificar la linealidad de una transformación. La estrategia consistía en construir por medio de Cabri el vector transformado *T(v)* para un vector *v* dado en la pantalla (Fig. 1). Todos los trazos para la transformación eran escondidos, la única forma para obtener información sobre la misma sería jalando el vector *v* y observando la posición de *T(v)* relativa a *v*. La transformación *T* no se daba por fórmulas, de esta manera, para comprobar si la transformación *T* era lineal era necesario verificar los axiomas de la definición. Evitaban la definición de la transformación como una función que preserva las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar.



Con este diseño la construcción del vector *T(v)* de la transformación en la representación Cabri resultó dependiente del vector *v*, al cambiar de acuerdo a como se jalaba el vector *v* alrededor de la pantalla. Para el estudiante, la representación del vector no era de un objeto abstracto, sino de un objeto concreto, una flecha elástica que se movía en la pantalla y podía ocupar cualquier lugar del plano, así un vector se caracterizaba por su longitud, no por su dirección.

Un problema fundamental del diseño era extender la transformación lineal dada en una base, a una transformación lineal en todo el espacio. La información dada era suficiente para determinar completamente la transformación lineal de un plano vectorial por sus valores sobre una base; cada uno de estos valores se podía representar por un par de números y la transformación lineal por un arreglo de cuatro números, la representación matricial con respecto a una base resultaría clara en este enfoque.

Dos vectores no colineales trazados en la pantalla Cabri representaban la base de un espacio vectorial en dos dimensiones (sin la definición de norma). Por ejemplo, en las figuras 2a y 2b, aparece el vector $v = 2.30v_1 - 1.70v_2$ en dos diferentes representaciones en el plano, o dos vectores diferentes representados por el mismo par de números en dos diferentes bases del plano vectorial.

El vector $v = 2.30v_1 - 1.70v_2$ se podía representar por flechas en diferentes posiciones sobre la pantalla, dependiendo de la selección de la representación de la base v_1 y v_2. También las dos figuras pueden verse como la representación de un cambio de base; podría interpretarse que los dos pares de vectores v_1 y v_2 en las figuras representan dos bases diferentes de un plano vectorial, es decir, las figuras ilustran el hecho de que las coordenadas de un vector dependen de la base: las mismas coordenadas no necesariamente significan el mismo vector.

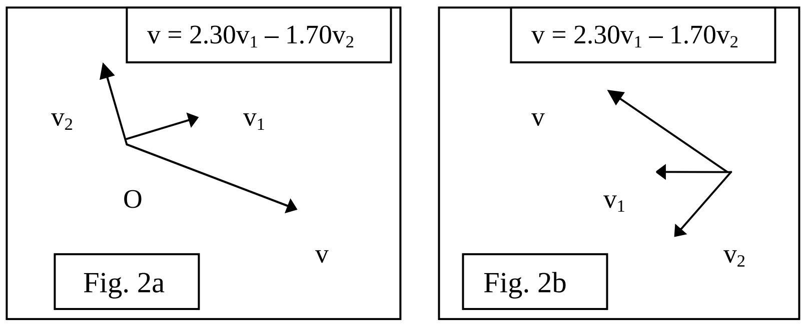


Fig. 2a Fig. 2b

Sierpinska *et al*. (1999) también observaron la preferencia de los estudiantes por la primera interpretación, sintiéndose libres para arreglar las flechas que representaban la base, en la forma más conveniente para ellos. Usualmente elegían ver los ejes en la posición horizontal-vertical.

Sierpinska (2000) caracteriza el pensamiento teórico por una reflexión consciente sobre el significado semiótico de las representaciones del conocimiento y por sistemas de conceptos más que agregado de ideas. Los modos de pensamiento teórico y práctico difieren grandemente en la forma en la que organizan el significado de las palabras. Para el pensamiento práctico los objetos matemáticos son “objetos naturales”, no objetos “discursivos”, es decir, definiciones y teorías sólo pueden describirlos, no crearlos o construirlos. Pensar en términos de ejemplos prototípicos más que definiciones resultó un obstáculo para el entendimiento de los estudiantes cuando trataban la noción de transformación lineal. Sierpinska comenta que en el curso de álgebra lineal se definió la transformación lineal T como la transformación de espacios vectoriales que conserva las combinaciones lineales: T transforma un espacio vectorial en otro espacio vectorial y es tal que $T(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1Tv_1 + k_2Tv_2$, para cualesquiera escalares k_1 y k_2 y vectores v_1 y v_2 del espacio. En los estudiantes se reveló el obstáculo cuando intentaron resolver el llamado “problema de extensión lineal”: dada una transformación lineal de una base construir una transformación lineal del plano con esos valores en la base. El problema fue restringido a dos dimensiones y los estudiantes asumieron la existencia de tal extensión para encontrar la información que faltaba. Sierpinska nos dice que para los estudiantes hay una gran diferencia entre encontrar imágenes de combinaciones lineales concretas y encontrar la imagen de cualquier vector. Parece que esta diferencia tiene dos orígenes: una es la necesidad de construir una representación de "cualquier vector" que no está dado; la otra es la necesidad de tener una noción de definición axiomática.

Uicab (2004) en el enfoque de los pensamientos teórico y práctico, presenta una investigación sobre el "problema de la extensión lineal", tomado de Sierpinska (2000). Para detectar si algunos errores que cometen los estudiantes cuando resuelven un problema, se pueden explicar porque no hacen las conexiones entre los conceptos que forman un sistema. Uicab expresa que posiblemente el problema es que los estudiantes no pueden hacer una conexión entre los conceptos de base y transformación lineal.

Sierpinska *et al*. (2002) exponen que el pensamiento teórico interviene grandemente en el desarrollo del conocimiento científico y se desarrolla contra el pensamiento práctico, el cual de ese modo constituye una condición para la existencia y significado del pensamiento teórico. Entonces justifican que el pensamiento teórico es necesario para entender el álgebra lineal. Entrevistaron a un grupo de 14 estudiantes seleccionados por sus altas calificaciones en álgebra lineal, en una de las preguntas se les pedía comentar sobre la definición de independencia lineal de un estudiante ficticio:

> *En un examen final de álgebra lineal había una pregunta respecto a la definición de independencia lineal de vectores. Un estudiante escribió:*
> *Un conjunto de vectores* $\{v_1,\ldots v_n\}$ *se llama linealmente independiente si* $a_1v_1+\ldots+a_nv_n = 0$
> *(i) ¿Qué piensas de esta definición?*
> *(ii) El mismo estudiante entonces escribió que el conjunto de vectores* $\{(1,2)\ (2,4)$ *es linealmente independiente. ¿Dirías que lo que el estudiante dijo se sigue de la definición?*

De acuerdo a Sierpinska *et al*. la parte (i) se encuentra en las experiencias docentes de profesores de álgebra lineal (Sierpinska, 1997). Los estudiantes que dicen o escriben esta clase de "definiciones" no tienen el sentimiento de que está incompleta porque ellos leen la ecuación $a_1v_1+\ldots+a_nv_n = 0$ no como un sujeto de un verbo sino como una cláusula con el predicado "es igual a" representada por el signo igual. Diez de los 14 estudiantes notaron la falta de precisión del dominio de las variables en la citada "definición" (pensamiento teórico), los otros la dieron por garantizada (pensamiento práctico). De la parte (ii) dicen que los estudiantes pueden fallar pues no notan la imprecisión de la parte (i); entonces no la pueden tomar como premisa en la implicación de la parte (ii). Siete estudiantes respondieron con dudas respecto a lo establecido en (ii), como implicación lógica de la “definición” (i), (pensamiento teórico). Las respuestas de los otros siete estudiantes indican un pensamiento práctico.

En otra pregunta sobre la independencia-dependencia lineal Sierpinska *et al*. introdujeron errores tipográficos.

> *Sean u, v y w vectores en un espacio vectorial V sobre R. Demostrar que los vectores u-v, u-w y y+v son linealmente independientes*.

La intención del instructor era tener un conjunto de vectores incondicionalmente dependientes por ejemplo *u-v*, *w-u*, *v-w*. Pero en la pregunta dada {*u-v*, *u-w*, *v+w*} son independientes para algunos vectores *u*, *v* y *w*. Entonces la conclusión de que el conjunto *u-v*, *u-w* y *v+w* es dependiente para cualquier conjunto de vectores no es cierta. Sierpinska *et al*. comentan que esta pregunta ilustra el rol del pensamiento práctico como un obstáculo epistemológico del pensamiento teórico, es decir, un pensamiento en contra del que se construye el pensamiento teórico y sin el cual éste no se puede construir.

Da Silva y Lins (2002) presentan una investigación sobre el significado de la noción de base de un espacio vectorial. En el marco de Modelos Teóricos de Campos Semánticos (en inglés TMSF), denotan y caracterizan su objetivo como “lo que una persona puede decir y realmente dice de un objeto en una actividad dada”. Da Silva y Lins realizaron un estudio histórico-crítico, con el interés de determinar “en cuáles campos semánticos operaban los matemáticos, quiénes constituyeron la noción de base en el proceso histórico, dónde emergen las nociones elementales de álgebra lineal”. Seleccionaron un número considerable de libros de texto de álgebra lineal, con el propósito de analizar el significado del concepto de base a partir de su lectura y caracterizar dicha noción. Con el principio guía para su investigación: “Cómo establece el autor del libro la base de un espacio vectorial de dimensión finita”, encontraron las siguientes definiciones:

> 1) Una base de un espacio vectorial es un conjunto ordenado de vectores, que son linealmente independientes y generan todo el conjunto de vectores.
> 2) Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes, tales que el número de vectores en él es igual a la dimensión del espacio vectorial.

Da Silva y Lins propusieron la siguiente cuestión a dos estudiantes para ilustrar cómo uno de estos significados de la base puede afectar el razonamiento para el mismo problema:

> Considera R^3 con la estructura de espacio vectorial y el conjunto A = {u = (1,0,0), v = (0,1,-1), w = (0,0,2)} ¿A es una base para R^3?

El estudiante 1 dijo “sí” y justificó: El conjunto A es linealmente independiente, porque ninguno de los vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros dos y también A genera el espacio entero.

El estudiante 2 dijo “sí” y justificó: R^3 es un espacio vectorial y dimensión $R^3 = 3$. Como los vectores en A son linealmente independientes, A es una base para R^3.

El estudiante 2 de alguna manera debe determinar la dimensión del espacio vectorial en que está trabajando. Así, en muchas situaciones, esta definición lleva al estudiante a la noción de espacio natural R^3, no de espacio vectorial. Da Silva y Lins expresan que la complejidad de los significados que se obtienen, sólo puede tratarse con una educación matemática propia, si se quieren hacer los procesos el objeto central de estudio y entendimiento.

Comentarios

Observamos en los trabajos analizados diversas las fuentes de dificultad para el aprendizaje del álgebra lineal, unas se deben a la naturaleza del álgebra lineal, por ejemplo, que las nociones no aparecen como soluciones a problemas matemáticos. Algunas de tipo conceptual, del lenguaje, simbología y representaciones visuales; otras se deben a la forma usual de trabajar del estudiante con algoritmos. El entendimiento de la teoría axiomática de espacios vectoriales requiere de varios niveles de abstracción y meta-cognición; además de motivación del estudiante. De los conceptos previos y externos al álgebra lineal, el entendimiento de lógica y teoría de conjuntos influyen grandemente para que el estudiante se apropie de conceptos tales como independencia-dependencia lineal. Por último, en la enseñanza del álgebra lineal notamos que en algunos estudiantes las nociones de espacio vectorial, base y dimensión pueden estar desvinculadas.

Vemos que Harel (1990) establece el concepto de dimensión en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos nxm, donde n y m $\leq$ 3, primero algebraica y después geométricamente, posteriormente generaliza al caso nxm donde n y m son enteros positivos. Enfatiza los resultados que se obtienen de procesos entre técnicas computacionales y problemas que enriquecen el trabajo, para evitar los cursos de álgebra lineal donde uno de los dos aspectos se favorece. Harel combina el origen del espacio vectorial de acuerdo a la teoría de Grassmann, basándose en una intuición geométrica, en los espacios vectoriales geométricos y en los sistemas de ecuaciones lineales. Para que el estudiante pueda llegar a los espacios vectoriales abstractos, en la proposición de Harel se necesitan tres años, para nuestro medio escolar creemos, sin embargo, difícil de aceptarla. Habría que considerar la posibilidad de implementar un enfoque tal con una mayor ganancia en conocimiento para los estudiantes.

Sierpinska encuentra que el estudiante puede tener un obstáculo epistemológico en el caso de trabajar las transformaciones lineales de espacios vectoriales con diferentes bases. Al introducir la tecnología en sus investigaciones se ha encontrado con diversas dificultades, por ejemplo, que el alumno piense en un vector y su transformado como un elemento asociado, sin pensar en la transformación lineal determinada por los valores sobre la base. Por otro lado tanto Sierpinska como Gueudet-Chartier confirman la tendencia de los estudiantes a usar la base de un espacio vectorial en la posición horizontal-vertical, es decir la canónica.

Los estudiantes deben entender los conceptos de combinación lineal, generar vectores, independencia-dependencia lineal, así como establecer una relación entre ellos para entender el concepto de base y con éste el de espacio vectorial. Sin embargo, observamos que en algunos estudiantes los conceptos parecen aislados.

Si los estudiantes trabajan en los modos sintético y analítico los espacios vectoriales geométricos, pueden obtener mayor entendimiento del concepto al establecer la relación en la representación visual y en los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, se cree que sólo la representación visual puede ayudar a entenderlo, pero como hemos visto esto también puede ser un obstáculo cuando el estudiante generaliza a otros espacios o piensa que no tiene sentido cuando se trata de espacios vectoriales de dimensión mayor a tres.

Usualmente se piensa que el tránsito del espacio vectorial de dimensión 2, R^2, al de dimensión 3 R^3, es fácil, sin embargo, acabamos de ver que no siempre es así; los problemas para el entendimiento de estos espacios vectoriales requieren el entendimiento de los lenguajes geométrico y algebraico, así como madurez de las nociones.

Para continuar nuestra investigación, en el siguiente capítulo presentamos un análisis del espacio vectorial en algunos libros de texto.

3. Análisis de un espacio vectorial en algunos libros de texto

3.0 Introducción

En este capítulo analizamos el espacio vectorial en algunos libros de texto. Investigamos la forma de introducir el concepto, su relación con la base y con las nociones que llamamos germinales de la base: generar vectores y dependencia-independencia lineal. Al estudiar el proceso de transposición didáctica del álgebra lineal, observamos algunas diferencias en la génesis de la materia y la presentación en los textos. Intentamos determinar ventajas o desventajas de la definición de espacio vectorial y cómo podrían influir en un estudiante para el entendimiento del concepto.

En el capítulo 1 desarrollamos un estudio histórico-epistemológico, analizamos cómo las nociones germinales de la base y el espacio vectorial, surgen en los sistemas de ecuaciones lineales. En la geometría nacen las nociones de vector y de espacio vectorial, éste como el conjunto generado por un conjunto mínimo de vectores y finalmente se define en la teoría axiomática.

Ahora nos preguntamos, ¿cómo definen los autores de los libros de álgebra lineal, un espacio vectorial? ¿Lo definen en los espacios vectoriales analíticos R^n? ¿Lo presentan al resolver un sistema de ecuaciones lineales? ¿Es en el modo analítico-aritmético o estructural? ¿En estas definiciones emplean el modo sintético para su estudio, o solamente mencionan la referencia sin mayor profundidad? ¿Lo presentan en ejercicios, o en teoremas? Pensamos que debido al proceso de transposición didáctica en algunos casos el tratamiento pudiera ser superficial evitando el entendimiento del concepto.

3.1 El espacio vectorial en algunos libros de texto

Las tendencias de estudiantes y maestros para analizar el espacio vectorial, depende en buena medida de la forma como se introduce en los libros de texto. Si éstos lo hacen de manera puramente analítica-aritmética, pudieran propiciar en los estudiantes un trabajo algorítmico y mecánico; o en la forma analítica-estructural los estudiantes pueden pensar que no tiene sentido la definición porque no ven claro el concepto. Por otro lado como resultado de nuestras observaciones y de las investigaciones de Gueudet-Chartier, tanto estudiantes como maestros difícilmente abordan un concepto del álgebra lineal empleando elementos del modo sintético-geométrico. Esto nos hace suponer que algunos autores de los libros de texto abordan el concepto en este modo de pensamiento superficialmente.

Analizamos libros de texto indicados para un primer curso de álgebra lineal. El orden cronológico de nuestro estudio permite observar la evolución de la presentación de los temas; por un lado vemos, mayor difusión en el uso de gráficas, así como una tendencia generalizada en el empleo de la tecnología en el estudio de la materia. Por otro lado podemos notar que la forma de abordar los temas es de manera más específica sobre los conceptos del álgebra lineal en los diferentes campos: geometría, álgebra de matrices, etc.

En primer lugar consideramos el texto de los autores Birkhoff & MacLane, quienes desarrollan la teoría con orientación axiomática. Continuamos con el libro de Fletcher; en su análisis conceptos y definiciones surgen en el contexto de problemas. O'Neil trata los espacios vectoriales bajo un enfoque teórico considerando ejemplos tales como los espacios vectoriales geométricos R^2, R^3 y los espacios aritméticos R^n. Los autores Friedberg, Insel y Spence enfocan su estudio a las aplicaciones. Banchoff & Wermer desarrollan el álgebra lineal paso a paso, de R^1, R^2,…R^n, con aplicación a la geometría analítica. Porter & Hill en su texto introducen los conceptos del álgebra lineal en un enfoque tecnológico. Por último Rincón Mejía introduce los espacios vectoriales en forma puramente axiomática.

En el análisis hemos conservado la notación empleada por los autores para evidenciar la diversidad entre ellas, pues creemos que las diferentes simbologías de los textos pueden representar otro problema para quienes inician el estudio del álgebra lineal. Para cada uno de los libros analizados proponemos un título, con el fin de orientar sobre el enfoque de los autores; después del análisis, consideramos pertinente presentar algunas reflexiones sobre el texto. Para terminar, al final del capítulo exponemos una serie de comentarios en una revisión global de los mismos.

3.1.1 *Álgebra Moderna*, Birkhoff, G. & MacLane, S. (1954). El espacio vectorial en la naciente teoría axiomática del álgebra lineal

Con fundamento en las notas de un curso sobre la enseñanza universitaria realizado en una estancia en Alemania (1936), Birkhoff y MacLane publicaron la primera edición de su texto en 1941, con el título original en inglés "*Survey of Modern Algebra*". Realizamos nuestro análisis de la traducción de la 12ª edición inglesa de 1953, publicada en 1954. El texto de Birkhoff y MacLane es una de las primeras obras modernas preparada explícitamente para la enseñanza universitaria.

Para difundir los aspectos más sobresalientes del Álgebra Moderna, los autores destacan el método abstracto de investigación, la axiomatización de los sistemas formales, tales como grupos, anillos, campos y espacios vectoriales. Incluyen en cada una de las unidades gran cantidad y variedad de ejercicios, algunos de cálculos algorítmicos y otros que requieren procesos de abstracción y conceptualización.

Los autores consideran su libro para un curso elemental, sin embargo, encontramos una obra compleja, un compendio sobre los temas más recientes en su época sobre el álgebra moderna, que tratan conceptos abstractos y difíciles para un estudiante. De acuerdo a Birkhoff y MacLane los ejemplos deben ser familiares al lector, resaltan así, la importancia de que todos los conceptos abstractos nacen del análisis de situaciones concretas. En su opinión, los ejercicios deben permitir al profesor adaptar el texto a estudiantes de diversos grados de madurez, por lo cual proponen ejercicios de varios niveles, tanto de mecanicidad como algunos que requieren desarrollos teóricos adicionales.

Para definir la noción de vector, los autores establecen analogía con las magnitudes de la física con dirección y sentido, que se pueden representar gráficamente y cumplen la ley del paralelogramo (figura 1), con leyes algebraicas de adición de vectores y multiplicación por escalares, que en el caso de que los números reales denota por R*.

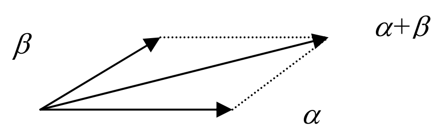


Figura 1

Una vez representados los vectores en el plano, para Birkhoff y MacLane la geometría analítica sugiere representar los vectores por pares de números reales, entonces gráficamente un vector se representa por una flecha con origen en (0,0) y extremos en (a_1, a_2); la suma de vectores y los productos por escalares se calculan por las reglas conocidas de la geometría analítica, dando lugar a las leyes algebraicas del cálculo vectorial. Antes de generalizar la definición de espacio vectorial proponen el siguiente ejercicio para el estudiante:

> Demostrar que cualquier vector α en el plano se puede representar unívocamente como una suma $\alpha = \beta + \gamma$, donde β es un vector sobre el eje x y γ un vector sobre el eje y.

Birkhoff y MacLane generalizan en dos sentidos el concepto de vector:

a) Primero generalizan respecto al número de *dimensiones*: Con referencia a la física, llamando a la intuición del estudiante, en una primera etapa consideran los vectores del espacio vectorial geométrico de tres coordenadas (a_1, a_2, a_3). En una segunda etapa generalizan a los espacios vectoriales aritméticos n-dimensionales: los conjuntos de $\alpha=(a_1,...,a_n)$, donde a_i es un número real y n es cualquier número positivo. En éstos se puede considerar una geometría de n dimensiones, donde las líneas rectas son los conjuntos de elementos de la forma $\alpha+\beta x$ $(\alpha, \beta\neq 0$ fijos, x variable escalar). En una tercera etapa generalizan a espacios vectoriales de dimensión infinita: los conjuntos S de las funciones $f(x)$, donde $f(x)$ es uniforme y continua en la variable real x, en el intervalo $0\leq x\leq 1$. Dos de tales funciones $f(x)$ y $g(x)$ pueden sumarse para dar otra función $h(x) = f(x) + g(x)$, y el producto "escalar" de $f(x)$ por una constante real c es también una función $cf(x)$. En este conjunto S, los vectores tienen una componente en cada punto x del intervalo $0\leq x\leq 1$, esta componente es el valor de la función.

b) En el segundo sentido de generalización consideran los elementos de cualquier campo, no necesariamente de números reales para las componentes de los vectores y los escalares, por ejemplo, los vectores con componentes complejas. Para establecer la relación con un contexto familiar al lector, los autores mencionan sobre el uso constante de los vectores con componentes complejos tanto en electromagnetismo como en la teoría de circuitos eléctricos.

A partir de los ejemplos en los incisos a) y b), Birkhoff y MacLane definen un sistema $V_n(F)$, para cualquier entero positivo n y cualquier campo F, como el conjunto de las n-adas $\alpha=(a_1,...,a_n)$, $\beta=(b_1,...b_n)$, ... con componentes a_i y b_i en F, con las operaciones de adición y multiplicación por escalares. En los ejemplos explican cómo pueden demostrarse las leyes algebraicas para un espacio vectorial R^n, así, tienen las propiedades de espacio vectorial aritmético. Finalmente, resumen las propiedades algebraicas de los vectores para definir espacio vectorial:

> Definición. Se llama espacio vectorial (espacio lineal) V, sobre un campo F, a un conjunto V de elementos llamados vectores, tales que dos cualquiera de ellos α y β determinan unívocamente un vector suma $\alpha+\beta$, y cada vector α de V y cada escalar c de F determinan un producto por escalares $c\alpha$ en V, con las propiedades siguientes:
> V es un grupo abeliano aditivo.
> $c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$, $\quad (c+c')\,\alpha = c\alpha+ c'\alpha$ (leyes distributivas)

(c c´) α = c(c´α), $1\alpha = \alpha$ (Las reglas anteriores son válidas para todos los vectores α y β y todos los escalares c y c´)

Birkhoff y MacLane definen subespacio con referencia a la imagen geométrica en el espacio tridimensional ordinario, $V_3(R^*)$: los vectores situados sobre un determinado plano fijo que pase por el origen, forman por sí mismos un espacio vectorial bidimensional que es parte del espacio entero. Análogamente, el conjunto de todos los vectores situados sobre una recta que pasa por el origen, es cerrado para las operaciones de adición y multiplicación por escalares y por lo tanto, este conjunto también es un subespacio de V_3 (R^*). En el caso general, se tiene la siguiente:

Definición. Un subespacio S de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es también un espacio vectorial con respecto a las mismas operaciones de adición y multiplicación escalar definida en V.

Es condición necesaria y suficiente para que $S \neq \Phi$ sea un subespacio de V, que la suma de dos vectores cualesquiera de S esté en S, y el producto de cualquier vector de S por un escalar esté en S. Consideran ejemplos de subespacios, en R^n y de funciones y polinomios.

Para definir el espacio vectorial generado por las combinaciones lineales de n vectores: ξ_1, ξ_2,... ξ_n de un espacio vectorial V demuestran el teorema:

Teorema 1. El conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores de un espacio *V* es un subespacio de *V*. (Es evidente que es el menor subespacio que contiene a los vectores dados y se dice que es el espacio generado por ellos).

En los ejemplos regresan a la geometría: El subespacio *S* generado por un sólo vector $\xi \neq 0$ es el conjunto de todos los múltiplos $(c\xi)$ *de* ξ. Geométricamente representa la recta que pasa por el origen y por ξ. De modo análogo, el subespacio generado por dos vectores no colineales ξ_1 y ξ_2 es el plano que pasa por el origen y por ξ_1 y ξ_2. Entonces demuestran el siguiente:

Teorema 2. La intersección $S \cap T$ de dos subespacios cualesquiera de un espacio vectorial *V* es también un subespacio de *V*.
Dos subespacios *S* y *T* de un espacio vectorial determinan un subconjunto *S*+*T* formado por las sumas $\alpha + \beta$ ($\alpha \in S$ y $\beta \in T$), este conjunto *S*+*T*, también es subespacio.

Los autores retornan una vez más a la geometría y expresan que el espacio ordinario $V_3(R)$ puede generarse por los tres vectores $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$ y $\varepsilon_3=(0,0,1)$ de longitud uno, situados en los tres ejes coordenados: El conjunto mínimo de vectores que genera el espacio R^3, consta de tres elementos; este espacio no se puede generar por un conjunto de dos vectores, un conjunto de dos vectores no colineales genera un plano que pasa por el origen. Más generalmente, todo $V_n(F)$, puede generarse por los n vectores unitarios: $\varepsilon_1=(1,0, ..., 0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0, ..., 0), ..., \varepsilon_n=(0, ..., 0,1)$. Caracterizan la noción de independencia-dependencia lineal por el resultado del teorema:

> Los vectores $\alpha_1 ,..., \alpha_n$, son linealmente independientes (sobre F) cuando para los escalares $c_1 ,..., c_n$, en F, $c_1\alpha_1 + ,..., + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$, implica que $c_1 = c_2 = ,..., = c_n = 0$. Los vectores que no son linealmente independientes se dice que son linealmente dependientes.
> Teorema 3. Los vectores no nulos $\alpha_1 ,..., \alpha_n$ en un espacio vectorial V son linealmente dependientes cuando alguno de los vectores α_k es una combinación lineal de los precedentes y sólo en este caso.

Como en casos anteriores, Birkhoff y MacLane retornan a los espacios vectoriales geométricos y analizan en un ejemplo la noción de base:

Los tres vectores β_1=(2,0,0), β_2=(1,3,0) y β_3=(0,-2,0) no pueden generar todo el espacio ordinario $V_3(R^*)$, porque están situados en un plano; se pueden relacionar por la ecuación $\beta_1 -2\beta_2 -3\beta_3 = 0$, despejando $\beta_1 = 2\beta_2 + 3\beta_3$. Así, el conjunto ($\beta_1$, β_2, β_3) genera el mismo espacio que el subconjunto (β_1, β_2); éste es un conjunto máximo de vectores linealmente independiente que genera el subespacio. Con este resultado están preparados para definir la dimensión:

> La dimensión de un espacio vectorial, es el menor número de vectores con los que se puede generar el espacio vectorial.

Birkhoff y MacLane definen base de un espacio vectorial:

> Cualquier subconjunto del espacio vectorial linealmente independiente, que genera al espacio entero.

Un espacio vectorial es de dimensión finita cuando contiene una base finita. Los autores analizan los ejemplos: El espacio vectorial solución de una ecuación diferencial de segundo orden que se emplea en Mecánica, Electricidad y en otros problemas sobre vibraciones; el espacio vectorial de los números complejos sobre el campo de los números reales R*; el espacio vectorial F[x] de todos los polinomios de grado $\leq$ n en una indeterminada x sobre un campo F. Birkhoff y MacLane presentan los siguientes resultados a partir de la definición de base:

Teorema 4. La representación de un vector en un espacio *V*, como combinación lineal de los vectores de una base dada, es única.
Teorema 5. Todo espacio vectorial *V* sobre *F* de dimensión finita es isomorfo con un espacio $V_n(F)$ de n-adas.
Teorema 6. Todo conjunto linealmente independiente de elementos de un espacio vectorial de dimensión finita, es parte de una base.

En esta sección podemos clasificar los ejercicios en varios grupos: De enfoque algorítmico en los modos analítico-aritmético y estructural, donde el estudiante tiene que representar un vector en diferentes bases. Algunos ejercicios en R^3 requieren de los modos sintético y analítico, por ejemplo, encontrar diferentes bases y sus representaciones gráficas.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Álgebra Moderna*

Vemos en esta obra, una recopilación de los autores para llevar a las Universidades los temas recientes del álgebra moderna de su época. Del álgebra lineal observamos el esfuerzo por presentar un enfoque intuitivo sobre la noción de vector y espacio vectorial.

En el texto, el concepto de vector surge como una magnitud de la física, en particular en los campos de la Estática, Dinámica, Electricidad y Electromagnetismo; la definición analítica de vector en el plano y el conocido paralelogramo para sumar fuerzas, inducen el álgebra de los vectores. De esta forma, en un afán de presentar la teoría accesible a los estudiantes, los autores obtienen el vector con la herencia de la geometría analítica. Al establecer relaciones tan estrechas entre los conceptos de vector, espacio vectorial, base y dimensión, con la geometría analítica, posiblemente el entendimiento de los conceptos sea superficial y algunos estudiantes no capten la diferencia entre vector geométrico y vector del álgebra lineal, o tengan un concepto intermedio. Sin embargo concientizar al estudiante sobre el uso de las diferentes representaciones pudiera flexibilizar su pensamiento y obtener elementos para el entendimiento de la teoría.

Vemos que los autores con la ayuda de la geometría y la intuición, definen los espacios vectoriales aritméticos de dimensión 2 (R^2) y 3 (R^3); generalizan a los espacios aritméticos R^n, para n>3 y a espacios vectoriales más generales de dimensiones tanto infinitas numerables como infinitas no numerables; otra generalización es sobre los campos numéricos. Aunque la forma de generalizar nos parece abrupta, pues el estudiante empieza el estudio de los espacios vectoriales y en particular R^2, en ese tiempo se pensó que la generalización era sencilla. No obstante, actualmente, de acuerdo con la tesis de Tall

(1991), para ella se requieren cambios en las ideas del esquema mental, debido a que la abstracción es tanto expansiva como reconstructiva.

Los símbolos, el lenguaje geométrico y las imágenes mentales en un principio posiblemente ayuden al estudiante. Sin embargo, el cambio del lenguaje geométrico y el de un enfoque teórico-conjuntista, puede representar una dificultad en la construcción de la teoría del álgebra lineal (Sierpinska, 1994). Así, vemos un impedimento para el entendimiento de los espacios vectoriales, en la lógica que implica el uso de cuantificadores; así como el significado de los elementos de la teoría, en un enfoque estructural. No obstante, para ver la teoría el principiante se pudiera ayudar con la referencia a elementos tales como la geometría, la intuición y las aplicaciones.

Desde un inicio, los autores abren un camino para trabajar con el espacio vectorial y los conceptos de generar e independencia lineal heredados de la geometría analítica, asimismo, cuando definen los subespacios. Aunque las propiedades de las nociones surgen como en la historia y pueden ayudar a su entendimiento, pensamos que es necesario profundizar en el concepto de espacio vectorial y su relación con los conceptos germinales.

Los autores tratan de establecer relación entre los espacios vectoriales en situaciones concretas, por ejemplo, en Mecánica y Electricidad. No obstante, en un curso elemental, la teoría puede resultar difícil para los estudiantes. Cuando generalizan de los espacios vectoriales geométricos de dimensiones 2 y 3 a los polinomios y las ecuaciones diferenciales, se requiere del estudiante un escenario de conocimientos muy amplio para trabajar todos esos conceptos en la teoría formal.

Para la construcción de los espacios vectoriales en el enfoque de los modos de pensamiento, vemos el modo sintético-geométrico tanto en el lenguaje, como al llamar a la intuición. En el analítico-aritmético y estructural se manifiesta cuando establecen los axiomas de espacio vectorial en R^2 y continúan con los axiomas en R^n. En el esfuerzo de los autores por presentar la nueva teoría axiomática (1941) para la enseñanza universitaria, emplean una forma híbrida para definir espacio vectorial en R^2 y en R^n. Los ejemplos y ejercicios para generalizar la teoría conducen al estudiante, quien debe conocer la teoría de funciones y de campos numéricos. El espacio vectorial en el texto tiene las tres raíces de los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y estructural. Birkhoff y MacLane alientan el estudio de los espacios vectoriales con la intuición y el lenguaje del modo sintético-geométrico, establecen las definiciones y resultados en el modo analítico, no obstante, regresan al sintético en los ejemplos.

3.1.2 *Linear Algebra Through its Applications*, Fletcher, T. J. (1972). El espacio vectorial en el contexto de problemas

El enfoque del texto es poco común. De acuerdo con la explicación del autor, al escribir el libro tuvo la idea de hacerlo diferente a muchos libros de álgebra lineal; su objetivo era aproximarse a las teorías por medio de problemas. La mayoría de las ideas de un curso introductorio de álgebra lineal se encuentran en el libro; Fletcher acepta los resultados de las teorías, su principal objetivo es demostrar la necesidad y los propósitos de las mismas, remite a quienes deseen profundizar en la materia a la bibliografía adecuada.

De acuerdo con Fletcher, a pesar de que el material del libro no es exhaustivamente teórico, es propio para los maestros de secundaria, quienes buscan incrementar sus conocimientos en álgebra lineal; asimismo, su enfoque es valioso para los estudiantes de preparatoria o universidad. Fletcher considera aplicaciones particulares del álgebra lineal en geometría, física, estadística y otras áreas, no obstante, no es una guía para los expertos que ya conocen la teoría. El enfoque es en la forma de aplicaciones seleccionadas porque de manera natural conducen a la idea clave de la teoría.

En opinión de Fletcher, a primera vista varias situaciones parecen muy diferentes, sin embargo, las investigaciones han encontrado estructuras similares para todas ellas: la de un espacio vectorial. De esta manera, la pregunta no debe ser ¿qué es un vector? La pregunta adecuada es ¿cómo se comporta un vector? (Saldanha, 1995); por lo tanto, en cada uno de los ejemplos analiza el comportamiento de los vectores, e introduce el concepto en el contenido de problemas.

Como primer ejemplo, en el contexto de las progresiones aritméticas muestra: 1) Si se suman término a término dos progresiones aritméticas se obtiene otra progresión aritmética. 2) Si cada uno de los términos de una progresión aritmética se multiplica por una constante, el resultado es una progresión aritmética. Entonces el conjunto es cerrado respecto a la operación suma y a la multiplicación por un escalar. Con este resultado Fletcher generaliza: Cualquier sistema que se comporte en esta forma, es un espacio vectorial o espacio lineal y los elementos del espacio son los vectores. En este contexto, las siguientes progresiones I) y

II), son una base del espacio vectorial, pues cualquier progresión aritmética se puede expresar en términos de éstas:

I) **x** = 1, 1, 1, 1,...
II) **y** = 0, 1, 2, 3,...

Como una consecuencia inmediata del resultado anterior, el espacio de las progresiones aritméticas es de dimensión 2. En esta sección Fletcher propone los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.1: Considerar 3 progresiones aritméticas, demostrar que siempre es posible expresar una linealmente en términos de las otras 2.
Ejercicio 1.2: Representar la progresión aritmética $p\mathbf{x} + q\mathbf{y}$ por el punto (p, q) en un plano Cartesiano. ¿Cuáles puntos representan las progresiones aritméticas que son múltiplos escalares del representado por (p, q)? ¿Cómo es la adición aritmética de progresiones representadas en el plano Cartesiano?

Vemos que en el ejercicio 1.1 maneja el concepto de dependencia lineal. En el ejercicio 1.2 cuando Fletcher establece el isomorfismo: $(1,0) \leftrightarrow x$, $(0,1) \leftrightarrow y$, entre las progresiones aritméticas y los puntos del plano Cartesiano nacen las ideas de base canónica, y subespacio generado por (p, q).

En el ejemplo 2 sobre las matrices mágicas y semimágicas 3x3, verifica los axiomas de espacio vectorial, revisa las nociones de base y dimensión para los espacios vectoriales, define la noción de subespacio y considera cierto el siguiente resultado: Cualesquiera dos conjuntos de vectores independientes que sean una base para un espacio contienen el mismo número de vectores. De esta forma introduce rápidamente los conceptos de base, dimensión y subespacio.

En el contexto de los polinomios demuestra la conveniencia de tomar algunos de éstos como base y expresar los otros elementos del espacio vectorial en términos de ellos; dependiendo de las características de los polinomios, trata de encontrar la "mejor" base para el espacio vectorial. Fletcher después de analizar diferentes ejemplos de espacio vectorial, en física y química para definir una variedad lineal sobre un campo F, establece que un conjunto de vectores es una base o una base minimal para un espacio vectorial en los siguientes términos:

Una base es un conjunto de vectores linealmente independiente y cada vector del espacio puede expresarse en términos de ellos.

Fletcher pretende encontrar un conjunto de vectores que satisfagan la segunda condición, es decir, que cada vector del espacio vectorial se pueda expresar en términos de ellos. Este conjunto no cumple necesariamente la condición de independencia lineal, sin embargo, siempre es posible encontrar un conjunto menor de vectores linealmente independientes y de esta forma una base para el espacio vectorial: Un conjunto dado de vectores $\{x_1, x_2, \ldots x_k\}$, genera el espacio vectorial de las posibles sumas lineales de la forma $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$ donde las λ's son de un campo numérico, usualmente de los números reales. Como los vectores x's pueden ser linealmente dependientes, entonces la dimensión del espacio vectorial no puede exceder a k. Así, el autor relaciona al espacio vectorial las nociones de base, dimensión, generar y dependencia-independencia lineal.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Linear Algebra Through its Applications*

Fletcher imprime en su texto un enfoque no convencional al examinar las ideas de álgebra lineal en el contexto de problemas, dejando al lector descubrir por sí mismo la teoría. Expone una definición de espacio vectorial con elementos de la aritmética que pueden entender estudiantes aún de bachillerato. Sin embargo, como hemos analizado en los capítulos anteriores, para un estudiante no es fácil descubrir la teoría.

El autor utiliza el ejemplo de las progresiones aritméticas para definir espacio vectorial, base y dimensión. En el ejercicio 1.2 surge la noción de subespacio cuando establece un isomorfismo entre las progresiones aritméticas y el plano Cartesiano. Podemos ver su enfoque en cierto sentido inverso al usual, de definir el espacio vectorial en el plano, así como definir primero la base y después las nociones de combinación lineal, generar e independencia-dependencia lineal.

Fletcher considera, por un lado, más importante la propiedad de expresar cualquier vector del espacio vectorial como combinación lineal de los elementos de la base, y por otro, primero define la base y después surge el concepto de dependencia lineal. En este enfoque el estudiante puede ganar entendimiento cuando emplea la propiedad de que los elementos del espacio vectorial se pueden expresar a través de una base. La noción puede resultar más interesante para él y no una consecuencia que posiblemente conceptúe superficial, como en el caso de expresar los vectores del espacio vectorial con referencia a los vectores unitarios del plano cartesiano, una noción de la geometría analítica ya conocida y la propiedad resulta inmediata.

Esta orientación de discutir situaciones de las cuales emerjan las ideas de la teoría, puede ayudar al estudiante a familiarizarse con las nociones; al introducir los conceptos en el contexto de los ejemplos, puede ver la utilidad de ellas cuando se percate de la simplificación al expresar los vectores en términos de una base dada. Sin embargo, para que el estudiante pueda abstraer las ideas de la teoría, necesita conocer los diferentes contextos que maneja el autor, debe tener un gran acervo de conocimientos en los campos de la física, química, estadística, etc. Un estudiante puede desarrollar intuición para ver los conceptos; no obstante, para el entendimiento de las nociones del álgebra lineal le pueden faltar elementos estructurales y pudiera causarle dificultades tanto en sus razonamientos como en el desarrollo de los cálculos.

El punto de vista de la geometría comúnmente tiene el objeto de usar métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, sin embargo, el mismo Descartes emplea la configuración geométrica para ilustrar y ejemplificar relaciones algebraicas; Fletcher adopta este punto de vista. No estudia la geometría como la ciencia del espacio físico, sino se limita a los aspectos de geometría y álgebra aplicables a otras ramas como la mecánica y estadística. Sin embargo, la aplicación a la mecánica no es en el sentido del espacio físico de tres dimensiones, sino por la razón menos obvia de la geometría n-dimensional que explica el comportamiento de un sistema mecánico con n partes movibles independientes.

En la presentación de Fletcher, las nociones germinales surgen después de las definiciones de base y dimensión, como una propiedad asociada a las combinaciones lineales. Así la base ya no es la que se compone de las ideas de independencia lineal y generar como nace en la historia y es clásica en otros libros. En este enfoque por un lado, la discusión sobre los conceptos germinales queda limitada y un estudiante puede pensar que esos conceptos son aislados. Por otro lado, la noción cobra importancia por la propiedad de expresar los elementos del espacio vectorial como combinación lineal de los vectores de la base.

En este enfoque, Fletcher construye un espacio vectorial con una base de dimensión 2, en los modos analítico-aritmético y estructural. El modo sintético no surge en este análisis, como él lo explica no estudia la geometría en el sentido del espacio físico. De esta manera, por un lado, puede ser que el aspecto geométrico del espacio vectorial no se desarrolle. Por el otro, el modo analítico no se establece formalmente, pues la idea es mostrar cómo se comporta el vector en diferentes contextos. Así los conceptos pueden quedar en un nivel superficial para el estudiante. Sin embargo, puede ser más fácil que el estudiante acepte otros objetos además de las flechas como elementos de un espacio vectorial.

3.1.3 *Introduction to Linear Algebra. Theory and Applications,* O'Neil, P. V. (1979). El espacio vectorial en los modos analítico-aritmético y analítico-estructural

Peter V. O'Neil establece el objetivo del libro, para un primer curso de álgebra lineal, para quienes al menos han estudiado un semestre de cálculo. Su enfoque es una opción al matricial, que en su criterio es más usual en los libros de este nivel. De acuerdo a O'Neil, el tratamiento de los espacios vectoriales requiere mayor estudio y en particular se necesita analizar los espacios R^2 y R^n en detalle. En su opinión, ésta es una forma más natural de estudiar el álgebra lineal que producirá ganancias posteriormente, en una discusión metódica y más motivada de temas tales como solución de sistemas de ecuaciones lineales. En cada sección presenta una gran cantidad de ejercicios, clasificados en dos tipos: Problemas computacionales y problemas teóricos.

Para el autor el término espacio vectorial se emplea para identificar ciertas propiedades algebraicas de una colección de objetos, por lo cual empieza reflexionando en un escenario familiar de la geometría: el plano. Por un lado, éste se puede visualizar en puntos y lugares geométricos; por otro, tiene una estructura algebraica. En el marco de la geometría analítica emplea el símbolo $\oplus$ para denotar la suma de parejas ordenadas de números reales asociadas a los puntos en el plano; para el producto de una pareja de números reales por un número real emplea el símbolo $\odot$. Asimismo puntualiza la existencia de las parejas $(0,0)$ y $(-x, -y)$, si se tiene (x, y). Generaliza estas operaciones en dos dimensiones a los puntos en el espacio con tres coordenadas (x,y,z), con cuatro coordenadas y con n coordenadas. Asimismo, emplea estos símbolos para las sumas de polinomios y de funciones continuas definidas en un intervalo.

Con estos ejemplos como breve introducción, O'Neil define axiomáticamente espacio vectorial real V con las operaciones $\oplus$ y $\odot$; denota con el símbolo θ al vector cero. De la notación refiere que los elementos de V se llaman vectores por razones históricas, aunque V no necesariamente consiste de vectores en el sentido clásico de la física. (Con esta aclaración, posiblemente el autor considere el origen de la palabra vector en la suma de fuerzas, como analizamos en el capítulo I, párrafo 1.1.2.) Sobre el término escalar para número real nos dice que se mantiene por tradición.

De acuerdo a O'Neil el espacio vectorial real R^2 se puede visualizar como los puntos en el plano; las parejas ordenadas simbolizan puntos localizados como es usual, respecto a un par de ejes perpendiculares; los vectores en R^2 también se pueden representar como flechas con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final (x, y) (fig. 2). La interpretación para la suma de vectores es de acuerdo a la ley del paralelogramo (fig. 3); la multiplicación por un escalar geométricamente se ve en la figura 4.

La ayuda visual de vectores en R^2 persiste en R^3, con el paralelepípedo de referencia. O'Neil explica que para R^n, $n > 3$, dicha ayuda no se tiene, no obstante, R^2 y R^3 son arquetipos y, analizándolos, la percepción y la intuición permiten un mejor sentimiento para los espacios vectoriales generales. En un ejemplo, O'Neil analiza el espacio vectorial R^1; de esta forma, considera los espacios R^n para $n \geq 1$. Generaliza a los espacios vectoriales de las funciones continuas definidas sobre el intervalo [a, b] y a los espacios vectoriales sobre conjuntos de números complejos. Siempre en el contexto de los ejemplos y problemas continúa con las definiciones como vemos en seguida.

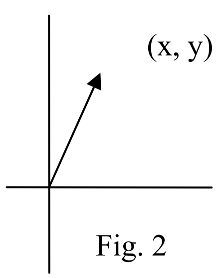


Fig. 2

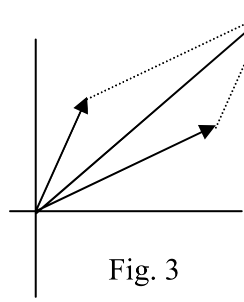


Fig. 3

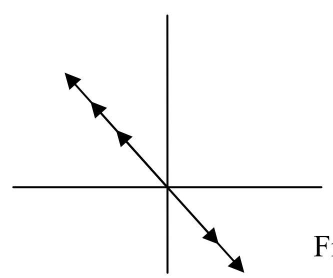


Fig. 4

> Definición. Subespacio: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y S un subconjunto de V. Puede suceder que $(S, \oplus, \odot)$ sea un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V. En este caso llamamos a S subespacio de V.

Como en casos anteriores, se apoya en las ayudas visuales en R^2 para demostrar que si una línea S en el plano pasa por el origen es un subespacio de R^2. En el siguiente teorema tiene la condición necesaria y suficiente para que S sea subespacio de V:

> Teorema. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces S es un subespacio de V sí y sólo sí valen las siguientes dos condiciones:
> 1) $a \oplus b$ pertenece a S para cada a y b en S
> 2) $\alpha \odot a$ pertenece a S para cada a en S y cada número real α.

En este punto O'Neil deja de usar los símbolos ⊕ y ⊙, para denotar las operaciones y emplear la notación (*V, +,* •). Continúa con las nociones para definir la base y demostrar algunos teoremas relativos a ésta:

> Definición. Combinación lineal: Sea *S* un subconjunto no vacío de un espacio vectorial *V*. Una combinación lineal de *S* es una suma $\alpha_1 s_1 +,...,+ \alpha_n s_n$, donde $s_1,...,s_n$ son algunos de los vectores en *S* y α_1 ,..., α_n, son números reales. A menudo esta suma se escribe como $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$
>
> Definición. Dado cualquier subconjunto no vacío *S* de *V*, podemos formar el conjunto S^L de todas las posibles combinaciones lineales de S: $S^L = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \mid$ n es un entero positivo, $\alpha_1,...,\alpha_n$ son números reales y $s_1,...,s_n$ están en $S\}$. Entonces S^L consiste de todas las sumas $\alpha_1 s_1 +,...,+ \alpha_n s_n$, con n cualquier entero positivo, $s_1,...,s_n$ están en *S* y $\alpha_1,...,\alpha_n$ números reales.
>
> Teorema. S^L es un subespacio de *V*. El subespacio S^L de V es el generado por S. Un caso especial es cuando V = S^L.

Siguiendo con un ejemplo, nos dice:

> {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}, es un conjunto generador de R^3, ya que cualquier vector (x, y, z), puede escribirse como: x(1,0,0) + y(0,1,0) + z (0,0,1).
>
> Definición: Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial V: *S* es linealmente independiente si para $s_1, s_2,\ldots, s_n$ en S y $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$, números reales, tales que $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 +,...,+ \alpha_n s_n = 0$ entonces necesariamente, $\alpha_1 = \alpha_2 =,..., = \alpha_n = 0$. *S* es linealmente independiente si la única combinación lineal de *S*, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = \theta$ (vector cero) es la combinación lineal trivial. Si *S* no es linealmente independiente se dice que es linealmente dependiente, es decir, si alguna de las $\alpha_i \neq 0$.

O'Neil aclara con ejemplos en R^2 y R^3 las nociones de generar e independencia lineal. Expresa que estas nociones no se relacionan entre sí, en el sentido que un conjunto linealmente independiente no necesariamente genera al espacio vectorial y si un conjunto genera el espacio vectorial, no necesariamente es linealmente independiente. Con estas observaciones define la base de un espacio vectorial *V* y obtiene algunas propiedades:

> Un subconjunto *S* de *V* es una base de *V* si
> i) Genera al espacio vectorial y ii) Es linealmente independiente
>
> Propiedad. *S* es una base para *V* si satisface las condiciones: Cada vector en *V* es una combinación lineal de *S*. La única forma de escribir θ como una combinación lineal de *S* es por la combinación lineal trivial.

> Teorema: Si S = {$s_1, \ldots, s_n$} es una base para V y x está en V, entonces hay números únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tales que $x = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n$, así queda caracterizado el espacio vectorial a través de los vectores de la base. Existe una forma única de representar cada elemento del espacio vectorial como una combinación de los elementos de la base. Con este resultado desarrolla la noción de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada.

O'Neil estudia los conceptos de transformación lineal, rango y espacios nulos, isomorfismos, matrices y transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones, representación matricial de las transformaciones lineales, eigen valores, eigen vectores. El autor siempre trata de relacionar las nociones con el espacio R^2, desde el punto de vista de la geometría analítica.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Introduction to Lineal Álgebra. Theory and Applications*

Vemos en O'Neil el empleo de una notación especial para establecer claramente la diferencia entre suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, con las operaciones algebraicas entre números. En un principio puede parecer extraño al estudiante, sin embargo, puede ayudar para distinguir entre el vector y sus componentes, no obstante, se puede confundir con la suma de conjuntos como se utiliza en algunos libros.

O'Neil utiliza la visualización, las imágenes mentales y la representación de la geometría analítica para guiar al lector al estudio de los espacios vectoriales. De esta forma, el autor considera simultáneamente los espacios vectoriales isomorfos de dimensión 2: los puntos del plano, los vectores-flecha y la representación estructural. Si no se profundiza más, en los 3 lenguajes puede propiciar confusiones al estudiante, cuando no encuentra diferencia entre punto de la geometría analítica, vector geométrico y vector del álgebra lineal. Además los vectores quedan fijos al origen, sin hacer hincapié sobre el motivo; así el estudio de los vectores en este enfoque, con el uso de los lenguajes intuitivos y las ideas de espacios y base geométricos, le pueden confundir.

El proceso de generalización de los espacios vectoriales geométricos a los analíticos, de R^3 a R^n, no es tan simple; como hemos visto, involucra un proceso de reconstrucción de un esquema mental (Tall, 1991). Con los cambios en el lenguaje, como se sabe, por ejemplo, una base en R^3 puede verse como tres vectores no coplanares; sin embargo esta idea no puede generalizarse a R^n.

En el contexto de la geometría analítica, si el estudiante trabaja desde el inicio los conceptos de conjunto generador, independencia-dependencia lineal, base y espacio vectorial, lo puede ayudar. Sin embargo, las nociones como herencia de la geometría analítica pueden quedarse sin relacionar.

En el enfoque de los modos de pensamiento, O'Neil introduce el estudio de los espacios vectoriales en el modo analítico; analiza cómo las operaciones algebraicas entre las parejas ordenadas de los puntos en el plano, satisfacen los axiomas de espacio vectorial, asimismo, asocia la noción de vector geométrico o de la física. Cuando propone esta asociación, el estudiante puede tener arraigado el concepto de vector como pareja ordenada y puede ser difícil que deje ese modelo analítico.

Pensamos por un lado que la observación de O'Neil: independencia lineal y generar son nociones no relacionadas una con otra, puede confundir al estudiante. Por el otro, cuando analiza la noción de base como un conjunto generador al que se le quitan vectores para formar una base, puede ser más precisa cuando se dice que es un mínimo conjunto generador; asimismo, la noción de base como máximo conjunto linealmente independiente en V.

El autor emplea el lenguaje de los modos sintético-geométrico y analítico; se apoya en las representaciones de la geometría analítica, para definir espacio vectorial en el modo analítico-estructural. Para O'Neil es muy importante el modelo aritmético, por lo cual emplea una simbología específica para hacer hincapié en la diferencia de suma de vectores y suma de las componentes de los vectores.

En el texto de O'Neil vemos una tendencia muy marcada al uso de la base canónica en los espacios R^2, R^3,..R^n, que puede llevar al estudiante a no pensar en otras bases. El texto prácticamente utiliza el lenguaje del modo analítico para definir los conceptos germinales de la base, de esta manera podemos ver que al enfoque de O'Neil, le falta una componente epistemológica en la conceptualización de un espacio vectorial.

3.1.4 *Álgebra Lineal*, Friedberg, S., Insel, A. y Spence, L. (1982). El espacio vectorial en un enfoque analítico, y de aplicaciones

En opinión de Friedberg, Insel y Spence, la extraordinaria importancia del Álgebra Lineal se debe al empleo en el tratamiento moderno de la geometría y el análisis, aun cuando el lenguaje y los conceptos de la teoría se han aplicado tanto en las ciencias naturales como sociales. Por esto, los autores tienen el propósito esencial de presentar cuidadosamente los principales temas del álgebra lineal e ilustrar la utilidad de la materia a través de una amplia variedad de aplicaciones. Para el uso formal del libro suponen que los alumnos han debido cursar previamente cálculo. Cada sección del texto cuenta con múltiples ejemplos y ejercicios de tipo algorítmico, de desarrollo teórico y conceptual así como de aplicación de la teoría.

Friedberg, Insel y Spence llaman vector a las nociones de la física, tales como las fuerzas, velocidades y aceleraciones que comprenden una magnitud y una dirección; representan los vectores por flechas, cuya longitud define la magnitud del vector y la dirección de la flecha es la dirección del vector. Plantean que los vectores con la misma magnitud y dirección son iguales, independientemente de sus posiciones relativas.

Para introducir el concepto de vector los autores se apoyan en las leyes de la física, representan la suma de fuerzas conforme a la ley del paralelogramo y derivan la suma de vectores geométricamente (Fig. 5). En el contexto de la geometría analítica plana definen los vectores y las operaciones algebraicas (Fig. 6).

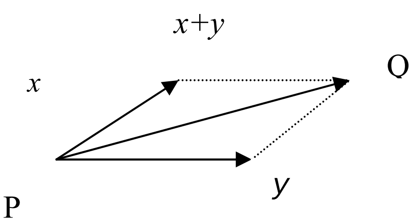


Figura 5

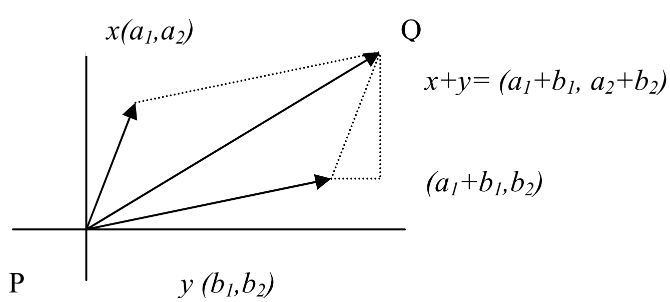


Fig. 6

Con los mismos argumentos, Friedberg, Insel y Spence generalizan las propiedades de los vectores al espacio vectorial R^3, aplican estos resultados para obtener algunas propiedades de la geometría analítica en R^3. De acuerdo a los autores diversas entidades como las fuerzas que operan en un plano y los polinomios con coeficientes reales, poseen las mismas propiedades que permiten definiciones naturales de suma y multiplicación por escalares. Con estas aclaraciones generalizan la definición de espacio vectorial V sobre un campo **F**, e investigan varios ejemplos:

1- El espacio vectorial F^n de las formas n-dimensionales *$(a_1,...a_n)$*, donde los valores o entradas a_i son elementos de un campo *F*.
2- El espacio vectorial M_{mxn} de las matrices *mxn*, con elementos en un campo *F*, bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalares.
3- El espacio vectorial *F*(S, F) de todas las funciones de un conjunto S no vacío, a un campo F, cualesquiera, bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar.

Definen las nociones de subespacio, combinación lineal y subespacio generado:

Definición. Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un campo F se llama subespacio de V, si W es un espacio vectorial sobre F bajo las operaciones de suma y producto por escalares definidas en V.
Definición. Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces el conjunto W integrado por todas las combinaciones lineales de elementos de S, es un subespacio de V, el más pequeño que contiene a S. El subespacio W se llama subespacio generado por los elementos de S.

Simultáneamente presentan el estudio de las combinaciones lineales y de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos con mayor énfasis. Con referencia a la representación geométrica, establecen la dependencia lineal y base:

Definición. Un subconjunto S de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existe un número finito de vectores distintos $x_1, x_2 ,..., x_n$ en S y escalares $a_1, a_2 ,..., a_n$ en F, no todos cero, tales que $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$. Un subconjunto S de un espacio vectorial que no es linealmente dependiente, es linealmente independiente.

Definición. Una base β para un espacio vectorial V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera a V.

Establecen la siguiente proposición equivalente para la base:

Un subconjunto de V, $\beta = \{\boldsymbol{x}_1,..., \boldsymbol{x}_n\}$ es una base de V si y solo si cada vector $\mathbf{y} \in V$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de vectores en β, es decir, se puede expresar en la forma $\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 +...+ a_n\mathbf{x}_n$, para escalares únicos $a_1 ,..., a_n$.

Friedberg, Insel y Spence discuten sobre los conceptos de generar e independencia lineal y obtienen los siguientes resultados:

Corolario: Sea β una base de un espacio vectorial V de dimensión n, y sea S un subconjunto de V linealmente independiente de V que contiene m elementos. Entonces, existe un subconjunto S_1 de β tal que $S \, U \, S_1$ es una base para V.
Corolario. Un subconjunto β de un espacio vectorial V es una base para V si y sólo si β es un subconjunto máximo linealmente independiente.

Los autores aclaran gráficamente, por medio de la figura 7, la relación entre el número de vectores linealmente independientes y el número de vectores que generan el espacio vectorial; de esta forma están preparados para definir la noción de dimensión de un espacio vectorial V, dim (V), transformación lineal y su representación matricial, espacio nulo y rango, isomorfismo y espacio dual.

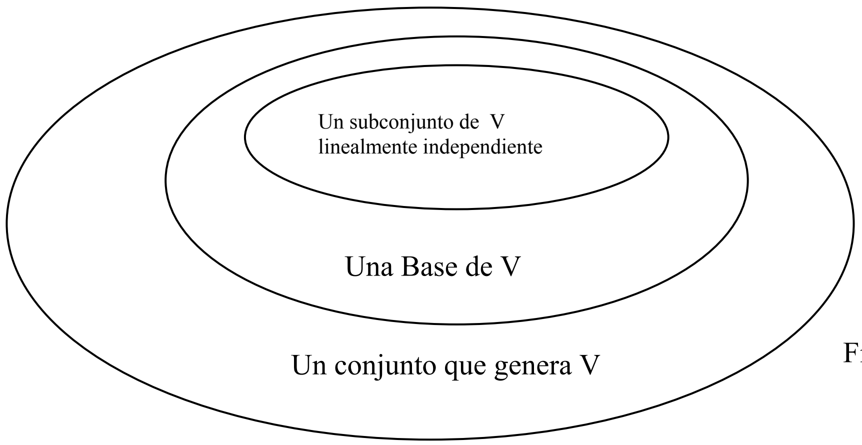


Figura 7

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Álgebra Lineal*

Friedberg, Insel y Spence definen vector en relación con la física y la geometría. Con argumentos puramente de la física, consideran por un lado, los vectores como clases de equivalencia y la suma de vectores geométricamente, por el otro, el espacio vectorial por la representación en el plano de acuerdo a la geometría analítica. Así, vemos en este texto surgir el concepto de vector y espacio vectorial en la física y la geometría analítica respectivamente. El concepto de generar nace naturalmente con la definición de subespacio generado por las combinaciones lineales de elementos del espacio vectorial y en este contexto aparece la noción de dependencia lineal.

En este texto encontramos un análisis más profundo en los sistemas de ecuaciones lineales; es posible que la imagen geométrica, la forma natural de surgir la noción de generar así como la discusión en los sistemas de ecuaciones lineales proporcione flexibilidad al estudiante para entender el concepto de espacio vectorial. Asimismo, la noción de independencia-dependencia lineal adquiere más sentido al estudiarla en los dos contextos. Pensamos que el enfoque geométrico de la base puede dar una perspectiva dinámica de los conceptos germinales y ayudar a entender los significados y las razones para tener una definición abstracta y formal de la misma. La discusión sobre el número de elementos de la base puede ayudar a entender más la relación entre estas nociones ya que es claramente descriptiva y de la misma manera ayudar al entendimiento del concepto de espacio vectorial.

Desde la perspectiva de los modos de pensamiento, los autores consideran el modo sintético-geométrico para crear el concepto de vector y espacio vectorial, por el lenguaje y la llamada a la intuición en R^2 y R^3. Establecen la definición en los modos analítico-aritmético y estructural. Tanto los conceptos germinales de la base como el espacio vectorial se desarrollan en el enfoque del modo analítico-aritmético, no obstante, emplean modos intermedios al referir las nociones a la geometría, la intuición el lenguaje y representaciones para establecer los conceptos.

3.1.5 *Linear Algebra Through Geometry,* Banchoff, T. & Wermer, J. (1992). Los espacios vectoriales aritméticos R^1, R^2,… R^n

Banchoff & Wermer expresan en su texto la intención de conducir al estudiante al entendimiento de álgebra lineal elemental enfatizando su significado geométrico. En opinión de los autores muchas e importantes nociones del álgebra lineal ocurren en dimensiones 2 y 3, por lo cual los estudiantes aprenden mejor las nuevas ideas de la materia cuando surgen en el contexto para ellos familiar de la geometría. Así, el estudiante con un entendimiento confiable de estas ideas, encontrará pocas dificultades al generalizar tanto a dimensiones mayores, como a sistemas algebraicos más abstractos. Los autores tienen el sentimiento de que el enfoque geométrico provee de un fundamento sólido para aplicar el álgebra lineal en ingeniería, física, etc.; proponen ejemplos y ejercicios en cada sección del texto, en general de tipo algorítmico.

Banchoff y Wermer definen un vector X en una línea, como el segmento dirigido del origen al punto de ordenada x, denotándolo por (x). En el enfoque de la geometría analítica y de las propiedades de los números reales, establecen los axiomas de espacio vectorial para la colección de todos los vectores sobre la recta R^1.

Definen un vector X en el plano, como un par de números $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; de manera semejante la gráfica es una flecha que parte del origen de coordenadas al punto (x,y). Del producto de un número $r>1$ por un vector, obtienen un vector alargado rX y si $0<r<1$, el vector es acortado.

Para los autores dos vectores particularmente importantes son $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, una base para R^2. De esta manera, cada vector del plano se puede expresar de forma única como suma de estos vectores. Con referencia a la descripción geométrica y analítica, obtienen las propiedades de las operaciones algebraicas y establecen los axiomas para el espacio vectorial R^2. El concepto de independencia lineal no lo tratan explícitamente, no obstante, con referencia a la geométrica sintética y analítica, definen dependencia lineal en el plano:

> Definición. Dos vectores A y B son linealmente dependientes si B está sobre la línea determinada por A. Un par de vectores se dice que son linealmente dependientes si uno de ellos es múltiplo del otro.

El análisis de los autores es algo diferente a muchos de los libros de álgebra lineal, pues consideran la clasificación de las cónicas en el espacio vectorial R^2, además de las transformaciones lineales y no lineales del plano, las matrices y determinantes, los sistemas de ecuaciones lineales, eigen-valores y eigen-vectores.

De manera análoga Banchoff y Wermer presentan en el marco de la geometría analítica, el estudio del espacio vectorial R^3. Los vectores son referidos a un sistema de coordenadas y los vectores unitarios sobre los ejes coordenados E_1, E_2 y E_3 constituyen una base para R^3. De esta manera establecen la propiedad de que todo vector de R^3 se puede expresar como combinación lineal de los vectores unitarios. En el marco de la geometría analítica, un vector se puede expresar como la diagonal del prisma rectangular con caras paralelas a los planos coordenados. Definen espacio vectorial lineal geométrica y analíticamente en R^3. En este espacio analizan las nociones de combinación lineal y dependencia lineal, en forma geométrica:

> Definición. 2 vectores A y B, se dicen linealmente dependientes si uno es múltiplo del otro, 3 vectores son linealmente dependientes si uno de ellos es combinación lineal de los otros 2. La negación de dependencia lineal es de independencia lineal.

En el espacio de dimensión 3 como en R^2, analizan las transformaciones lineales, los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos, eigen-valores y eigen-vectores; en este caso clasifican superficies.

Para analizar los espacios vectoriales de dimensiones mayores Banchoff y Wermer aclaran que R^n donde $n \geq 4$, no se puede visualizar, pero se puede usar la *intuición algebraica*, desarrollada en los espacios de dimensiones dos y tres. Ésta puede resultar una guía en el estudio, pues muchas de las nociones empleadas en esos espacios se pueden considerar en dimensiones mayores de tres. Definen un vector $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ en el espacio de dimensión 4, el conjunto de estos vectores con las conocidas operaciones como el espacio vectorial de dimensión cuatro, R^4. Los vectores $E_1, \ldots, E_4$ forman una base. Como en R^2, cualquier vector se puede expresar como una combinación de los elementos de la base. Estudian las transformaciones del espacio de dimensión 4.

De la misma forma en R^n, los vectores son n-adas, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]^T$; analizan la noción de subespacio, con la imagen geométrica de línea o plano que pasa por el origen de coordenadas. Estudian los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos cuya solución es subespacio de R^n, las nociones de dependencia-independencia lineal y dimensión. Como en los casos anteriores definen la base canónica. Resuelven sistemas de ecuaciones lineales e interpretan geométricamente las soluciones. Definen la base de un subespacio S de R^n:

> Definición. La base de un subespacio S de R^n es un conjunto de $X_1, \ldots, X_d$ de S tal que cualquier vector X en S es una combinación lineal de $X_1, \ldots, X_d$ y
> El conjunto $X_1, \ldots, X_d$ es linealmente independiente.

Banchoff y Wermer nos dicen que otras colecciones de objetos se comportan en forma semejante a R^n y a ellas se pueden llevar muchas de las ideas estudiadas. Entonces los elementos de los espacios vectoriales generales de funciones trigonométricas, polinomios, etc., se pueden pensar como objetos geométricos análogos a los vectores en R^2 y R^3.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Linear Álgebra Through Geometry*

Una de nuestras observaciones respecto al enfoque geométrico es que en algunos casos puede causar confusión; por ejemplo, advertimos el conflicto de un estudiante quien trataba de pensar el ángulo entre dos matrices en general cuando las consideraba vectores; trataba de ver la geometría, sin analizar más sobre el concepto de vector asociado a la matriz.

Banchoff y Wermer en el contexto de la geometría analítica proponen una serie de etapas para ayudar al estudiante a entender los conceptos del álgebra lineal. Desarrollan un entendimiento concreto del enfoque geométrico, construyendo las generalizaciones geométricas sucesivas para el entendimiento más abstracto. En la evolución del conocimiento, cada etapa se construye sobre el entendimiento adquirido en la precedente, para marcar una nueva generalización de las nociones previas. Es posible que la serie de etapas propuestas pudieran ayudar al estudiante para el entendimiento de los conceptos, no obstante, a continuación vemos algunos inconvenientes.

Cuando los autores definen y analizan vector en R^2 y R^3 en el contexto de la geometría analítica como los puntos referidos al origen de coordenadas, automáticamente los vectores quedan anclados en ese origen, el estudiante puede encontrarse limitado si no analiza esta situación.

Es posible que el concepto de generar al estar enmarcado en la geometría analítica quede enmascarado por las simbologías del modo analítico-aritmético y los lenguajes tanto de este modo como del sintético-geométrico. Por ejemplo, para generar vectores los autores dicen: multiplicar un vector por un escalar para obtener otro vector alargado o acortado, el empleo de la imagen geométrica y el lenguaje analítico pueden obstaculizar la idea del concepto. Sin mencionar el concepto de independencia / dependencia lineal y generar, con los vectores E_1 y E_2 obtienen la propiedad de que cualquier vector se puede expresar de manera única como la suma de vectores de la base. De esta manera la definición de las nociones germinales puede parecer superficial o innecesaria.

La base de un espacio vectorial en el enfoque de Banchoff y Wermer sistemáticamente es la base canónica. Así la noción de base está ligada a los ejes coordenados ortogonales y de manera prácticamente automática los vectores se expresan como combinación lineal de los elementos de la base. Tratando de ayudar al entendimiento de los conceptos y de las razones para tener la definición abstracta y formal, esta orientación ofrece un dinamismo de los conceptos. La base y el espacio vectorial surgen en la geometría analítica y en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

La base canónica como Banchoff y Wermer expresan es especial, y la propiedad de que los vectores del espacio vectorial se pueden expresar como combinación de los elementos de la base, también surge automáticamente. La manera mecanizada de definir la base canónica en R^2, R^3,…, R^d, puede evitar por un lado, que el estudiante conozca otras bases y por el otro, que los conceptos germinales de la base se relacionen. Al pensar en aumentar unos y ceros en la cadena de coordenadas, los conceptos de base y de espacio vectorial se pueden ver limitados por esta simplificación en cada una de las etapas de la generalización, si las nociones quedan en un nivel superficial.

Respecto a los modos de pensamiento, los autores emplean los lenguajes de los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y estructural, así como modos intermedios, para desarrollar la teoría del álgebra lineal, asimismo tratan el espacio vectorial conjugando los tres modos de pensamiento.

3.1.6 *Interactive Linear Algebra. A Laboratory Course Using Mathcad*, Porter, G. J. & Hill, R. D. (1996). El espacio vectorial en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos en un ambiente tecnológico

Porter & Hill prepararon un libro electrónico, contenido en dos discos para usarse en computadora con Mathcad. En la versión impresa, los cálculos, las exploraciones, las gráficas y los reportes, se necesitan completar en la computadora; asimismo, intenta complementar el texto electrónico, no reemplazarlo; la versión está prevista para que el estudiante pueda preparar clases, guardar notas y rápidamente localizar los anexos en otra sección de la que tenga abierta en pantalla. La idea de los autores no es un curso de álgebra lineal con un laboratorio, sino un curso como laboratorio. Porter y Hill pretenden por un lado, que el estudiante construya los conocimientos de álgebra lineal en el ambiente tecnológico, pues como ellos opinan, las expresiones deben estar vivas. Por otro, tratan de mejorar tanto la retención de la materia como la agudeza para resolver problemas.

Para tal fin sugieren tres etapas: En la primera construir un modelo matemático para objetos no matemáticos; en la segunda analizar el modelo matemático y por último interpretar el análisis matemático. En un primer paso con ejemplos de economía, definen el concepto de matriz (3x3), así como el sistema de ecuaciones lineales asociado, del que infieren el álgebra de matrices para formar un espacio vectorial. A partir del concepto de matriz renglón o columna definen vector como una matriz 2x1 o 1x2. Este conjunto de vectores 2x1 o 1x2 es un espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, donde **R** es el conjunto de los números reales y 2 indica el número de componentes. $\mathbf{R}^k$ es el conjunto de vectores con k componentes.

Porter y Hill establecen un isomorfismo entre las matrices 2x1 y los siguientes conjuntos, con sus correspondientes operaciones algebraicas:

1) $\mathbf{R}^2$ y la colección de parejas ordenadas de números reales, con las conocidas operaciones algebraicas.
2) $\mathbf{R}^2$ y el conjunto de puntos del plano, con las operaciones algebraicas usuales.
3) $\mathbf{R}^2$ y el conjunto de segmentos dirigidos del plano, con su punto inicial en (0,0). Se suman las componentes de los vectores por la ley del paralelogramo y se obtiene el vector suma. Al multiplicar un vector por un escalar puede cambiar la longitud, así como el sentido del vector.

De esta manera, Porter y Hill proponen diferentes modelos interpretativos de un espacio vectorial de dimensión dos, $\mathbf{R}^2$: Geométricamente el conjunto de segmentos dirigidos en el plano y los puntos del plano, analíticamente las parejas ordenadas de números reales, las matrices renglón (1x2) o columna (2x1), con las operaciones algebraicas correspondientes. Para la representación geométrica de los vectores, los autores consideran la suma por la ley del paralelogramo y la multiplicación por un escalar; para ellos el modelo geométrico en $\mathbf{R}^2$ ayuda a establecer intuitivamente un modelo en $\mathbf{R}^k$, aunque para $k > 3$ no se puede visualizar un modelo semejante. Por ejemplo, el modelo del paralelogramo respecto a la suma y el producto por un escalar, lo llevan a $\mathbf{R}^k$. Análogamente con otros conceptos establecen el paso del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^k$.

Para definir los conceptos establecen relación con la geometría en R^2, por ejemplo, el subespacio con la recta que pasa por el origen, etc. Cabe mencionar que cuando presentan los resultados generales, emplean la notación $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, en lugar de $\mathbf{R}^\mathbf{k}$, el cual consideran un ejemplo como $\mathbf{R}^\mathbf{2}$ o $\mathbf{R}^\mathbf{3}$. En $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, definen el concepto de combinación lineal, conjunto generador, subespacio, establecen la noción de mínimo conjunto generador para un subespacio, o el conjunto más eficiente para generar el subespacio. Cuando su objetivo es encontrar la base para el espacio vectorial solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax=0}$, establecen los siguientes resultados:

1. El conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax = 0}$ es un **subespacio** de R^n.
2. Para un subespacio V, hay $\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n$ vectores tales que V= espacio generado $\{\mathbf{v}_1,...\mathbf{v}_n\}$.
3. El conjunto de todas las soluciones de $\mathbf{Ax = 0}$ puede describirse como el generado de un conjunto de vectores.

Definición. Un conjunto de vectores $\mathbf{u}_1,..., \mathbf{u}_k$ es linealmente dependiente**,** si el sistema de ecuaciones homogéneas $\mathbf{Ux = 0}$, tiene una solución no trivial, de otra manera el conjunto $\mathbf{u}_1,..., \mathbf{u}_k$ es linealmente independiente.
Definición. Se llama base un conjunto de generadores linealmente independiente

Porter y Hill establecen una relación entre los conceptos germinales y las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Después de la base, definen el concepto de determinante y sus aplicaciones. Generalizan las diferentes nociones: línea, plano y producto escalar, a hiperplano y producto escalar en $\mathbf{R}^n$; asimismo eigenvalor y eigenvector, serie geométrica, transformación lineal y definen espacio vectorial axiomáticamente.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto Interactive *Linear Algebra. A Laboratory Course Using Mathcad*

En la forma de introducir los conceptos de vector y espacio vectorial de Porter y Hill vemos que se permite al estudiante establecer mejor relación del concepto en forma analítica y geométrica. La base natural es la canónica, que surge legítimamente en el momento de establecer el isomorfismo entre los diferentes modelos de conceptuar R^2. La forma de analizar la base en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con tecnología es peculiar. En esta presentación se examina el concepto de dependencia lineal con mayor interés, en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, cuando se buscan soluciones no triviales. En este contexto, el análisis de la dependencia lineal en el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, desarrolla una discusión más profunda que los lleva a definir la base como un conjunto generador, linealmente independiente. Creemos que el análisis estaría más completo cuando se consideraran los dos conceptos tanto generar como independencia lineal en una discusión para definir la dimensión.

Cuando los vectores se definen en términos de sus componentes, entonces el vector usualmente se encuentra referido a la base canónica. Para Porter y Hill, ésta es la base natural y como hemos visto en otros casos, las nociones germinales pueden parecer innecesarias al estudiante. En este enfoque los autores emplean las representaciones gráficas y el lenguaje de los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural.

3.1.7 *Álgebra lineal*. Rincón, M. H. (2006). El espacio vectorial en el modo analítico-estructural

Éste es un moderno libro de álgebra lineal, editado por la UNAM, de preferencia para formación de estudiantes en la especialidad de matemáticas. El material del texto es para los dos primeros cursos de álgebra lineal. Para el estudio de los espacios vectoriales Rincón emplea conceptos del álgebra abstracta. Inicialmente el autor define las operaciones asociativas, monoides y tablas de multiplicar; pues en su opinión la definición de espacio vectorial puede resultar muy complicada para los alumnos y de esta manera no pierden las consecuencias de cada axioma. Rincón demuestra la existencia de bases, y además que las bases para un espacio vectorial tienen el mismo cardinal. El libro cuenta con ejemplos resueltos y ejercicios que requieren algunos de algoritmia y otros procesos de abstracción y de conceptualización.

En este libro encontramos la siguiente notación para la definición de espacio vectorial:

> Definición. Un espacio vectorial es una quinteta $(V, +, \bar{O}, F, \cdot : F \times V \rightarrow V)$ tal que:
> 1. $(V, +, \bar{O})$ es un grupo abeliano.
> 2. $\cdot : F \times V \rightarrow V$ satisface:
> a) $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$.
> b) $(cd) \cdot v = c \cdot (d \cdot v), \quad \forall\; c, d \in F, \quad \forall\; v \in V$.
> c) $(c + d) \cdot v = cv + dv, \quad \forall\; c, d \in F, \quad \forall\; v \in V$.
> d) $c \cdot (v + w) = c \cdot v + c \cdot w, \quad \forall\; c \in F, \quad \forall\; v, w \in V$.

Los elementos de V se llaman vectores, los de F escalares y cuando el autor considere definidas claramente las operaciones escribirá ${}_F V$ para denotar la quinteta ordenada, es decir, el espacio vectorial V sobre el campo F.

En ejemplos Rincón trabaja los espacios vectoriales aritméticos $R^1, \ldots, R^n$; el espacio vectorial de las funciones definidas sobre un conjunto X: $(F^X, +, \bar{O}, F, \cdot : F \times F^X \rightarrow F^X)$. Define la matriz A nxm con coeficientes en un campo F, como el arreglo rectangular de elementos $A_{i,j}$. A en F^X, $X = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$; asimismo, matriz transpuesta, simétrica y triangular con elementos de un campo F.

Define el subespacio, y una proposición sobre las condiciones necesaria y suficiente para que un subconjunto sea subespacio:

> Definición. Sea $(V, +, \bar{O}, F, \cdot : F \times V \rightarrow V)$ un espacio vectorial, y sea $W \subseteq V$. Diremos que W es un subespacio de V si $(W, +, |_{W \times W}, \bar{O}, F, \cdot |_{F \times W} : F \times W \rightarrow W)$ es subespacio vectorial. Cuando esto pase, escribiremos $W \leq_F V$.
> Proposición. $W \leq_F V \;\Leftrightarrow\;$ i) W es cerrado bajo + ii) $\bar{O} \in W$ iii) $\forall\; a \in F$ y $\forall\; w \in W$, $a \cdot w \in W$.

Demuestra que el conjunto de las funciones continuas: $C(R) = \{f: R \rightarrow R \mid f \text{ es continua}\}$, es un subespacio del espacio vectorial de las funciones R^R.

En la segunda unidad del tema de espacios vectoriales, Rincón considera el subespacio vectorial generado por las combinaciones lineales de un subconjunto X del espacio vectorial ${}_F V$:

> Definición. Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y X un subconjunto de V, definimos $L(X) = \cap \{W \leq V \mid X \subseteq W\}$. $L(X)$ se llama el subespacio generado por X, debido a que es el menor subespacio de V que incluye a X.

Rincón trabaja el ejemplo de un subespacio de ${}_F V$ generado por un vector $v \in V$ y en particular el subespacio generado por un vector en el plano. Define dependencia lineal y a partir de ésta, define independencia lineal. Asimismo, define conjunto generador; observa que todo espacio vectorial tiene un conjunto generador. Define base para el espacio vectorial así como espacio vectorial finitamente generado:

> Definición. $S \subseteq V$ es linealmente dependiente (*l. d.*) si $\exists\ x \in L(S \setminus \{x\})$.
> Definición. $S \subseteq V$ es *l. i.* (linealmente independiente) si S no es *l. d.*
> Definición. Decimos que $\beta \subseteq {}_F V$ genera ${}_F V$, si $L(\beta) = V$. También se dice que β es un conjunto generador de ${}_F V$.
> Definición. $\beta \subseteq {}_F V$ es una base para ${}_F V$, si β es *l. i* y β genera ${}_F V$.
> Definición. ${}_F V$ es finitamente generado si $\exists X \subseteq V$, X finito tal que $X \in G(V)$.
> Teorema. ${}_F V$ finitamente generado por X $\Rightarrow \exists \beta \subseteq X$ tal que β es una base para V.

Observaciones sobre el espacio vectorial en el texto *Álgebra Lineal*

La presentación del espacio vectorial en este texto es con el uso del álgebra abstracta y con una compleja simbología. De tal manera que consideramos que para un principiante aun en la especialidad de matemáticas puede resultar de difícil comprensión. Por un lado, tanto las generalizaciones respecto al campo F como en la dimensión del espacio vectorial puede ser motivo de dificultad para el estudiante; por el otro éste debe tener conocimientos sólidos sobre el análisis matemático para poder entender las demostraciones.

En otro aspecto, la diferencia entre la generalidad de la obra y el ejemplo de subespacio del espacio aritmético de dimensión 2, puede llevar a un estudiante a pensar que no tiene sentido hablar de elementos tan generales. Consideramos que para entender los espacios vectoriales en esta obra, el alumno debe tener suficiente madurez.

Respecto a los modos de pensamiento Rincón presenta su obra eminentemente en modo analítico-estructural, lo que puede dar como resultado el desconocimiento de los conceptos en el modo sintético-geométrico.

Comentarios generales

Del análisis de los libros de texto mencionamos a continuación algunos aspectos que pensamos deben ser resaltados sobre los conceptos del álgebra lineal y en particular, de un espacio vectorial.

Observamos una gran diferencia en las notaciones empleadas por los autores, para símbolos y lenguajes, que pudieran dar lugar a una confusión conceptual en un estudiante.

Seguir un orden cronológico para el análisis de los textos nos permite observar cómo los autores con el devenir del tiempo, por un lado, emplean la representación geométrica en sus libros y la incorporación de la tecnología. Por otro lado introducen diversos isomorfismos del espacio vectorial R^2 como en el caso de Porter & Hill. Otro aspecto es que la teoría del álgebra lineal ya no se estudia en tratados generales, por ejemplo con la teoría de campos o grupos como en el caso de Birkhoff y MacLane.

Vemos que si en etapas anteriores al estudio del álgebra lineal los estudiantes han cursado la geometría sintética y analítica, éstas pueden motivar al estudiante, por el lenguaje o la intuición del modo sintético-geométrico. Sin embargo, observamos que en el desarrollo de los temas, los autores no profundizan el estudio en el modo sintético; solo retoman este modo para establecer analogías.

Los autores introducen el concepto de vector llamando a la geometría, a la física y a la aritmética. Para motivar a los alumnos en el estudio de las operaciones algebraicas y a definir los espacios vectoriales, las estrategias son diversas; por ejemplo, promueven la intuición geométrica y recurren a las leyes de la física para representar los vectores por medio de flechas en el plano, que cumplen la ley del paralelogramo para las operaciones algebraicas; analíticamente expresan los vectores por medio de coordenadas. Definen el espacio vectorial en etapas en el modo analítico-aritmético y finalmente en el analítico-estructural. En el caso de Banchoff y Wermer, en un intento por analizar la teoría de los espacios vectoriales secuenciadamente y aplicarla a la geometría empiezan por definir los espacios vectoriales a partir de R^1, continuando con R^2,..., R^n. Rincón la presenta en el modo analítico-estructural para estudiantes de matemáticas; éstos debe tener conocimientos del análisis matemático, y de otros campos para generalizar el concepto de vector y estudiar los espacios vectoriales.

Todas estas estrategias pueden dar resultado. Sin embargo, en los libros analizados cuando el autor o los autores emplean el modo analítico, y establecen el sistema Cartesiano, se desplaza el sintético y la riqueza que puede representar un análisis más profundo en este modo. Asimismo, el tratamiento de los espacios vectoriales por medio de la geometría analítica, favorece el empleo de la base canónica y limita al estudiante en el manejo de otras bases, lo que puede dar como resultado que los conceptos no sean propiamente del álgebra lineal sino elementos intermedios de la geometría analítica y del álgebra lineal. El caso de Fletcher muestra otro enfoque, el análisis por medio de ejercicios en contexto; sin embargo, puede suceder que el alumno no logre la abstracción del concepto y por lo tanto no llegue a entender su naturaleza. Porter y Hill abordan el tema de manera diferente, introducen los espacios vectoriales en el ambiente tecnológico, en el contexto de solución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos; el estudio del concepto en los sistemas de ecuaciones lineales puede ser de ayuda. En el caso de Rincón, la presentación de los conceptos es en modo estructural, esto puede evitar que el estudiante tenga la intuición del enfoque del modo sintético.

Desde nuestro punto de vista, para el entendimiento del espacio vectorial en modo sintético en R^2, es necesario insistir sobre ¿cuál es la razón para que los vectores se consideren en el origen del sistema de referencia? Podemos considerar este punto como un ancla para los vectores en R^2, del que se desprende la base para sustentar el espacio vectorial. Asimismo hacer hincapié que el vector-flecha es representante de una clase de vectores y con las propiedades algebraicas es un elemento de un espacio vectorial.

También consideramos necesario profundizar la relación entre las nociones de espacio vectorial, generar e independencia/dependencia lineal en los tres modos de pensamiento. Debido a que la epistemología de los conceptos tiene raíces en los tres modos, el entendimiento de los mismos se puede reducir, o puede aun ser nulo, si su tratamiento no tiene los tres soportes.

El espacio vectorial se trata a través de las ideas germinales de independencia-dependencia lineal y generar vectores, no obstante, para su entendimiento es necesario además de manejar estos conceptos relacionarlos para definir la noción de dimensión. Si se estudian de manera desvinculada, sin relacionar las nociones, no se daría su entendimiento. Puede pensarse en subdividir cada una de las nociones germinales para entender gradualmente el concepto, sin embargo, ellas deben estar entretejidas en una gran unidad.

La revisión de estos textos nos lleva a pensar que sería útil tratar de homogeneizar las diferentes notaciones que se emplean en el proceso de enseñanza–aprendizaje del álgebra lineal, para facilitarle tanto al maestro como al alumno, el entendimiento de los conceptos. Asimismo, creemos importante establecer claramente las relaciones entre los conceptos germinales, por ejemplo, como aparece en la figura 7. Pensamos que en la enseñanza, los modos de pensamiento podrían ayudar para que el alumno pueda establecer mayor número de relaciones en cuanto a la forma de apropiarse del concepto; de lo contrario, se limita su capacidad de establecer relaciones y por lo tanto, la comprensión del mismo.

En el siguiente capítulo presentamos algunos comentarios finales respecto al concepto de espacio vectorial.

4. Comentarios finales y recomendaciones

4.0 Introducción

De los análisis anteriores presentamos en la primera parte de este capítulo, algunos comentarios finales. En la investigación, hemos considerado el concepto de espacio vectorial, relacionado con las nociones de vector, combinación lineal, generar vectores, independencia-dependencia lineal y base. Nuestro análisis ha sido bajo el enfoque de los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. En la segunda parte del capítulo, presentamos algunos problemas para el entendimiento del espacio vectorial. Desarrollamos este estudio de acuerdo a los aspectos de nuestra propuesta: en primer lugar los que se deben a la naturaleza del concepto, en seguida los que dependen de los conocimientos previos de los estudiantes y para terminar los que se pueden deber a la didáctica. Para terminar exponemos algunas recomendaciones para el estudio de un espacio vectorial.

4.1 Comentarios finales

Exponemos en esta sección algunos comentarios como resultado del análisis histórico-epistemológico, de los antecedentes del álgebra lineal y del análisis de espacio vectorial en algunos textos de álgebra lineal. En ciertos puntos del análisis hacemos hincapié en el espacio aritmético R^2, porque en este espacio vectorial los conceptos pueden escribirse mediante propiedades que son inherentes a él. También porque algunos autores lo analizan con más detalle ya que consideran que un estudiante aprende mejor las ideas cuando surgen en un contexto familiar para ellos, como lo es la geometría.

Análisis del concepto de espacio vectorial en los modos de pensamiento

En los textos analizados la noción de espacio vectorial se estudia preponderantemente en alguno de los modos de pensamiento sintético o analítico. En el libro de Birkhoff y Mac Lane como en el caso de Banchoff y Wermer aunque consideran los tres modos de razonamiento, sin embargo, del sintético-geométrico solo consideran la intuición. El texto de Fletcher es especial, lo presenta en el modo analítico y el razonamiento sintético-geométrico no aparece. La presentación de Friedberg, Insel y Spence, la de Porter y Hill así como la de O'Neil es preferentemente en el modo analítico. Por último Rincón lo presenta en el razonamiento analítico-estructural.

Vemos que si se estudia el concepto de espacio vectorial privilegiando alguno de los modos de pensamiento, puede ser difícil relacionar la noción en los lenguajes que emplean los razonamientos: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural; así como traducir de un lenguaje al otro, del sintético al analítico y viceversa. El conocimiento puede estar atomizado en los modos de pensamiento, sin establecer vinculaciones entre ellos.

Para un estudiante que no profundice en los modos de razonamiento y que no relacione los lenguajes sintético y analítico, por ejemplo, puede desarrollar algoritmia en el modo analítico-aritmético. Si considera su análisis más del modo sintético su conocimiento no estará estructurado y si únicamente desarrolla las concepciones de una noción en modo analítico-estructural puede suceder que conozca la definición, y sin embargo, no ha entendido el concepto.

Respecto al concepto de vector y espacio vectorial

Cuando en un texto se desarrolla el estudio de los espacios vectoriales como una generalización de R^2, a R^3, a R^n y a los espacios más generales; por un lado, el lenguaje de estos espacios es diferente, por el otro el estudiante debe seguir un proceso de generalización tanto expansivo como reconstructivo (Tall, 1991). Esto implica tiempo para madurar las ideas. Si de manera superficial se aumenta a los vectores en R^2 una componente para llevarlo a R^3 y así sucesivamente se aumentan componentes para considerarlo en R^n, pensamos que un estudiante puede tener dificultades, por ejemplo:

El vector (1,0,0) de R^3 también pertenece a un plano coordenado y a un eje coordenado. Entonces el número de componentes y la dimensión del espacio considerado pueden confundir a un estudiante, por un lado es un vector en un subespacio de R^3, de dimensión 1 con 3 coordenadas y por el otro también puede pertenecer a un subespacio de R^3, de dimensión 2 con 3 coordenadas.

Respecto a la noción de combinación lineal y el espacio vectorial

En los textos cuando se hace énfasis en el análisis de los espacios vectoriales con la base canónica, puede dar como resultado que un estudiante considere la combinación lineal de vectores de esta base y automáticamente puede hablar de R^2 como combinación lineal de los vectores unitarios. Así, aun cuando el estudiante no tiene claras las nociones germinales de base y de espacio vectorial piensa que ha entendido los conceptos. Sin embargo, para él estas nociones pueden ser herencia de la geometría analítica y no propiamente del álgebra lineal.

Respecto a la noción de generar vectores y el espacio vectorial

Para el entendimiento de la noción de generar, el estudiante debe tener conocimiento de los números reales, como continuo numérico, de tal manera que pueda generar vectores y considerar las combinaciones lineales al multiplicar por diferentes números de este conjunto y no de un conjunto discreto. Por un lado, el desconocimiento de la estructura de los números reales, puede dar como resultado una concepción discreta al generar vectores. Por otro lado, el estudiante debe ver que la acción misma de generar, es una variación continua, pues de otro modo sólo construyen vectores aislados.

Si no se han trabajado los conceptos suficientemente en R^2 y R^3, tanto en el modo sintético como en el analítico; un estudiante puede tener una gran dificultad para encontrar el conjunto generado, pues por un lado, debe visualizar la suma geométrica de vectores y considerarla como variación continua de ellos. Por el otro, en modo analítico debe resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

Respecto al espacio vectorial

Si en un texto solamente se considera la idea de espacio vectorial relacionada con los axiomas, un estudiante puede tener su conocimiento atomizado. Por un lado, el lenguaje analítico-estructural puede hacerle creer que entiende el concepto, y sin embargo, no establece relaciones de las nociones en los lenguajes sintético y analítico.

Un estudiante puede saber de memoria definiciones de espacio vectorial, base, dimensión, subespacio vectorial; no obstante, si sus conocimientos de los números reales son escasos y no relaciona los modo de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, su conocimiento estará limitado dando lugar a concepciones inconsistentes.

4.2 Análisis de diferentes aspectos para el entendimiento de un espacio vectorial

En esta sección reunimos algunos de los problemas para el entendimiento de un espacio vectorial. De acuerdo a nuestro análisis, los clasificamos en tres categorías: en la primera situamos problemas relativos a la naturaleza del espacio vectorial; en la segunda exponemos algunos aspectos de los conocimientos previos de los estudiantes, comentando cómo influyen en la concepción del espacio vectorial y en la tercera categoría observamos algunas características de la didáctica que pueden afectar el aprendizaje de un espacio vectorial.

De la naturaleza del espacio vectorial

Para el entendimiento de un espacio vectorial, un estudiante enfrenta serias dificultades como son la cantidad de conceptos que debe manejar y la relación entre ellos. Podemos considerar los problemas para emplear los lenguajes de los modos de pensamiento sintético y analítico, establecer una relación entre ellos, así como para traducir de uno a otro. Se puede apoyar en su intuición en el modo sintético-geométrico, y en el modo analítico-aritmético desarrolle algoritmia y cierta mecanización; nos damos cuenta, sin embargo, que resulta difícil pensar en que surja un razonamiento sintetizador de su conocimiento. En la Fig. (4-1) mostramos los conceptos que deben relacionarse y las estructuras que determinan el espacio vectorial y que deben organizarse para el entendimiento del concepto.

Por su naturaleza, el espacio vectorial requiere de interacciones y relaciones entre los conceptos de independencia lineal y generación de vectores; si estos conceptos se trabajan aisladamente, las propiedades esenciales del espacio vectorial no se entenderán. En el diagrama de la Fig. 4-1 queremos expresar que se establecen relaciones entre el espacio vectorial, combinación lineal, generar vectores e independencia-dependencia lineal, conceptos que se deben tener como fundamento para el entendimiento de la estructura de un espacio vectorial.

En el caso particular de R^2, para un estudiante puede ser difícil establecer las relaciones entre los conceptos germinales. Por ejemplo, para generar el espacio vectorial R^2 la dificultad puede surgir por la condición de necesidad: Un estudiante sabe que solo necesita dos vectores para generar R^2 y no más, entonces puede pensar que tres vectores no generan R^2. La imagen geométrica y el uso del lenguaje sintético: dos vectores linealmente independientes generan R^2 y tres vectores linealmente independientes generan R^3, también puede ser una dificultad. Cuando esta imagen geométrica es muy fuerte un estudiante puede pensar que con tres vectores no genera R^2. En el modo analítico las dificultades corresponden al planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones lineales.

El problema para relacionar los conceptos germinales como analizamos en el capítulo 1, está en el origen de los mismos. Ellos surgen desvinculados y en diferentes contextos. En los sistemas de ecuaciones nacen las nociones de independencia-dependencia lineal y rango y la base surge de manera aislada del concepto de espacio vectorial. En los espacios geométricos nace la base canónica y en la teoría axiomática de los espacios vectoriales se establecen las nociones de dimensión, rango y base. Por otro lado la base canónica en R^2 y R^3 que podemos considerarla como una herencia de la geometría analítica es también una de las raíces de la base en los espacios geométricos. Sin embargo, como hemos visto puede ser un obstáculo de conocimiento para el entendimiento de los espacios vectoriales.

El estudiante debe entender los conceptos tanto en modo sintético como en analítico; establecer relación entre los dos modos, en lenguaje y representaciones, así como traducir de un lenguaje al otro. De otra forma las concepciones inconsistentes pueden surgir cuando no puede vincular los dos modos. También vemos que si el estudiante emplea uno de los modos para encontrar la solución a un problema sin usar el otro puede tener conocimientos parciales del concepto.

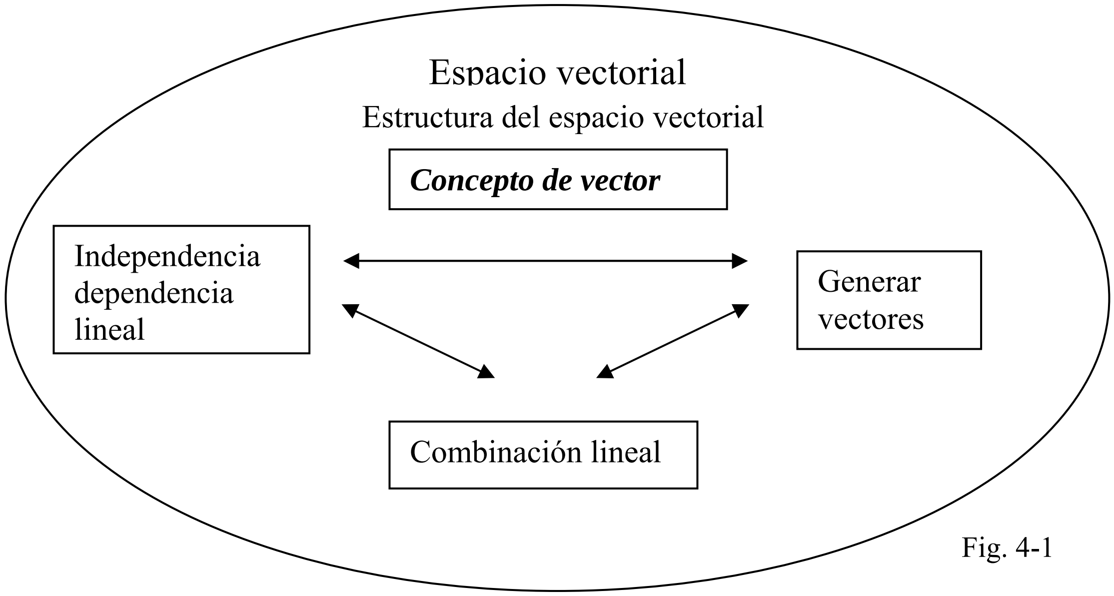


Fig. 4-1

De los Conocimientos Previos del Estudiante

De los conocimientos previos que el estudiante debe tener, para el entendimiento de un espacio vectorial, las propiedades de los números reales son fundamentales.

Un estudiante debe tener la idea geométrica de vector, no obstante, para el entendimiento de los conceptos de vector y de espacio vectorial más generales necesita cambiarla.

Una noción que el estudiante necesita para entender los conceptos de vector, espacio vectorial y subespacio vectorial es el de conjunto y subconjunto.

El estudiante debe resolver sistemas de ecuaciones lineales y relacionar con la representación geométrica de las soluciones, y de esta forma determinar los vectores linealmente independientes / dependientes en los dos modos de pensamiento.

Análisis didáctico

Del análisis previo pensamos que algunas de las dificultades para el entendimiento de un espacio vectorial tienen su origen en la didáctica.

Históricamente, los espacios vectoriales geométricos aparecen a través de generación de vectores linealmente independientes, no necesariamente vectores ortonormales, es decir, otras bases se emplean en la construcción del espacio vectorial. De nuestro análisis por un lado, encontramos en los libros que la base canónica es la más empleada y por otro, se define el espacio vectorial por medio de los axiomas, de tal manera que no se incluyen actividades de construcción. Con esta definición el estudiante ya no piensa en las nociones de independencia lineal y generar como necesarias para definir el espacio vectorial.

La didáctica tiene como costumbre tratar la base del espacio vectorial una vez definido éste, es decir, la base aparece posteriormente al nacimiento del espacio vectorial. Asimismo en los libros es usual estudiar primero el espacio vectorial, sus propiedades y después la base. De esta forma, el estudiante tiene aislados los conceptos de base y de espacio vectorial, así que éste no se ve construido por la base, sino que la base se define una vez que se tiene el espacio vectorial.

Observamos en los textos de álgebra lineal una separación entre los enfoques sintético y analítico, de tal forma que aparece la necesidad de establecer un equilibrio dinámico en la forma de trabajar los modos de pensamiento y evitar un desequilibrio al emplear sólo uno sin considerar el otro.

En la didáctica no se favorece el modo sintético-geométrico ya sea con el trazo de gráficas y su interpretación o como apoyo intuitivo. El estudiante se acostumbra a trabajar en el modo analítico-aritmético desde los primeros años de educación secundaria. De esto resulta que en el nivel superior prefiera trabajar en este modo empleando una algoritmia mecanicista. Cuando se utiliza el modo analítico-estructural resulta más fácil resolver un problema usando la definición, pero esto puede suceder sin entender el concepto. Un ejemplo de esto es el uso de la base canónica para obtener combinaciones lineales o generar vectores o el empleo de los axiomas para definir espacio vectorial. Sin embargo, su conocimiento puede ser parcial.

La didáctica del álgebra lineal repercute sobre la conceptualización en el estudiante de un espacio vectorial de manera decisiva; cuando se usan las coordenadas cartesianas el estudiante puede tener un desempeño adecuado y esto puede llevarlo a creer que ha entendido la noción, sin embargo, ésta puede ser sólo una herencia de la geometría analítica, que a la vez se puede convertir en un obstáculo que le impida el entendimiento de las nociones de base y espacio vectorial.

En la didáctica el conocimiento se encuentra atomizado. En el caso de un espacio vectorial no se estudian las relaciones entre los conceptos germinales; ellos se estudian de forma secuencial. Creemos que se necesita proponer un estudio de las relaciones entre los conceptos germinales más dinámico y el estudiante al establecer vínculos entre ellos redundaría en el entendimiento de los conceptos de espacio vectorial, base y dimensión.

Después del análisis que presentamos en los párrafos anteriores acerca de la problemática que surge para el entendimiento de un espacio vectorial, pensamos conveniente proponer algunas recomendaciones, en el sentido de que si bien es cierto, no es posible evitar ni la problemática, ni los obstáculos, es con la idea de llamar la atención hacia las fuentes de dificultad y obtener mejores resultados para el entendimiento del concepto.

4.3 Recomendaciones

Para un estudiante es más fácil pensar en los vectores geométricos como los puntos del plano, lo que corresponde en la representación analítica a parejas de números reales (a, b). En esta forma las parejas están referidas automáticamente al origen de coordenadas (0,0) y para verificar que se trata de un espacio vectorial, solo tiene que verificar los axiomas. Cuando el estudiante piensa en vectores geométricos, flechas, debe abstraer el vector del objeto flecha y pensar en un punto de aplicación; además necesita dirección y sentido, si lo asocia por ejemplo, a la física (fuerza, velocidad, etc.). Creemos que se debe hacer hincapié si se trata de vector geométrico, de la física o del álgebra lineal y por qué en este último caso los vectores deben estar anclados a un punto: el origen.

Para fortalecer el concepto de vector en R^2, sugerimos analizar los isomorfismos de los espacios vectoriales de dimensión 2: el conjunto de vectores-flecha en el plano, de vectores punto en el plano, de vectores pareja ordenada de números reales (a, b), de matrices (1x2) o (2x1). De esta manera el estudiante tendría la intuición del modo sintético y la orientación en el plano. De una intuición y el proceso algorítmico, el estudiante por la reificación puede construir un objeto (Sfard, 1991). Consideramos importante insistir en el modo sintético-geométrico, de tal manera que el estudiante se percate de la diferencia de un vector en el plano, vector de la física o geométrico y el vector de un espacio vectorial.

Respecto a las ideas de combinación lineal y generar vectores, consideramos importante analizar más profusamente las relaciones entre ellas. De tal manera que, el estudiante por un lado, practique representaciones en el modo sintético-geométrico y las relacione con los sistemas de ecuaciones lineales en el modo analítico-aritmético, y por otro lado, que pueda ver la generación de vectores como una acción continua al multiplicar por números reales.

De la independencia lineal en el caso de los espacios vectoriales R^2 y R^3, opinamos que sería conveniente analizar la noción en los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético; de tal manera que el estudiante examine situaciones y pueda establecer la relación del concepto en estos espacios vectoriales, en los dos modos, para obtener los espacios vectoriales $L\{\boldsymbol{0}\}$, $L\{\boldsymbol{v}\}$ y $L\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$, para $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ ε R^2, $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ linealmente independientes y de la misma forma para $L\{\boldsymbol{0}\}$, $L\{\boldsymbol{v}\}$, $L\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$, $L\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$, $L\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}\}$, $L\{\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ para $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ ε R^3, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ linealmente independientes.

Sugerimos preparar actividades en las que el estudiante desarrolle prácticas, que le permitan esclarecer las formas de concebir el espacio vectorial R^2: geométricamente como los puntos del plano cartesiano y los vectores-flecha, analíticamente como las parejas ordenadas de números reales (a, b) o las matrices (1x2) o (2x1).

Pensamos conveniente trabajar con vectores en subespacios de dimensión 1 y 2 del espacio vectorial R^3. Creemos que sería favorable proponer actividades que ayuden a pensar en situaciones geométricas con figuras planas y volúmenes, asimismo realizar acciones que pudieran ayudar a desarrollar la orientación espacial, así como la intuición geométrica y posteriormente en una segunda etapa involucrar actividades de construcción de subespacios vectoriales geométricos de dimensiones 1 y 2 en R^3.

Por su naturaleza, la base requiere de interacciones y relaciones entre los conceptos de generar vectores e independencia lineal; si estos conceptos se manejan aisladamente, en términos de un análisis cartesiano mecanicista, las propiedades esenciales de la base no se entienden. Creemos que el estudio sobre la base debe proponerse en un análisis sistémico que relacione los conceptos germinales y facilite el entendimiento de tales nociones, por ejemplo, como lo analizan Friedberg, Insel y Spence.

Opinamos que sería conveniente establecer un estudio sistémico de la enseñanza del espacio vectorial, para que el alumno entienda el concepto, relacionando todas sus partes y el conocimiento no quede, por un lado, en un plano mecanicista o reduccionista y por el otro, el entendimiento de las nociones germinales atomizado. De esta manera tendría una mayor flexibilidad en el establecimiento de las relaciones conceptuales.

Por último, consideramos conveniente incluir en los libros de texto de álgebra lineal una perspectiva histórica, pues el estudio de los obstáculos que encontraron los matemáticos en el pasado nos ayuda a interpretar los errores que cometen hoy los estudiantes, a su vez, el estudio de los errores, dificultades y conceptualizaciones erróneas de los estudiantes, arrojan alguna luz sobre nuestra comprensión de la historia de las matemáticas (Sierpinska, 1996a). A este respecto Vergnaud expresa:

> *Es esencial que los autores de libros de texto incluyan en su material alguna perspectiva histórica y presenten algunos ejemplos importantes de cambios en las ideas matemáticas. También es esencial que los estudiantes pasen por cambios importantes en sus propias ideas al resolver problemas, discutir conjeturas y procedimientos diferentes y llegar a ser más conscientes de sus propias concepciones y dificultades* (Vergnaud, 1990).

Bibliografía

1. Aguilar, G. (1991): *Una propuesta para calcular la mejor solución aproximada a un Sistema de Ecuaciones Lineales Inconsistente*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

2. Alvarado, D. (1998): *Creencias de estudiantes de bachillerato sobre aspectos de la enseñanza de las matemáticas en el contexto de la resolución de problemas*. Tesis de Maestría en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

3. Banchoff, T. & Wermer, J. (1992): *Linear Algebra Through Geometry*. New York, USA: Springer Verlang.

4. Barrera, R., Cano, G. y Cervantes, H. (1998): *Coexistencia del pensamiento sintético y analítico y el concepto de solución en un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables*. Tesina de especialidad. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

5. Birkhoff, G. & MacLane, S. (1954): *Álgebra Moderna*. Traducción de la 12.[a] edición inglesa (1953). Barcelona España: Editorial Teide. (Versión original en inglés publicada en 1941).

6. Boyer, C. (1956): *History of Analytic Geometry*. Yeshina University, New York, USA: Scripta Mathematica.

7. Brousseau, G. (1986): Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques* **7** (2), 33-115.

8. Burali-Forti, C. et Marcolongo R. (1912): *Analyse Vectorielle Générale.1, Transformations linéaires*. Pavía, Italia: Ed. Mattei.

9. Cajori, F. (1929): *A History of Mathematical Notations*. *Notations mainly in higher mathematics*. Volumen II. Chicago, Illinois, USA: The Open Court Publishing Company.

10. Canguilhem, G. (1968): *Etudes d'Histoire et de Philosophie des Sciences*. Paris France.

11. Carlson, D. (1997): Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In? En D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins & W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp 39-51). Washington, D. C. USA: Mathematical Association of America.

12. Carlson, D., Johnson, C., Lay, D. & Porter, D. (1997): The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course en Linear Algebra. En D. Carlson,

Ch. Jonson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins & W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra*, (pp 53-58). Washington, D. C. USA: Mathematical Association of America.

13. Castellanos, G. (1994): *Estudio experimental sobre una propuesta metodológica que contribuya a la comprensión de la resolución de problemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

14. Castro, G. (1992): *Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de Álgebra Lineal de las carreras de Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Morelia*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

15. Crowe, M. (1967): *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. New York, USA: Dover Publications, Inc.

16. Cutz, B. M. (2005): *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los Sistemas de Ecuaciones y su Solución*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.

17. Chevallard, Y. (1991): *La Transposición Didáctica*. *Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

18. Da Silva, A. y Lins, R. (2002): *An Analisis of the Production of Meaning for the Notion of Basis in Linear Algebra*. Mathematics Department, Postgraduate Program in Mathematics Education. UNESP-Rio Claro, Brazil.

19. Dirichlet, G. P. L. (1893): *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig: Vieweg. Reedición con suplementos de Richard Dedekin, 1871 (Ed. 1), 1879 (Ed. 2), 1893 (Ed. 4). Reimpresión de Ed. 4 (1968), New York, USA: Chelsea Publishing Company

20. Dorier, J.-L. (1990): *Contribution à L'Étude de L'Enseignement à L'Université des Premiers Concepts D'Algèbre Linéaire. Approches Historique el Didactique*. Thèse de Doctorat de L'Université Joseph Fourier. Grenoble, France.

21. Dorier, J.-L. (1991): L'Enseignement des Concepts Élémentaires D'Algèbre Linéaire à L'Université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **11** (23), 325-384.

22. Dorier, J.-L. (1995a): A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica* 22, 227-261.

23. Dorier, J.-L. (1995b): Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **29**, 175-197.

24. Dorier, J.-L. (1996): Basis and dimension, from Grassmann to van der Waerden. En G. Schubring (Ed.), *Scholar – Papers from a Sesquicentinnial Conference, Boston Studies*

en the Philosophy of Science Hermann Gunter Grassmann (1809-1877): Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist (volumen 187, pp. 175-196). Dordrecht: Kluwer.

25. Dorier, J.-L. (1997): Une Lecture Épistémologique de la Genèse de la Théorie des Espaces Vectoriels. En J.-L. Dorier (ed.). *L'Enseignement de L'Algèbre Linèaire en Question*. (pp. 27-102). La Pensée Sauvage Éditions. France.

26. Dorier, J.-L. (1999): Exemples d'interaction entre recherches en didactique et en histoire des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*. Grenoble, France. www_leibniz.imag.fr/LesCahiers

27. Dorier, J.-L. (2000): Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire. Perspectives théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz* 12. Grenoble, France.

28. Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. et Rogalski, M. (1997) : L'Algèbre Linéaire: L'Obstacle du Formalisme à Travers Diverses Recherches de 1987 a 1995. En J.-L. Dorier (ed.). *L'Enseignement de L'Algèbre Linèaire en Question*. (pp. 105-147). La Pensée Sauvage Éditions. France

29. Dubinsky, E. (1997): Some Thoughts on a first course in Linear Algebra at the College Level. En D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins & W. Watkins (Eds), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp. 85-106). Washington, D. C. USA: Mathematical Association of America.

30. Dubinsky, E. (2001): Teaching and Learning Abstract Algebra and Linear Algebra: A Unified Approach. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (volumen 3, pp. 705-712). Melbourne, Australia.

31. Duval, R. (1998): Signe et Objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6, Strasbourg : IREM, (**vol I** pp. 139-163. **vol. II** pp. 165-196).

32. Eslava, M. (1999): *Análisis de Libros de Texto de Álgebra en el Tema de Sistemas de dos y tres Ecuaciones Lineales con dos y tres incógnitas, en la Perspectiva de los Modos de Razonamiento Sintético y Analítico*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

33. Eslava, M. y Villegas, M. (1998): *Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. Tesina de especialidad. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

34. Euler, L. (1750): Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. 4, 219-223.

35. Filloy, E. (1998): *Didáctica e Historia de la Geometría Euclideana*. Serie Cultura y Matemáticas. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

36. Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics. An Educational approach*. Holland Ed. Reidel Publishing Company.

37. Fischer, A. (2005): Mental Models of the Concept of Vector Space. *Four Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guixols, Spain. February. CERME4.crm.es/

38. Fletcher, T. J. (1972): *Linear Algebra through its Applications*. London, England: Van Nostrand Reinhold Company London.

39. Friedberg, S., Insel, A. y Spence L. (1982): *Álgebra Lineal*. México: Publicaciones Cultural S. A.

40. Frobenius, G. F. (1875): Uber das Pfaffsche Problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **82**, pp. 230-315.

41. García, H. (1992): *El Álgebra Lineal aplicada al Análisis Estructural*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

42. Grassmann, H. (1844): *Teoría de la Extensión. Historia y Filosofía de la Ciencia*. Buenos Aires-México (1947): Editorial Espasa-Calpe Argentina S. A.

43. Griffel, D. H. (1989): *Linear Algebra and its applications*. A first course. Vol. I. England. Ellis Horwood Limited.

44. Gueudet-Chartier, G. (2000): Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire. *Laboratoire de didactique des mathématiques. Université de Rennes. Equipe de didactique des mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble, France: Laboratoire Leibniz- Grenoble.

45. Guadarrama, J. (2000): *Estudio de la Interpretación Geométrica del Concepto de Solución en los Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

46. Harel, G. (1985): Teaching Linear Algebra in High School. Unpublished doctoral dissertation. Israel, Ben-Gurion University of Negev, Beer Sheva.

47. Harel, G. (1987): Variations in linear algebra. *For the learning of Mathematics*, 7 (3), 29-32.

48. Harel, G. (1989): Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11 (3), 139-148, Spring Edition.

49. Harel, G. (1990): Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*. **21** (3), 387-392.

50. Hillel, J. & Sierpinska, A. (1994): On One Persistent Mistake in Linear Algebra, in *18th International Conference of Psycology on Mathematics Education* (vol. III, pp. 65-72). Lisboa, Portugal.

51. Hillel, J. (1997): Des Niveaux de Description et du Problème de la Représentation en Algèbre Linéaire. En J. L. Dorier (Eds.), *L'Enseignement de L'Algèbre Linèaire en Question* (pp. 231-247). France: La Pensée Sauvage Éditions

52. Joubert, J. (1987): *Análisis Vectorial. Un curso desarrollado con el Sistema de Instrucción Personalizada.* Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

53. Lewis, A. C. (1977): H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik. *Annals of Science* **34**, pp. 103-162.

54. Maracci, M. (2003): On some Dificulties in Vector Space Theory. Proyect: *Problems about the teaching and learning of mathematics: meanings, models, theories,* (2003011072). Research study funded by MIUR, University of Genova and the University of Pisa.

55. Marines, C. y Monroy, G. (1998): *Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres ecuaciones con tres variables*. Tesina de especialidad. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.

56. Molina, J. G. (2004): *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la Transformación Lineal en contexto Geométrico*. Tesis de maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

57. Mora, B. (2001): *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Cinvestav, México.

58. Nardi, E. (1996): *The Novice Mathematician's Encounter with Mathematical Abstraction: Tensions in Concept-Image Construction and Formalization*. Thesis of Doctor of Philosophy at the University of Oxford. Linacre College. Trinity Term, U. K.

59. Nardi, E. (1997): El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática*, vol. **9**, no 1, abril. pp. 47-60.

60. O'Neil, P. V. (1979): *Introduction to Linear Algebra. Theory and Applications*. Belmont, California, USA: Wadsworth Publishing Company, Inc.

61. Peano, G. (1997): *Geometric Calculus According to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*. Boston, USA: Birkhäuser. (Versión original en italiano publicada en 1888).

62. Piaget, J. & García, R. (1994): *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI editores.

63. Pincherle, S. et Amaldi, U. (1901): *Le operazioni distributive*. Bologne, Italia: Zanichelli.

64. Porter, G. (1997): Writing about linear algebra: report on an experiment. En D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A Watkins & W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp 151-154). Washington D. C. USA: The Mathematical Association of America.

65. Porter, G. & Hill, R. (1996): *Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad*. New York, USA: Springer-Verlag.

66. Ramírez, M. A. (2005): *Dificultades que presentan los estudiantes en los Sistemas de Ecuaciones Lineales en los Modos Geométrico y Analítico*. Tesis de Licenciatura, Acapulco, México.

67. Rincón, H. (2006): *Álgebra Lineal*. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. México. Las prensas de Ciencias.

68. Saldanha, L. A. (1995): T*he Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties*. Master's Thesis. Concordia University. Montréal, Québec, Canada.

69. Schwank, I. (1999): On Predicative versus Functional Cognitive Structures. *European Research in Mathematics Education I. Proceedings of The First Conference of The European Society for Research in Mathematics Education*, vol. **2**, pp. 84-96.

70. Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reifications on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* vol. **22**, 1-36. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

71. Sierpinska, A. (1994): Understanding in Mathematics. *Studies in Mathematics Education Series*: 2. Washington, D. C. USA: The Falmer Press.

72. Sierpinska, A. (1996a): The diachronic dimension in research on understanding in mathematics-usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. En

M. Otte, N. Knoche, and H. N. Jahnke (Eds.), *Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

73. Sierpinska, A. (1996b): Problems related to the design of the teaching and learning processes in linear algebra. *Paper presented at the Research Conference in collegiate Mathematics Education*, September 5-8. Mt. Pleasant, Michigan: Central Michigan University.

74. Sierpinska, A. (1997): Formats of Interaction and Model Readers. *For the Learning of Mathematics* **17** (2), 3-12.

75. Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999): Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The case of linear Transformations. *Recherches en Didactique des Mathematiques* **1** (1), 7-40.

76. Sierpinska, A. (2000): On some aspects of students' thinking in linear algebra. Dans J.-L Dorier (ed.), *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

77. Sierpinska, A., Nnadozi, A. & Oktaç, A. (2002): *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra*. http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html

78. Soto, J. L. (2003): *Un Estudio sobre las dificultades para la conversión Gráfico-Algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la Teoría de Espacios Vectoriales en R^2 y R^3*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.

79. Steinitz, E. (1910): Algebraische Theorie der Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. **137** pp. 167-309. Ed. H. Hasse and R. Baer. Berlin/Leipzig.

80. Tall, D. (1991): The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group.

81. Torres, J. (1992): *Una propuesta de contenidos matemáticos para el curso de Álgebra Lineal de las carreras del área de Ciencias Sociales y Administración de la Universidad de Michoacán de San Nicolás de Hidalgo*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

82. Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005): La Théorie APOS et L'enseignement de L'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

83. Uicab, G. R, (2004): *Transformaciones Lineales en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.

84. Vázquez, E. (1992): *Programa de apoyo para un curso de Álgebra Lineal. (Software de apoyo en la Educación)*. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Cinvestav, México.

85. Vergnaud, G. (1990): Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher y J. Kilpatrik (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceeding of the ICMI Study Series* (pp. 14-30). Cambridge, U. K.: Cambridge University Press.

86. Waerden B. L. van der (1937): *Modern Algebra*. 2 vols. Berlin Springer-Verlag.

87. Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I., Dubinsky, E., (2002): *Learning Linear Algebra with ISETL*, disponible sur: http://www.ilstu.edu/-jfcottr/linear-alg/