



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios de Posgrado

FUNDAMENTACION MATEMATICA  
DE LOS  
ALGORITMOS SIMPLICIALES

T E S I S  
Que para obtener el grado académico de  
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)  
p r e s e n t a

MARIA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

Director de tesis: Dr. Pablo Barrera Sánchez

a la memoria de mis padres

a mis hijos  
a mis nietos  
a Sergio

## FUNDAMENTACION MATEMATICA DE LOS ALGORITMOS

### SIMPLICIALES

Paloma Zapata Lillo

## INDICE

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| Capítulo 0. | Algunos ejemplos de la aparición de los puntos fijos en la Economía Teórica.                                      | 5   |
| Capítulo 1. | El Lema de Sperner y otros resultados interesantes.   | 16  |
| 1.1.        | Motivación de la relación entre los triángulos completamente etiquetados y los puntos fijos de una función.       |     |
| 1.2.        | Algunas definiciones.   |     |
| 1.3.        | Demostración del Teorema de Brouwer usando el Lema de Sperner.  |     |
| 1.4.        | Triángulos completamente etiquetados, puntos fijos y otros resultados interesantes.                               |     |
| 1.5.        | El Lema de Kuhn y el Teorema Fundamental del Álgebra.   |     |
| Capítulo 2. | Una demostración constructiva del Lema de Sperner.  | 53  |
| 2.1.        | Demostración del Lema de Sperner.   |     |
| 2.2.        | ¿Qué tan buenos son los simplejos c.e.?   |     |
| 2.3.        | Triangulaciones.  |     |
| 2.4.        | Un Algoritmo con etiquetación entera.   |     |
| Capítulo 3. | La Etiquetación Vectorial   | 106 |
| 3.1.        | Motivación.   |     |
| 3.2.        | Un Lema de Sperner para etiquetación vectorial.   |     |
| 3.3.        | El Lema de Sperner para etiquetación vectorial y la validez de los teoremas de punto fijo en un caso restringido. |     |

- 3.4. Demostración del Lema de Sperner para etiquetación vectorial.

Capítulo 4. La Etiquetación Vectorial y la Aproximación Lineal a una Función Continua. El Problema de Regularidad. 125

- 4.1. Algunas definiciones y resultados de Topología P.L.
- 4.2. Traducción de los resultados de 3.4 a terminología P.L.
- 4.3. La versión P.L. del Lema de Sard y los algoritmos para obtener puntos fijos.
- 4.4. Algunos conceptos importantes para la implementación del algoritmo con etiquetación vectorial.
- 4.5. El Algoritmo de Eaves y Saigal.

Capítulo 5. Una aproximación P.L. al grado de Brouwer de un mapeo. 187

- 5.1. Orientación.
- 5.2. Grado de un Mapeo.

## INTRODUCCION

El valor teórico de los algoritmos simpliciales para calcular puntos fijos se capta con sólo observar que cada uno de ellos es en el fondo una demostración constructiva del teorema de punto fijo de Brouwer.

Los primeros algoritmos simpliciales se desarrollaron a mitad de los años sesenta, surgieron en conexión a la computación del equilibrio y de puntos de equilibrio de Nash de juegos bi matriciales y están unidos a los nombres de Scarf, Hansen, Lemke, Howson y Kuhn.

A partir de entonces, dada la enorme importancia que los teoremas sobre puntos fijos tienen en multitud de campos, se desarrolló una interesante interacción entre ramas de las más abstractas y "puras" de las matemáticas como son la Topología Algebraica y Diferencial y ramas tan concretas y aplicadas como son las vinculadas al Análisis Numérico y a la Computación, para el desarrollo teórico y práctico de los algoritmos. La Economía Matemática y la Teoría de Juegos han seguido jugando un papel central en este desarrollo.

En relación al Teorema de Punto Fijo de Brouwer se convierte en constructiva una de las demostraciones clásicas, la que es es tá basada en el Lema de Sperner.

Consideremos una función continua  $f$  definida de un  $n$ -simplejo  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo (después se puede extender la idea a dominios cerrados y convexos contenidos en  $\mathbb{R}^n$ ). Sea  $T$  una triangulación cualquiera de  $S$ , llamaremos etiquetación de  $T$  a una función  $\lambda$  que a cada vértice  $v$  le asocia un entero no negativo menor o igual a  $n$ , que indica el índice de la primera coordenada positiva de  $v - f(v)$ . Bajo el supuesto de que ningún vértice es punto fijo, las propiedades combinatorias de la triangulación etiquetada con  $\lambda$  nos permiten construir un algoritmo que nos lleva a un elemento  $\sigma$  de  $T$  con todas sus etiquetas distintas, triángulo completamente etiquetado.

Si consideramos una sucesión de Triangulaciones cuyo diámetro tiende a cero, podemos obtener una sucesión de "triángulos" completamente etiquetados cuyos vértices convergen a un sólo punto  $\hat{v}$ ;  $\hat{v}$  es punto fijo de  $f$ .

Posteriormente, cambiando la etiquetación entera por una vectorial  $\lambda_v$ , es decir asociando a cada vértice  $v$  el vector  $v - f(v)$  llamando triángulo completamente etiquetado ó regular al elemento de  $T$  que contenga en su interior un cero de la aproximación lineal de  $Id - f$ ; resultará que

bajo ciertas condiciones la triangulación etiquetada con  $\lambda_v$  tendrá las mismas propiedades combinatorias que mencionábamos anteriormente y podremos construir un algoritmo

mez, Alejandra Ibarra, José Ibarra, Sonia Jiménez, Javier  
Morales, Jorge Ruiz, César Souza, María del Carmen Tovar y

que encuentra un triángulo completamente etiquetado.

También se puede construir una etiquetación vectorial relacionada con una correspondencia superiormente semicontinua de  $S$  en  $S$  para obtener una demostración constructiva del Teorema de Punto Fijo de Kakutani.

Las restricciones que tiene que cumplir una función (una correspondencia), para dar lugar a una etiquetación vectorial con las propiedades requeridas, son aparentemente muy fuertes, se puede hacer ver que son análogas a las de la regularidad de Topología Diferencial y se tiene una versión del Lema de Sard que da generalidad al algoritmo.

Otros temas interesantes como el de grado de Brouwer de un mapeo pueden recibir un tratamiento constructivo, apoyándose en los Algoritmos Simpliciales.

Este tipo de temas son los que se desarrollan en el presente trabajo.

Para terminar quiero expresar, a las personas que me apoyaron durante la realización de este trabajo, mi gran reconocimiento.

Agradezco, en primer lugar, por la ayuda que me brindaron en todo momento, a los miembros del Seminario de Economía Matemática de la Facultad de Ciencias: Salvador Ferrer, Marco Gómez, Alejandro Ibarra, José Ibarra, Sonia Jiménez, Josefina Morales, Jorge Ruiz, César Souza, María del Carmen Tovar y

muy especialmente Sergio Hernández, en el que siempre encontré el más fuerte respaldo y los más valiosos consejos.

Agradezco a María Elena García, Adalberto García-Maynez, Jesús López Estrada, Santiago López de Medrano, Mariano Lozano y Carlos Urzúa por la revisión que hicieron del trabajo y sus valiosas sugerencias.

A Carolina, Rosa María y Lupita, agradezco todo el esfuerzo que hicieron y la paciencia que tuvieron para descifrar los jeroglíficos del manuscrito.

Dejo al final mi más profundo agradecimiento para Pablo Barrera, sin él, la realización de este trabajo no hubiera sido posible.

Por supuesto los errores que pueda tener el trabajo, son de mi exclusiva responsabilidad.

## ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APARICION DE LOS PUNTOS FIJOS EN LA ECONOMIA TEORICA

Cuando se tiene una función  $f$  de un cierto espacio  $D$  en si mismo, se dice que  $X$  en  $D$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(X) = X$ . Este tipo de puntos es de una utilidad enorme para demostrar resultados de la matemática misma, como sucede con los importantísimos teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales, y también en las aplicaciones a numerosos campos. Por ello, los matemáticos han dedicado una gran cantidad de esfuerzo a estudiar condiciones que aseguren la existencia de puntos fijos de distintos tipos de funciones definidas en los más diversos espacios.

En este pequeño capítulo nos restringiremos a algunos ejemplos, de los muchos que existen, de cómo aparecen los puntos fijos en la economía teórica.

1- En Economía, aparecen muy frecuentemente los modelos lineales de Leontief. Estos presentan en forma muy simplificada las relaciones técnicas de producción. La idea, gruesamente, es como sigue. Supongamos que en la economía se producen  $n$  distintos tipos de mercancías. El elemento básico del modelo es entonces una matriz real  $A = (a_{ij})$ , de orden  $n \times n$ , no nula y con  $a_{ij} \geq 0$ . El término  $a_{ij}$  se interpreta como la cantidad de mercancía del tipo  $i$  que se usa ó "insume" para producir una uni

dad de mercancía del tipo  $j$ . Bajo hipótesis de linealidad, puede verse que si se quiere producir el vector

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ con } x_i \in \mathbb{R} \text{ y } x_i \geq 0,$$

se necesita como vector de insumos el vector  $AX$ . El vector  $X - AX$  será entonces el excedente económico cuando se produce  $X$ . Un problema al que Leontief dió mucha importancia es el siguiente:

Si consideramos que los miembros de la sociedad demandan conjuntamente un vector  $D \geq \bar{0}$ , ¿Existirá un vector de producción  $X$  tal que  $X - AX = D$ ?

Si definimos  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $h(X) = D + AX$  la pregunta de Leontief se convierte en esta otra: ¿existe en  $\mathbb{R}^n$  un punto fijo de  $h$ ?

Es claro que no siempre existirá punto fijo de  $h$ . Pero supongamos que la economía tiene un vector de producción total  $X \geq \bar{0}$  tal que el vector excedente  $X - AX$  tiene todas sus coordenadas positivas, es decir, supongamos que  $A$  es una matriz productiva. En estas condiciones, el teorema de punto fijo de Banach nos asegura que existe una solución única al problema de Leontief.

Definición: Sea  $(E, d)$  un espacio métrico, si  $f: E \rightarrow E$  es tal que existe un número no negativo  $\alpha < 1$  para el cual  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  para toda pareja  $\{x, y\}$  de puntos de  $E$ , entonces se dice que  $f$  es una contracción.

Teorema de Banach. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $F$  una contracción, entonces existe un único punto  $\bar{X}$  en  $E$  tal que  $f(X) = \bar{X}$ .

Volvamos ahora a nuestro problema. En  $\mathbb{R}^n$  definamos  $d(x, y) = \max_i \frac{1}{x_i} |x_i - y_i|$ ,  $(\mathbb{R}^n, d)$ , resulta entonces un espacio métrico completo.

Además

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &= d(Ax + D - Ay - D) = \\ &= \max_i \frac{1}{x_i} \left| \sum_j a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leq \max_i \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_j a_{ij} |x_j - y_j| \right\} \\ &= \max_i \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_j a_{ij} \max_j (x_j - y_j) \right\} \\ &\leq \max_i \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_j a_{ij} \hat{x}_j \right\} \max_j \left\{ \frac{1}{\hat{x}_j} |x_j - y_j| \right\} \\ &= \left( \max_i \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_j a_{ij} \hat{x}_j \right\} \right) d(x, y) \end{aligned}$$

Pero como  $\hat{x} > Ax$ , entonces para toda  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &> \sum_j a_{ij} \hat{x}_j \\ \therefore 1 &> \frac{1}{\hat{x}_i} \sum_j a_{ij} \hat{x}_j. \end{aligned}$$

Por lo que  $\max_i \frac{1}{x_i} \sum_j a_{ij} \hat{x}_j < 1$ .

Y  $h$  es una contracción.

Tenemos entonces, que el teorema de punto fijo de Banach nos ase

gura, que existe solución única al problema de Leontief.

2- Analicemos ahora otro problema económico también desarrollado con el modelo de Leontief.

Suponga ahora que  $a_{ij}$  incluye, además de lo dicho anteriormente, el consumo de mercancías de tipo  $i$  por parte de los trabajadores que elaboran una unidad de mercancía  $j$  y consideremos una economía de intercambio.

Supongamos que se ha establecido un sistema de precios  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} > \bar{0}$

que describe las relaciones de intercambio entre las diversas mercancías; es decir, el cociente  $\frac{p_i}{p_j}$  representa las unidades de mercancías del tipo  $j$  que se  $\frac{p_i}{p_j}$  intercambian por una unidad del tipo  $i$ . Por ello si  $p' = \alpha p$  con  $\alpha > 0$  entonces  $p'$  se presenta las mismas relaciones de intercambio que  $p$ .

Si pensamos que en la economía, cada individuo que decide producir algo lo hace con el fin de recibir una "ganancia" y no de consumir lo producido, los precios deben ser tales que

$$2.1 \quad p_j > \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \quad \text{y la ganancia será}$$

$$p_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i > 0$$

Una hipótesis que se usa entre varios autores (Bortkiewicz, Morishima, etc.) consiste en que todos ganan proporcionalmen-

te a lo que tienen que invertir, es decir, para toda  $j$

$$p_j - \sum_i a_{ij} p_i = r \sum_i a_{ij} p_i$$

en donde  $r > 0$

Tenemos entonces que

$$2.2 \quad p_j = (1 + r) \sum_i a_{ij} p_i \quad j = 1, \dots, n$$

o, escrito vectorialmente,

$$p^t = (1 + r) p^t A$$

y, por lo tanto

$$A^t p = \frac{1}{1+r} p.$$

El problema de que existe un vector de precios tales que permitan obtener a cada capitalista una ganancia positiva proporcional al capital invertido se ha convertido en el problema de la existencia de un vector propio, con todas sus coordenadas no negativas, asociado a un valor propio positivo menor que uno.

Aquí solo atacaremos la cuestión de la existencia de un vector propio no negativo asociado a un valor propio no negativo. (Y dejaremos de lado si éste es menor que uno, esto sólo se cumplirá si la matriz es productiva cómo en el ejemplo 1).

Buscaremos nuestro vector propio en el subconjunto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$  definido cómo  $\Delta = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\}$ .

Ahora, consideremos  $h: \Delta \rightarrow \Delta$

como  $h(p) = \frac{p + A^t p}{1 + \|A^t p\|_1}$ , en donde

$$\|A^t p\|_1 = \sum_{i,j} a_{ij} p_i.$$

Es fácil ver que  $p \in \Delta$  es vector propio de  $A^t$  asociado a  $\|A^t p\|_1$  (que resulta ser un valor propio de  $A^t$ ) si y sólo si  $h(p) = p$ .

Pues, si  $h(p) = p$ , entonces

$$\frac{p + A^t p}{1 + \|A^t p\|_1} = p. \text{ Por lo que}$$

$$p + A^t p = p + \|A^t p\|_1 p \quad \text{y}$$

$$A^t p = \|A^t p\|_1 p.$$

Por otro lado, si  $p \in \Delta$  es tal que

$$A^t p = \alpha p \text{ con } \alpha > 0, \text{ entonces } \|A^t p\|_1 = \alpha \text{ y}$$

$$p + A^t p = p + \|A^t p\|_1 p = (1 + \|A^t p\|_1) p$$

$$\text{por lo que } p = \frac{p + \|A^t p\|_1 p}{1 + \|A^t p\|_1} \text{ ó } h(p) = p.$$

Vamos a recurrir a otro teorema que nos asegure la existencia de puntos fijos de la función  $h$ .

**Teorema de Brouwer.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  compacto y convexo  $\mathcal{F}: D \rightarrow D$

continua, entonces existe  $x \in D$  tal que  $f(x) = x$ . La función  $h$  que estamos trabajando es continua y  $\Delta$  es compacto y convexo. Por lo tanto, existe  $p \in \Delta$  tal que resuelve nuestro problema.

Observación: si quitamos a la matriz  $A \geq \bar{0}$  toda interpretación económica, el teorema de Brouwer nos permite afirmar que existe un vector propio de  $A$  con todas sus coordenadas no negativas y asociado a un valor propio no negativo. Este resultado es parte de un importante teorema, de amplio uso en toda la economía matemática llamado el teorema de Perron-Frobenius.

Uno de los problemas más estudiados por los "economistas matemáticos" es el de la existencia del llamado equilibrio general competitivo. Presentamos ahora la versión más simple de un modelo de "una economía de intercambio puro" (donde las decisiones de producción "están dadas"). Imaginamos una economía en donde, como antes, existen  $n$  tipos de mercancías y hay  $m$  familias de artesanos quienes integran otras tantas unidades económicas que van a intercambiar entre sí las mercancías.

Supongamos que la familia  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) ha decidido llevar al mercado un vector  $o^k$  de mercancías para comprar, con el resultado de su venta, otro vector "más de acuerdo a sus necesidades".

En la teoría del equilibrio general se trata de hacer manejable el problema de las necesidades (de acuerdo a un enfoque subjetivo) postulando que cada familia  $k$  tiene una función de

utilidad

$$u^k: X^{(k)} \rightarrow R$$

(en donde  $\bar{X}^{(k)} \subset R^n$  es un conjunto de vectores con coordenadas no negativas llamado el conjunto de planes de consumo posibles para la familia  $k$ ).

Para cada vector  $x \in \bar{X}^{(k)}$ , el valor  $u^k(x)$  se interpreta como la "utilidad" que el vector  $x$  reporta a la familia  $k$ .

Si asumimos que en el mercado se ha establecido un sistema de precios  $p^t = (p_1, \dots, p_n)$ ; cada familia de artesanos se enfrenta al problema de encontrar un vector  $d^k$  que esté a su alcance y que maximice su utilidad.

Es decir, se le plantea encontrar  $\bar{d}^k$  en  $\bar{X}^{(k)}$  tal que  $p^t \bar{d}^k \leq p^t o^k$ . Y que  $u^k(\bar{d}^k) > u^k(d)$  para toda  $d$  en  $\bar{X}^{(k)}$  con  $p^t d \leq p^t o^k$ .

Si a cada  $u^k$  se le exige una serie de condiciones (que se trata de justificar económicamente) como la de ser continua, estrictamente creciente en cada variable, ser estrictamente cóncava, etc., y si  $\bar{X}^{(k)}$  cumple una serie de propiedades como la de contener al origen, ser compacto, convexo y otras, entonces se puede asegurar que, para cada  $p \in \Delta$ , existe una única solución para el problema de la familia  $k$  y a dicha familia  $k$  se le asocia un vector  $d^k(p)$  (la solución al problema anterior) al cual se le llama la demanda de kalos precios  $p$ . Se puede demostrar que  $d^k$  es una función continua de  $p$ .

El problema del equilibrio general consiste en investigar si existen vectores de precios  $p$  tales que las soluciones a los problemas de las distintas familias sean compatibles entre sí. Es decir, vectores  $p$  tales que

$$\sum_{k=1}^H d^k(p) \leq \sum_{k=1}^H o^k \dots 1$$

Para plantear el equilibrio general en términos de un problema de punto fijo, observemos, en primer lugar, que si  $p^c = (p_1, \dots, p_n)$  es un sistema de precios arbitrario, se puede demostrar que la solución  $d^k(p)$  del problema de optimización de la familia es tal que  $p^c d^k(p) = p^c o^k$ .

Es decir, al optimizar, cada familia gasta todo su ingreso.

Como consecuencia de esto, se obtiene la llamada ley de Walras:

$$p^c d(p) = p^c o \dots 2$$

en donde  $d(p) = \sum_{k=1}^H d^k(p)$  y  $o = \sum_{k=1}^H o^k$ .

Por último, si en la desigualdad (1) tuviéramos que para alguna  $i$  se cumpliera que

$$\sum_{k=1}^H d_i^k(p) < \sum_{k=1}^H o_i^k,$$

entonces, por fuerza, existe  $j$  tal que

$$\sum_{k=1}^H d_j^k(p) > \sum_{k=1}^H o_j^k,$$

pues de otro modo, no se cumpliría la igualdad (2).

Definiremos ahora una función  $T: \Delta \rightarrow \Delta$  (en donde, como antes,  $\Delta = \{p \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ ),

a la que llamaremos la función de regateo, del siguiente modo

$$T_j(p) = \frac{p_j + c_j(p)}{1 + \sum_{i=1}^n c_i(p)} \quad \dots \quad 3$$

en donde  $c_j(p) = \max \{0, d_j(p) - 0_j\}$ .

Mostraremos enseguida que  $p$  es un sistema de precios de equilibrio si y sólo si es un punto fijo de la función de regateo.

Supongamos en primer lugar que  $p$  es un sistema de precios de equilibrio. Entonces en virtud de la desigualdad (1), tenemos que  $c_j(p) = 0$  para cada  $j$  y, por tanto,  $T_j(p) = p_j$ . Es decir,

$$T(p) = p \dots 4$$

Recíprocamente, aceptemos que vale la igualdad 4.

Supongamos que existe  $j$  tal que  $c_j > 0$ . Entonces, en primer lugar  $p_j > 0$ , pues, de otro modo no valdría 4, en segundo lugar, como veíamos antes, debe existir  $j$  tal que  $d_j(p) - 0_j < 0$ , lo que implica  $c_j = 0$ .

Pero entonces

$$T_j(p) = \frac{p_j + c_j}{1 + \sum_{i=1}^n c_i} = \frac{p_j}{1 + \sum_{i=1}^n c_i} < p_j$$

ya que  $\sum_{i=1}^n c_i > 0$ .

Por lo tanto  $T(p) \neq p$ . Contradicción. Luego,  $c_j \leq 0$  para todo  $j$ , es decir, vale la desigualdad (1) y, en consecuencia,  $p$  es un equilibrio.

Como  $d(p)$  es continua,  $T$  resulta continua y, de nuevo, el teorema de Brouwer nos garantiza la existencia de puntos fijos de  $T$  y por lo tanto de precios de equilibrio en nuestra economía.

## CAPITULO I

### El lema de Sperner los puntos fijos y otros resultados interesantes

#### 1.1 Motivación de la relación entre los triángulos de Sperner y los puntos fijos.

En el capítulo anterior aplicamos distintos teoremas de punto fijo para demostrar algunos resultados de la Economía Teórica. De ahora en adelante nos preocuparemos por el problema de como encontrar esos puntos fijos.

Si queremos encontrar un punto fijo para resolver un problema del tipo 1 del capítulo 0, podemos pensar en la demostración del teorema de Banach (0.1.1) que da un método para encontrarlo, recordemos.

Si  $E$  es un espacio métrico completo,  $f$  una contracción de  $E$  en sí mismo y  $x_0 \in E$ , consideremos la sucesión  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$ , ...,  $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ , ...,  $\{x_n\}$  es de Cauchy pues para  $n, m$ , si  $m \geq n$  tenemos

$$d(x_n, x_m) = d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \alpha^n d(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{pues } \alpha < 1.$$

Para  $\varepsilon > 0 \exists N$  tal que si  $n$  y  $m > N$ ,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  y  $\{x_n\}$  converge a  $\hat{x}$  en  $E$ . Como  $f$  continua

$$f(\hat{x}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_{n+1}\} = \hat{x}$$

Si  $\hat{x}$  es otro punto fijo

$$f(\bar{x}) = \bar{x}$$

$d(\hat{x}; \bar{x}) = d(f(\hat{x}), f(\bar{x})) \leq \alpha d(\hat{x}, \bar{x})$ , si  $d(\hat{x}, \bar{x}) \neq 0$ , cómo  $\alpha < 1$  tendríamos que  $d(\hat{x}, \bar{x}) < d(\hat{x}, \bar{x})$  absurdo, entonces  $d(\hat{x}, \bar{x}) = 0$  y  $\hat{x} = \bar{x}$ .

Como se ve, la demostración misma da un método para aproximar el único punto fijo, éste consiste en partir de un punto arbitrario y aplicar repetidamente la función hasta llegar a la aproximación requerida.

En cambio las demostraciones clásicas del teorema de Brouwer y de Kakutani no son constructivas.

Scarf [1967], [1973] convierte una de estas demostraciones clásicas, la que usa el lema de Sperner [1928], en constructiva, dando principio a la elaboración de los algoritmos simpliciales.

El lema de Sperner es un resultado de la topología combinatoria que nos dice que un "triángulo" (con  $n$  vértices), que a su vez está dividido por una colección de triángulos, con ciertas propiedades, si se numera cada uno de los vértices de todos los triángulos, con números de 1 a  $n$ , también esta numeración con ciertas propiedades, entonces tendremos siempre a uno de los triangulitos con todos sus números distintos, "triángulo" o simplejo completamente etiquetado.

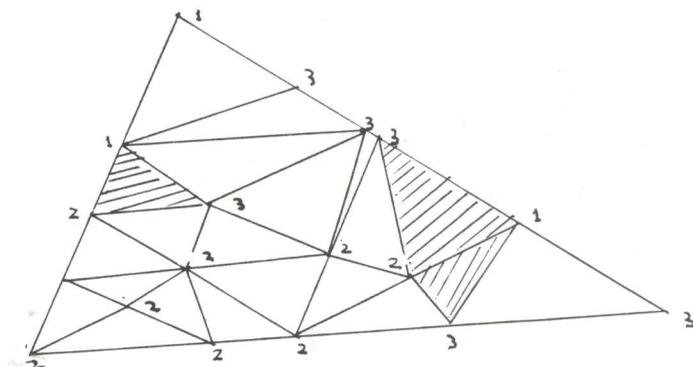


Fig.

Triángulo partido en triángulos pequeños con los vértices numerados respetando las reglas de Sperner, los 3 triángulitos sombreados tienen los vértices con números distintos.

Para hacer ver la relación de ese tipo de "triángulos" con la existencia de puntos fijos, es muy útil, el conocido método de bisección para encontrar un punto fijo de una función continua, definida del intervalo  $[a, b]$  en sí mismo.

Podemos describir dicho método de la manera siguiente.

Consideremos  $h$  definida como  $h(x) = x - f(x)$ ; encontrar un punto fijo de  $f$  es lo mismo que encontrar un cero de  $h$ .

Escribamos el proceso como un algoritmo:

1. Si  $h(a) = 0$  ó  $h(b) = 0$  terminamos, pues habríamos encontrado un cero de  $h$ .

Si no es así, definimos  $i = 0$ ,  $a_i = a$  y  $b_i = b$ . Como  $h(a_0) < 0$ , le asociamos a  $a_0$  la etiqueta 0 y a  $b_0$ , que cumple con  $h(b_0) > 0$ , le asociamos la etiqueta 1. Decimos que el intervalo  $[a_0, b_0]$  está completamente etiquetado pues tiene etiquetas distintas.

Como  $h(a) < 0$ ,  $h(b) > 0$  y  $h$  continua, algún punto de  $(a_0, b_0)$  es un cero de  $h$  y por lo tanto  $[a_0, b_0]$  contiene un punto fijo de  $f$ .

2. Consideremos el real  $\frac{a_i + b_i}{2}$ . De nuevo si  $h \frac{a_i + b_i}{2} = 0$  terminamos.

3. Si no, tenemos 2 casos:

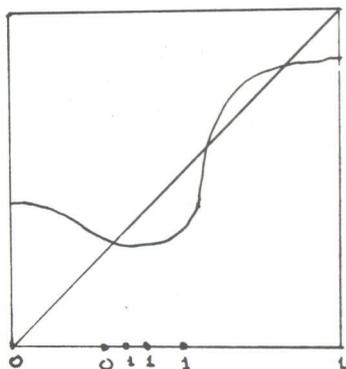
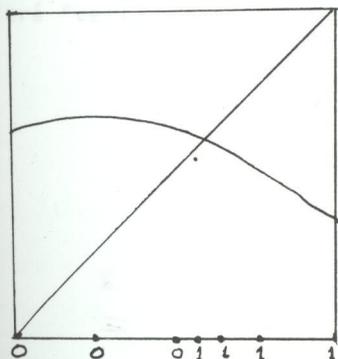
a)  $h \frac{a_i + b_i}{2} < 0$ , entonces  $a_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$  y  $b_{i+1} = b_i$ ,

la etiqueta asociada a  $a_{i+1}$  es 0, la asociada a  $b_{i+1}$  es 1, el intervalo  $[a_{i+1}, b_{i+1}]$  está completamente etiquetado y contiene un cero de  $h$ .

b) Si  $h \frac{a_i + b_i}{2} > 0$ , entonces  $a_{i+1} = a_i$ ,

$b_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$ , la etiqueta de  $a_{i+1}$  es 0, la de  $b_{i+1}$  es 1 y el intervalo  $[a_{i+1}, b_{i+1}]$  tiene las mismas propiedades que en a), hacemos  $i = i+1$  y regresamos a 2.

De esta manera construimos una sucesión de intervalos  $[a_i, b_i]$  cuyos extremos convergen a un real  $\hat{x}$  que es un cero de  $h$ .

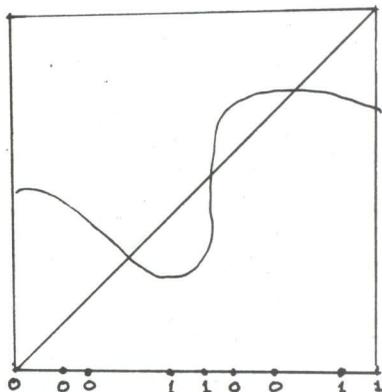


Propiedades del proceso:

En cada paso tenemos una subdivisión del intervalo  $[a, b]$  en subintervalos cerrados de tal manera que: 1-ningún  $[a_i, b_i]$  es un punto; 2-la intersección de 2 cualesquiera es vacía o consta de un extremo común, 3-cada extremo de  $[a_i, b_i]$  pertenece a 1 ó a 2 subintervalos. Tenemos además una etiquetación para cada uno de los extremos de los mencionados subintervalos (vértices de la subdivisión) de tal manera que la etiqueta de

$a$  es 0 y la de  $b$  es 1, y vemos que existe un subintervalo completamente etiquetado y éste contiene un cero de  $h$ .

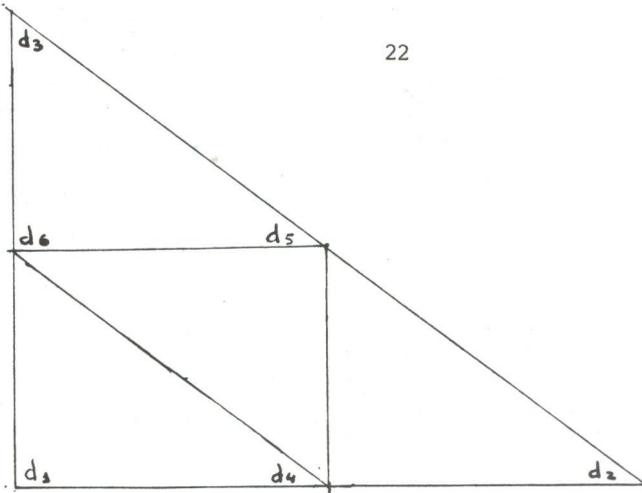
Si consideramos cualquier subdivisión del intervalo  $[a,b]$  con las propiedades 1, 2 y 3, si además  $h(c_i) \neq 0$  con  $\{c_i\}$  los vértices de la subdivisión y si etiquetamos a  $c_j$  de tal manera que si  $h(c_j) < 0$  a  $c_j$  le toca la etiqueta 0 y si  $h(c_j) > 0$  la etiqueta 1, entonces encontraremos al menos un subintervalo completamente etiquetado y éste contiene un cero de  $h$  y si es "pequeño" cualquier punto de él será "cercano" a un cero de  $h$ .



¿Cómo procederíamos en 2 dimensiones con una idea análoga a la bisección?

Pensemos en una función continua  $f$  de un triángulo  $abc$  de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo y definamos  $h(x) = x - f(x)$  para cada  $x$  del triángulo  $abc$ .

Dividamos el triángulo  $abc$  en 4 subtriángulos usando los puntos medios de los lados.



$\{d_i\}$  vértices de la subdivisión.

Si  $h(d_j) = 0$  para algún  $j = 1, \dots, 6$ ,  $d_j$  es un cero de  $h$ .

El criterio para etiquetar a los  $d_j$ , si no hay cero de  $h$  entre ellos, será poner la etiqueta  $k$  a  $d_j$  si  $h_k(d_j) > 0$  y  $h_i(d_j) \leq 0$  para  $i < k$  y la etiqueta 0 si  $h_i(d_j) \leq 0 \forall i = 1, 2$ .

Consideremos los 4 pequeños triángulos en que está dividido  $abc$ . Si alguno de ellos tiene todas sus etiquetas distintas, decimos que es c.e. y lo subdividimos en la misma forma que a  $abc$ , etiquetamos sus vértices con el mismo criterio y buscamos un "triángulito" c.e.

Supongamos que con ese procedimiento, encontramos una sucesión  $\{\sigma_k\}$  de triángulos c.e. tal que los vértices de ellos convergen a un punto  $\hat{v}$ . Entonces por la continuidad de  $h$

$\lim_{k \rightarrow \infty} h(v(i,k)) = h(\hat{v})$ ; donde  $v(i,k)$  es el vértice de  $\sigma_k$  que tiene etiqueta  $i$ .

Cómo  $h_i(v(i,k)) > 0$  y  $h_j(v(i,k)) \leq 0$  para  $j < i$  si  $i \neq 0$  y  $h_j(v(0,k)) \leq 0$ , para  $j = 1, 2$ .

Entonces para toda  $i = 1, 2$

$$h_i(\hat{v}) \geq 0 \text{ y } h_j(\hat{v}) \leq 0 \text{ para } j < i$$

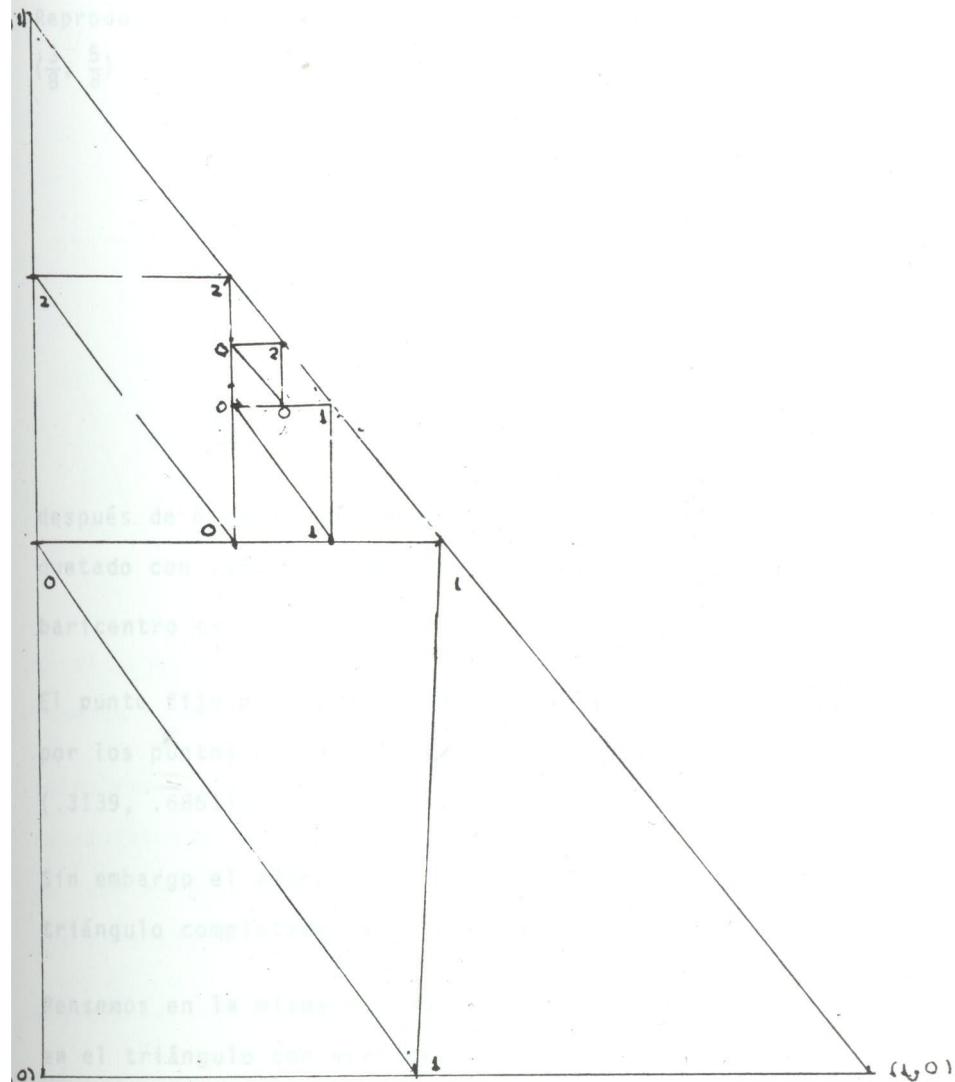
es decir para  $i = 1, 2$

$$h(\hat{v}) = 0, \hat{v} \text{ cero de } h.$$

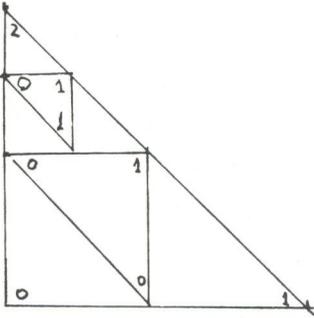
Veamos un ejemplo en donde podemos aproximarnos al punto fijo de una función continua de un triángulo de  $R^2$  en sí mismo usando el método anterior.

Ejemplo. Sea  $S = abc$  con  $a = (0, 0)$ ,  $b = (0, 1)$  y  $c = (1, 0)$  y  $f : S \rightarrow S$  definida como  $f(x) = \frac{Ax}{|Ax|_1}$  donde  $A = \frac{12}{34}$ , usemos para etiquetar a  $h(x) = x - f(x)$ .

En la figura se ilustra la sucesión de triángulos completamente etiquetados.  $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}, \{(0,1/2), (0,1), (1/2,1/2)\}, \{(1/4, 1/2), (1/2,1/2), (1/4,3/4)\}, \{(1/4,5/8), (3/8,5/8), (1/4,3/4)\}, \{(5/16,5/8), (3/8,5/8), (5/16,11/16)\}$ .



Reproducimos el triángulo con vértices  $(\frac{5}{16}, \frac{11}{16})$ ,  $(\frac{5}{16}, \frac{5}{8})$  y  $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$



después de 6 pasos obtenemos el triángulo completamente etiquetado con vértices  $(\frac{5}{16}, \frac{43}{64})$ ,  $(\frac{21}{64}, \frac{43}{64})$  y  $(\frac{5}{16}, \frac{11}{16})$  cuyo baricentro es  $(.317, .666)$ .

En el siguiente triángulo el punto fijo está en el lado del triángulo abc determinado por los puntos  $(1,0)$  y  $(0,1)$  y es aproximadamente  $(.3139, .6861)$ .

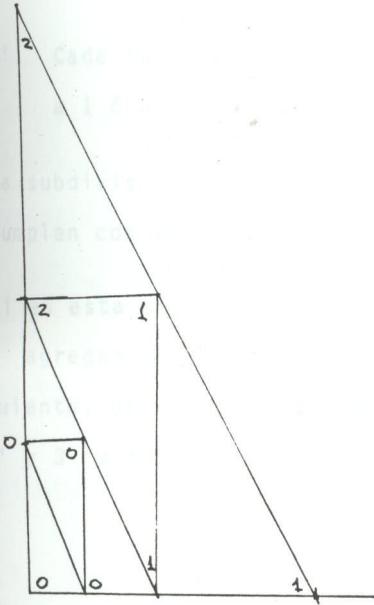
Sin embargo el método no siempre obtiene en cada paso algún triángulo completamente etiquetado.

Pensemos en la misma función del ejemplo, pero, ahora definida en el triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,2)$

1°. Ninguno de los triángulos...

2°. 2 triángulos completamente etiquetados...

con un 6 son ajenos.



En el segundo paso ya no encontramos ningún triángulo completamente etiquetado.

¿Cómo resolver este problema?. Si nos fijamos en el tipo de subdivisiones que obtuvimos observamos que en el primer paso se cumplen propiedades análogas a la 1,2,3 que teníamos en una dimensión; pero en el segundo paso no.

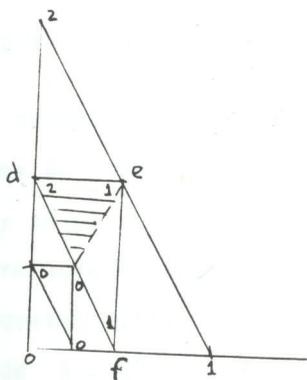
Hagamos explícitas las propiedades a que nos referimos:

- 1'. Ninguno de los triángulos  $a_i b_i c_i$  es degenerado.
- 2'. 2 triángulos cualesquiera se cortan en un vértice, lado común ó son ajenos.

3'. Cada lado de algún triangulito de la división pertenece a 1 ó a 2 triangulitos.

La subdivisión del último ejemplo obtenida en el paso 2 no cumplen con 2'.

Si en esta subdivisión partimos a su vez al triangulito de  $d$  agregando la línea punteada que se señala en el dibujo siguiente, obtenemos una subdivisión con las propiedades 1', 2' y 3' y tenemos que existe un triángulo c.e. (el sombreado)



Observación:

En el primer ejemplo trabajamos con triangulaciones que no cumplían 1', 2' y 3' y sin embargo encontramos en cada una de ellas un triangulito c.e., esto es casual y lo que garantizará que siempre existan es que las triangulaciones tengan dichas propiedades además de otras sobre la etiquetación.

Las divisiones que consideramos en nuestro algoritmo no tienen que resultar de subdivisiones de alguno de los triángulos ma-

yores en 4 triángulos iguales, pueden ser de cualquier forma con tal de que cumplan las propiedades antes descritas y el problema es encontrar un triángulo suficientemente pequeño que esté completamente etiquetado.

Existe un resultado de topología combinatoria llamado el Lema de Sperner que dice bajo qué condiciones podremos garantizar que en estas triangulaciones siempre habrá un triángulo c.e. y esto se establece para regiones que son generalización de triángulos en cualquier dimensión.

## 1.2. Algunas Definiciones.

En este inciso daremos las definiciones necesarias para poder enunciar el Lema de Sperner, la demostración la dejaremos para el capítulo 2 y en el siguiente inciso se examinará la validez general de la relación estrecha que existe entre "los  $n$ -triángulos" con etiquetas distintas y los puntos fijos de una función continua de  $S \subset \mathbb{R}^n$  en sí mismo.

### Definición 1.2.1.

- a) Dado un conjunto  $\{v^0, \dots, v^r\} \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es afinmente independiente (a.i) si  $\{v^1 - v^0, \dots, v^r - v^0\}$  es linealmente independiente.
- b) Sea  $D = \{v^0, \dots, v^r\}$  a.i., el  $r$ -simplejo  $\sigma = v^0 \dots v^r$  con  $D$  como conjunto de vértices es la cerradura convexa de  $D$ . (Dado  $\sigma$  con vértices en  $D$ ,  $D$  es único).

Es decir  $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^r \lambda_i v^i, \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum \lambda_i = 1\}$

También usaremos la notación  $\sigma(D)$ . Si  $x \in \sigma$ , a las  $\lambda_i$  únicas, con las propiedades arriba mencionadas, se les llama las coordenadas baricéntricas de  $x$  respecto a  $\sigma$ .

c) Llamamos subespacio afín de  $\sigma$ ,  $\Pi(\sigma)$ , al conjunto

$$x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^r \lambda_i v^i \text{ y } \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1\}.$$

d) Una  $Q$ -cara de  $\sigma(D)$ , es cualquier  $\ell$ -simplejo con conjunto de vértices igual a algún  $D' \subset D$ , donde  $D'$  tiene  $\ell + 1$  elementos.

Si  $D' = \emptyset$  entendemos el concepto y decimos que  $\tau(D') = \emptyset$  es una  $-1$  cara de cualquier simplejo  $\sigma$ .

Denotemos como  $\sigma^\ell$  al conjunto de  $\ell$ -caras de  $\sigma$ .

Entonces  $\sigma^0 = \{v^0, \dots, v^r\}$  y  $\sigma^{-1} = \emptyset$

$$v^0 \bullet$$

0 - simplejo  $v^0$

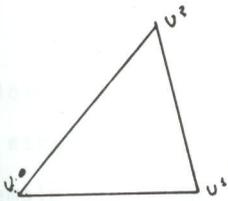
con 0-cara =  $v^0$

$$v^0 \text{ --- } v^1$$

1-simplejo  $v^0 v^1$

1-cara  $v^0 v^1$

0-caras  $v^0$  y  $v^1$

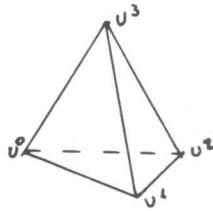


2-simplejo  $v^0v^1v^2$

0-caras  $v^0, v^1, v^2$

1-cara  $v^0v^1, v^0v^2$  y  $v^1v^2$

2-cara  $v^0v^1v^2$



3-simplejo  $v^0v^1v^2v^3$

0-caras  $v^0, v^1, v^2, v^3$

1-caras  $v^0v^2, v^0v^3, v^0v^1, v^1v^2, v^1v^3, v^2v^3$

2-caras  $v^0v^1v^2, v^0v^1v^3, v^0v^2v^3$  y  $v^1v^2v^3$

3-cara  $v^0v^1v^2v^3$

e) Una faceta  $\tau$  de  $\sigma = v^0v^1\dots v^r$  es cualquier elemento de  $\sigma^{r-1}$ .

Def. 1.2.2. Decimos que el interior algebraico  $\overset{\circ}{\sigma}$  de

$\sigma = v^0v^1\dots v^n$ , es el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v^i, \text{ con}$

$$\lambda_i > 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$$

La frontera algebraica de  $\sigma$ ,  $\partial\sigma$  es  $\sigma - \overset{\circ}{\sigma}$ .

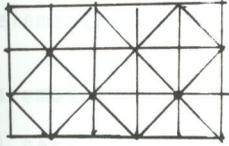
Def. 1.2.3. Una triangulación de dimensión  $r$  ó  $r$ -triangulación es una colección finita, no vacía, de  $r$ -simplejos en  $\mathbb{R}^n$  tal que:

- i) Cada 2  $r$ -simplejos de  $T$  se intersectan en una cara común.
- ii) Cada faceta de algún  $\sigma$  de  $T$ , lo es a lo más de otro distinto.

Denotamos como  $T^\ell$  al conjunto de  $\ell$ -simplejos que son  $\ell$ -caras de algún  $\sigma$  en  $T$ . A  $T^{r-1}$  le llamamos las facetas de  $T$ .

A los elementos de  $T^0$  se les llaman los vértices de  $T$  y a  $T^0$  el esqueleto de  $T$ .

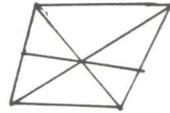
Ejemplos de Triangulaciones:



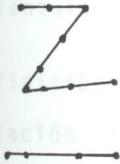
a) 2-triangulación



b) 2-triangulación



c) 2-triangulación



d) 1-triangulación

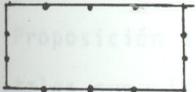


e) 1-triangulación



f) 0-triangulación

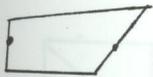
Def. 1.2.4. La frontera de  $T$ ,  $\partial T$ , es el conjunto de face-  
tas de  $T$ , que pertenecen a un sólo  $\sigma$  de  $T$ .



Frontera de a



Frontera de b



Frontera de c



Frontera de d

Las fronteras de e y f  
son vacías.

Usamos la misma notación  $\partial$ , para la frontera de un simplejo  
y para la frontera de una triangulación a pesar de que son con  
juntos de naturaleza distinta, los elementos de  $\partial\sigma$  son puntos

de  $\mathbb{R}^n$  y los de  $\partial T$  son conjuntos.

Observación:  $\partial T$  no es necesariamente una triangulación como se muestra en el ejemplo b, pues la faceta  $A$  pertenece a 4 elementos de  $\partial T$ .

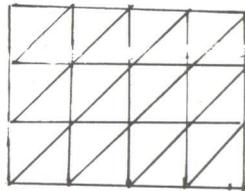
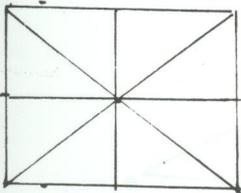
Usaremos la notación  $|T|$  para el conjunto  $\bigcup_{\sigma \in T} \sigma$ . En general para cualquier colección  $S$  de  $n$ -simplejos aunque no sea triangulación,  $|S| = \bigcup_{\sigma \in S} \sigma$ . Si  $M = |T|$ , decimos que  $T$  triangula a  $M$ .

Definición 1.2.5. Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es tal que existe una  $n$ -triangulación  $T$  tal que  $M = |T|$ , se dice que  $M$  es un  $n$ -poliedro o una región triangulada y lo denotamos como  $(M, T)$ .

Observación. Si  $x$  está en  $|T|$ , existe un elemento de  $T^\ell$  con  $\ell$  mínima, al cual pertenece  $x$ , a este simplejo le llamaremos el portador de  $x$ .

Proposición 1.2.6. Si  $T$  y  $T_1$  son 2 triangulaciones tales que  $|T| = |T_1|$ , entonces  $|\partial T| = |\partial T_1|$ .

Para ver demostración consúltese Eaves [1976]



La misma región con dos triangulaciones con distinta frontera.

Un 2-simplejo triangulado por una triangulación superior y una inferior.  
distintamente etiquetadas.

Definición 1.2.7. Una cuerda de un  $n$ -simplejo  $\sigma$  es la intersección de cualquier recta con  $\sigma$ .

Por lo que una cuerda puede ser vacía, de dimensión cero (un punto) ó de dimensión 1 (un segmento).

Si  $\sigma$  es un 2 simplejo podemos tener cuerdas de los siguientes tipos:

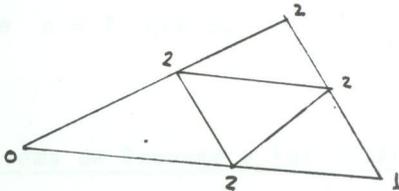


Definición 1.2.8. El diámetro de una triangulación  $T$  es el  $\sup_{\sigma \in T} \{\text{diam}(\sigma)\}$ , donde  $\text{diam}(\sigma) = \sup_{x_1, x_2 \in \sigma} |x_1 - x_2|$ .

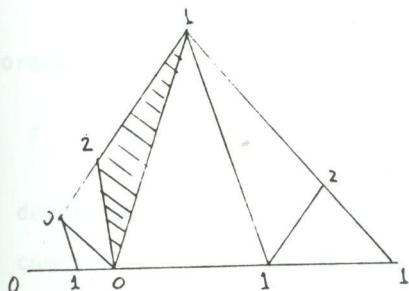
Definición 1.2.9. Si  $J_s = \{0, \dots, s\}$  con  $s$  entero positivo, una función  $\lambda : T^0 \rightarrow J_s$  se llama una etiquetación entera de  $T$ .

A  $\lambda(v)$  se le llama la etiqueta de  $v$ .

Decimos que  $\tau \in T^s$  está completamente etiquetada respecto a  $\lambda$  ( $\lambda$  - c.e.). Si  $\lambda(\tau^0) = J_s$ , es decir si todas las etiquetas de los vértices de  $\tau$  son distintas.



Un 2-simplejo triangulado con una etiquetación entera, sin simplejos completamente etiquetados.



un 2-simplejo triangulado con una etiquetación entera. El simplejo sombreado es  $\lambda$ -c.e.

Una etiquetación  $\lambda$  de un  $n$ -simplejo  $\sigma = v^0 \dots v^n$  triangulado, es propia, si  $\forall v \in T^0$   $\lambda(v) = k$  implica que la  $k$ -ésima coordenada baricéntrica de  $v$  respecto a  $\sigma$  no es cero.

Observación: en una etiquetación propia  $\lambda(v^i) = i$  para  $i = 0, \dots, n$ .

Definición 1.2.10. Sea  $T$  una  $(n+1)$ -triangulación etiquetada con  $n$  etiquetas distintas y  $\tau$  una  $n$ -cara de  $T$  completamente etiquetada, una cadena c.e. que pasa por  $\tau$  es una colección de  $n$ -caras de  $T$ .  $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$  tales que  $\tau_0 = \tau$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_i$  es completamente etiquetada y  $\exists \sigma_i \in T$  tal que  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  son  $n$ -caras de  $\sigma_i$ . La cadena es maximal si no se puede agregar ninguna otra faceta.

Teorema 1.2.11. (Lema de Sperner). Sea  $S$  un  $n$ -simplejo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  una triangulación de  $S$  y  $\lambda$  una etiquetación propia, entonces existe  $\sigma \in T$  que es  $\lambda$ -c.e.

### 1.3. El Teorema de Brouwer y los triángulos completamente etiquetados.

Sea  $S$  el  $n$ -simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Teorema 1.3.1. (Teorema de Brouwer)

Si  $F : S \rightarrow S$  continua, existe  $\hat{X}$  en  $S$  tal que  $F(\hat{X}) = \hat{X}$ .

Se demostrará el Teorema de Brouwer bajo el supuesto de que se cumple 1.2.11 (Lema de Sperner) y este resultado lo probaremos en el capítulo 2.

Lema 1.3.2. Si  $F$  es una función continua de  $S$  en  $S$  y  $T$  una triangulación de  $S$ , construimos  $\lambda : T^0 \rightarrow J_n$  de la manera siguiente para  $v \in T^0$   $\lambda(v) = j$ , si  $j + 1$  es la primera vez que  $v_{j+1} > 0$  y  $v_{j+1} - F_{j+1}(v) > 0$ . Supongamos además que ningún vértice de  $T^0$  es punto fijo de  $F$ , entonces la  $\lambda$  así definida es propia.

Demostración: Sea  $v \in T^0$ .

Supongamos que para toda  $j$   $v_{j+1} > 0 \Rightarrow v_{j+1} - F_{j+1}(v) \leq 0$ .

Cómo  $v_{j+1} = 0 \Rightarrow -F_{j+1}(v) \leq 0$  y  $v \neq F(v)$ , entonces  $v \leq F(v)$ . Absurdo pues  $v$  y  $F(v)$  están en  $S$  (Nota: usamos  $x \leq y$  como  $x_i \leq y_i$  y  $x \neq y$ ).

Por lo tanto existe  $k$  tal que  $v_k > 0$  y  $v_k - F_k(v) \geq 0$  y por lo tanto existe una primera vez que sucede esto y  $\lambda$  está definida para toda  $v \in T^0$ .

Además la  $k$ -ésima coordenada baricéntrica de  $v$  es  $v_{k+1}$  y si  $v_{k+1} = 0$   $\lambda(v) \neq k$ , por lo que  $\lambda$  es propia.

Demostración 1.3.1. Consideremos una sucesión  $\{T_m\}$  de

triangulaciones de  $\sigma$  cuyo diámetro tiende a cero.

Si para alguna  $m$  existe un punto de  $T_m^0$  que es punto fijo de  $F$ , habríamos terminado.

Si ningún punto de  $T_m^0$  es punto fijo de  $F$ , definimos  $\lambda_m$ , etiquetación de  $T_m$ , como en el lema 1.3.2.

Por el lema de Sperner existe una sucesión  $\{\sigma_m\}$  de simplejos c.e., uno para cada  $T_m$ , cuyo diámetro tiende a cero.

Ordenemos los vértices de cada  $\sigma_m$  de acuerdo a su etiquetación y denotemos como  $v(i,j)$  el vértice de  $\sigma_j$  tal que  $\lambda(v(i,j)) = i$ . Existen subsucesiones convergentes  $\{v(i,r)(k)\}$

$$\sigma_{r(k)} = v(0, r(k))v(1, r(k)) \dots v(n, r(k)).$$

Sea  $x_{r(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v(i, r(k))$  (el baricentro de  $\sigma_{r(k)}$ ).

$\{x_{r(k)}\}$  está contenido en  $S$  que es compacto, entonces existe una subsucesión  $\{x_{\phi(k)}\}$  convergente.

Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_{\phi(k)}\} = \hat{v}$ ,  $\hat{v} \in S$ .

Además como  $\text{diam}(\sigma_{\phi(k)})$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{v(i, \phi(k))\} = \hat{v}$  para cada  $i = 0, \dots, n$ .

Es claro que  $\hat{v}$  es punto fijo de  $F$  pues

$v(i, \phi(k)) - F_i(i, \phi(k)) > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ ; como  $F$  continúa,

$\hat{v}_i - F_i(\hat{v}) \geq 0$  para toda  $i$ .

Pero  $\hat{v}$  y  $F(\hat{v})$  están en  $S$ , por lo que  $\sum_{i=1}^n (\hat{v}_i - F_i(\hat{v})) = 0$ , así que  $\hat{v}_i = F_i(\hat{v})$  para  $i = 1, \dots, n$ ; o lo que es lo mismo  $\hat{v} = F(\hat{v})$ .

Podemos extender la demostración a cualquier  $\mathbb{C}$  compacto y convexo.

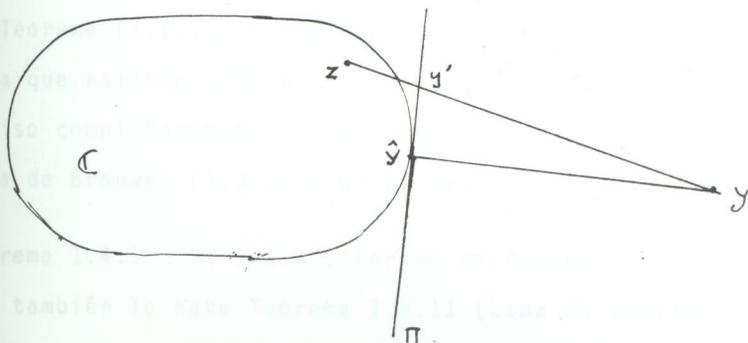
Teorema 1.3.3 (Brouwer para  $\mathbb{C}$  compacto y convexo).

Sean  $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^n$  compacto y convexo y  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua, entonces existe  $\hat{x} \in \mathbb{C}$  tal que  $F(\hat{x}) = \hat{x}$ .

Demostración. Consideremos  $S_{\mathbb{C}}$  un  $r$ -simplejo que contenga a  $\mathbb{C}$ , entonces construyamos  $g : S_{\mathbb{C}} \rightarrow S_{\mathbb{C}}$  de la manera siguiente:

$$\text{Si } x \in S_{\mathbb{C}}, g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{C} \\ f(\hat{y}) & \text{si } x \notin \mathbb{C} \text{ y } \hat{y} \in \mathbb{C} \text{ es tal que} \\ & d(x, \hat{y}) = \min_{y \in \mathbb{C}} d(x, y) \end{cases}$$

$g$  es continua.



Si  $S$  es el  $r$ -simplejo unitario. Sea  $h : S \longrightarrow S_c$  tal que  $h(e^j) = v_c^j$  para  $j = 0, \dots, r$ , con  $S_c^0 = \{v_c^0, \dots, v_c^r\}$ . Si  $q \in S_c$  y  $v = \sum_{i=0}^r \alpha_i v_c^i$ , entonces  $h(v) = \sum_{i=0}^r \alpha_i h(v_c^i)$ .

$h$  biyectiva y continua y  $h^{-1}$  también; entonces  $h^{-1}gh : S \rightarrow S$  continua y por 1.3.1 existe  $\hat{x} \in S$  tal que  $h^{-1}gh(\hat{x}) = \hat{x}$ .

Así  $g(h(\hat{x})) = h(\hat{x})$ ;  $h(\hat{x}) \in S_c$  y  $h(\hat{x})$  es punto fijo de  $g$ . Pero los puntos fijos de  $g$  sólo pueden pertenecer a  $\mathbb{C}$  pues si  $x \notin \mathbb{C}$ ,  $g(x) \in \mathbb{C}$  y  $g(x) \neq x$ .

Observación:  $g$  está bien definida pues si  $x \notin \mathbb{C}$ , existe un único  $\hat{y} \in \mathbb{C}$  que es el más cercano a  $x$  (resultado conocido que enunciamos a continuación sin demostrar).

Teorema 1.3.4. Sea  $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^n$  compacto y convexo y  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \notin \mathbb{C}$ , entonces existe un único  $\hat{y} \in \mathbb{C}$  tal que  $d(x, \hat{y}) \leq d(x, y)$  para todo  $y \in \mathbb{C}$ . (Figura anterior).

#### 1.4 La existencia de simplejos completamente etiquetados, los puntos fijos y otros resultados interesantes.

El Teorema (1.2.11) (Lema de Sperner) establece la condición para que existan simplejos completamente etiquetados; en este inciso completaremos la equivalencia entre dicho lema, el teorema de Brouwer (1.3.1) y otros resultados interesantes.

Teorema 1.4.1. Si 1.3.1 (Teorema de Brouwer) se cumple, entonces también lo hace Teorema 1.2.11 (Lema de Sperner).

Demostración: Sea  $S = v^0, \dots, v^n$ ,  $T$  una triangulación y  $\lambda$  una etiquetación propia.

Construimos  $\lambda_T : |T| \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la manera siguiente:

Si  $v \in T^0$  y  $\lambda(v) \neq n$ ,  $\lambda_T(v) = v^{(\lambda(v) + 1)}$ .

Si  $\lambda(v) = n$ ,  $\lambda_T(v) = v^0$ .

Si las coordenadas baricéntricas de  $v$  respecto a  $T$  son

$\{v_k\}_{k=0}^n$ ,

$$\lambda_T(v) = \sum_{k=0}^n v_k \lambda_T(v^k).$$

$\lambda_T$  es continua, pues es afín en cada  $\sigma \in T$  y coincide en las caras comunes.

Claramente si  $v \in \partial S$ , entonces  $\lambda_T(v) \neq v$ .

Ahora, sea  $\sigma \in T$  tal que no es c.e., tenemos que  $\forall v \in \sigma$ ,  $\lambda_T(v) \in \partial S$ , pues por lo menos hay 2 etiquetas que se repiten, entonces  $v$  no puede ser punto fijo. Es decir, si no existieran simplejos completamente etiquetados, existiría una función continua definida de  $S$  en  $S$  que no tendría puntos fijos. Por lo tanto existe algún  $\sigma$  en  $T$  que es c.e..

(Observación: La demostración se basa en que si suponemos que no hay simplejo c.e. podemos construir un retracts de  $S$  en su frontera.)

Observemos además que si  $\sigma \in T$  es c.e. y consideramos  $\phi = \lambda_T|_{\sigma}$ ,  $\phi: \sigma \longrightarrow S$  es biunívoca y bicontínua, pues cada punto tiene coordenadas baricéntricas distintas, entonces  $\phi^{-1}: S \longrightarrow \sigma$  es continua de  $S$  en  $S$  y tiene un punto fijo  $\hat{v}$ ,  $\hat{v}$  tiene que estar en  $\sigma$ ; como  $\phi^{-1}(\hat{v}) = \hat{v}$ , entonces  $\phi(\hat{v}) = \hat{v}$  y  $\hat{v} \in \sigma$  es punto fijo de  $\phi$ .

Es decir, hemos demostrado que todos los puntos fijos de  $\lambda_T$  están en algún  $\sigma$  c.e. y cada  $\sigma$  completamente etiquetado respecto a  $\lambda$  contiene algún punto fijo de  $\lambda_T$ .

Existen otros resultados que, como el teorema de punto fijo, en apariencia no están ligados a los simplejos completamente etiquetados de Sperner; pero que si lo están y esta relación permite dar demostraciones constructivas de ellos.

Teorema 1.4.2. Lema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics (Lema K.K.M.).

Sea  $S$  el  $n$ -simplejo unitario y para  $J \subset J_n$  definimos

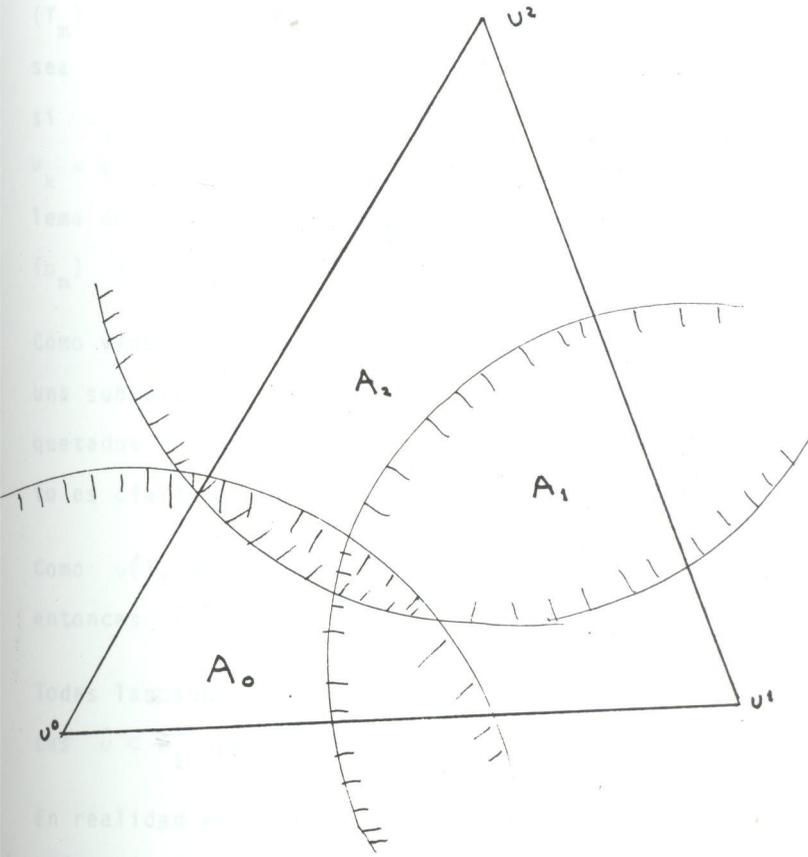
$$S_J = \{x \in S \mid x_i \geq 0 \text{ si } i \in J \text{ y } x_i = 0 \text{ si } i \notin J\}$$

$$S = v^0, \dots, v^n \text{ con } v^{i-1} = e^i, \text{ vector standar}$$

Sean, para  $i = 0, \dots, n$ ,  $A_i$  cerrados tales que  $S_J \subset \bigcup_{i \in J} A_i$

$$\forall J \subset J_n.$$

Entonces  $S \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$



### Teorema 1.4.3.

sólo si lo hace en

### demostración

Supongamos que T.1.2.1) es

Construimos  $f: S \rightarrow S$  de la manera siguiente.

Demostración: Consideremos una sucesión de triangulaciones  $\{T_m\}$  de  $S$  tales que el diámetro de  $T_m$  tiende a cero y sea  $\lambda$  una etiquetación con la propiedad de que  $\lambda(v) = j$  si  $v_j > 0$ ,  $v \in A_j$  y  $v \notin A_k$  si  $k < j$ .  $v_k = 0$  implica  $\lambda(v) \neq k$  y  $\lambda$  es propia, entonces, por el lema de Sperner (1.2.11), existe una sucesión de simplejos  $\{\sigma_m\}$   $\lambda$ -c.e. cuyo diámetro tiende a cero.

Como vimos al demostrar el Teorema de Brouwer (1.3.1) existe una subsucesión  $\{\sigma_{\phi(k)}\}$  tal que la sucesión de vértices etiquetados con  $i$   $\{v(i, \phi(k))\}$  converge a un punto  $\hat{v} \in S$ , esto es cierto para toda  $i$ .

Como  $v(i, \phi(k))$  está en  $A_i$  para toda  $k$  y  $A_i$  cerrado, entonces  $\hat{v} \in A_i$ .

Todas las subsucesiones  $\{v(j, \phi(k))\}$  convergen a  $\hat{v}$  y entonces  $\hat{v} \in A_j$  para toda  $j = 1, \dots, n$  y  $S \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$ .

En realidad el Teorema de Brouwer y el Lema K.K.M. son también equivalentes.

Teorema 1.4.3. El Teorema de Brouwer (1.3.1) se cumple si y sólo si lo hace el lema K.K.M. (1.4.2).

Demostración: Sean  $S$  y  $\{A_0, \dots, A_n\}$  como en T.1.4.2.

Supongamos que T.1.3.1 es válido y sea  $g_i(x) = \text{dist}(x, A_i \cap S)$ .

Construimos  $f : S \rightarrow S$  de la manera siguiente:

$$f_i(x) = \frac{x_i + g_i(x)}{1 + \sum_{j=0}^n g_j(x)}$$

$f$  es continua y por lo tanto tiene un punto fijo  $\bar{x} \in S$  entonces

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_i + g_i(\bar{x})}{1 + \sum_{j=0}^n g_j(\bar{x})}$$

Pero  $\bar{x} \in \bigcup_{i=0}^n A_i \therefore \bar{x} \in A_i$  para alguna  $i$

$$\therefore g_i(\bar{x}) = 0 \text{ y } \bar{x}_i = \frac{\bar{x}_i}{1 + \sum_{j=0}^n g_j(\bar{x})}$$

Pero si  $g_j(\bar{x}) \neq 0$  para alguna  $j$  no se podría dar la igualdad y entonces  $g_j(\bar{x}) = 0$  es decir  $\bar{x} \in A_j$  para toda  $j$  y  $S \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$ .

Además si  $\hat{x} \in S \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$ ,  $\hat{x}$  punto fijo de  $f$  pues  $g_j(\hat{x}) = 0 \forall j$ .

Supongamos ahora que T.1.4.2. se cumple y sea  $f : S \longrightarrow S$  continua.

Sea  $A_i = \{x \in S \mid f_i(x) \leq x_i\}$ ;  $A_i$  cerrado.

$S_i = \{i_0, \dots, i_k\} \subset J_n$  y  $\hat{x} \in S_{i_0}$ ,  $\hat{x} = \sum_{j=0}^k \hat{x}_j v^j + j$

$S_i \exists \uparrow \neq J$   $\hat{x}_1 = 0$  y  $f_1(\hat{x}) \geq \hat{x}_1$ .

Como  $\sum_{j=0}^n f_j(\hat{x}) = \sum_{j=0}^k \hat{x}_j = 1$ ,

EXISTE  $i_j \in J$  tal que  $f_{i_j}(\hat{x}) \leq \hat{x}_{i_j}$

y  $\hat{x} \in A_{i_j}$ , entonces  $S_J \subset \bigcup_{j \in J} A_j$ ,

Por T.1.4.2.  $S \cap (\bigcap_i A_i) \neq \emptyset$  ó lo que es lo mismo  $\exists \hat{y} \in S$   
tal que  $f(\hat{y}) = \hat{y}$ .

Volvamos ahora al problema económico que planteamos en el capítulo 0, el del modelo de equilibrio en una economía de intercambio.

Podemos usar directamente el lema de Sperner para demostrar la existencia del equilibrio sin recurrir al teorema de punto fijo.

Teorema 1.4.4. Sea  $f : S \rightarrow R^n$  ( $S(n-1)$ -simplejo unitario de  $R^n$ ) continua y tal que  $p \cdot f(p) = 0$ , entonces existe  $p^* \in S$  tal que  $f(p^*) \leq 0$  y  $p_i^* = 0$  si  $F_i(p^*) < 0$ .

Demostración: Consideramos una sucesión de triangulaciones  $\{T_m\}$  de  $S$  tales que su diámetro tienda a cero.

Para cada  $m$  usamos la etiquetación  $\lambda$  de  $T_m^0$  tal que si  $p \in T_m^0$ , consideramos  $J^*(p) = \{k | p_k > 0\}$  y definimos  $\lambda(p) = \min \{j \in J^*(p) | f_j(p) \leq f_k(p) \forall k \in J^*(p)\}$ . Entonces el lema de Sperner (pues  $\lambda$  es propia) asegura la existencia

de una sucesión  $\{\sigma_m\}$  de  $(n-1)$ -simplejos completamente etiquetados. Como antes, podemos asegurar una subsucesión  $\{\sigma_{\phi(k)}\}$  tal que las subsucesiones  $\{p(i, \phi(k))\}$  de los vértices de los  $\sigma_{\phi(k)}$  con etiqueta  $i$  converjan a un sólo punto  $p^*$  de  $S$ .

Para toda  $i$  y  $k$ ,  $f_i(p(i, \phi(k))) \leq 0$  pues la ley de Walras ( $p \cdot f(p) = 0$ ) asegura que no todas las coordenadas de  $f(p)$  son positivas (negativas) para todo  $p \in S$ .

Por continuidad  $f(p^*) \leq 0$ . Además también la ley de Walras implica que si  $f_j(p^*) < 0$ , entonces  $p_j^* = 0$  y por lo tanto  $p^*$  equilibrio económico.

Teorema 1.4.5. La existencia del equilibrio económico (1.4.4) se cumple  $\Leftrightarrow$  el teorema de Brouwer (1.3.1) se cumple.

Demostración: Sea  $f : S \rightarrow S$  continua y definimos  $g : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  como

$$g(x) = f(x) - \frac{x \cdot f(x)}{x \cdot x} x \quad \forall x \in S,$$

$g$  es continua y  $x \cdot g(x) = x \cdot f(x) - \frac{x \cdot f(x)}{x \cdot x} x \cdot x = 0$ ,

entonces por T. 1.4.4, existe  $x^* \in S$  tal que  $g(x^*) \leq 0$  y si  $g_i(x^*) < 0$ , entonces  $x_i^* = 0$ .

$$f_i(x^*) \leq \frac{x_i^* \cdot f(x^*)}{x^* \cdot x^*} x_i^* \quad i = 1, \dots, n+1$$

Si  $x_i^* = 0$ , tenemos que  $f_i(x^*) \leq 0$ , pero como  $f(x^*) \in S$ ,  $f_i(x^*) = 0$  y  $f_i(x^*) = \frac{x^* \cdot f(x^*)}{x^* \cdot x^*} x_i^*$ .

Por otro lado si  $x_i^* > 0$ , como  $x^* \cdot g(x^*) = 0$ ,  $x_j^* \geq 0$  y  $g(x^*) \leq 0$ , entonces  $g_j(x^*) = 0$ , es decir también

$$f_i(x^*) = \frac{x^* \cdot f(x^*)}{x^* \cdot x^*} x_i^* .$$

Tenemos para toda  $i$  la igualdad, es decir

$$f(x^*) = \frac{x^* \cdot f(x^*)}{x^* \cdot x^*} x^*$$

Sumando las coordenadas tenemos que  $1 = \frac{x^* \cdot f(x^*)}{x^* \cdot x^*}$  y entonces  $x^*$  es punto fijo de  $f$ .

Al presentar en el capítulo cero la aplicación del teorema de Brouwer al equilibrio económico demostramos que (1.3.1) implica (1.4.4).

Un problema más complicado es el de establecer la relación entre el lema de Sperner y el teorema de Kakutani.

D. Cohen [1980] afirma que se puede demostrar el teorema de Kakutani a partir del Lema de Sperner para hacerlo considera una correspondencia  $\varphi$  superiormente semicontinua del simplejo unitario en sí mismo con  $\varphi(x)$  no vacío, cerrado y convexo para toda  $x$  en  $S$ .

Dada una triangulación  $T$  de  $S$  construye  $\lambda$ , una etiquetación de sus vértices, de la siguiente manera:

Suponemos que ningún punto de  $T^\circ$  es punto fijo de  $\varphi$ .

Si  $S = v^0 \dots v^n$ ,  $\lambda(v^j) = j$ .

Sea  $v \in T^\circ$ . Existe un hiperplano  $\Pi$  de  $R^n$  que separa a  $v$  de  $\varphi(v)$ ; en la región en que está  $v$  existen vértices del portador de  $v$ . A  $v$  se le asigna la etiqueta de uno de esos vértices. Dicha etiquetación resulta propia y por el lema de Sperner existe un simplejo completamente etiquetado. Si ahora se toma una sucesión de triangulaciones  $\{T_m\}$  de tal manera que ningún vértice de  $T_m$  sea punto fijo de  $\varphi$  y que el diámetro de  $T_m$  tienda a cero cuando  $m$  tiende a infinito.

Existirá una sucesión de simplejos c.e. cuyo diámetro tiende a cero. Cohen asegura que si  $x^*$  es punto límite de dicha sucesión entonces  $x^*$  es punto fijo de  $\varphi$ . Sin embargo el siguiente es un contraejemplo de esto.

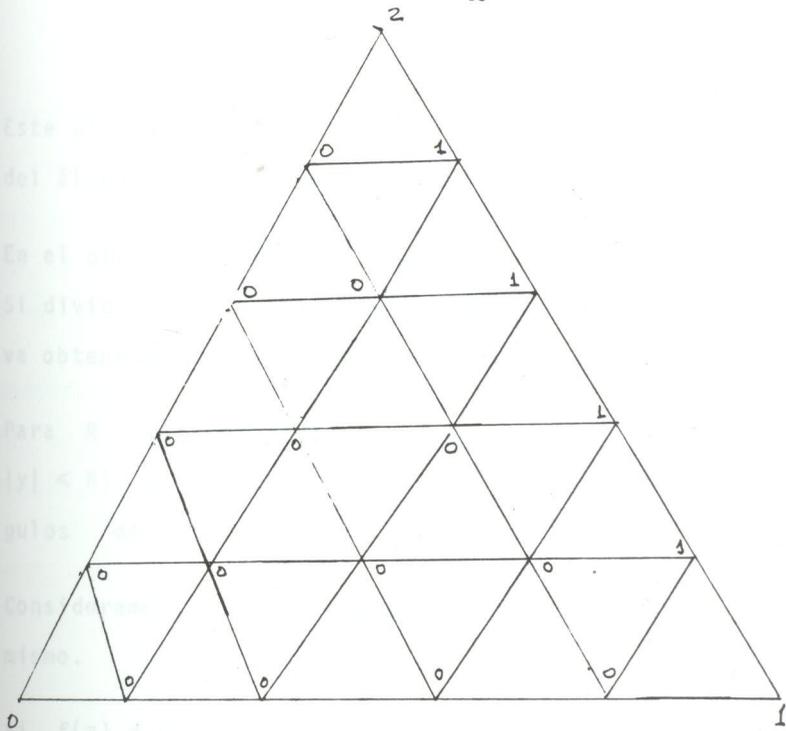
Consideremos el simplejo unitario de  $R^3$  y  $F(x, y, z) = (y, z, x)$ ,  $F$  continua y por lo tanto superiormente semicontinua. Su único punto fijo es  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Consideremos la etiquetación que propone Cohen eligiendo el vértice de menor etiqueta que tiene la propiedad descrita.

La figura siguiente ilustra la etiquetación en una triangulación.

### 1.5. El Lema de Poincaré y el Teorema de Brouwer

Existen otros lemas combinatorios con un papel similar al del lema de Sperner, como los desarrollados por Kuhn [1960].



El único simplejo completamente etiquetado es el de arriba (con vértices,  $(0, 0, 1)$ ,  $(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5})$  y  $(0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ ). Si refinamos la triangulación, cuidando de que  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  no sea un vértice de ella, siempre obtendremos como único triángulo c.e. al del extremo superior; esta sucesión converge al vértice  $(0, 0, 1)$  que no es punto fijo de la función.

En el capítulo 3 demostraremos el teorema de Kakutani usando un "lema de Sperner para etiquetación vectorial".

### 1.5. El Lema de Kuhn y el Teorema Fundamental del Algebra.

Existen otros lemas combinatorios con un papel análogo al del lema de Sperner, como desarrollados por Kuhn [1960].

Este último lo utilizó para demostrar el teorema fundamental del álgebra. Veamos cómo es éste.

En el plano consideremos una malla de cuadrados de lado  $h > 0$ . Si dividimos a lo largo de las diagonales de pendiente positiva obtenemos una triangulación  $K$ .

Para  $R$  real denotemos cómo  $Q_R = \{z = x + iy \mid |x| \leq R \text{ y } |y| \leq R\}$  y  $Q_{mh}$  es  $Q_R$  triangulada con  $8m^2$  triángulos rectángulos de base y altura  $h$ , donde  $R = mh$ .

Consideramos  $Q_{mh}$  y  $f$  una función continua del plano en sí mismo.

Si  $f(z) \neq 0$  y  $f(z) = u + iv$  definimos  $\arg f(z)$  como el único ángulo  $\alpha$  tal que  $-\Pi < \alpha \leq \Pi$  y  $\cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$  y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

$f$  determina la etiquetación  $\lambda$  de la manera siguiente:

$$\lambda(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\Pi}{3} \leq \arg f(z) \leq \frac{\Pi}{3} \text{ ó } f(z) = 0 \\ 2 & \text{si } \frac{\Pi}{3} < \arg f(z) \leq \Pi \\ 3 & \text{si } -\Pi < \arg f(z) < -\frac{\Pi}{3} \end{cases}$$

Teorema 1.5.1. (Lema de Kuhn). Si  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ , existe  $R$  tal que para toda  $m$  suficientemente grande, cada  $Q_{mh}$  contiene un triángulo completamente etiquetado respecto a  $\lambda$  construída con  $f$ .

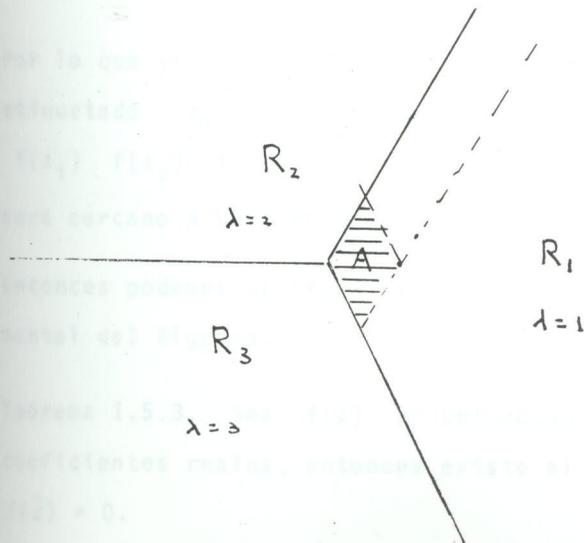
Después de calcular que la  $R = 48 \max |a_k| + 4$  y  $m \geq \frac{1}{2} (n+2)$ , la demostración se puede hacer con el mismo tipo de algoritmos que se usan para demostrar el lema de Sperner en el Capítulo 2, con la diferencia de que Kuhn introduce orientación, lo que le permite conocer el tipo de raíz que encuentra.

Mostraremos el siguiente resultado para relacionar los pequeños triángulos completamente etiquetados con ceros de una función continua.

Lema 1.5.2. Si  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son tales que  $\lambda(z_k) = k$ ,  $|f(z_j) - f(z_k)| \leq \epsilon$  para  $j, k = 1, 2, 3$  y  $\epsilon > 0$ , entonces  $|f(z_k)| \leq \frac{2\epsilon}{\sqrt{3}}$ .

Demostración:

Las regiones  $R_i$  de  $f(z)$  de acuerdo a la etiquetación son:



La región sombreada  $A$  es  $\{w = f(z) \mid \lambda(z) = 1, \text{ y } d(w, R_2) \leq \varepsilon \text{ y } d(w, R_3) \leq \varepsilon\}$ .

Entonces para  $z \in R^2$  tal que  $f(z) \in A$

Sea  $a$  tal que  $\frac{\varepsilon}{a} = \text{sen } \frac{\pi}{3}$ , tenemos que  $a \geq |f(z)|$ ,

entonces  $\frac{\varepsilon}{|f(z)|} \geq \text{sen } \frac{\pi}{3}$

$$\text{y } |f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{sen } \frac{\pi}{3}} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

Lo mismo se puede argumentar para las  $f(z)$  que caen en la región de etiquetación 2 y 3 y que distan  $\varepsilon$  de las otras 2 regiones.

En un conjunto acotado del plano la continuidad uniforme de  $f$  asegura que triángulos pequeños  $z_1 z_2 z_3$  se transforman en triángulos pequeños  $f(z_1) f(z_2) f(z_3)$ .

Por lo que si se encuentra un pequeño triángulo completamente etiquetado  $z_1 z_2 z_3$  tendremos un pequeño triángulo  $f(z_1) f(z_2) f(z_3)$  y cualquiera de los puntos de  $z_1 z_2 z_3$  será cercano a un cero de  $f$ .

Entonces podemos demostrar constructivamente el Teorema Fundamental del Algebra.

**Teorema 1.5.3.** Sea  $f(z)$  un polinomio mónico de grado  $n$  con coeficientes reales, entonces existe al menos  $\hat{z}$  tal que  $f(\hat{z}) = 0$ .

Demostración:

Consideremos  $\lambda$  determinada por  $f$  y sea  $R = 48 \max |a_k| + 4$ .

Para  $m$  suficientemente grande. Sea  $z_1(m)$   $z_2(m)$   $z_3(m)$  el triángulo completamente etiquetado en  $Q_{mh}$ , con  $R = mh$ .

Como  $Q_{mh}$  es compacto existen subsucesiones convergentes  $\{z_i(m_k)\}$  al mismo punto  $\hat{z}$ . Cuando  $m_k \rightarrow \infty, h_k \rightarrow 0$ .

$f$  es continua, entonces  $f(\hat{z}) = \lim_{m_k \rightarrow \infty} f(z_i(m_k))$ , pero por

1.5.2

$$|f(z_i(m_k))| \rightarrow 0 \text{ y } f(\hat{z}) = 0$$

Es claro que para demostrar constructivamente el teorema de Brouwer para una función continua en  $\mathbb{C}$  compacto y convexo del plano se puede encontrar la  $R$  apropiada de tal manera que  $Q_R$  contenga a  $\mathbb{C}$  y que exista un triángulo c.e.

Para cada  $m$  suficientemente grande en  $Q_{mh}$  si se usa la etiquetación de Kuhn correspondiente a  $g(z) = z - f(z)$ , los triángulos completamente etiquetados de  $Q_{mh}$  estarán relacionados con puntos fijos de  $f$ .

## CAPITULO 2

### LA BASE DE LOS ALGORITMOS SIMPLICIALES PARA CALCULAR PUNTOS FIJOS: UNA DEMOSTRACION CONSTRUCTIVA DEL LEMA DE SPERNER

Este capítulo consta de 4 incisos.

En el inciso 2.1 se da una demostración constructiva del lema de Sperner como aplicación de un algoritmo al que llamamos "puerta de entrada puerta de salida". En el capítulo 1 enunciamos el lema de Sperner (1.2.11), que establece las condiciones, para la etiquetación de una triangulación  $T$  de un  $n$  - simplejo, que garantizan la existencia de un elemento de  $T$  con todas sus etiquetas distintas, simplejo c.e.

Las 2 propiedades combinatorias en que se basa el algoritmo son:

- a. Una faceta pertenece a 1 ó a 2  $n$  - simplejos de  $T$ .
- b. Un  $n$  - simplejo tiene 2 facetas c.e. ó ninguna.

En el inciso 2.2 se ven algunos resultados relacionados con la cercanía de los puntos de un simplejo c.e. con los puntos fijos de una función continua.

El inciso 2.3 trata sobre las triangulaciones.

Uno de los problemas más importantes para implementar el algoritmo en una computadora es conseguir una triangulación cuyos vértices puedan ser generados según se necesitan. De este tipo es la de Kuhn, fué la primera en usarse y ha servido de base a muchas otras, en este inciso se describe dicha triangulación y algunas otras relacionadas.

Por último en 2.4 se da un algoritmo en lenguaje Fortran y algunos ejemplos.

### **2.1. Demostración del lema de Sperner.**

Cada algoritmo simplicial para encontrar una aproximación a un punto fijo de una función continua, es una demostración del lema de Sperner que encuentra un simplejo c.e. La clave de estos algoritmos son 2 propiedades de las triangulaciones etiquetadas en forma entera.

La primera está establecida en la definición de triangulación (1.2.3) y es aquella que afirma que una faceta de  $T$  pertenece a 1 ó 2 simplejos de  $T$ .

La segunda propiedad se refiere a las etiquetaciones y la establecemos en la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.1.** ("Dos ó ninguna").

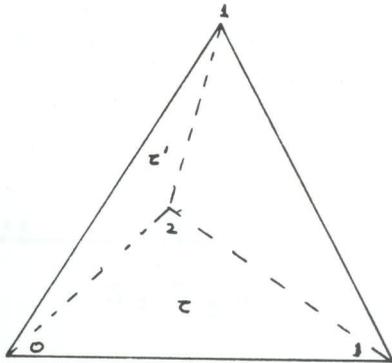
Sean  $T$  una  $n + 1$  triangulación y  $\lambda: T^0 \rightarrow J_n$ , si  $\sigma \in T$  es tal que tiene una faceta  $\tau$  completamente etiquetada entonces tiene una única faceta  $\tau'$  distinta de  $\tau$  tal que es completamente etiquetada.

La demostración es inmediata.

Si  $\sigma = v^0 \dots v^{i+1} v^i v^{i+1} \dots v^n$  y  $\tau$  es la faceta opuesta a  $v^i$ , existe una única  $v^j \in \tau^0$  tal que  $\lambda(v^i) = \lambda(v^j)$ , entonces la faceta  $\tau'$  opuesta a  $v^j$ ,  $n$ -cara de  $\sigma$  distinta de  $\tau$ , es  $\lambda$ -c.e., cualquier  $\tau'' \in \sigma^n$ ,  $\tau'' \neq \tau'$  y  $\tau'' \neq \tau$  tendrá como conjunto de vértices a

$$(\tau')^0 - \{\hat{v}\} \cup \{v^j\} \text{ con } \hat{v} \neq v^i \text{ y } \lambda(v^i) = \lambda(v^j),$$

entonces  $\tau''$  tiene etiquetas repetidas en  $v^i$  y en  $v^j$ .

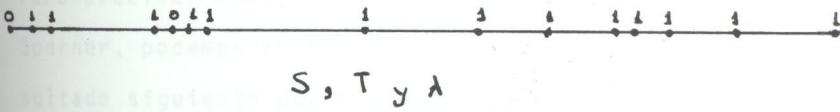


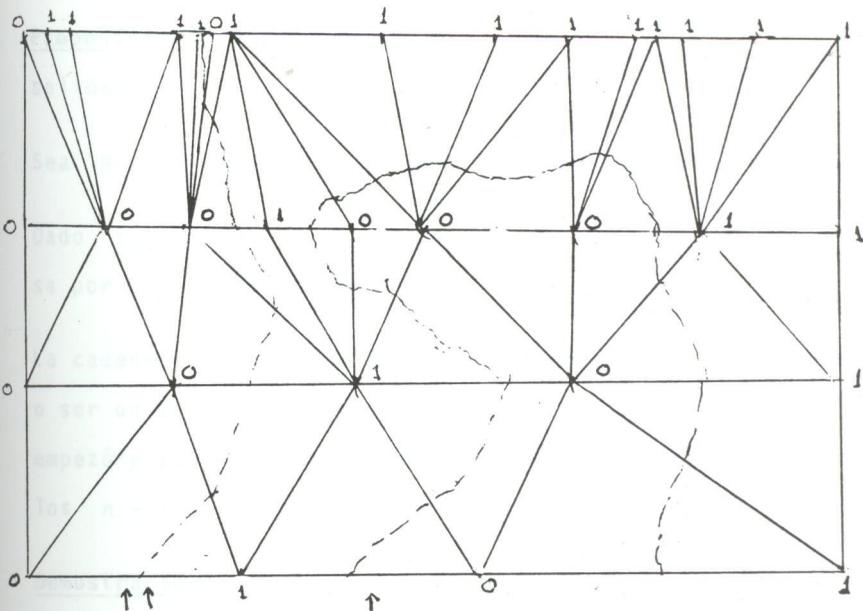
La idea de los algoritmos para encontrar un simplejo de Sperner es construir una "cadena c.e."  $\tau^0, \sigma^0, \tau^1, \dots$  hasta encontrar al  $n$ -simplejo c.e. buscado.

Hay distintas formas de proceder usando las 2 ideas claves; una de ellas, la que desarrollamos en el trabajo, es la siguiente:

Sea  $S$  triangulado por  $T$ , cuyos vértices tienen una etiquetación entera y consideramos  $S \times [0,1]$ . A éste lo triangulamos con  $T'$  de tal manera que las facetas que están en  $S \times \{1\}$  coincidan con  $T$ ; y una etiquetación  $\lambda'$  de los vértices de  $T'$  tal que en  $S \times \{1\}$  coincidan con  $\lambda$ ; si la etiquetación  $\lambda'$  de los vértices de  $T'$  es tal que usa el mismo conjunto  $J_n$  de etiquetas y se cumple que existe  $\tau_0$  completamente etiquetada en  $S \times \{0\}$ , podemos empezar nuestra búsqueda en  $\tau_0$  y seguir el camino de una faceta c.e., a otra también c.e. y ver si podemos llegar a una faceta c.e., en  $S \times \{1\}$  pues ésta sería el  $n$ -simplejo de Sperner.

Consideremos la figura siguiente:





Si empezamos el procedimiento con el  $n$ -simplejo de  $S \times \{0\}$  señalado con una flecha entonces regresamos a  $S \times \{0\}$ . Si lo empezamos con el que tiene 2 flechas llegamos a  $S \times \{1\}$  hasta un  $n$ -simplejo c.e. que está asociado al que buscábamos en  $T$ .

Para precisar esas ideas y llegar a cómo, con la hipótesis de Sperner, podemos encontrar el  $n$ -simplejo buscado, veamos el resultado siguiente que nos dice cuáles son las posibles trayectorias que puede construir nuestro algoritmo. Es ésta realmente la parte constructiva de la demostración.

completamente determinado.

**Proposición 2.1.2.** (Principio de puerta de entrada - puerta de salida).

Sea  $M$  un  $(n + 1)$  - poliedro con una triangulación  $T$  y  $\lambda: T^0 \rightarrow J_n$ .

Dado  $\tau_0 \in T^n, \lambda$  - c.e., existe una cadena máxima de facetas c.e. que pasa por  $\tau_0$ . Esta cadena es única excepto por el orden.

La cadena puede ser finita y entonces empezar y terminar en  $\partial T$  o ser un ciclo, es decir regresar al  $n$  - simplejo por el que empezó y repetir en el mismo orden una y otra vez cada uno de los  $n$  - simplejos de la cadena.

**Demostración:** (Algoritmo básico Lemke-Scarf)

El algoritmo es la base para construir la cadena de  $\tau_0$ .

**Paso inicial.** Dado  $\tau_0$  consideramos  $\sigma_0 \in T^{n+1}$  tal que  $\tau_0 \in \sigma_0^n$  sea  $i = 0$ .

**Paso pivoteo.** Por proposición 2.1.1 ("2 ó ninguna") existe un único  $\tau_{i+1} \neq \tau_i$  tal que  $\tau_{i+1}$  es  $\lambda$  - c.e. y  $\tau_{i+1} \in \sigma_i^n$ .

**Criterio de terminación.** Si  $\tau_{i+1} \in \partial T$ , termina la cadena.

**Paso de inducción.** Si  $\tau_{i+1} \notin \partial T$ , por definición (1.2.3 i.i.), existe  $\sigma_{i+1}$  en  $T^{n+1}$  único tal que  $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$  y  $\tau_{i+1}$  está en  $\sigma_{i+1}^n$ . Hacemos  $i = i + 1$  y regresamos el paso de pivoteo.

Veamos ¿cuál es el resultado del algoritmo?. Consideremos primero la posibilidad de que  $\tau_0 \in \partial T$ ; entonces cada paso está completamente determinado.

Como  $T$  es finita, la única forma de que el algoritmo no termine en un número finito de pasos es que haya repeticiones.

Supongamos que existen  $k$  y  $j$  distintas tales que  $\tau_k = \tau_j$  y sea  $\bar{k}$  la primera vez que ocurre esto, es decir  $\exists j_0 < \bar{k}-1$  tal que  $\tau_{\bar{k}} = \tau_{j_0}$ .

Así  $i, j < \bar{k}$  con  $i \neq j \Rightarrow \tau_i \neq \tau_j$ , observamos que el algoritmo no permite que  $j_0 = \bar{k}-1$ .

El algoritmo construye la siguiente sucesión

$$(\tau_0, \sigma_0), (\tau_1, \sigma_1), \dots, (\tau_{j_0}, \sigma_{j_0}), \dots$$

$$(\tau_{\bar{k}-1}, \sigma_{\bar{k}-1}), (\tau_{\bar{k}}, \sigma_{\bar{k}}), \dots$$

donde  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  son  $n$ -caras de  $\sigma_i$  y  $\tau_{i+1}$  es  $n$ -cara de  $\sigma_i$  y de  $\sigma_{i+1}$

Si  $\tau_{\bar{k}} = \tau_{j_0}$  y  $j_0 > 0$ , entonces  $\sigma_{\bar{k}-1} = \sigma_{j_0-1}$

o  $\sigma_{\bar{k}-1} = \sigma_{j_0}$ . Si  $j_0 = 0$  sólo es posible este último caso.

Si  $\sigma_{\bar{k}-1} = \sigma_{j_0-1}$  y  $j_0 > 0$ , cómo  $\tau_{\bar{k}}$  es una de las caras  $\lambda$ -c.e. de  $\sigma_{\bar{k}-1}$  y  $\tau_{\bar{k}} = \tau_{j_0}$ , la otra cara c.e. tiene que ser  $\tau_{\bar{k}-1}$ , es decir  $\tau_{j_0-1}$  absurdo pues  $j_0-1$  y  $\bar{k}-1$  son menores que  $\bar{k}$

Si  $\sigma_{\bar{k}-1} = \sigma_{j_0}$ , entonces  $\tau_{\bar{k}-1} = \tau_{j_0+1}$  pero  $j_0+1$  y  $\bar{k}-1$  menores que  $\bar{k}$  absurdo.

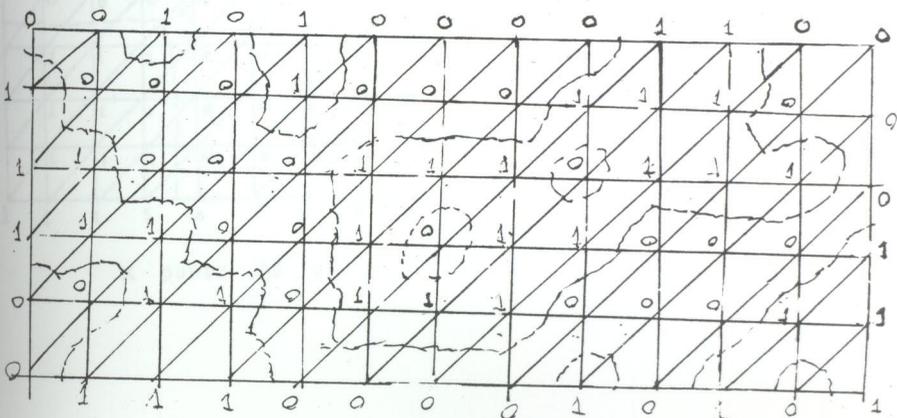
Por lo tanto no puede haber repeticiones y el algoritmo tiene que

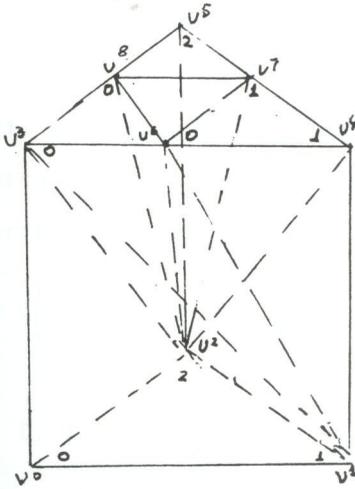
terminar en un número finito de pasos con un  $n$ -simplejo en  $\partial T$ . No puede haber otra cadena asociada  $\tau_0$ , pues en el último simplejo en que las cadenas coinciden existiría una faceta perteneciente a más de  $2n$ -simplejos de  $T$ .

Supongamos ahora que  $\tau_0 \notin \partial T$ . En el paso inicial podemos elegir como  $\sigma_0$  a cualquiera de los dos  $(n+1)$ -simplejos de los que  $\tau_0$  es  $n$ -cara. Elijamos a uno de ellos, si la cadena no se repite es finita y el algoritmo termina en un  $n$ -simplejo  $\bar{\tau}$  de  $\partial T$ . Si ahora llevamos a cabo el algoritmo iniciando en  $\bar{\tau}$  es claro que estaríamos en el primer caso y la cadena asociada a  $\bar{\tau}$  termina en un  $n$ -simplejo de  $\partial T$  distinto de  $\bar{\tau}$ ; pero la cadena asociada a  $\bar{\tau}$  pasa por  $\tau_0$  entonces es también la asociada a  $\tau_0$  excepto por el orden de los  $n$ -simplejos.

Si  $\tau_0 \notin \partial T$  se puede obtener una cadena con repeticiones pues hay una posibilidad de hacerlo y es que para alguna  $k > 1$   $\tau_k = \tau_0$  y entonces la cadena es un ciclo. El argumento de que la cadena es única es el mismo que cuando  $\tau_0 \in \partial T$ .

Ejemplos:

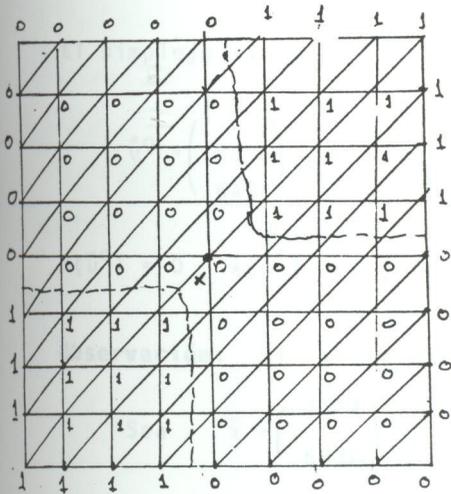




- $\tau_1 = v^0 \ v^1 \ v^2$
- $\tau_2 = v^1 \ v^2 \ v^3$
- $\tau_3 = v^1 \ v^2 \ v^6$
- $\tau_4 = v^2 \ v^6 \ v^7$
- $\tau_7 = v^2 \ v^7 \ v^8$
- $\tau_8 = v^5 \ v^7 \ v^8$

La única cadena

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8$



$$f(x,y) = x \cdot y$$

Si  $xy \leq 0$  et = 0

Si  $xy > 0$  et = 1

x punto (0, 0)

**Ejemplo:** Sea  $D = [0,1] \times [0,1]$  y  $f: D \rightarrow D$  definida cómo

$$f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$$

Usamos la triangulación de Kuhn que se describe en el inciso 2.3 y etiquetamos  $T^0$  de acuerdo a  $x - f(x)$ . Si empezamos el algoritmo  $\sigma = \bar{v}^0 \bar{v}^1 \bar{v}^2$ ,

$$\bar{v}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ .05 \\ .150 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ .150 \\ .150 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ .150 \\ .250 \end{pmatrix}, \quad \text{entonces}$$

$$\lambda(v^0) = 0, \quad \lambda(v^1) = 1, \quad \lambda(v^2) = 2.$$

Después de 17 iteraciones, salimos por la frontera

$$D \times \{1\}.$$

El simplejo final es  $\bar{\bar{v}}^0 \bar{\bar{v}}^1 \bar{\bar{v}}^2$ , donde

$$\bar{\bar{v}}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ .25 \\ .649 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{v}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ .35 \\ .649 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{v}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ .35 \\ .749 \end{pmatrix},$$

$$\lambda(\bar{\bar{v}}^0) = 0, \quad \lambda(\bar{\bar{v}}^1) = 1, \quad \lambda(\bar{\bar{v}}^2) = 2.$$

**Observación:** Si  $x$  es el baricentro de  $\bar{v}^0 \bar{v}^1 \bar{v}^2$ ,  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ .3167 \\ .6832 \end{pmatrix}$

$$\text{Sea } \bar{x} = \begin{pmatrix} .3167 \\ .6832 \end{pmatrix}, \quad \|\bar{x} - f(\bar{x})\| = .043$$

El punto fijo de  $f$  calculado en Matlab es  $\begin{pmatrix} .3139 \\ .6861 \end{pmatrix}$ .

Pasemos ahora a la demostración del lema de Sperner, tengamos para ello presente su enunciado preciso (1.2.11). Si  $S$  es un  $n$ -simplejo triangulado por  $T$  y  $\lambda$  es una etiquetación propia de  $T^0$ , entonces existe  $\sigma \in T$  que es c.e. Donde la definición de que la etiquetación es propia (def 1.2.8) quiere decir que  $\lambda(v) = k$  implica que la  $k$ -ésima coordenada baricéntrica de  $v$  respecto a  $S$  es distinta de cero.

La siguiente proposición nos garantiza la existencia de una triangulación y una etiquetación auxiliares.

**Proposición 2.1.3.** Sean  $S$  un  $n$ -simplejo,  $T$  una triangulación de  $S$  y  $\lambda$  una  $n$ -etiquetación propia de  $T$ , entonces existen  $\hat{T}$ , una triangulación de  $S \times [0,1]$  y  $\hat{\lambda}$ , una etiquetación de  $\hat{T}$ , tales que  $(\hat{T})^n \cap S \times \{1\}$  coincide con  $T$ ;  $\hat{\lambda} | (S \times \{1\}) \cap \hat{T}^0$  coincide con  $\lambda$ , hay una única faceta  $\lambda$ -c.e. en  $S \times \{0\}$  y todas las demás facetas  $\lambda$ -c.e. de  $\partial \hat{T}$  están en  $S \times \{1\}$

### Demostración

Si  $S = v^0 \dots v^n$  y

$$\sigma_0 = \bar{v}^0 \dots \bar{v}^n \bar{v}^0$$

con  $\bar{v}^i = (v^i, 0)$  y

$$\bar{v}^i = (v^i, 0) \text{ para } i = 0, \dots, n$$

En general

$$\sigma_j = \bar{v}^j \dots \bar{v}^n \bar{v}^0 \dots \bar{v}^j$$

es claro que los  $(n+1)$ -simplejos  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  triangulan a  $S \times I$ , pues  $S \times I$  es la unión de ellos, cualesquiera 2 de esos  $(n+1)$ -simplejos se intersectan en una cara común y cada faceta pertenece a lo más a 2  $(n+1)$ -simplejos.

Estamos llamando  $\sigma_j$  al  $(n+1)$ -simplejo que tiene como vértices a  $(v^\ell, 0)$  con  $\ell \geq j$  y a  $(v^k, 1)$  con  $k \leq j$ .

Consideremos  $S \times \{1\}$  triangulado en forma análoga que  $S$ , es decir con los  $n$ -simplejos de la forma  $\sigma \times \{1\}$  con  $\sigma \in T$ . Llamemos  $T_1$  a esta triangulación, entonces  $T_1^0 = \{(v^k, 1) \in S \times \{1\} \mid v^k \in T^0\}$ .

Triangulemos a  $\sigma_j$  de la siguiente manera:  $\sigma_j$  contiene la  $j$ -cara de  $S \times \{1\}$  con vértices  $\{(v^0, 1), \dots, (v^j, 1)\}$ ; esta  $j$ -cara tiene una  $j$ -triangulación inducida por  $T_1$ .

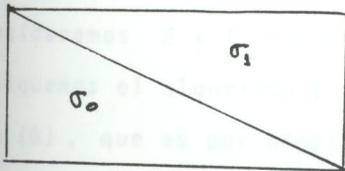
Consideremos cada uno de estos  $j$ -simplejos y agreguemos los  $n+1-j$  vértices  $\bar{v}^j, \bar{v}^{j+1}, \dots, \bar{v}^n$  para convertirlos en  $(n+1)$ -simplejos, para cada  $j$  esa colección de  $(n+1)$ -simplejos,  $\bar{T}_j$ , triangula a  $\sigma_j$ .

Sea  $\hat{T} = \bigcup_j \bar{T}_j$ .  $\hat{T}$  triangula a  $S \times I$ .

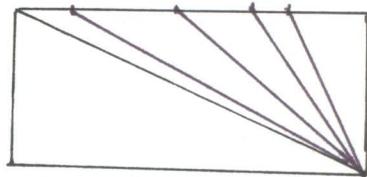
$\sigma_0 \in \hat{T}$ ,  $\sigma_0$  tiene como faceta a  $S \times \{0\}$ .

Definamos  $\hat{\lambda}: \hat{T}^0 \rightarrow J_n$  como  $\hat{\lambda}(v^k, t) = \lambda(v^k)$ .  $\hat{T}$  y  $\hat{\lambda}$  tienen las propiedades requeridas, pues todas las facetas en  $\partial \hat{T}$ , que son c.e., están en  $S \times \{0\}$  ó en  $S \times \{1\}$ , por que  $\lambda$  es propia.

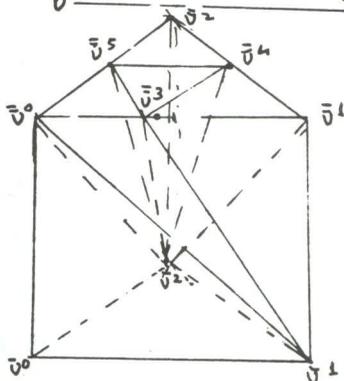
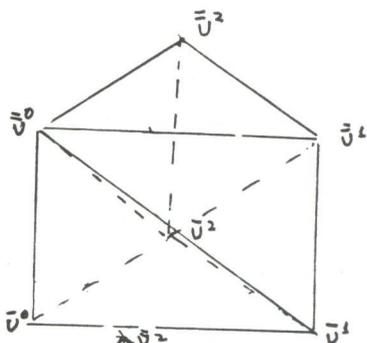
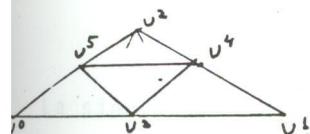

 $S \text{ y } T$



$S \times [0, 1]$  y  $\sigma_0$



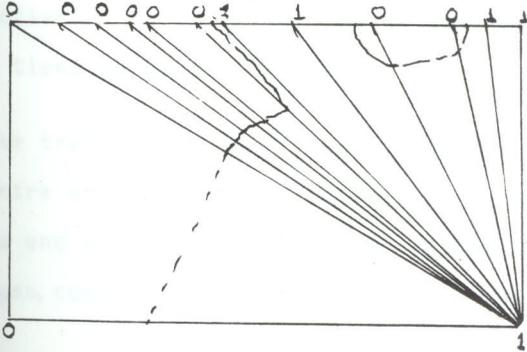
$S \times [0, 1]$  y  $\hat{T}$



### Demostración de 1.2.10 (Lema de Sperner)

Consideremos  $S \times I$  triangulado por  $\hat{T}$  y etiquetado por  $\hat{\lambda}$  y apliquemos el algoritmo 2.1.2 empezando por la faceta  $\tau_0 = S \times \{0\}$ , que es por hipótesis  $\hat{\lambda}$ -c.e.,  $\lambda$  es propia y terminaremos el algoritmo en una faceta  $\tau$   $\hat{\lambda}$ -c.e. de la frontera de  $\hat{T}$ , distinta de  $\tau_0$ , pero  $\tau$  está en  $S \times \{1\}$  y entonces es de la forma  $\sigma \times \{1\}$ , con  $\sigma$  el simplejo buscado.

La siguiente figura ilustra el algoritmo



Nota: Si empezamos el algoritmo por otra faceta  $\tau_2$  de  $\bar{T}$  en  $S \times \{1\}$  que no sea la que está en la misma cadena de  $S \times \{0\}$  terminaremos de nuevo en una faceta  $\tau_3 \in S \times \{1\}$ .

$\tau_3 \hat{\lambda}$  - c.e. y  $\tau_3 \neq \tau_2$ ,  $\tau_3 \neq \tau_1$ . Tanto  $\tau_2$  como  $\tau_3$  corresponden a  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$   $n$ -simplejos completamente etiquetados de  $S$  tenemos entonces la siguiente proposición como un corolario de 2.1.2.

**Proposición 2.1.4.** Si  $S$  está triangulado por una  $T$  arbitraria y  $\lambda$  es cualquier etiquetación propia de los vértices de  $T$  entonces  $T$  tiene un número impar de  $n$ -simplejos completamente etiquetados. *corresponde a su etiqueta.*

## 2.2. ¿Que tan buenos son los simplejos c.e.?

Si unimos la demostración del lema de Sperner a la del teorema de punto fijo de Brouwer, tendremos "casi" una demostración constructiva de éste último. No es totalmente constructiva puesto que tiene un paso al límite.

Si se trabaja con una triangulación suficientemente fina, se encuentra un pequeño  $n$  - simplejo completamente etiquetado, con cada uno de sus puntos con la propiedad de ser cercano a su imagen, como se afirma en el teorema siguiente.

**Teorema 2.2.1.** Sea  $f: S \rightarrow S$  continua,  $S$  el  $n$  - simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces dada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $T$  tiene diametro menor que  $\delta/n$  y  $\sigma$  es un simplejo de  $T$  completamente etiquetado respecto a  $\lambda$  (donde  $\lambda$  es la etiquetación del teorema de Brouwer T 1.3.1), entonces para toda  $v \in \sigma$

$$\|f(v) - v\|_{\max} < \epsilon + n \text{ diam}(T)$$

### **Demostración:**

Como  $f$  continua en el compacto  $S$ , entonces es uniformemente continua y si  $\epsilon^1 = \frac{\epsilon}{n}$ , existe  $\delta^1 > 0$  tal que si  $x$  y  $y$  cumplen con  $\|x - y\|_{\max} < \delta^1$  se cumple que  $\|f(x) - f(y)\|_{\max} < \epsilon^1$

Sea  $T$  con diametro menor que  $\delta^1$  y  $\sigma \in T$ ,  $\sigma = v^0 \dots v^n$ ,  $\lambda$ -c.e., donde la  $j$  de  $v^j$  corresponde a su etiqueta.

Entonces para  $i = 0, \dots, n$  como  $v_{i+1}^i - \delta_{i+1}(v^i) > 0$ , si  $v \in \sigma$  tenemos

$$\begin{aligned} v_{i+1} - \delta_{i+1}(v) &= v_{i+1} - v_{i+1}^i + \delta_{i+1}(v^i) - \delta_{i+1}(v) + \\ &\quad + v_{i+1}^i - \delta_{i+1}(v^i) \geq \\ v_{i+1} - v_{i+1}^i + \delta_{i+1}(v^i) - \delta_{i+1}(v) &> -\delta^1 - \epsilon^1 \\ &> -n\delta^1 - n\epsilon^1 \end{aligned}$$

Para  $i \neq n$  y  $j > i$

$$\begin{aligned} v_{i+1} - \delta_{i+1}(v) &= v_{i+1} - v_{i+1}^j + \delta_{i+1}(v^j) - \delta_{i+1}(v) \\ &\quad + v_{i+1}^j - \delta_{i+1}(v^j) \leq v_{i+1} - v_{i+1}^j \\ &\quad + \delta_{i+1}(v^j) - \delta_{i+1}(v) < \delta^1 + \epsilon^1 < n(\delta^1 + \epsilon^1) \end{aligned}$$

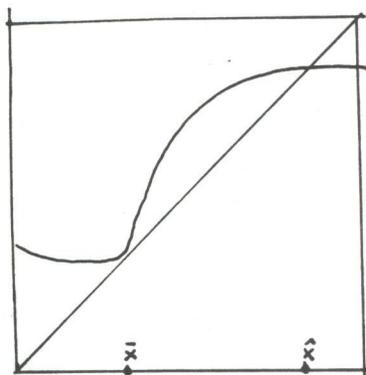
Si  $i = n$

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - \delta_{n+1}(v)| &= \left| \left(1 - \sum_{i=1}^n v_i\right) - \left(1 - \sum_{i=1}^n \delta_i(v)\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \delta_i(v) - v_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i(v) - v_i| < n\delta^1 + n\epsilon^1 = \epsilon + n \text{ diam}(T). \end{aligned}$$

Entonces si  $\delta = n\delta^1$ ,  $\|\delta(v) - v\|_{\max} < \delta(\epsilon) + \epsilon$

C. Bowman y S. Karamardian [1976] dan una cota en norma euclidea-  
na  $\|\delta(x) - x\| \leq (\sqrt{n(n+1)})/2 (\delta(\epsilon) + \epsilon)$

Nos queda una duda: ¿podría pasar que el punto es cercano a su imagen, y lejano a un verdadero punto fijo como se ilustra en la figura?



$\hat{x}$  único punto fijo,  $\bar{x}$  punto cercano a  $f(\bar{x})$  pero lejano a  $\hat{x}$

El resultado siguiente prueba que si un punto no se "mueve demasiado", es decir se comporta casi como punto fijo, entonces es cercano a un punto fijo. Esto además es útil para algoritmos que abandonan a los simplejos etiquetados y van encontrando puntos tales que distan muy poco de su imagen.

**Teorema 2.2.2.** Sea  $f: S \rightarrow S$  continua y  $F = \{x \in S \mid f(x) = x\}$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - f(x)| < \delta$ ,

$x \in N_\epsilon(F) = \{x \in S \mid \text{existe } y \in F \text{ con } |x - y| < \epsilon\} = \bigcup_{y \in F} B(y, \epsilon)$

**Demostración:**

Sea  $g(x) = |f(x) - x|$ ,  $g$  continua en  $S$ . Dada  $\epsilon > 0$

$S - N_\epsilon(F)$  compacto, por lo que  $g$  alcanza un mínimo en  $S - N_\epsilon(F)$ .

para toda  $x$ . Entonces  $g(x) < \delta$ .

Sea  $\delta$  ese mínimo, si  $x$  es tal que  $|x - f(x)| < \delta$ , entonces  $x \in N_\epsilon(F)$ .

Los siguientes resultados también nos hablan de que tan "buenos" son los simplejos completamente etiquetados.

**Teorema 2.2.3.** Sean  $A_0, \dots, A_n$ , subconjuntos cerrados del  $n$ -simplejo unitario  $S$  y  $\lambda$  etiquetación entera de  $S$ ; tales que cumplen las hipótesis del lema K.K.M. (Teorema 1.4.2.). Entonces dada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $T$  es una triangulación de diámetro menor que  $\delta$  y  $\sigma$  en  $T$  es completamente etiquetado se cumple:

$$\sigma \subset N_\epsilon(A), \text{ donde } N_\epsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon) \text{ y } A = \bigcap A_i.$$

**Demostración:** Sea  $g^i(x) = \text{dist}(x, A_i) =$

$$= \min_{y \in A_i} |x - y|. \text{ Está bien definida, pues}$$

$A_i$  compacto y  $d(y) = |x - y|$  es continua en  $A_i$ .

Sea  $g(x) = \max_i g^i(x)$ .

$S - N_\epsilon(A)$  es cerrado por lo tanto compacto y  $g$  continua en

$$S - N_\epsilon(A) \therefore \exists \delta > 0 \text{ tal que } \delta = \min_{x \in S - N_\epsilon(A)} g(x)$$

Supongamos que  $\text{diam}(T) < \delta$  y que  $\sigma \in T$  es  $\lambda$ -c.e. Si

$$\sigma = v^0 \dots v^n, v^i \in A_i. \quad \forall x \in \sigma \text{ dist}(x, A_i) \leq |x - v^i| < \delta$$

para toda  $i$ . Entonces  $g(x) < \delta$ .

Por lo tanto se tiene que  $x \in N_\varepsilon[A]$  y  $\sigma \subset N_\varepsilon[A]$ .

**Teorema 2.2.4.** Sean  $S$  el  $n$ -simplejo unitario en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f: S \rightarrow S$  continua,  $F = \{x \in S \mid f(x) = x\}$  y  $\lambda$  la etiquetación usada en 1.3.1.

Dada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $T$  es una triangulación con diámetro menor que  $\delta$  y  $\sigma \in T$  es  $\lambda$ -c.e.; entonces  $\sigma \subset N_\varepsilon[F]$ .

### Demostración

Para  $i = 0, \dots, n$ , sea  $A_i = \{x \in S \mid f_{i+1}(x) \leq x_{i+1}\}$ ,  $A_i$  es cerrado.

Si  $J \subset \{0, \dots, n\} = J_n$ ,  $J \neq \emptyset$ ,  $S_J$  como en 1.4.2.e.d si  $x \in S_J$ ,  $x_{i+1} \geq 0 \quad \forall i \in J$  y  $x_{i+1} = 0$  si  $i \notin J$ .

Supongamos que para toda  $k \in J$   $x \notin A_k$  entonces  $x_{k+1} < f_{k+1}(x)$

Si  $k \notin J$ ,  $x_{k+1} = 0$  y  $x_{k+1} \leq f_{k+1}(x)$ .

Es decir  $x$  tiene todas las coordenadas menores o iguales que  $f(x)$  y al menos una coordenada estrictamente menor, absurdo pues  $x$  y  $f(x)$  están en  $S$ .

Por lo que  $x \in A_k$  para alguna  $k \in J$  y  $S_J \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ .  $F =$

$\bigcap A_i$  y  $\lambda$  es la misma etiquetación que en 2.2.3, por lo que dada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $T$  es una triangulación de  $S$  con diámetro menor que  $\delta$  y  $\sigma \in T$  es simplejo

completamente etiquetado, entonces  $\sigma \in N_{\epsilon}(FL)$ .

Es decir cualquier punto de un simplejo completamente etiquetado es cercano a algún punto fijo si la triangulación es suficientemente pequeña.

### 2.3. Triangulaciones

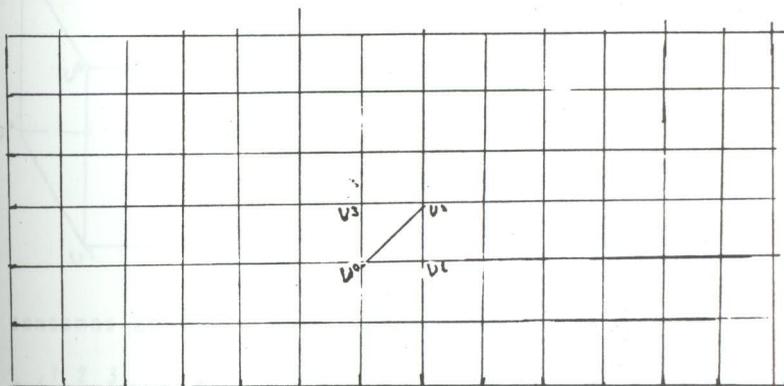
Quizá el problema práctico crucial, al implementar el algoritmo en una computadora, es la elección de la triangulación.

Es impensable guardar todos los vértices de una triangulación con diámetro muy pequeño en la memoria de la computadora y manipularlos para encontrar los simplejos de que habla el algoritmo, por ello resulta muy importante contar con triangulaciones para las cuales sea fácil pasar de un simplejo  $\sigma$  a otro adyacente, es decir que se intersecte con  $\sigma$  en una faceta común.

Es frecuente empezar el algoritmo con algún simplejo (de la dimensión adecuada) e ir generando, por algún método sencillo de pivoteo, los vértices que se van necesitando.

Una de estas triangulaciones es la introducida, para calcular puntos fijos, por Kuhn [1968]. Consiste en la malla de hipercubos cuyos vértices son los puntos de  $R^n$  con coordenadas múltiples enteros de  $\delta$ , un número real positivo suficientemente pequeño, fijado de antemano. Además cada hipercubo dividido de una manera que describimos para cuando  $n$  es 2 y 3 y luego establecemos en general.

Si  $n = 2$  dividimos cada cuadrado por la diagonal de pendiente positiva.



Para el cuadrado  $v^0 v^1 v^2 v^3$  tenemos los simplejos  $v^0 v^1 v^2$  y  $v^0 v^2 v^3$

Los vértices del primero los podemos describir cómo  $v^0$ ,  $v^1 = v^0 + \delta e^1$  y  $v^2 = v^1 + \delta e^2$

A los del segundo cómo  $\tilde{v}^0 = v^0$ ,  $\tilde{v}^1 = \tilde{v}^0 + \delta e^2$   $\tilde{v}^2 = \tilde{v}^1 + \delta e^1$ .

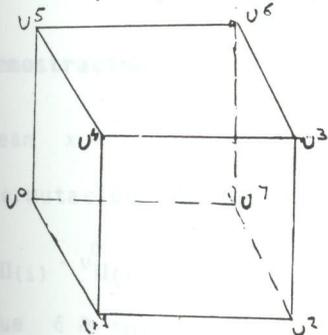
Podemos pensar en las dos únicas permutaciones de  $\{1,2\}$  y llamar  $\Pi_1$  a la identidad y  $\Pi_2$  a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces

$$v^1 = v^0 + \delta e^{\Pi_1(1)}, \quad v^2 = v^1 + \delta e^{\Pi_1(2)}$$

$$\tilde{v}^1 = v^0 + \delta e^{\Pi_2(1)}, \quad \tilde{v}^2 = \tilde{v}^1 + \delta e^{\Pi_2(2)}$$

Al primer simplejo lo denotamos como  $[v^0, \Pi_1]$  y al segundo como  $[v^0, \Pi_2]$ .

Si  $n = 3$  tendremos dividido cada hipercubo, con vértices  $v^0, v^1, \dots, v^7$ , en los seis simplejos siguientes



1.  $v^0 v^1 v^2 v^3$
2.  $v^0 v^1 v^4 v^3$
3.  $v^0 v^7 v^2 v^3$
4.  $v^0 v^7 v^6 v^3$
5.  $v^0 v^5 v^4 v^3$
6.  $v^0 v^5 v^6 v^3$

Si pensamos en las 6 permutaciones de  $\{1, 2, 3\}$   $\Pi_1 = \text{id}$ ,

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que, para  $j = 1, \dots, 6$ , el simplejo  $j$  es  $(v^0, \Pi_j)$  es decir el simplejo  $\hat{v}^0 \hat{v}^1 \hat{v}^2 \hat{v}^3$  con  $\hat{v}^0 = v^0$ ,  $\hat{v}^1 = v^0 + \delta e^{\Pi_j(1)}$ ,  $\hat{v}^2 = \hat{v}^1 + \delta e^{\Pi_j(2)}$  y  $\hat{v}^3 = \hat{v}^2 + \delta e^{\Pi_j(3)}$

En general en  $\mathbb{R}^n$  cada hipercubo de la malla puede dividirse en los  $n!$   $n$ -simplejos correspondientes a las  $n!$  permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$  es decir si  $v^0$  es el vértice de dicho hipercubo con coordenadas menores o iguales que los demás, entonces  $[v^0, \Pi]$  denotará el  $n$ -simplejo  $v^0 \dots v^n$  donde  $v^j = v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

**Proposición 2.3.1.** El hipercubo  $c$  de la malla que tiene a  $v^0$  como vértice con coordenadas menores o iguales que los de-

más está dividido por los simplejos  $[v^0, \Pi]$  y cada pareja de dichos simplejos se cortan en una cara común o son ajenos.

### Demostración:

Sean  $x \in c$ , para  $i = 1, \dots, n$ ,  $m_i = [\frac{x_i}{\delta}]$ ,  $v_i^0 = \delta m_i$  y la permutación  $\Pi$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que

$x_{\Pi(i)} - v_{\Pi(i)}^0 \geq x_{\Pi(i+1)} - v_{\Pi(i+1)}^0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ ; es claro que  $\delta \geq x_{\Pi(i)} - v_{\Pi(i)}^0 \geq 0$ .

Sea  $\sigma = [v^0, \Pi]$ , demostraremos que  $x \in \sigma$ .

Definamos  $\alpha_0 = \delta$ ,  $\alpha_{n+1} = 0$  y para  $j = 1, \dots, n$  y  $k = 0, \dots, n$ ,

$$\alpha_j = x_{\Pi(j)} - v_{\Pi(j)}^0 \quad \text{y} \quad \beta_k = \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\delta}, \quad \text{entonces}$$

$$\beta_k \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^n \beta_k = \frac{1}{\delta} (\sum_{k=0}^n \alpha_k - \alpha_{k+1}) = \frac{1}{\delta} (\alpha_0 - \alpha_{n+1}) = 1$$

El vector  $\sum_{j=0}^n \beta_j v^j$  tiene como coordenada  $\Pi(k)$  a  $\sum_{j=0}^n \beta_j v_{\Pi(k)}^j$

$$\sum_{j=0}^n \beta_j v_{\Pi(k)}^j = \sum_{j=0}^n \beta_j v_{\Pi(k)}^0 + \delta \left( \sum_{j=k}^n \beta_j \right) =$$

$$= v_{\Pi(k)}^0 + \delta \sum_{j=k}^n \frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{\delta} = v_{\Pi(k)}^0 + \alpha_k - \alpha_{n+1} =$$

$$= v_{\Pi(k)}^0 + \alpha_k = v_{\Pi(k)}^0 + (x_{\Pi(k)} - v_{\Pi(k)}^0) = x_{\Pi(k)}$$

Es decir  $x = \sum_{j=0}^n \beta_j v^j$  y  $x \in \sigma$ . Si  $x$  está en  $\sigma^o$ ,  $\beta_j > 0 \forall j$ .

Supongamos que  $x$  está en el interior de otro simplejo  $[v^0, \Pi']$

Tenemos que

$$x_{\Pi'}(j) = \sum_{i=0}^n \beta_i' v_{\Pi'(j)}^0 + \delta \sum_{i=j}^n \beta_i' = v_{\Pi'(j)}^0 + \delta \sum_{i=j}^n \beta_i', \beta_i' > 0 \forall i.$$

Por otro lado

$$x_{\Pi'(j+1)} = v_{\Pi'(j+1)}^0 + \delta \sum_{i=j+1}^n \beta_i' \text{ y}$$

$$x_{\Pi'(j+1)} - v_{\Pi'(j+1)}^0 < x_{\Pi'(j)} - v_{\Pi'(j)}^0$$

Entonces  $\Pi = \Pi'$  y  $x$  está en el interior de un sólo simplejo  $[v^0, \Pi]$ . Por lo que 2 simplejos de este tipo son ajenos o se cortan en una cara común.

Sabemos que la malla de hipercubos cubre a  $\mathbb{R}^n$  y que cada pareja de hipercubos se cortan en caras comunes ó son ajenos; éste hecho junto con la proposición 2.3.1 demuestra que cada pareja de elementos de  $K(\delta)$  se corta en una cara común (tomando al conjunto vacío como una cara de todo simplejo).

Por otro lado una faceta no puede pertenecer a más de dos  $n$ -simplejos, pues cada faceta  $\tau$  determina un subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  que divide a éste en 2 regiones ajenas; cada  $n$ -simplejo del cual  $\tau$  sea faceta está contenido en una de las 2 regiones cerradas, si hubiera 2  $n$ -simplejos de este tipo en una misma región tendrían puntos interiores en común, absurdo.

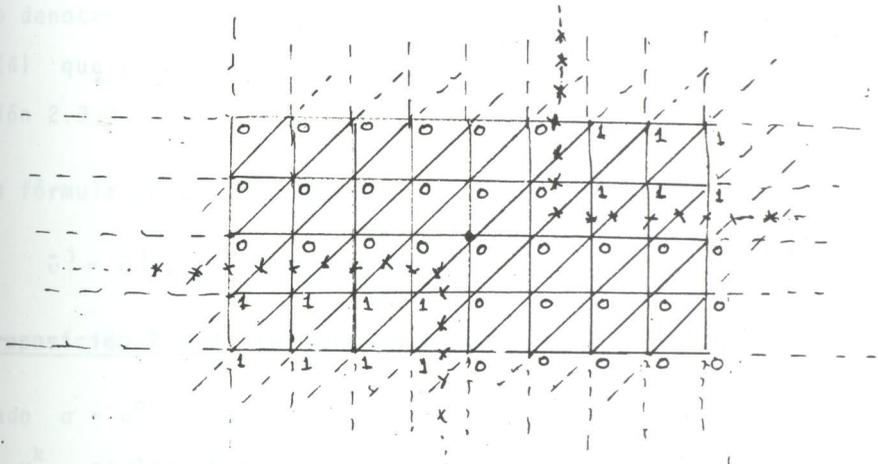
Tenemos entonces que  $K(\delta)$  cumple todas las propiedades de triangulación excepto la de ser finito.

Una colección  $M$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  se llama localmente finita si para cada  $x \in |M|$  existe una vecindad tal que corta a  $|M|$  únicamente en un número finito de elementos de  $M$ .

Podemos generalizar el concepto de triangulación, cambiando la exigencia de finitud por la de localmente finita. Es claro que  $K(\delta)$  es localmente finita y tenemos demostrado el Teorema 2.3.2.

**Teorema 2.3.2**  $K(\delta)$  es una triangulación de  $\mathbb{R}^n$ .

El resultado 2.1.2, que es la base principal de este tipo de algoritmos (P.L.), se puede modificar para estas triangulaciones más generales y entonces la cadena obtenida puede ser una trayectoria infinita que pasa por  $\tau_0$  c.e.



Dado  $\sigma \in K(\delta)$  y  $\tau$  una faceta de  $\sigma$  existe un procedimiento, al que se llama pivoteo por reflexión, para encontrar el único

como faceta.

simplejo  $\bar{\sigma}$  tal que  $\bar{\sigma} \cap \sigma = \tau$ .

El método consiste en lo siguiente:

Se ha establecido un orden entre los vértices de los simplejos a través de la permutación  $\Pi$ ; si además tomamos como siguiente de  $v^n$ , denotado  $v^{n+1}$ , a  $v^0$  y por lo tanto como anterior de  $v^0$  a  $v^n$ , entonces cada vértice  $v^j$  tiene un siguiente  $v^{j+1}$  y un anterior  $v^{j-1}$ .

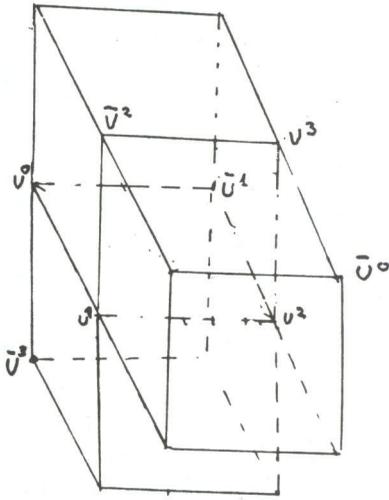
Consideremos  $\sigma = v^0 \dots v^n$ , con el orden anterior y sea  $\tau$  la faceta opuesta a  $v^j$ . Pensemos en el paralelograma que tiene como vértice a  $v^j$  y lados paralelos a  $(v^{j-1} - v^j)$  y a  $(v^{j+1} - v^j)$ . Al vértice diagonalmente opuesto a  $v^j$  en dicho paralelograma, lo denotamos como  $\bar{v}^j$ ,  $\tau$  y  $\bar{v}^j$  determinan el simplejo de  $K(\delta)$  que estábamos buscando como se establece en la proposición 2.3.3.

La fórmula para  $\bar{v}^j$  es

$$\bar{v}^j = v^j + (v^{j+1} - v^j) + (v^{j-1} - v^j) = v^{j+1} + v^{j-1} - v^j$$

**Proposición 2.3.3.** (Pivoteo por reflexión).

Dado  $\sigma = v^0 \dots v^j \dots v^n$  en  $K(\delta)$  y  $\tau$  la faceta opuesta a  $v^k$ , si los vértices de  $\sigma$  están ordenados de acuerdo a  $\Pi$  y  $\bar{v}^k = v^{k+1} + v^{k-1} - v^k$ , entonces  $\bar{\sigma} = v^0 \dots \bar{v}^k \dots v^n$  es el único elemento de  $K(\delta)$  distinto de  $\sigma$  que tiene a  $\tau$  como faceta.



$$\sigma = v^0 v^1 v^2 v^3$$

$$\sigma_{v^1} = v^0 \bar{v}^1 v^2 v^3 = v^0 \bar{v}^1 v^2 v^3 = [v^0, (1, 2, 3)]$$

$$\sigma_{v^2} = v^0 v^1 \bar{v}^2 v^3 = v^0 v^1 \bar{v}^2 v^3 = [v^0, (1, 2, 3)]$$

$$\sigma_{v^3} = v^0 v^1 v^2 \bar{v}^3 = \bar{v}^3 v^0 v^1 v^2 = [v^3, (1, 2, 3)]$$

$$\sigma_{v^0} = \bar{v}^0 v^1 v^2 v^3 = v^1 v^2 v^3 \bar{v}^0 = [v^1, (1, 2, 3)]$$

Consideremos la permutación

y definamos  $\bar{v}^i$   $\bar{v}^j$

Consideremos los vértices de  $\bar{\sigma}$

**Demostración:** Supongamos  $k \neq 0$  y  $k \neq n$

$$\bar{v}^k = v^{k+1} + v^{k-1} - v^k = v^k + \delta e^{\Pi(k+1)} + v^{k-1} - v^k = v^{k-1} + \delta e^{\Pi(k+1)}$$

$$\text{Sea } \bar{\sigma} = v^0 v^1 \dots v^{k-1} \bar{v}^k v^{k+1} \dots v^n.$$

Denotemos  $\bar{\Pi}$  a la permutación que resulta de aplicar la transposición  $k \leftrightarrow k+1$  seguida de la permutación  $\Pi$

$$\bar{v}^k = v^{k-1} + \delta e^{\Pi(k+1)} = v^{k-1} + \delta e^{\bar{\Pi}(k)}$$

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= v^k + \delta e^{\Pi(k+1)} = v^{k-1} + \delta e^{\Pi(k)} + \delta e^{\Pi(k+1)} = v^{k-1} + \delta e^{\bar{\Pi}(k+1)} + \delta e^{\bar{\Pi}(k)} \\ &= (v^{k-1} + \delta e^{\bar{\Pi}(k)}) + \delta e^{\bar{\Pi}(k+1)} = \bar{v}^k + \delta e^{\bar{\Pi}(k+1)} \end{aligned}$$

Para  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq k$  y  $j \neq k+1$

$$v^j = v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)} = v^{j-1} + \delta e^{\bar{\Pi}(j)}.$$

$$\text{Entonces } \sigma = [v^0, \bar{\Pi}].$$

$$\text{Si } k = n. \quad \bar{\sigma} = v^0 \dots \bar{v}^n$$

$$\bar{v}^n = v^0 + v^{n-1} - v^n = v^0 + v^{n-1} - (v^{n-1} + \delta e^{\Pi(n)}) =$$

$$= v^0 - \delta e^{\Pi(n)}$$

$$v^0 = \bar{v}^n + \delta e^{\Pi(n)}$$

Consideremos la permutación  $\varphi(j) = j - 1$  si  $j \neq 1$  y  $\varphi(1) = n$  y definamos  $\bar{\bar{\Pi}} = \bar{\Pi} \circ \varphi$ .

Reordenemos los vértices de  $\bar{\sigma}$  a un simplejo

al pivotar de cada uno de sus vértices  $v^j$ .

$$\bar{v}^0 = \bar{v}^n$$

En general para  $j \neq 0$ ,  $\bar{v}^j = v^{j-1}$

$$\bar{v}^1 = v^0 = \bar{v}^n + \delta e^{\Pi(n)} = \bar{v}^0 + \delta e^{\bar{\Pi}(1)}$$

$$\bar{v}^{j+1} = v^j = v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)} = \bar{v}^j + \delta e^{\bar{\Pi}(j+1)}$$

Entonces  $\sigma = [\bar{v}^0, \bar{\Pi}]$ .

Por último, supongamos que  $k = 0$  y  $\bar{\sigma} = \bar{v}^0 v^1 \dots v^n$

$$\bar{v}^0 = v^1 + v^n - v^0 = v^n + \delta e^{\Pi(1)}$$

Si  $\varphi$  es la permutación que manda a  $j$  en  $j+1$ , si  $j \neq n$  y  $\varphi(n) = 1$ ;  $\hat{\Pi} = \Pi \circ \varphi$ .

Definamos  $\hat{v}^0 = v^1$ ,  $\hat{v}^n = \bar{v}^0$  y para  $j = 1, \dots, n-1$

$\hat{v}^j = v^{j+1}$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{v}^j &= v^j + \delta e^{\Pi(j+1)} = v^j + \delta e^{\hat{\Pi}(j)} = \\ &= \hat{v}^{j-1} + \delta e^{\hat{\Pi}(j)} \end{aligned}$$

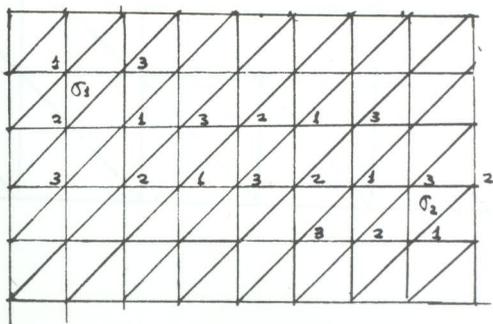
$$\begin{aligned} \hat{v}^n &= \bar{v}^0 = v^1 + v^n - v^0 = v^n + \delta e^{\Pi(1)} \\ &= \hat{v}^{n-1} + \delta e^{\hat{\Pi}(n)} \end{aligned}$$

Por lo que  $\bar{\sigma} = [\hat{v}^0, \hat{\Pi}]$  como queríamos demostrar.

La siguiente tabla resume, para un simplejo  $(v, \Pi)$ , los efectos del pivoteo de cada uno de sus vértices  $v^j$ .

|             | $v^1$                   | $\Pi^1$   |
|-------------|-------------------------|---|
| $j = 0$     | $v + \delta e^{\Pi(1)}$ | $\Pi_0 \varphi$ con $\varphi(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$  |
| $0 < j < n$ | $v$                     | $\Pi_0 \varphi$ con $\varphi(i) = \begin{cases} \Pi(i) & \text{si } i \neq j \text{ y } i \neq j+1 \\ j+1 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i = j+1 \end{cases}$ |
| $j = n$     | $v - \delta e^{\Pi(n)}$ | $\Pi_0 \varphi$ con $\varphi(i) = \begin{cases} i-1 & \text{si } i \neq 1 \\ n & \text{si } i = 1 \end{cases}$  |

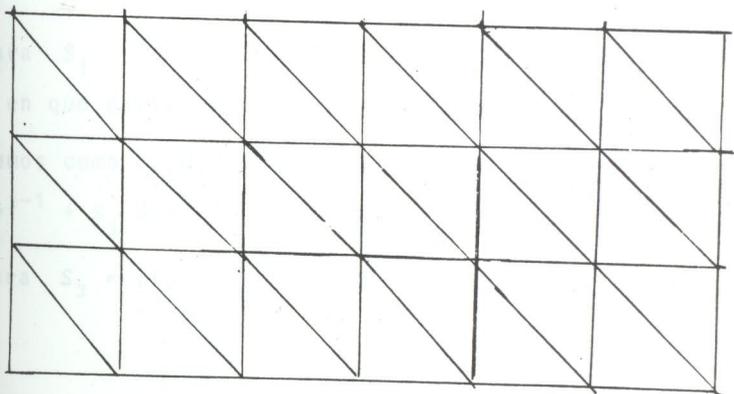
Para finalizar este vistazo sobre  $K(\delta)$  ilustremos mediante el siguiente dibujo la posibilidad de generar a partir de un simplejo dado, por ejemplo  $[0, Id]$ , con un número finito de pivotes por reflexión cualquier otro elemento de  $K(\delta)$ .



### Otras triangulaciones

Para construir los simplejos de  $K(1)$  se van sumando los vectores canónicos siempre en sentido positivo y según alguna permutación, se podría pensar en darle a cada vector canónico un signo, no necesariamente positivo, y sumarlo según la permutación, pero con su signo.

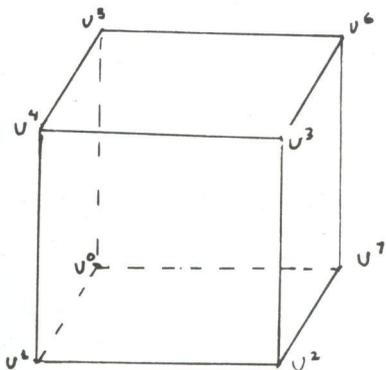
Es claro que si a todos los vectores canónicos les ponemos el signo negativo engendraríamos de nuevo a  $K(1)$ ; pero si a unos el positivo y a otros el negativo podríamos obtener distintas triangulaciones. Por ejemplo si  $n = 2$  y a  $e^1$  le asociamos el signo positivo y a  $e^2$  el signo negativo obtendríamos la triangulación siguiente:



Se obtendría la misma triangulación si a  $e^1$  se le asocia el signo negativo y a  $e^2$  el positivo.

Si  $n = 3$  tenemos más posibilidades, usemos un vector de signos  $S \in \{1, -1\}^3$  para indicar que  $e^j$  se suma multiplicado por  $s_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Tenemos las distintas formas de partir el cubo



1. Para  $S_1 = (1, 1, 1)$  y  $S_2 = (-1, -1, -1)$  tenemos la misma forma en que parte  $K(\delta)$ .

Denotemos como  $[v, \Pi, \mathcal{S}]$  el simplejo con vértice inicial  $v$  y  $v^j = v^{j-1} + S_j \mathcal{S} e^{\Pi(j)}$ , entonces las otras divisiones son:

2. Para  $S_3 = (1, -1, 1)$  y  $S_4 = (-1, 1, -1)$  tenemos

$$v^7 v^2 v^1 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_4]$$

$$v^7 v^2 v^3 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_4]$$

$$v^7 v^0 v^1 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_4]$$

$$v^7 v^0 v^5 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_4]$$

$$v^7 v^6 v^3 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_4]$$

$$v^7 v^6 v^5 v^4 = [v^7, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_3] = [v^4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_4]$$

3. Para  $S_5 = (-1, 1, 1)$  y  $S_6 = (1, -1, -1)$

$$v^1 v^0 v^7 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_6]$$

$$v^1 v^0 v^5 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_6]$$

$$v^1 v^2 v^3 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_6]$$

$$v^1 v^2 v^7 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_6]$$

$$v^1 v^4 v^3 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_6]$$

$$v^1 v^4 v^5 v^6 = [v^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_5] = [v^6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_6]$$



4. Para  $S_7 = (1, 1, -1)$  y  $S_8 = (-1, -1, 1)$

$$v^5 v^4 v^3 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_8]$$

$$v^5 v^4 v^1 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_8]$$

$$v^5 v^6 v^7 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, S_8]$$

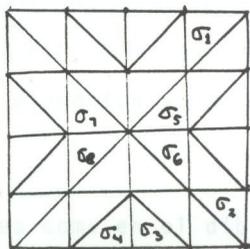
$$v^5 v^6 v^3 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_8]$$

$$v^5 v^7 v^0 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_8]$$

$$v^5 v^0 v^1 v^2 = [v^5, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_7] = [v^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_8]$$

Otra posibilidad es no dar a todos los vértices el mismo vector de signo, teniendo cuidado de que los simplejos resultantes se intersecten en caras comunes.

Una triangulación muy usada es dar el signo según el cuadrante a que pertenece  $v$ , por ejemplo si  $n = 2$  la triangulación tendría la forma:



$$\sigma_1 = [(1, 1), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (1, 1)]$$

$$v = (1, 1), \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = (1, 1)$$

$$\sigma_2 = [(1, -2), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (1, -1)]$$

Los vértices de los ejes distintos de  $(0, 0)$  pertenecen a 2 cuadrantes, por lo que existen dos simplejos con el mismo vértice inicial y la misma  $\Pi$  y que sólo difieren en el vector  $S$ , por ejemplo  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$ .

$$\sigma_3 = [(0, -2), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (1, -1)]$$

$$\sigma_4 = [(0, -2), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (-1, -1)]$$

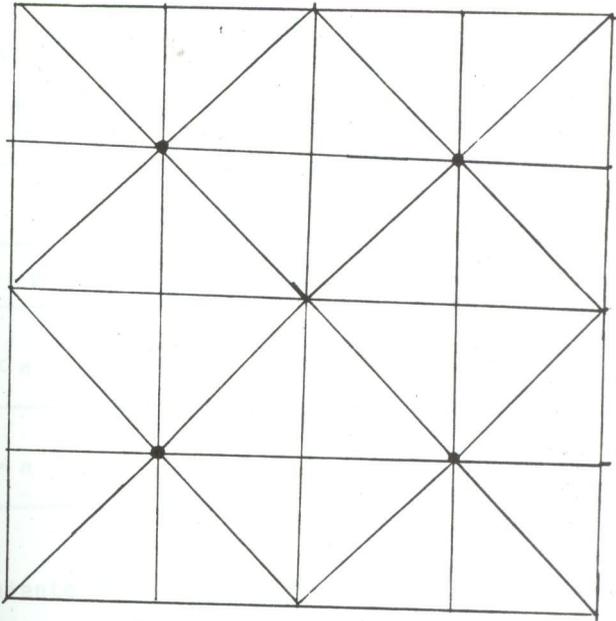
$(0, 0)$  pertenece a los cuatro cuadrantes, tenemos cuatro simplejos con las mismas  $v$  y  $\Pi$  y distinta  $S$ .

$$\sigma_5 = [(0, 0), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (1, 1)], \quad \sigma_6 = [(0, 0), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (1, -1)],$$

$$\sigma_7 = [(0, 0), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (-1, 1)], \quad \sigma_8 = [(0, 0), \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (-1, -1)]$$

Todd consideró una triangulación de  $\mathbb{R}^n$ , en la que toma los vértices iniciales entre aquéllos que tienen coordenadas múltiplos impares de  $\delta$  y cada uno de ellos es inicial de  $2^n \times n!$   $n$ -simplejos. A estos simplejos se les denota  $[v, \Pi, S]$ , con  $\Pi$  una permutación de  $n$  elementos y  $S$  en  $\{1, -1\}^n$ . Esta triangulación es  $J(\delta)$ .

Si  $n = 2$   $J(\delta)$  es como en el dibujo



La demostración de que  $J(\delta)$  es una triangulación es totalmente análoga a la de  $K(\delta)$ . Ver Todd [1976].

Para  $J(\delta)$  el método de pivoteo para todos los vértices  $v^j$  es una reflexión rectangular respecto a la 2-cara paralela a  $(v^{j-1}, v^{j+1})$  (con la convención de que  $n+1 = 0$  y  $0-1$  es  $n$ ).

Si  $j \neq 0$  y  $j \neq n$ , como antes

$$\bar{v}^j = v^{j+1} + v^{j-1} - v^j, \quad \bar{v}^0 = v^0 + 2(v^1 - v^0)$$

$$\text{y } \bar{v}^n = v^n + 2(v^{n-1} - v^n) = 2v^{n-1} - v^n$$

La tabla de pivoteos se da a continuación.

Sea  $[v, \Pi, S]$  que se convierte en  $[v^1, \Pi^1, S^1]$  después de pivotar el vértice  $v^j$ .

|             | $v^1$                                | $\Pi^1$  | $S^1$                         |
|-------------|--------------------------------------|--|-------------------------------|
| $j = 0$     | $v - 2 \delta S_{\Pi(1)} e^{\Pi(1)}$ |  | $S - 2 S_{\Pi(1)} e^{\Pi(1)}$ |
| $0 < j < n$ | $v$                                  | $\Pi$ $\varphi$<br>$\varphi$ transposición<br>de $j$ y $j+1$ | $S$                           |
| $j = n$     | $v$                                  | $\Pi$  | $S - 2 S_{\Pi(1)} e^{\Pi(1)}$ |

El siguiente teorema nos permite construir nuevas triangulaciones

**Teorema 2.3.4** Sean  $T$  una triangulación en  $\mathbb{R}^n$  y  $h$  una transformación afín biyectiva de  $|T|$  en  $C \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $T$  induce una triangulación de  $C$ .

**Demostración:**

Sea  $T_C$  el conjunto de todos los  $n$ -simplejos  $\sigma_C = v_C^0 \dots v_C^n$  tales que  $v_C^i = h(v^i)$  y  $v^0 \dots v^n \in T$ .

$T_C = \{\bar{\sigma} \text{ tales que } \bar{\sigma} = h(\sigma) \text{ para } \sigma \in T\}$ ,  $h(v) = a + A(v)$  para algún  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $y \in C$ , existe  $x \in |T|$  tal que  $h(x) = y$ .

Consideremos  $[v^j, \Pi]$ , entonces  $v^j \in |T|$ .

Llamemos  $\sigma_x$  a uno de los  $n$ -simplejos que contiene a  $x$ .

Si  $\sigma_x = v_x^0 \dots v_x^n$ , entonces  $x = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_x^i$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ .

$$y = h(x) = a + A \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_x^i \right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (a + A(v_x^i)) =$$

$= \sum_{i=0}^n \alpha_i h(v_x^i)$ . Por lo que  $y$  está en el  $n$ -simplejo con vértices  $\{h(v_x^i)\}$ ,  $\bar{\sigma}_y$ . Dicho simplejo es  $h(\sigma_x)$ .  $x$  es interior a  $\sigma_x$ , si y sólo si  $y$  es interior a  $\bar{\sigma}_y$ .

$\bar{\sigma}_y \in T_c$  y  $T_c$  cubre a  $C$ .

Supongamos  $z \in C$  tal que es interior a dos  $n$ -simplejos distintos de  $T_c$ .

Sea  $v$  tal que  $h(v) = z$ , entonces  $v$  está en el interior de dos simplejos de  $T$ , absurdo pues  $T$  es una triangulación.

Por lo tanto cada pareja de elementos de  $T_c$  se corta en una cara común.

Además  $T_c$  es localmente finito pues  $T$  lo es y  $T_c$  es una triangulación.

Como corolario tenemos que cualquier deformación afín (biyectiva) de  $K(\delta)$  ó de  $J(\delta)$  será una triangulación.

Por ejemplo para  $h$  una transformación biyectiva de  $K(\delta)$ , veamos la forma de los simplejos.

Consideremos  $[v^0, \Pi]$ , entonces  $\bar{\sigma} = h[v^0, \Pi]$ , tendrá los vérti

ces siguientes:

$$\hat{v}^0 = h(v^0)$$

$$\hat{v}^j = h(v^j) = h(v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)}) =$$

$$= a + A(v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)}) =$$

$$= a + A(v^{j-1}) + \delta A e^{\Pi(j)} = h(v^{j-1}) + \delta A^{\Pi(j)}$$

$$= \hat{v}^{j-1} + \delta A^{\Pi(j)}$$

Donde  $A^j$  denota al vector  $A(e^j)$ , estos vectores juegan ahora el papel, que jugaban los canónicos, para construir los vértices del simplejo  $h[v^0, \Pi]$ .

Estudemos las reglas de pivoteo por reflexión.

$$\overline{h(v^j)} = h(v^{j+1}) + h(v^{j-1}) - h(v^j) =$$

$$= a + A(v^{j+1}) + a + A(v^{j-1}) -$$

$$a - A(v^j) = a + A(v^{j+1} + v^{j-1} - v^j)$$

$$= a + A(\bar{v}^j) = h(\bar{v}^j)$$

Es decir la imagen del vértice obtenido al pivotar  $v$  en  $[v^0, \Pi]$ , es el mismo que se obtiene al pivotar  $h(v^j)$  en  $h[v^0, \Pi]$ .

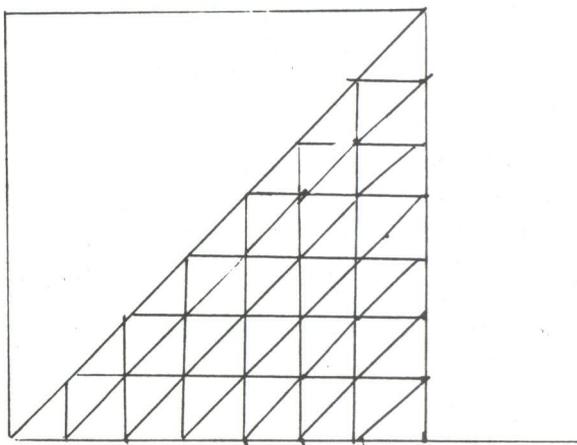
Las mismas ideas se pueden desarrollar para las deformaciones afines biyectivas de  $J(\delta)$ .

Veamos ahora el uso del teorema 2.3.4 para construir triangulaciones de algunas regiones importantes de  $\mathbb{R}^n$ .

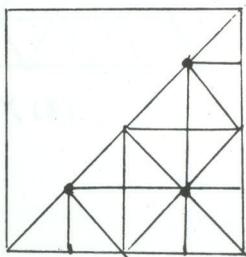
### Triangulación de un simplejo $S \subset \mathbb{R}^n$

Sea  $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0\}$

$\bar{S}$  resulta triangulado por una subcolección de  $K(\delta)$



También  $\bar{S}$  resulta triangulada por una subcolección de  $J(\delta)$



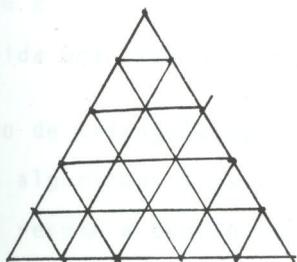
para triangular un  $n$ -simplejo  $S$  arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar la transformación afín que lleva a  $\bar{S}$  en  $S$ , y esta inducirá una triangulación en  $S$ .

Consideremos en particular la triangulación del  $n$ -simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$

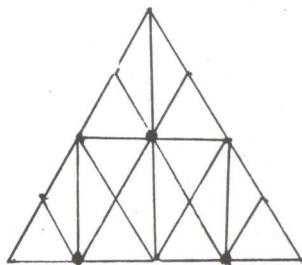
La transformación afín que manda a  $\bar{S}$  en el  $n$ -simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$  es  $h(x) = a + A_x$  donde  $a = e^1 \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$y \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & & . \\ 0 & 1 & & . \\ . & . & & 0 \\ . & . & & -1 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $e^j$  vector que se suma a  $h(v^j)$  para obtener  $h(v^{j+1})$  es la columna  $\Pi(j)$  de  $A$



$K(S)$



$J(S)$

Triangulaciones de  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  y  $S \times [0, 1]$ .

$\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  es subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sea  $\delta$  igual a  $\frac{1}{m}$ , para algún entero  $m$ , entonces podemos considerar  $\mathbb{R}^{n+1}$  triangulado con  $K(\delta)$  (ó  $J(\delta)$ ) y la subcolección que está contenida en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  lo triangula.

A su vez la subcolección de  $K(\delta)$  (ó  $J(\delta)$ ) que está contenida en  $\bar{S} \times [0, 1]$  lo triangula. Ahora si queremos triangular  $S \times [0, 1]$  donde  $S$  es el  $n$ -simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tomamos el homeomorfismo afín

$$\bar{h}(x) = e^1 + \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \cdot & 0 & & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad x \in \bar{J} \times [0, 1]$$

con  $e^1 \in \mathbb{R}^{n+2}$  y la matriz de orden  $(n+2) \times (n+1)$ . Queda inducida una triangulación de  $S \times [0, 1]$ .

Otro tipo de triangulación interesante de  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ , que permite a los algoritmos atravesar menos simplejos para llegar a la meta, se resume a continuación.

Para construir esta triangulación,  $\bar{K}(\delta)$  (ó  $\bar{J}(\delta)$ ), consideremos la triangulación  $K(1)$  (ó  $J(1)$ ) de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , con ella, la triangulación inducida en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  y apliquemosle la transformación lineal representada por  $\begin{pmatrix} \delta I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Cada simplejo de esta triangulación se puede describir como antes.

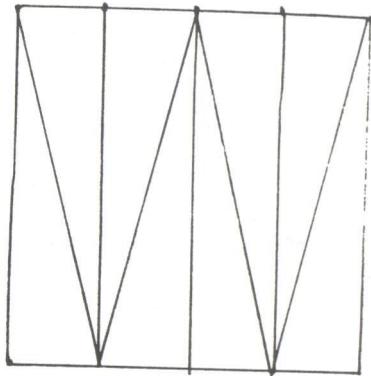
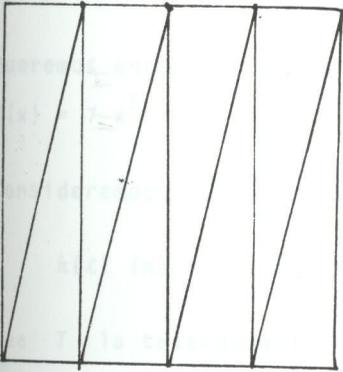
Para  $\bar{K}(\delta)$  los simplejos  $[v^0, \Pi]$ , con  $v^0$  de coordenadas m\u00faltiplos enteros de  $\delta$  y  $v^j = v^{j-1} + \delta e^{\Pi(j)}$  si  $\Pi(j) \neq n+1$

$$\text{y } v^j = v^{j-1} + e^{n+1} \quad \text{si } \Pi(j) = n+1$$

Para  $\bar{J}(\delta)$ ,  $[v^0, \Pi, S]$  con

$$v^j = v^{j-1} + S_{\Pi(j)} \delta e^{\Pi(j)} \quad \text{si } \Pi(j) \neq n+1$$

$$v^j = v^{j-1} + S_{n+1} e^{n+1} \quad \text{si } \Pi(j) = n+1$$



Triangulaciones de  $[0,1] \times [0,1]$  inducidas por  $K(\delta)$  y  $J(\delta)$

Como antes, construimos una triangulación  $\bar{K}$  (ó  $\bar{J}$ ) para  $\bar{S} \times [0, 1]$  y después, mediante  $\bar{h}$ , una para  $S \times [0, 1]$ .

Observación. Las reglas de pivoteo son las mismas que para  $K(\delta)$  (ó  $J(\delta)$ ); pero puede haber problema; si la  $n$ -cara  $v^{j-1} v^{j+1}$  está en la frontera de  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ ,  $\bar{v}^j$  no caería en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ . Por ejemplo puede suceder, cuando se está aplicando el algoritmo, que la faceta opuesta a  $v^j$  esté en  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ , esto quiere decir que  $\tau$  es el simplejo buscado, en cambio cuando  $\tau$  está colocada en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  querría decir que la etiquetación de los vértices de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ , que suelen ser auxiliares, no está bien escogida y existe más de una faceta c.e. en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

Ejemplo del uso de las reglas de pivoteo en  $\bar{K}$  de  $S \times [0, 1]$ .

Queremos encontrar un cero de  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida cómo  $f(x) = 7x^5 + x^4 + 3x^3 + x + 1$ .

Consideremos la homotopia  $h$  como

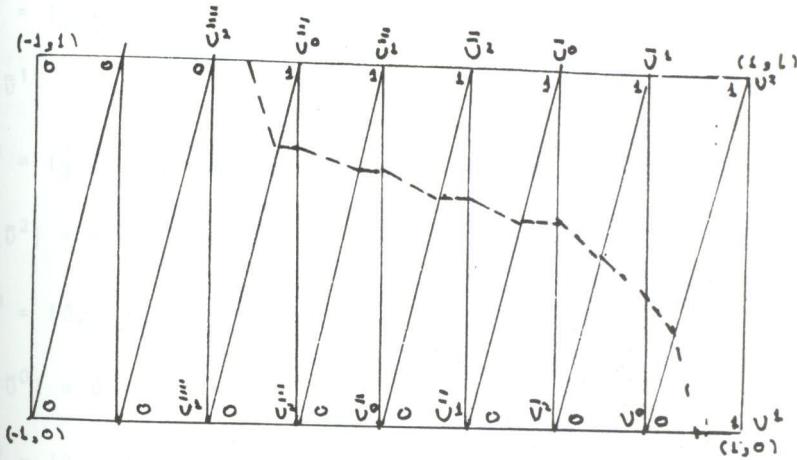
$$h(t)(x) = t f(x) + (1-t)(x - .8)$$

Sea  $T$  la triangulación  $\bar{K}(\delta)$  de  $\mathbb{R}^1 \times [0, 1]$  con  $\delta = \frac{1}{4}$ .

Etiquetemos  $T^0$  con  $\lambda$  de acuerdo a  $h$ , de tal manera que para  $(x, t) \in T^0$  si  $h(t)(x) < 0$ ,  $\lambda(x, t) = 0$  y si  $h(t)(x) \geq 0$ ,  $\lambda(x, t) = 1$ .

$\tau_0 = (\frac{3}{4}, 0) (1, 0)$  es una faceta completamente etiquetada.

$\sigma_0 = (\frac{3}{4}, 0) (1, 0) (1, 1)$  es el único elemento de  $T$  que tiene a  $\tau_0$  como faceta.  $v^0 = (\frac{3}{4}, 0)$ ,  $v^1 = (1, 0)$ ,  $v^2 = (1, 1)$



$\tau_0 = [v^0, id]$  con  $v^0 = (\frac{3}{4}, 0)$ .  $\lambda(v^0) = \lambda(\frac{3}{4}, 0) = 0$ ,  $\lambda(v^1) = \lambda(1, 0) = 1$

$\lambda(1, 1) = 1$  y  $\lambda(v^2) = \lambda(v^1)$  por lo que hay que pivotar a  $v^1$  como vértice de  $\sigma_0$ ,

$$\bar{v}^1 = (\frac{3}{4}, 1),$$

$$\sigma_1 = [v^0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}].$$

Continuado con el proceso,

$$\lambda(\bar{v}^1) = 1 = \lambda(v^2),$$

$$\bar{v}^2 = (\frac{1}{2}, 0), \sigma_2 = [\bar{v}^2, id],$$

$$\lambda(\bar{v}^2) = 0 = \lambda(v^0),$$

$$\bar{v}^0 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \sigma_3 = \left[\bar{v}^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\lambda(\bar{v}^0) = 1 = \lambda(\bar{v}^1),$$

$$\bar{v}^1 = \left(\frac{1}{4}, 10\right), \quad \sigma_4 = [\bar{v}^1, id],$$

$$\lambda(\bar{v}^1) = 0 = \lambda(\bar{v}^2),$$

$$\bar{v}^2 = \left(\frac{1}{4}, 1\right), \quad \sigma_5 = \left[\bar{v}^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\lambda(\bar{v}^2) = 1 = \lambda(\bar{v}^0),$$

$$\bar{v}^0 = (0, 0), \quad \sigma_6 = [\bar{v}^0, id],$$

$$\lambda(\bar{v}^0) = 0 = \lambda(\bar{v}^1),$$

$$\bar{v}^1 = (0, 1), \quad \sigma_7 = \left[\bar{v}^0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\lambda(\bar{v}^1) = 1 = \lambda(\bar{v}^2),$$

$$\bar{v}^2 = \left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad \sigma_8 = [\bar{v}^2, id],$$

$$\lambda(\bar{v}^2) = 0 = \lambda(\bar{v}^0),$$

$$\bar{v}^0 = \left(-\frac{1}{4}, 1\right), \quad \sigma_9 = \left[\bar{v}^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\lambda(\bar{v}^0) = 1 = \lambda(\bar{v}^1),$$

$$\bar{v}^1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \quad \sigma_{10} = [\bar{v}^1, id],$$

$$\lambda(\bar{v}^1) = 0 = \lambda(\bar{v}^2),$$

$$\bar{v}^2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \sigma_{11} = \left[\bar{v}^1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

$\lambda(\bar{v}^2) = 0$ , entonces  $\tau = (-\frac{1}{2}, 1) (-\frac{1}{4}, 1)$  es  $\lambda$ -c.e. y hay un cero de  $f$  en  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .

### Triangulación de $S \times [0, 1)$

Cuando realizamos el algoritmo, en  $S \times [0, 1)$  ó en  $R^n \times [0, 1)$ , para encontrar un punto fijo ó un cero de una función, puede suceder que al encontrar el  $n$ -simplejo  $\bar{\tau} \times \{1\}$  - c.e., en  $S \times \{1\}$  (ó en  $R^n \times \{1\}$ ), no se considere que cualquier punto de ese simplejo sea una aproximación satisfactoria al punto buscado. Así en el ejemplo anterior, el tamaño del intervalo  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$  es demasiado grande para que nos conformemos con saber que en dicho intervalo hay un cero del polinomio  $7x^5 + x^4 + 3x^3 + x + 1$ . Entonces es conveniente reiniciar el algoritmo, con una triangulación con menor diámetro y tener como único  $n$ -simplejo  $\lambda$ -c.e. el que contenga a alguno de los puntos de  $\bar{\tau} \times \{0\}$ , por ejemplo el baricentro, al correspondiente en  $\tau$  se le consideraría una aproximación al cero de  $f$ .

Una idea, que en muchas ocasiones puede resultar más adecuada, es trabajar en  $S \times [0, 1]$  (ó en  $R^n \times [0, 1]$ ) y que la triangulación usada tenga facetas en  $S \times \{t\}$  (ó en  $R^n \times \{t\}$ ) cuyo diámetro tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

De esta manera el algoritmo, después de alcanzar un  $\tau, \lambda$ -c.e., en  $S \times \{t\}$  (ó en  $R^n \times \{t\}$ ), re empieza para encontrar una mejor aproximación en  $S \times \{t + 1\}$  (ó en  $R^n \times \{t + 1\}$ ).

En este caso el algoritmo sería infinito, pero en la práctica se termina cuando se tenga un simplejo de diámetro prefijado.

C. Eaves [1972] construyó la primera triangulación de  $S \times [0, 1]$ .

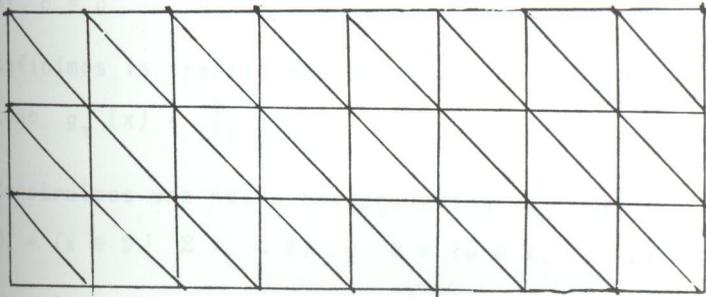
Resumamos las ideas para construir dicha triangulación.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & 0 \\ 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

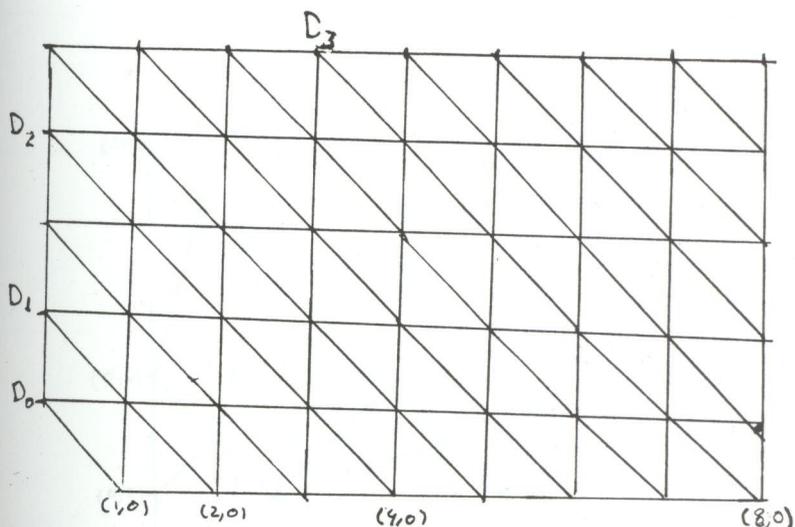
matriz  $(n + 1) \times (n + 1)$

Consideremos la triangulación  $T_A$  de  $R^{n+1}$  que consiste en los simplejos  $[v^0, \Pi_A]$ , es decir con vértice inicial  $v^0$  de coordenadas enteras y  $v^j = v^{j-1} + A^{\Pi(j)}$  para  $j = 1, \dots, n + 1$

(Es decir  $K[1]$  transformada con la matriz  $A$ )



Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \geq \bar{0} \text{ y } \sum x_i \geq 1\}$ , a la triangulación  $T_A \mid D$  denotémosla como  $K_1$ .



Para  $k = 0, \dots, n, \dots$ , llamamos  $D_k$ , al conjunto  $\{x \in D \mid \sum x_i = 2^k\}$  y  $T_k$  a la triangulación inducida por  $k_i$  en  $D_k$ .

Si  $\sigma = v^0 \dots v^{n-1}$  está en  $K_1$  y  $\tau = u^0 \dots u^n$  está en  $T_k$ ,

definimos la transformación lineal  $g_\tau$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$

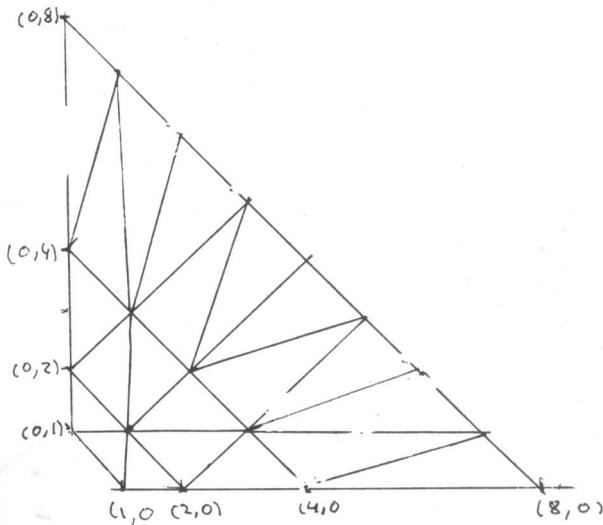
$$\text{como } g_\tau(x) = \sum_{i=0}^n x_i u^i$$

Construimos una nueva triangulación  $K_2$  de  $D$ . Consideremos

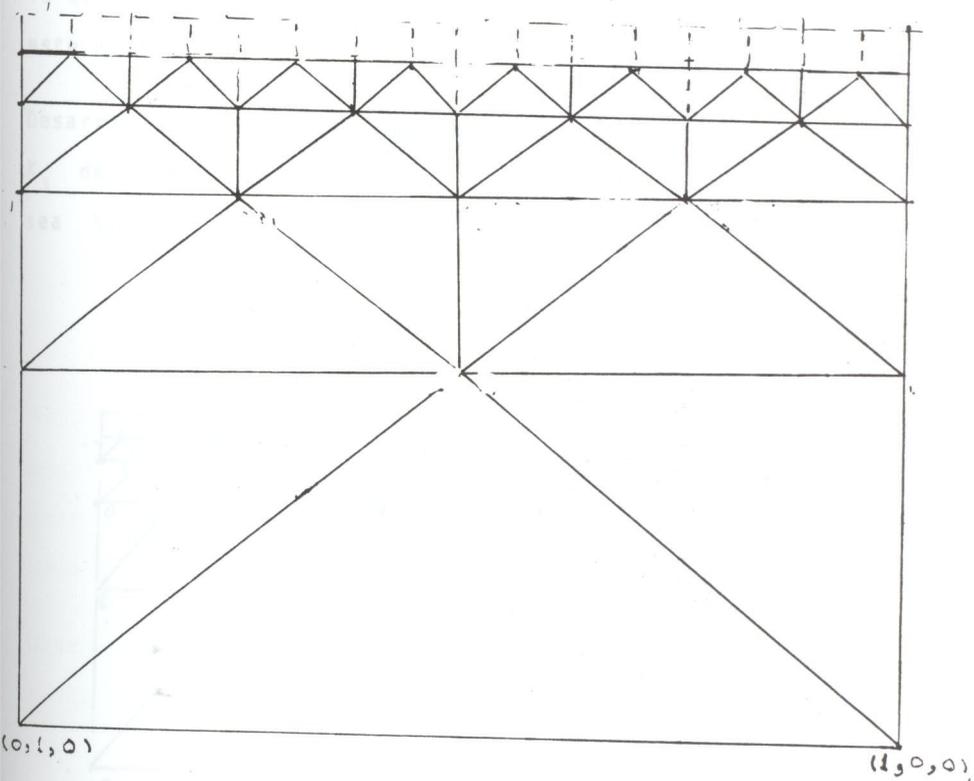
$D^1 = \{x \in D \mid \sum x_i \leq 2\}$  y  $M = \{\sigma \in K_1 \mid \sigma \subset D^1\}$ , entonces

$K_2 = \{\alpha \mid \alpha = g_\tau(\sigma) \text{ con } \tau \in T_k \text{ y } \sigma \in M\}$ .

Cada  $(n + 1)$  - simplejo de  $K_3$  está determinado, en forma única, por un  $n$  - simplejo  $\tau$  de  $T_k$  y un  $(n + 1)$  - simplejo en  $M$ .



Si consideramos ahora el homeomorfismo  $h: D \rightarrow S \times [0, 1]$  definido como  $h(x) = \left( \frac{x}{|x|_1}, 1 - \frac{1}{|x|_1} \right)$ , la triangulación  $K_2$  de  $D$  induce una triangulación  $K_3$  en  $S \times [0, 1]$ , que tiene la propiedad de que las facetas que caen en  $S \times \{t\}$  triangulan a  $S$  y son un refinamiento de  $S \times \{t-1\}$ , pues tienen un diámetro de la mitad del de éste.



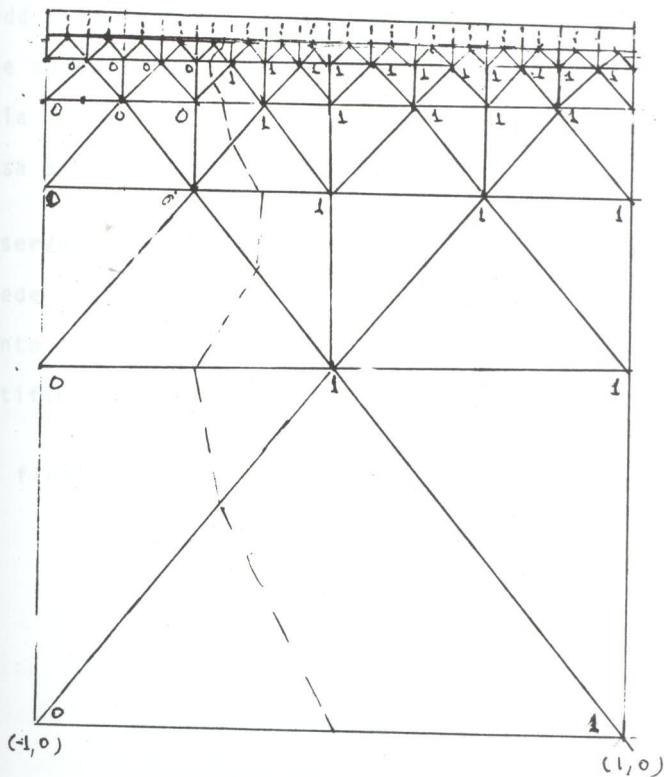
$K_3$  de  $S \times [0,1]$  con  $S = (0,1) \cup (1,0)$

El estudio en detalle de la triangulación  $K_3$ , en particular las reglas de pivoteo se pueden ver en Eaves [1972].

**Observación:** La figura anterior muestra que en el caso  $n = 1$ , las facetas del nivel  $S \times \{t\}$ , con  $t \neq 0$ , se obtienen partiendo a la mitad cada faceta del nivel  $S \times \{t-1\}$  y entonces el al

goritmo, para encontrar un punto fijo o un cero de una función, trabajado en esa triangulación es el método de bisección, por lo que no es casual que para motivar el algoritmo se haya usado este método.

Desarrollemos el ejemplo anterior ahora con la triangulación  $K_3$  de  $[-1, 1] \times [0, 1)$ ,  $f(x) = 7x^5 + x^4 + 3x^3 + x + 1$  y sea  $h(t)(x) = (1-t)(x - .8) + t f(x)$



Así vamos refinando el intervalo en que se encuentra un cero de  $f$ , obtenemos que un cero se encuentra en  $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{16})$ , mejor aproximación que  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .

|                     |                             |                                   |
|---------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| Para $t = 0$        | punto de partida que es     | $(-1, 1)$                         |
| $t = \frac{1}{2}$   | obtenemos el intervalo c.e. | $(-1, 0)$                         |
| $t = \frac{3}{4}$   | "                           | " $(-\frac{1}{2}, 0)$             |
| $t = \frac{7}{8}$   | "                           | " $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$   |
| $t = \frac{15}{16}$ | "                           | " $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$  |
| $t = \frac{31}{32}$ | "                           | " $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16})$ |

Todd usando  $J(\delta)$ , construye otra triangulación de  $S \times [0, 1)$ , que coincide con  $K_3$  cuando  $n = z$ , para llegar a ella, triangula  $R^n \times [0, 1)$  y después a través de un homeomorfismo afín pasa a  $S \times [0, 1)$ . (Todd [1977]).

**Observación.** El algoritmo, en  $S \times [0, 1)$  ó en  $R^n \times [0, 1)$ , puede tener el problema de regresar a un nivel ya rebasado distinto al inicial, pues si  $t \neq 0$  no se usa una etiquetación artificial como en  $t = 0$ .

Al final del capítulo 4 desarrollamos un algoritmo de este tipo.

### CAPITULO 3

#### LA ETIQUETACION VECTORIAL

En este capítulo introducimos la etiquetación vectorial, que en lugar de guardar la información de cual es la primera coordenada positiva del vector  $v - f(v)$ ,  $f$  función continua, guarda todo el vector. Con esto los algoritmos se vuelven más eficientes y con posibilidades de aplicación más amplias, pero con una restricción aparente que, como veremos más adelante, es análoga a la de regularidad que se usa en topología diferencial. De nuevo la clave para asegurar la existencia de simplejos completamente etiquetados será una versión del lema de Sperner. (En este capítulo las triangulaciones son finitas)

#### 3.1. Motivación de la etiquetación vectorial.

En el capítulo 1 presentamos la etiquetación entera como una forma de guardar el signo del valor de la función  $x - f(x)$ ,  $f$  definida del intervalo  $[0,1]$  en sí mismo, en los vértices de una partición de  $[0,1]$  (triangulación) y así llevar a cabo el método de bisección para encontrar puntos fijos de  $f$  (ó ceros de

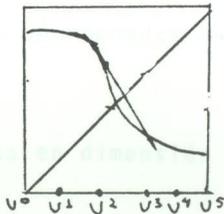
la función  $h(x) = x - f(x)$ .

Los simplejos completamente etiquetados en cada triangulación generada por el método de bisección representan subintervalos en donde hay un cambio de signo de la función  $h$  y por lo tanto encierran un cero de  $h$  ó sea un punto fijo de  $f$ .

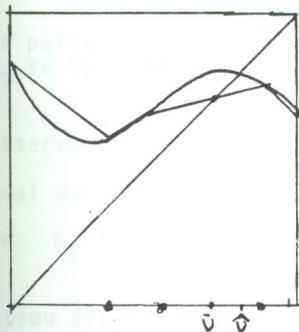
Pensemos en  $f$  y  $h$  como antes, si quisiéramos presentar en forma análoga la etiquetación vectorial tendríamos que recurrir a un método como el de la regla falsa; pues ella trabaja con el valor de  $h$  en los vértices de la triangulación. Redefiniremos el concepto de simplejo completamente etiquetado para que represente aun subintervalo  $I_\alpha$  tal que, el interior del segmento de recta que une los puntos de la gráfica de  $h$  correspondientes los vértices de  $I_\alpha$ , corte a la recta  $Y = X$ .

Los puntos de  $[0,1]$  correspondientes a dichos puntos de intersección son "aproximaciones" a los puntos fijos, si el diámetro de la triangulación es suficientemente pequeño. Ilustremos lo anterior:

Sean  $f$ , una función continua del intervalo  $[v^0, v^5]$  en si mismo y  $T$ , una triangulación con vértices  $v^0, v^1, v^2, v^3, v^4$  y  $v^5$



El subintervalo  $[v^2, v^3]$  está completamente etiquetado pues el interior del segmento determinado por los puntos  $(v^2, f(v^2))$  y  $(v^3, f(v^3))$  corta a la diagonal del cuadrado en  $(\bar{v}, f(\bar{v}))$ ,  $\bar{v}$  es una aproximación al punto fijo  $\hat{v}$ ,  $\hat{v} \in [v^2, v^3]$



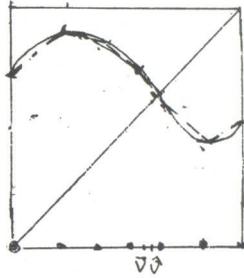
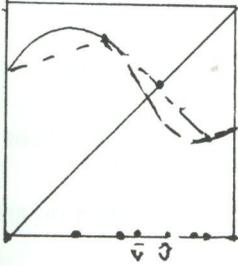
Para plantear el problema en dimensiones más altas recordemos la siguiente definición:

**Definición 3.1.1.** Dada una región de dimensión  $n$  triangulada por  $T$  y una función continua  $f$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$ , llamamos la aproximación lineal de  $f$  relativa a  $T$  a la función  $f_T$  definida como

$$f_T(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(v^{j_i})$$

donde  $\{v^{j_i}\}$  son los vértices del  $n$ -simplejo donde está  $v$  y respecto  $\{\alpha_i\}$  son las coordenadas baricéntricas de  $v$  a dicho  $n$ -simplejo.

Si ilustramos las cosas en dimensión 1 podemos ver como aproxima  $f_T$  a  $f$



La poligonal es  $h_T$  y a medida que la partición es más fina  $h_T$  se "parece" más a  $f$ .

Observemos además que si llamamos  $h_T$  a la aproximación lineal de  $h(x) = x - f(x)$  respecto a  $T$ , entonces  $\bar{v}$  es un cero de  $h_T$  (ó un punto fijo de  $f_T$ ).

¿Cómo proceder en 2 dimensiones?

Sea el 2-simplejo  $\sigma = v^0 v^1 v^2$  y una función continua  $f$  de  $\sigma$  en sí mismo. Triangulamos  $\sigma$ , si existe un simplejo en  $T$  que contenga en su interior un punto fijo de  $f_T$  (cero de  $h_T$ ) decimos que está completamente etiquetado.

Si lográramos como en el capítulo 1 construir una sucesión de 2-simplejos  $\{\sigma_i\}$  completamente etiquetados cuyos vértices convergieran a un punto  $\hat{x}$  este sería un punto fijo de  $f$  (cero de  $h$ ).

Pues tenemos una sucesión de puntos  $\{\bar{v}_k\}$  que también converge a  $\hat{v}$ . Cada  $\bar{v}_k$  es punto fijo de  $f_{T_k}$  (cero de  $h_{T_k}$ )

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{T_k}(\bar{v}_k) = h(\hat{v})$$

Cómo  $h_{T_k}(v_k) = 0$ ,  $h(v) = 0$

Ejemplo

Consideremos

$$\delta(x) = \frac{(I + A)X}{\|(I+A)X\|_1}, \quad A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

definida en el 2-simplejo unitario de  $R^3$ . Construimos una sucesión de triangulaciones. 2.

En 7 iteraciones llegamos al 2-simplejo

$$\begin{array}{ccc} w^0 = \begin{matrix} .1484 \\ .3281 \\ .5234 \end{matrix} & w^1 = \begin{matrix} .1489 \\ .3359 \\ .5156 \end{matrix} & w^2 = \begin{matrix} .1489 \\ .329 \\ .516 \end{matrix} \end{array}$$

que es c.e. y el cero de  $h_{T_7}$  es  $\begin{matrix} .1484 \\ .333 \\ .5182 \end{matrix}$

El obtenido en Matlab es  $\begin{matrix} .1472 \\ .3333 \\ .5195 \end{matrix}$

tenemos 2 cifras iguales en cada coordenada.

Pero ¿qué nos asegura que para cualquier función continua, definida de un simplejo triangulado en sí mismo, encontraremos simplejos completamente etiquetados, en cada triangulación que hagamos?

Por ejemplo consideremos  $f$  como la proyección de un triángulo  $v^0v^1v^2$  sobre el lado  $v^1v^2$  los únicos puntos fijos de  $f_T$  son los puntos con coordenada baricéntrica  $\alpha_0$  igual a cero, entonces no están en el interior de algún simplejo de  $T$ , para cualquier  $T$ .

Para establecer un lema de Sperner que nos asegure la existencia de simplejos c.e. necesitamos que la etiquetación vectorial cumpla algunas restricciones que posteriormente discutiremos.

Empecemos por formalizar algunos conceptos que hemos tratado en éste inciso.

### 3.2. Un lema de Sperner para etiquetación vectorial.

**Definición 3.2.1.** Dada una triangulación  $T$  decimos que  $\lambda : T^0 \rightarrow R^k$  es una  $k$ -etiquetación vectorial de  $T$ .

#### Definición 3.2.2.

Si  $\lambda$  es una  $k$ -etiquetación vectorial de  $T$ . La extensión lineal de  $\lambda$  relativa a  $T$  es la función  $\lambda_T$  definida de  $|T|$  en  $R^k$  como

$$\lambda_T(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda(v^{j_i})$$

donde  $v^{j_i}$  son los vértices de un simplejo  $\sigma$  de  $T$  que contenga a  $v$  y  $\alpha_i$  son las coordenadas baricéntricas de  $v$  respecto a  $\sigma$ . Si  $T = \{S\}$  denotamos como  $\lambda_S$  a la extensión lineal de  $\lambda$  respecto a  $T$ .

**Definición 3.2.3.** Si  $S$  es un  $n$ -simplejo triangulado por  $T$  decimos que una  $k$ -etiquetación vectorial  $\lambda$  es propia respecto a  $T$  si en  $S$  existen ceros de  $\lambda_S$  y si  $z$  está en  $|T^\ell|$  con  $\ell < k$ , entonces  $\lambda_T(z) \neq 0$ .

**Definición 3.2.4.** Si  $T$  es una  $n$ -triangulación con una  $k$ -etiquetación vectorial  $\lambda$ , con  $k \leq n$ , decimos que  $\sigma \in T^k$  está  $\lambda$ -completamente etiquetado ( $\lambda$ -c.e.) si existe  $\hat{v}$  en  $\sigma$ ,  $\sigma \in T$  y  $\lambda_T(\hat{v}) = 0$ .

Veamos que el concepto de que un  $k$ -simplejo esté completamente etiquetado con respecto a una etiquetación vectorial es una generalización del concepto que teníamos con etiquetación entera.

Consideremos  $M$ , de dimensión  $n$ , y una triangulación  $T$  y  $\lambda_e : T^0 \rightarrow \{0, \dots, k\}$  una etiquetación entera de  $T$ .

Sea  $\lambda_v : T^0 \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida como sigue:

Para  $v^j \in T^0$

$$\lambda_v(v^j) = w^\ell \quad \text{con} \quad \ell = \lambda_e(v^j) \quad \text{y}$$

$$\omega_i^j = \begin{cases} k & \text{si } i = \ell + 1 \\ -1 & \text{si } i \neq \ell + 1 \end{cases}$$

Entonces  $\tau \in \mathcal{T}^k$  es  $\lambda_e$ -c.e. si y sólo si es  $\lambda_v$ -c.e.

" $\Rightarrow$ " Si  $\tau$  es  $\lambda_e$ -c.e., para toda  $m \in J_k$  existe

$v^{ji} \in \tau^0$  tal que  $\lambda_e(v^{ji}) = m$ .

Sea  $\bar{v} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} v^{ji}$ ;  $\lambda_{v\mathcal{T}}(\bar{v}) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} \lambda_v(v^{ji}) =$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} \omega_i^j = \frac{1}{k+1} \begin{pmatrix} k - \sum_{i=1}^k 1 \\ k-1 \\ k - \sum_{i+1}^k 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} & - & \frac{k}{k+1} \\ \frac{k}{k+1} & \dots & \frac{k}{k+1} \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Y  $\tau$  es  $\lambda_v$ -c.e. pues  $v \in \tau^0$ .

" $\Leftarrow$ " Supongamos que  $\tau \in \mathcal{T}^k$  es  $\lambda_v$ -c.e. y no es  $\lambda_e$ -c.e., entonces existe  $\hat{j}$  tal que  $\lambda_e(v^{ji}) \neq \hat{j}$  para  $i = 0, \dots, k$  y

$0 < \hat{j} \leq k$ .

Por lo que

la  $\hat{j}$ -ésima coordenada de  $\lambda_v(v^{j_i})$  es -1 para  $i = 0, \dots, k$

Es decir  $\bar{0}$  no es combinación estrictamente convexa de los vectores  $\lambda v^{j_i}$  y  $\tau$  no es  $\lambda_v$ -c.e.

Establezcamos ahora un lema de "Sperner" para etiquetación vectorial con restricciones, cuya demostración constructiva daremos en 3.4.

### Teorema 3.2.5 (Lema de Sperner e.v.)

Sean  $S$  un  $n$ -simplejo,  $T$  una  $n$ -triangulación y  $\lambda$  una  $n$ -etiquetación vectorial propia, entonces existe en  $T$  un  $n$ -simplejo que es  $\lambda$ -c.e.

### 3.3. El lema de Sperner para etiquetación vectorial y la validez de los teoremas de punto fijo en un caso restringido

Ahora podemos probar el Teorema de punto fijo de Brouwer para un simplejo de  $\mathbb{R}^n$  usando  $L$  de Sperner e.v. cuando  $f$  continua da lugar a una etiquetación propia para cada  $T_n$  de  $\{T_n\}$ , con  $\text{diam}(T_n) \rightarrow 0$

Sea  $f: S \rightarrow$  continua,  $\{T_m\}$  una sucesión de triangulaciones cuyo diámetro tiende a cero y para toda  $m$   $\lambda: T_m^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como  $\lambda(v) = v - f(v)$  para  $v \in T_m^0$ .

Estamos suponiendo que  $\lambda$  propia.

Entonces existe una sucesión  $\{\sigma_m\}$  de  $n$ -simplejos  $\lambda$ -c.e.

y  $\text{diam } \sigma_m \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Por lo que en cada  $v_j$  existe  $\bar{v}_j$ ,

cero de  $\lambda_T$

Sea  $v(i, j)$  el  $i$ -ésimo vértice de  $\sigma_j$ , y  $\{\alpha_{ij}\}_{i=0}^n$  las coordenadas baricéntricas de  $\bar{v}_j$  respecto a  $\sigma_j$

Es decir 
$$\bar{O} = \lambda_T \left( \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} v(i, j) \right) = \lambda_T(\bar{v}_j) \quad y$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_{ij} \lambda(v(i, j)) = \sum_{i=0}^n \alpha_{ij} (v(i, j) - f(v(i, j))) = \bar{O}$$

Sea  $\bar{S}$  el simplejo unitario de  $R^{n+1}$

Si  $\alpha_j = (\alpha_{0j}, \dots, \alpha_{nj})$ ,  $\alpha_j \in \bar{S}$  y como  $\bar{S}$  compacto, existe una subsucesión convergente  $\{\alpha_{i \varphi(k)}\}$ . Llamemos  $\bar{\alpha}$  al límite

Además para cada  $i = 0, \dots, n$ , como vimos, en el capítulo 1, existe una subsucesión convergente  $\{v(i, \varphi(k))\}$  y todas esas sucesiones convergen a  $\hat{v}$ .

Para cada  $k$  
$$\sum_{i=0}^n \alpha_{i \varphi(k)} (v(i, \varphi(k)) - f(v(i, \varphi(k)))) = \bar{O}$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n \alpha_{i \varphi(k)} (v(i, \varphi(k)) - f(v(i, \varphi(k)))) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i (\hat{v} - f(\hat{v})) = (\hat{v} - f(\hat{v})) \sum_{i=0}^n \bar{\alpha}_i = \hat{v} - f(\hat{v})$$

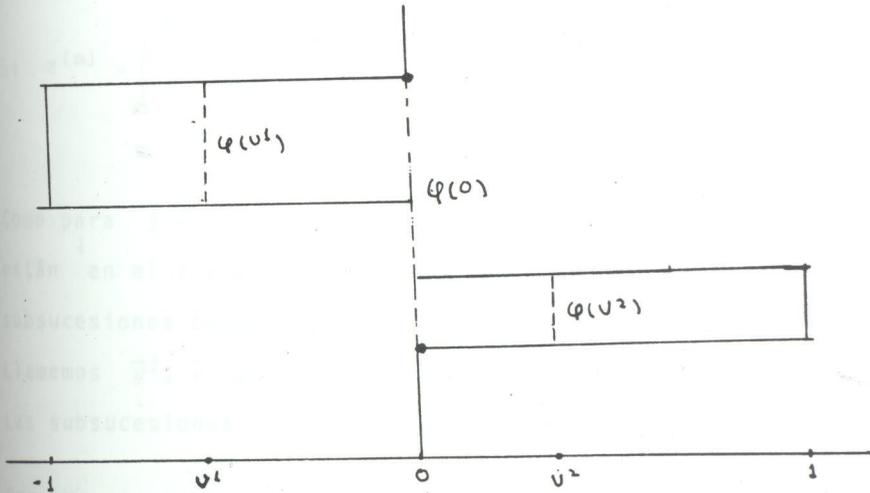
Pero el límite es cero y por lo tanto  $\hat{v}$  es punto fijo de  $f$ .

También se puede hacer ver que el lema de Sperner para el caso vectorial da oportunidad de probar el teorema de Kakutani en un caso restringido, es decir para una correspondencia  $\varphi$  superiormente semicontinua de  $S$  en  $S$  tal que  $\varphi(x) \neq \emptyset$ , convexo, ce-

rado para toda  $x \in S$ , si además le pedimos que de lugar a una etiquetación propia para alguna  $T_n$ , se puede asegurar que existe un punto fijo de Kakutani.

Demostración: sea una sucesión de triangulaciones  $\{T_m\}$  de  $S$  cuyo diámetro tienda a cero cuando  $m$  tiende a infinito supongamos que ningún  $v \in T_m^0$  es punto fijo de  $\varphi$ , es decir  $v \notin \varphi(v)$ .

Construyamos para toda  $m$  la  $n$ -etiquetación  $\lambda$  de  $T_m$  como sigue: para  $v \in T_m^0$ ,  $\lambda(v) = v - y$  con  $y \in \varphi(v)$



Por hipótesis suponemos que  $\lambda$  es propia para  $\{T_m\}$ , por el lema de Sperner para etiquetación vectorial (T 3.2.5) existe una sucesión de  $n$ -simplejos  $\{\sigma_m\}$  uno para cada  $T_m$  que son  $\lambda$ -c.e.

Denotemos a los vértices de  $\sigma_m$  cómo  $v(j, m)$   $j \in \{0, \dots, n\}$

Sea  $y^j(m) \in \varphi(v(j, m))$  tal que  $\lambda(v(j, m)) = v(m, j) - y^j(m)$ .

Para cada  $m$

$$\bar{0} = \sum_{j=1}^n z_j^{(m)} \lambda(v(j, m)) = \sum_{j=1}^n z_j^{(m)} (v(j, m) - y^j(m))$$

$$\text{Si } z^{(m)} = \begin{pmatrix} z_1^{(m)} \\ \vdots \\ z_{n+1}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad z^{(m)} \in \bar{S}$$

Como para  $j = 0, \dots, n+1$  las sucesiones  $\{v(j, m)\}$  y  $\{y^j(m)\}$  están en el compacto  $\bar{S}$  y también lo está  $\{z^{(m)}\}$ , existen subsucesiones convergentes  $\{y^{j(\varphi(k))}\}$   $\{v(j, r(k))\}$  y  $\{z^{\varphi(k)}\}$

Llamemos  $\bar{y}^j$ ,  $\bar{v}$  y  $\bar{z}$  a los límites de dichas subsucesiones.

Las subsucesiones  $\{v(j, r(k))\}$  convergen al mismo punto  $\hat{v}$ .

Por ser  $\varphi$  superiormente semicontinua  $\bar{y}^j \in \varphi(\hat{v})$  para toda  $j$

Tenemos entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n z_j^{r(k)} (v(\varphi(j), r(k)) - y^{j(r(k))}) \right) = \sum_{j=0}^n \bar{z}_j (\hat{v} - \bar{y}^j) = \bar{0}$$

por lo que  $\hat{v} = \sum_{j=0}^n z_j \bar{z}_j = \sum_{j=0}^n z_j y^j = \hat{v}$  y cómo  $\varphi(\hat{v})$  convexo,  $\hat{v}$  está en  $\varphi(\hat{v})$ .

La petición de que  $\lambda$  sea propia es esencialmente la misma que cuando en programación lineal se pide que el problema sea no degenerado y existen métodos sumamente probados de "perturbación del problema para convertirlo en uno con esa propiedad. La sistematización de este tipo de ideas se verá en el capítulo 4 siguiendo una problemática muy desarrollada en topología diferencial.

### 3.4. Demostración del lema de "Sperner" para etiquetación vectorial.

Como veremos, las propiedades que se probaron para etiquetación entera son válidas para etiquetación vectorial e igual que en aquel caso sirven de base para construir los algoritmos simplificales para calcular aproximaciones a puntos fijos de correspondencias superiormente semicontinuas.

#### Teorema 3.4.1 ("dos ó ninguna e.v.")

Sea  $M$  una región de dimensión  $(n+1)$  - triangulada por  $T$  y  $\lambda$  una  $n$ -etiquetación vectorial propia de  $T$ . Si  $\hat{\sigma} \in T$  tiene una faceta  $\tau$  que es  $\lambda$ -c.e., entonces existe una única faceta  $\tau'$  de  $\hat{\sigma}$  también  $\lambda$ -c.e. y distinta de  $\tau$ .

Demostración:

Sea  $\lambda_\tau$  la extensión lineal de  $\lambda$ .  $\lambda_\tau$  es afín en cada  $\gamma \in T$ .

La hipótesis de que  $\lambda$  es propia implica que para toda  $\sigma \in T$  la parte lineal de  $\lambda_T|_\sigma$ , denotémosla como  $A_\sigma$ , es de rango  $n$  por lo tanto el núcleo de  $A_\sigma$  es de dimensión 1, por lo que  $(\lambda_T|_\sigma)^{-1}(\bar{0})$  es un subespacio afín al núcleo de  $A_\sigma$ , es decir es una recta, a la que llamaremos  $\ell_{\lambda_T|_\sigma}$ .

Por hipótesis  $\tau$  es  $\lambda$ -c.e, es decir la recta  $\ell_{\lambda_T|_{\hat{\sigma}}}$  corta a  $\tau$  interiormente, en algún punto  $v$ , el que  $\lambda$  sea propia implica también que  $\ell_{\lambda_T|_{\hat{\sigma}}}$  no puede cortar a ninguna cara de  $\hat{\sigma}$  de menor dimensión que  $n$ , por tanto cortará a una única faceta de  $\hat{\sigma}$  que es distinta de  $\tau$ , ésta es  $\tau'$ .

Es decir existe  $\hat{v} \in \tau'$  tal que

$$\lambda_T(\hat{v}) = \bar{0} \quad \text{y} \quad \tau' \text{ es } \lambda\text{-c.e} \quad \text{y} \quad \tau' \text{ es } \text{única}$$

**Teorema 3.4.2** (Principio de puerta de entrada puerta de salida e.v.)

Si  $(M, T)$  de dimensión  $n + 1$  y  $\lambda: T^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  etiquetación propia de  $T$ , entonces para cada  $\tau_0 \in T^n$ , con  $\tau_0$   $\lambda$ -c.e, existe una cadena única  $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$  tal que  $\tau_i \in T^n$  y para cada  $i$  existe  $\sigma_i \in T$  tal que  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  están en  $\sigma_i^n$ .

Hay 2 posibilidades la cadena asociada a  $\tau_0$  es finita y empieza y termina en  $\partial T$  ó es un ciclo.

Demostración (Algoritmo de Scarf).

El mismo algoritmo de Lemke-Scarf usado en la demostración de 2.1.2. nos sirve para demostrar este teorema, recordémoslo.

Paso inicial Sea  $\sigma_0 \in T^{n+1}$  tal que  $\tau_0$  es una faceta suya sea  $i = 0$

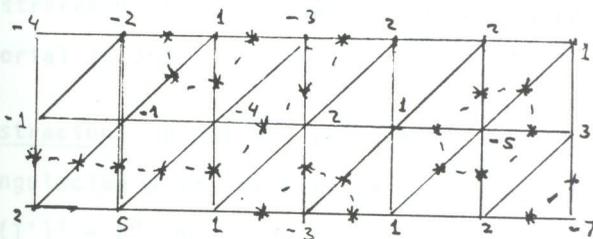
Paso pivoteo Por proposición 3.4.1 ("dos ó ninguna e.v") existe un único  $\tau_{i+1} \neq \tau_i$  tal que  $\tau_{i+1}$  es una faceta de  $\sigma_i$  - c.e.

Criterio de terminación Si  $\tau_{i+1} \in \partial T$  termina la cadena.

Paso inducción Si  $\tau_{i+1} \notin \partial T$ , existe  $\sigma_{i+1} \in T^{n+1}$  único, tal que  $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$  y  $\tau_{i+1} \in \sigma_{i+1}$ .

Hacemos  $i = i + 1$  y regresamos al paso de pivoteo.

Con los mismo argumentos que en el capítulo anterior se demuestra que sólo existen 2 tipos posibles de cadena



Una 1. etiquetación vectorial de una triangulación donde aparecen los 2 tipos de cadena.

Observación 1: Si usamos una triangulación infinita (2.3) las cadenas serán infinitas sin repetición ó ciclos.

Observación 2: aunque tenemos formalmente el mismo algoritmo que en etiquetación entera el segundo paso tiene un significado distinto en cada caso.

Cuando se tiene la faceta  $\tau_i$ ,  $i \neq 0$ , la construcción de  $\sigma_i$  se lleva a cabo, en ambos casos por el mecanismo que se tenga para generar vértices de la triangulación (en nuestro trabajo por el método de reflexión), en cambio para obtener  $\tau_{i+1}$ , los procesos son distintos. En la etiquetación entera sólo tenemos que encontrar al vértice  $\bar{v}$  de  $\tau_i$  que tiene la misma etiqueta que el opuesto a  $\tau_i$  en  $\sigma_i$  y entonces elimina a  $\bar{v}$  de  $\sigma_i$ . En la demostración de "dos o ninguna e.v." no dimos ningún método constructivo para encontrar  $\tau_{i+1}$  en el inciso 4.4 lo haremos.

### **Demostraremos ahora el Lema de Sperner para etiquetación vectorial (t.3.2.5)**

**Demostración:** Denotemos como  $M$  a  $S \times [0,1]$ . Sea  $T'_{(2,v)}$ , triangulación usada para el caso de etiquetación entera y  $\lambda': (T')^0 \rightarrow R^n$  definida como  $\lambda'(v,t) = \lambda(v)$ . Aplicamos el algoritmo de Lemke-Scarf a  $(M,T)$  empezando por  $\tau_0 = S \times \{0\}$ , por hipótesis  $\tau_0$  es  $\lambda$ -c.e. Lo único que hace falta es ver que la cadena correspondiente a  $\tau_0$  tiene que terminar en un

$n$ -simplejo  $\lambda$  - c.e. contenido en  $S \times \{1\}$ , es decir de la forma  $\sigma \times \{1\}$  con  $\sigma \in T$  y entonces  $\sigma$  sería el  $n$ -simplejo buscado.

$$\partial T' = S \times \{0\} \cup S \times \{1\} \cup \bigcup_{i=0}^n \tau_i \times [0,1] \text{ con } \tau_i \in S^{n-1}$$

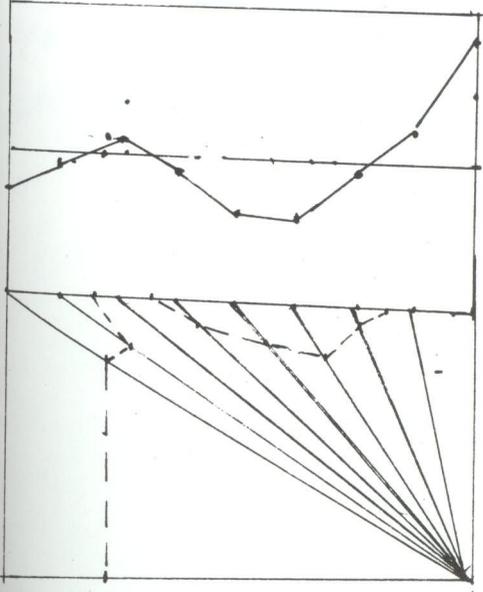
Cualquier  $n$ -simplejo de  $\partial T' \cap \bigcup_{i=0}^n \tau_i \times [0,1]$  tiene vértices en  $S \times \{0\}$  y en  $S \times \{1\}$  entonces si  $\hat{\tau} = v^j \dots v^{jn}$  no puede ocurrir que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda(v^{ji}) = \bar{0}$  para ningunas  $\alpha_i$  con  $\alpha_i > 0$  y  $\sum \alpha_i = 1$ , pues existen vectores repetidos en  $\{\lambda(v^{ji})\}_{i=0}^n$  y tendríamos  $\sum_{i=0}^k \beta_i \lambda(v^{ji}) = \bar{0}$ , con  $k < n$ , por lo que  $\lambda$  no sería propia. Por lo tanto la cadena tiene que terminar en  $\tau \subset S \times \{1\}$ .

Por otro lado si empezamos el algoritmo por un  $\bar{\tau} \subset S \times \{1\}$   $\lambda$ -c.e. y distinto que  $\tau_1$ , terminaremos en otro  $n$ -simplejo  $\lambda$ -c.e. en  $S \times \{1\}$ .

Ejemplo: sea  $f$  definida en  $[0,1]$  cómo  $f(x) = (x - \frac{1}{3})(x - \frac{4}{5})(x - \frac{1}{7})$

$T'$  una triangulación de  $[0,1] \times [0,1]$  con  $(T')^0 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (\frac{1}{8},1), (\frac{1}{4},1), (\frac{3}{8},1), (\frac{1}{2},1), (\frac{5}{8},1), (\frac{3}{4},1), (1,1)\}$

Etiquetamos a cada vértice de  $T'$  con  $\lambda(x,t) = f(x)$



$$\left(x - \frac{1}{7}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right)$$

$$\lambda(0,0) = \lambda(0,1) = -.0380952$$

$$\lambda(1,0) = \lambda(1,1) = .1142856$$

$$\lambda\left(\frac{1}{8}, 1\right) = -.0025111$$

$$\lambda\left(\frac{1}{4}, 1\right) = .0049106$$

$$\lambda\left(\frac{3}{8}, 1\right) = -.0068514$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -.0595237$$

$$\lambda\left(\frac{5}{8}, 1\right) = - . 0 5 2 7 3 4 3$$

$$\lambda\left(\frac{3}{4}, 1\right) = - . 0 1 2 6 4 8 8$$

$$\lambda\left(\frac{7}{8}, 1\right) = . 0 3 3 9 9 2 3$$

Los simplejos c.e. son  $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$  y  $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$

## CAPITULO 4

La etiquetación vectorial y la aproximación lineal a una función continua. El problema de la regularidad.

Todos los resultados que obtuvimos en el capítulo 3 se basaron en pedir que las etiquetaciones vectoriales fueran propias.

¿Qué tan restrictivo resulta pedir a una etiquetación que sea propia? ¿Qué tan restrictivo resulta pedir a una función continua definida de un  $n$ -simplejo en si mismo, que la etiquetación que induce sea propia para alguna  $\{T_m\}$  cuyo  $\text{diam} \rightarrow 0$ ? No cabe duda que la restricción suena muy fuerte, sin embargo, como veremos esto es aparente, y resulta muy semejante al exigir regularidad en topología diferencial y existe un resultado análogo al lema de Sard que hace ver que si no se "cumple la regularidad" basta "perturbar un poco la situación para se cumpla".

En topología diferencial se trabaja con variedades y mapeos suaves definidos en ellas. Existen ciertos valores que toman los mapeos suaves que juegan un papel central en la teoría y

son los llamados valores regulares.

Si  $X, Y$  variedades suaves y  $f$  un mapeo suave de  $X$  en  $Y$  se dice que  $y \in Y$  es un valor regular de  $f$  si la función lineal  $df_x: T_x(x) \rightarrow T_y(y)$  es suprayectiva para toda  $x$  tal que  $f(x) = y$ .

Los valores regulares tienen muchísimas propiedades.

De particular interés, para los resultados que estamos estudiando, es el llamado teorema de la preimagen (Guillemin-Polack [1977]), que dice que la imagen inversa de un valor regular, bajo un mapeo suave, es una subvariedad suave de  $X$  con dimensión igual a la dimensión de  $X$  menos la de  $Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son las variedades dominio y contradominio del mapeo.

Dada la importancia de los valores regulares, resulta de una enorme trascendencia el lema de Sard, el cual hablando gruesamente, asegura que en toda vecindad de un valor no regular existen valores regulares o lo que resulta equivalente, si un valor no es regular para un mapeo suave, si lo es para otro mapeo también suave que resulta de perturbar ligeramente el primero.

Podemos desarrollar el tema que estamos tratando en el contexto de lo que algunos autores llaman topología p.l, en donde el papel de las variedades y los mapeos suaves lo juegan las regiones trianguladas y las funciones lineales por pedazos; podremos definir el concepto de valor regular y de simplejos regular, veremos que el "principio de puerta de entrada puerta de

salida", es decir el algoritmo que construye la cadena de simplejos c.e. que pasa por un odadado, es un caso particular de una "versión P.L." del teorema de la preimagen. Demostraremos un "lema de Sard P.L." que revela que no importa que la etiquetación no sea propia, pues basta "perturbar un poco las cosas" para tener un nuevo lema de Sperner que permitirá demostrar en general los teoremas de punto fijo de Brouwer y de Kakutani.

Además, al desarrollar en este contexto las cosas, podemos trabajar "constructivamente" temas tan interesantes como el grado de un mapeo continuo, lo que se hará en el capítulo 5.

En el primer inciso de éste capítulo desarrollamos algunas definiciones necesarias para abordar en los incisos siguientes los temas arriba mencionados.

#### **4.1 Algunas definiciones y resultados de topología P.L.**

En realidad la definición de variedad P.L. que daremos es un caso particular de las variedades de la topología P.L, corresponde a las llamadas pseudovariedades P.L, para las cuales las celdas, que forman la subdivisión  $T$ , son simplejos. En éste capítulo consideramos triangulaciones infinitas como en el inciso 2.3. (localmente finitas).

##### **Las variedades y los mapeos P.L.**

**Def. 4.1.1** Una región  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $k$  y una triangulación  $T$  de ella se llama una  $k$ -variedad P.L. y se denota como  $(M, T)$

Es decir nuestras antiguas regiones trianguladas o poliedros, con la posibilidad de que la triangulación sea infinita.

**Def. 4.1.2** Dada  $(M, T)$ , una función de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  es un mapeo lineal a pedazos (P.L) si es afín en cada  $\sigma \in T$  y es continua en cada punto de  $M$ .

Si  $f$  es un mapeo P.L, se denota como  $f_\sigma$  al mapeo afín que coincide con  $f$  en  $\sigma$ . Llamemos  $A_\sigma$  a la parte lineal de  $f_\sigma$

**Proposición 4.1.3** Dada  $(M, T)$  y  $\lambda$  una  $k$ -etiquetación vectorial de  $T$ , el único mapeo P.L. que coincide con  $\lambda$  en  $T^0$  es  $\lambda_T$  la extensión lineal de  $\lambda$

**Demostración:**

Si  $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$  son las coordenadas baricéntricas de  $v \in \sigma$ ,

para algún  $\sigma \in T$  y  $\sigma = v^0 \dots v^n$ ,

$$\lambda_T(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda(v^i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda(v^i) - \lambda(v^0)) + \lambda(v^0).$$

$\{v^i - v^0\}_{i=1}^n$  base de  $\mathbb{R}^n$

Sea  $A$  la transformación lineal que manda a  $v^i - v^0$  en  $\lambda(v^i) - \lambda(v^0)$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $A_f$  la transformación afín que manda a  $v \in \sigma$  en  $A(v) + \lambda(v^0) - A(v^0)$ ,

$$\begin{aligned}
 A_f(v) &= A(\sum \alpha_i (v^i - v^0) + v^0) + \lambda(v^0) - A(v^0) = \\
 &= \sum \alpha_i A(v^i - v^0) + A(v^0) + \lambda(v^0) - A(v^0) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda(v^i) - \lambda(v^0)) + \lambda(v^0) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda(v^i) = \lambda_T(v).
 \end{aligned}$$

Y  $\lambda_T$  continuo pues coincide en los puntos de intersección de los simplejos, por lo que  $\lambda_T$  es un mapeo P.L. Sea  $f$  mapeo P.L. definido en  $(M, T)$  que coincide con  $\lambda$  en  $T^0$ . Sea  $v \in M$ ,  $\exists \sigma = v^0 \dots v^n$  con  $v \in \sigma$ .  $f(v) = A_\sigma(v) + \bar{v}$  para alguna transformación lineal  $A_\sigma$  y algún  $\bar{v}$  en  $M$ .

$f(v^i) = A_\sigma(v^i) + \bar{v} = \lambda(v^i)$ . Si  $v = \sum \alpha_i v^i$ , entonces

$$\begin{aligned}
 f(\sum_{i=0}^n \alpha_i (v^i)) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i A_\sigma(v^i) + \sum_{i=0}^n \alpha_i \bar{v} = \\
 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i (A_\sigma(v^i) + \bar{v}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda(v^i) = \lambda_T(v)
 \end{aligned}$$

Por lo que  $\lambda_T$  es el único mapeo P.L. que coincide con  $\lambda$  en  $T^0$ .

#### Corolario 4.1.4

Sea  $(M, T)$  variedad P.L.  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, la aproximación lineal de  $g$  respecto a  $T$  es un mapeo P.L.

Dada una sucesión  $\{T_m\}$  de triangulaciones la sucesión  $\{g_{T_m}\}$  con  $g$  continua converge uniformemente a  $g$  si  $\text{diam}(T_m) \rightarrow 0$

**Lema 4.1.5** Sean  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L.,  $\sigma \in T$  y

$g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, entonces para toda  $v \in \sigma$   $|g(v) - g_T(v)| \leq \text{diam } g(\sigma)$

### Demostración

Si  $\sigma = v^0 \dots v^n$  y  $v = \sum_{i=0}^n \alpha_i v^i$

$$|g(v) - g_T(v)| = |g(v) - \sum \alpha_i g_T(v^i)| =$$

$$= |\sum \alpha_i (g(v) - g_T(v^i))| \leq \sum \alpha_i |g(v) - g_T(v^i)|$$

$$\sum \alpha_i |g(v) - g(v^i)| \leq \sum \alpha_i \text{diam } g(\sigma) =$$

$$= \text{diam } g(\sigma).$$

**Proposición 4.1.6** Si  $\{T_m\}$  es una Sucesión de triangulaciones de una variedad  $M$ , tal que  $\text{diam}(T_m)$  tiende a cero y  $g$  función continua definida en  $M$ , entonces  $\{g_{T_m}\}$  converge uniformemente a  $g$

**Demostración:**  $g$  continua en  $\sigma$  compacto, por lo que  $g$  uniformemente continua en  $\sigma$

Dado  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tal que si  $|x' - x| < \delta$ , entonces  $|g(x') - g(x)| < \epsilon$ .

Sea  $\bar{m}$  tal que  $m > \bar{m}$  implica

$\text{diam } T_m < \delta$ , entonces si  $m > \bar{m}$

$\text{diam } (g(\sigma)) < \epsilon$  para toda  $\sigma \in T_m$ .

Para toda  $x$  en  $M$   $|g(x) - g_{T_m}(x)| < \epsilon$  por el lema anterior.

Proposición 4.1.9 y  $\epsilon \in \mathbb{R}^n$  es un valor regular de  $f_x$  si y sólo

si  $f_x^{-1}(y) \cap |T^{n-1}| = \emptyset$ .

Y  $\{g_{T_m}\}$  converge uniformemente a  $g$ .

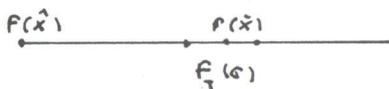
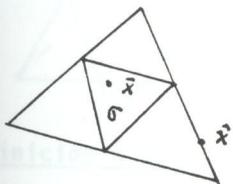
### Regularidad.

**Def. 4.1.7** Sean  $(M, T)$   $m$ -variedad P.L.,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua con  $m > n$ ,  $v \in M$  es un punto regular de  $f$  respecto a  $T$  (ó de  $f_T$ ) si para toda  $\sigma$  en  $T^k$ , que contenga a  $v$ ,  $\dim f_T(\sigma) = n$ , es decir la parte lineal de  $f_\sigma$  es suprayectiva para toda  $\sigma$  que contenga a  $v$ .  $v \in M$  es punto crítico de  $f_T$  si no es regular.

Observaciones: si  $v \in \sigma$  y  $v$  regular, entonces  $\dim \sigma \geq n$ .

Dado  $\tau \in T^k$ ,  $t_g(\tau)$  denota al subespacio vectorial "paralelo" a  $\tau$ .  $A_\tau$ , la parte lineal de  $f_\tau$ , es una transformación lineal de  $t_g(\tau)$  en  $\mathbb{R}^n$ :

$A_x$  es la transformación derivada de  $f_T$  en cada punto  $x$  de  $\tau$ . Es decir la definición de regularidad P.L. coincide con la de topología diferencial.



$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\bar{x}$  p. regular,  $\hat{x}$  p. crítico

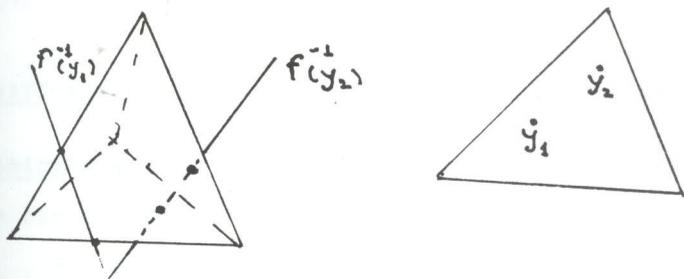
**Definición 4.1.8** Sean  $(M, T)$   $m$ -variedad P.L. y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua ( $m > n$ ). Decimos que  $y \in \mathbb{R}^n$  es un valor regular de  $f_T$  si todo  $x$ , tal que  $f(x) = y$ , es un punto regular de  $f_T$ .  $y \in \mathbb{R}^n$  es un valor crítico de  $f_T$  si no es regular.

**Proposición 4.1.9**  $y \in \mathbb{R}^n$  es un valor regular de  $f_T$  si y sólo si  $f_T^{-1}(y) \cap |T^{n-1}| = \emptyset$ .

Demostración: como observábamos si  $v \in f_T^{-1}(y)$ ,  $v$  punto regular, para  $v \in \sigma$ ,  $\sigma \in T$ ,  $\dim \sigma \geq n$ , entonces  $\sigma \notin T^{n-1}$ , por lo que  $f^{-1}(y) \cap |T^{n-1}| = \emptyset$  si  $y$  valor regular de  $f_T$ .

Supongamos ahora que  $f_T^{-1}(y) \cap |T^{n-1}| \neq \emptyset$  y existen  $x \in M$  y  $\sigma \in T$ , tales que  $x \in \sigma$ ,  $f_T(x) = y$  y  $\dim f_T(\sigma) < n$ , si  $f_T(\sigma) = w^0 \dots w^s$  y  $\{\alpha_i\}_{i=0}^s$  coordenadas baricéntricas de  $y$  respecto a  $f_T(\sigma)$ ,  $y = \sum_{i=0}^s \alpha_i w^i$  y  $s < n$ .

Existen  $\{v^{j_i}\}_{i=0}^s$  vértices de  $\sigma$  tales que  $f_T(v^{j_i}) = w^i$ , entonces si  $\hat{x} = \sum_{i=0}^s \alpha_i v^{j_i}$ ,  $\hat{x} \in \tau = v^{j_0} \dots v^{j_s}$  y  $f_T(\hat{x}) = y$ , es decir  $\hat{x} \in f_T^{-1}(y)$ . Además  $\tau \in T^s$  y  $s \leq n-1$ , entonces  $\tau \in T^{n-1}$  y  $\hat{x} \in |T^{n-1}| \cap f_T^{-1}(y)$ , de aquí que  $|T^{n-1}| \cap f_T^{-1}(y) \neq \emptyset$  contrario a lo que habíamos supuesto.



**Definición 4.1.10** Si  $(M, T)$   $n$ -variedad P.L y  $f: M \rightarrow R^k$  continua, se dice que  $\sigma \in T^k$  es un  $k$ -simplejo regular respecto a  $f_T$  si  $\bar{0} \in f_T(\sigma)$  y  $\bar{0}$  valor regular de  $f_T|_{\sigma}$ .

Si  $n = k + 1$ ,  $\sigma \in T$  es transversal respecto a  $f_T$  si tiene una faceta regular respecto a  $f_T$

**Definición 4.1.11** Si  $(M, T)$   $(n+1)$ -variedad, entonces  $\lambda, n$ -etiquetación de  $T$ , es regular si  $\bar{0}$  es un valor regular de  $\lambda_T \cdot f$ .  
 mapeo P.L es regular si  $\bar{0}$  es un valor regular de  $f$ .  
 Por las definiciones de simplejo  $\lambda$ -c.e y de etiquetación propia, (3.2.5) y (3.2.4) respectivamente, la siguiente proposición es inmediata.

**Proposición 4.1.12** Si  $(M, T)$   $n$ -variedad P.L. y  $\lambda$   $k$ -etiquetación de  $T$ , entonces

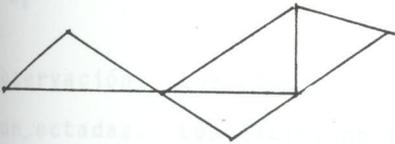
i)  $\sigma \in T$  es  $\lambda$ -c.e si y sólo si  $\sigma$  es regular

ii)  $\lambda$  es propia si y sólo si es regular.

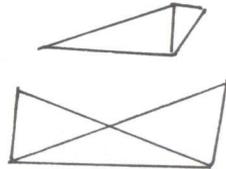
Para traducir a topología P.L. los resultados son importantes los siguientes conceptos.

### Clasificación de las 1 variedades P.L. conectadas

**Definición 4.1.13** i) Una  $k$ -variedad P.L es conectada si para cada par de vértices  $v$  y  $\hat{v}$  de  $T$  existe una colección  $\tau_1, \dots, \tau_s$  de 1-simplejos en  $T^1$  tales que  $v \in \tau_1^0$ ,  $\hat{v} \in \tau_s^0$ , además  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  tienen una 0-cara común para  $i = 1, \dots, s-1$ , es decir son adyacentes.



2. variedad conectada



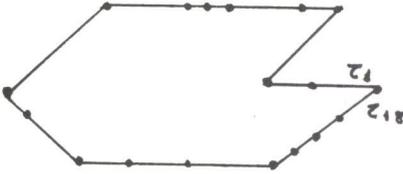
2. variedad no conectada

ii) Una 1-variedad es un ciclo, si existe un orden de todos los simplejos de  $T, \tau_1, \dots, \tau_r$  de tal manera que

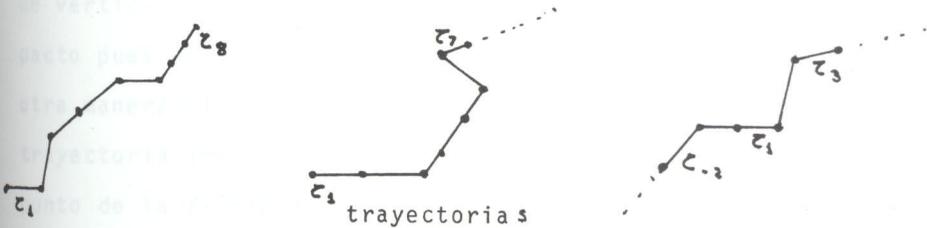
a)  $\tau_i \neq \tau_j$  si  $i \neq j$

b)  $\tau_i$  y  $\tau_{i+1}$  tienen una 0-cara común para  $i=1, \dots, r-1$

c)  $\tau_r$  y  $\tau_1$  tienen una 0-cara común



iii) Una 1-variedad  $(M, T)$  es una trayectoria si existe una biyección  $r$  entre  $J_s$ , para  $s \in \mathcal{N}$  ó los naturales  $\mathbb{N}$  ó los enteros  $\mathbb{Z}$  y  $T^0$ , de tal manera que si  $r(i) = \tau_i$  se cumplen  $ij'_a$  e  $ij'_b$



Observación: Los ciclos y las trayectorias son 1-variedades conectadas. Los ciclos no tienen frontera, las trayectorias pueden ó no tenerla. Si la tienen consta de 1 ó 2 puntos.

**Proposición 4.1.14** Si  $(M, T)$  es 1-variedad conectada, entonces es un ciclo ó una trayectoria.

Tenemos 2 casos:

I. -  $\partial T \neq \emptyset$  y existe  $v \in \partial T$ , entonces consideramos el algoritmo;

1.  $\tau_0 = v$ ,  $\sigma_0$  el único elemento de  $T$  que tiene a  $\tau_0$  como vértice. Hacemos  $i = 0$ .

2. Sea  $\tau_{i+1}$  el único vértice de  $\sigma_i$  distinto que  $\tau_i$

3. Si  $\tau_{i+1} \in \partial T$  terminamos.

4. Si  $\tau_{i+1} \notin \partial T$ , sea  $\sigma_{i+1}$  el único elemento de  $T$  adyacente a  $\sigma_i$  en  $\tau_{i+1}$ . Hacemos  $i = i+1$  y regresamos a 2.

En este primer algoritmo el resultado puede ser el conjunto de vértices de una trayectoria finita, esto sucede si  $M$  compacto pues encontraremos alguna  $i$  tal que  $\tau_{i+1} \in \partial T$ . De otra manera el resultado será el conjunto de vértices de una trayectoria infinita con el vértice inicial  $v$  como único punto de la frontera.

II. -  $\partial T = \emptyset$ . Consideramos el algoritmo;

1. Sea  $v$  cualquier vértice de  $T$ ,  $\tau_0 = v$  y  $\sigma_0$  uno de los dos simplejos adyacentes en  $\tau_0$ . Hacemos  $i = 0$ .

2. Igual que en 1.
3. Si  $\tau_{i+1} = \tau_j$  para algún  $j < i$  terminamos.
4. Si  $\tau_{i+1} \neq \tau_j$  para toda  $j < i$ , entonces sea  $\sigma_{i+1}$  el único simplejo de  $T$  adyacente a  $\sigma_i$  en  $\tau_{i+1}$ . Hacemos  $i = i+1$  y regresamos a 2.

Este algoritmo construye los vértices de un ciclo si existe una  $i$  tal que  $\tau_{i+1} = \tau_j$  para alguna  $j < i$ ; ó de una rama de una trayectoria infinita sin frontera si 3 no se cumple nunca; la otra rama se construye escogiendo en 1 a  $\bar{\sigma}_0$  el simplejo adyacente a  $\sigma_0$  en  $\tau_0$  y desarrollando el algoritmo con  $\bar{\sigma}_0$  como 1-simplejo inicial.

Ningún vértice de  $T^0$  puede quedar fuera de la cadena, pues de lo contrario como la 1-variedad es conectada existirían facetas pertenecientes a más de dos simplejos.



**Proposición 4.1.15** Una 1-variedad es la unión de una colección ajena de ciclos y trayectorias.



Haciendo lo mismo que en 4.1.14 para cada componente conectada de  $M$  construiremos sólo ciclos y trayectorias hasta agotar la 1-variedad.

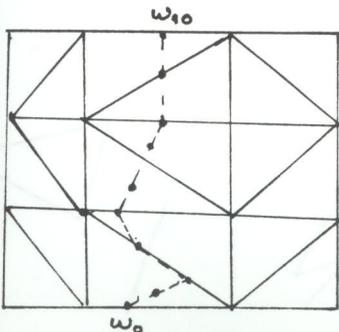
**Proposición 4.1.16** Si  $(M, T)$  (1-variedad compacta, el número de sus puntos frontera es par (incluyendo a 0 como par)

El proceso de 4.1.14 y 4.1.15 nos dicen que los puntos frontera están apareados para  $M$  compacto

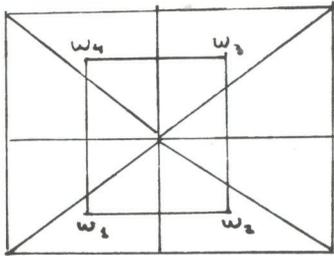
### Subvariedades puras en una variedad

#### Definición 4.1.16

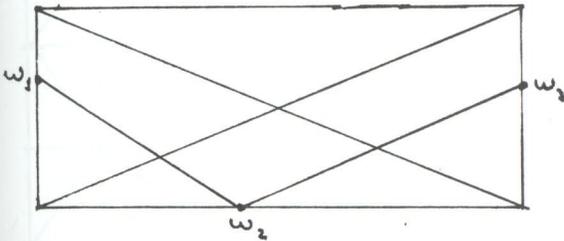
Sea  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L. con frontera y  $(\omega, T_\omega)$  una 1-variedad tal que  $\omega \subset M$ , cerrado en  $M$  y  $\partial\omega = \omega \cap \partial M$ , entonces se dice que  $\omega$  es pura en  $M$ .



$\omega$  pura en  $M$



$\omega$  pura en M

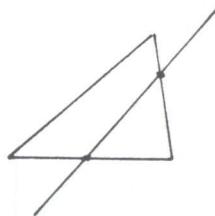
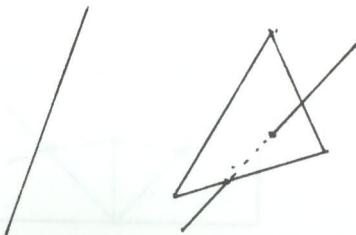


$\omega$  no es pura en M

$\partial\omega \neq \omega \cap \partial M$

**Def 4.1.17** Si  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L., una cuerda de  $\sigma$  en  $T$  es la intersección de una recta y  $\sigma$ .

Por lo que una cuerda puede ser vacía, de dimensión cero (un punto) ó de dimensión 1 (un segmento)

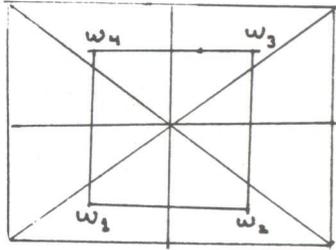
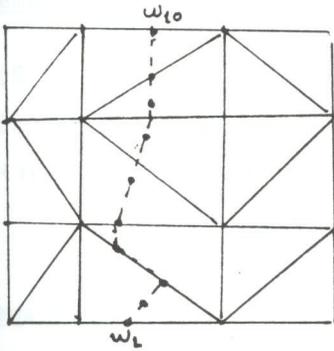


Def 4.1.18 Sean  $(M,T)$  variedad P.L. y  $\omega$  1-variedad pura en  $M$ .

Sea  $\bar{\omega} = \{\alpha \text{ cuerda de } \sigma \text{ en } T \mid \alpha = \sigma \cap \omega\}$

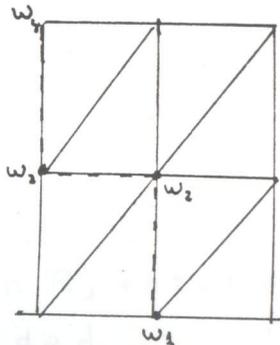
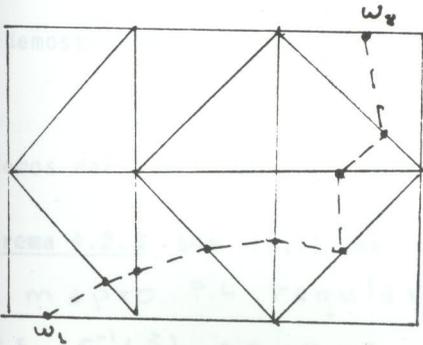
Si  $\bar{\omega}$  triangula a  $\omega$  se dice que  $(\omega, \bar{\omega})$  es pura en  $(M,T)$

En los ejemplos en 4.1.16  $(\omega, \bar{\omega})$  no es pura en  $(M,T)$



Las intersecciones de  $\sigma \in T$  con  $\omega$  no son cuerdas

Ejemplos  $(\omega, T_\omega)$  pura en  $(M,T)$



Las intersecciones de  $\omega$  con simplejos de  $T$  son cuerdos y triangulan a  $\omega$ .

#### 4.2 Traducción de los resultados de 3.4 a terminología P.L

Al lado de la numeración de los teoremas ponemos entre paréntesis los resultados de 3.4

**Teorema 4.2.1** (3.4.1) "Dos o ninguna"

Sea  $(M, T)$  una  $n+1$  variedad P.L y  $\lambda: T^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  una  $n$ -etiquetación vectorial regular. Si  $\sigma \in T^{n+1}$  es transversal, entonces tiene 2 facetas  $\epsilon$ -regulares

**Teorema 4.2.2** (3.4.2) (Principio de puerta de entrada puerta de salida e.v).

Si  $(M, T)$   $n+1$  variedad P.L y  $\lambda$  un  $n$ -etiquetación regular para cada  $\tau_0$  faceta  $\lambda$ -regular existe una única cadena, de facetas  $\lambda$ -regulares, maximal que contiene a  $\tau_0$ .

La demostración del teorema. (ver 3.4.2) es nuestro algoritmo.

Podemos dar a este teorema otra forma

**Teorema 4.2.3** Sea  $(M, T)$  una  $(n+1)$ -variedad P.L. y  $f$  un mapeo P.L. regular de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $f^{-1}(j)$  es una 1-variedad

triangulada por cuerdas de dimensión 1 de la forma  $\sigma \cap f^{-1}(\bar{0})$  con  $\sigma \in \mathcal{T}_r$ .

Para la demostración establecemos el lema.

**Lema 4.2.4** Si  $M, f$  como en 4.2.3,  $\sigma \in \mathcal{T}$  y  $U = \sigma \cap f^{-1}(\bar{0}) \neq \emptyset$ , entonces  $U$  es una cuerda de  $\sigma$ ,  $\partial U \subset \sigma$  y  $\partial U = U \cap \partial \sigma$ .

**Demostración:**

Sea  $x \in U$ , si  $\sigma = v^0 \dots v^{n+1}$  y

$$\hat{x} = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i v^i, \quad f(\hat{x}) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i f(v^i) = \bar{0},$$

la dimensión de  $f(\sigma)$  es  $n$  pues  $f$  regular y el rango de  $A_\sigma$ ,

la parte lineal de  $f_\sigma$ , también es  $n$

$$U = \{x \in \sigma \mid f(x) = A_\sigma(x) + a_\sigma = \bar{0}\} =$$

$$= \{x \in \sigma \mid A_\sigma(x) = -a_\sigma\}.$$

$A_\sigma(\hat{x}) = -a_\sigma$ , entonces para toda  $x \in U$ ,  $A_\sigma(x - \hat{x}) = 0$  y  $(x - \hat{x})$  está en el núcleo de  $A_\sigma$ , es decir  $x \in [\{\hat{x}\} + N(A_\sigma)] \cap \sigma$

Recíprocamente si  $x$  está en  $[\{\hat{x}\} + N(A_\sigma)] \cap \sigma$

$$(x - \hat{x}) \in N(A_\sigma), A_\sigma(x) = -a_\sigma, \quad x \in U \quad y$$

$$U = [\{\hat{x}\} + N(A_\sigma)] \cap \sigma$$

Sean  $U_i$  y  $U_j$  correspondientes a  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  distintos con  $U_i \cap U_j$  no vacío

Entonces  $U_i \cap U_j \subset \tau$ , donde  $\tau$  es una cara común de  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ .  $\therefore \tau \subset \partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j$  y como  $\hat{U}_j \subset \hat{\sigma}_j$ , entonces  $U_i \cap U_j$  es un punto  $\hat{x}$  de  $\partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j$ .  $\hat{x}$  cara común de  $U_i$  y  $U_j$

Si  $\{\hat{x}\} = U_i \cap U_j$  y  $\hat{x} \in U_k$  distinta entonces  $\hat{x}$  pertenece a una cara de  $T$  de dimensión menor que  $n$  absurdo pues  $f$  regular, entonces  $\hat{x}$  sólo pertenece a dos simplejos de  $\omega$  y  $f^{-1}(\bar{0})$  es una 1-variedad pura en  $(M, T)$ .

Solo falta hacer ver que

$$\partial f^{-1}(\bar{0}) = \partial M \cap f^{-1}(\bar{0}).$$

Sea  $x \in f^{-1}(\bar{0})$ .

Si  $x \notin \partial M$  entonces  $x \notin |\partial T|$ .

Pueden ocurrir dos cosas:

1-  $\exists \sigma \in T$  con  $x \in \sigma \Rightarrow \exists U \in \omega$  con  $x \in U \therefore x \notin \partial f^{-1}(\bar{0})$

2-  $x \in |\partial T| \therefore \exists \sigma_1, \sigma_2 \in T, \sigma_1 \neq \sigma_2$  y  $x \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \therefore$

$\exists U_1, U_2 \in \omega$  con  $x \in U_1 \cap U_2$  y  $x \notin \partial f^{-1}(\bar{0})$

$\therefore \partial f^{-1}(\bar{0}) \subset \partial M \cap f^{-1}(\bar{0})$ .

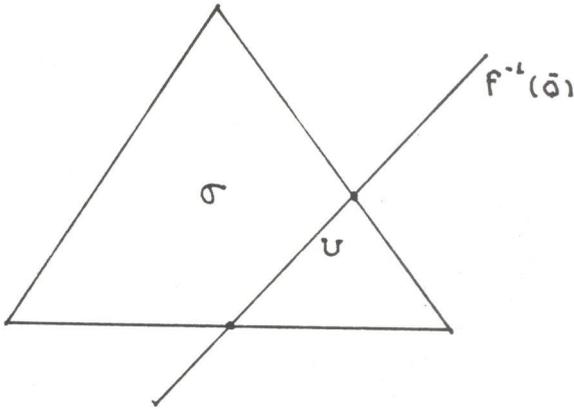
Recíprocamente:

Si  $x \in \partial M \cap f^{-1}(\bar{0})$ , existe  $\sigma \in T$  único tal que  $x \in \sigma$  y existe  $U \in \omega$  único tal que  $x \in U$  y  $x \in \partial f^{-1}(\bar{0})$ .

$\{\hat{x}\} + N(A\sigma)$  es un subespacio afín de  $N(A)$ .

Pero  $N(A\sigma)$  tiene dimensión 1  $\therefore \{\hat{x}\} + N(A\sigma)$  es una recta.

La intersección con  $\sigma$  no puede bajar la dimensión pues  $\bar{0}$  es regular,



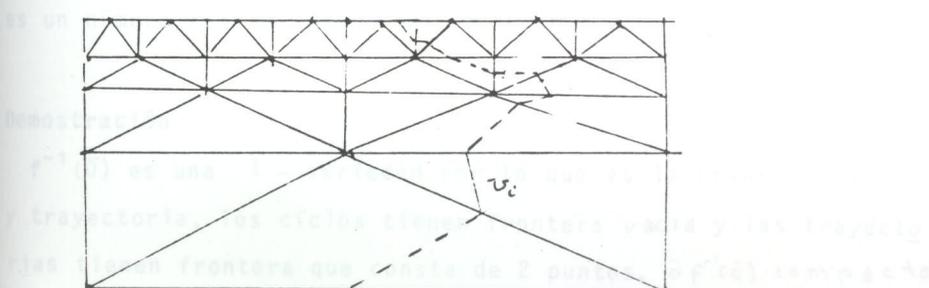
**Demostración de 4.2.3**

Como antes, sea  $\sigma \in T^{n+1}$  tal que  $U = \sigma \cap f^{-1}(\bar{0}) \neq \emptyset$ ,  $U$  es una

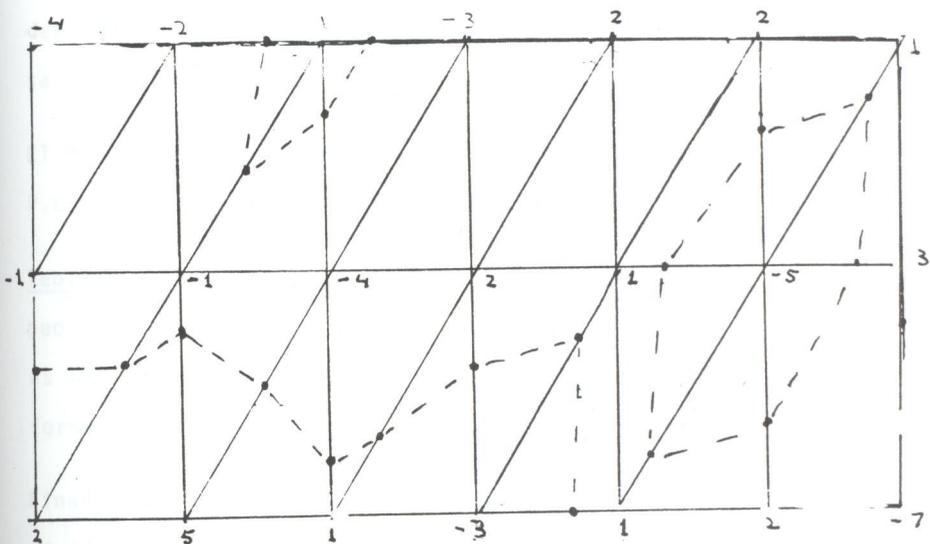
1-cuerda de  $\sigma$ . Sea  $\omega = \{\sigma \mid U = \sigma \cap f^{-1}(\bar{0}) \neq \emptyset \text{ con } \sigma \in T\}$

$$f^{-1}(\bar{0}) = \bigcup_{\sigma \in \omega} \sigma = |\omega|$$

Corolario 4.2.3



Por lo tanto  $\partial f^{-1}(\bar{0}) = \partial M \cap f^{-1}(\bar{0})$  como se queria demostrar,



El mismo ejemplo que en 3.4.2. tomando como  $f = \lambda_T$  ( $\lambda$  1-etiquetación)

$$f^{-1}(\bar{0}) = \bigcup_{i=1}^9 U_i, \partial f^{-1}(\bar{0}) = \{v_1, v_2\}$$

$$= \partial M \cap f^{-1}(\bar{0})$$

**Corolario 4.2.5** (3.4.4) El número de elementos de  $\partial f^{-1}(\bar{0})$  es un número finito por si  $M$  compacto

#### Demostración

$f^{-1}(\bar{0})$  es una 1-variedad por lo que es la unión de ciclos y trayectoria, los ciclos tienen frontera vacía y las trayectorias tienen frontera que consta de 2 puntos.  $\partial f^{-1}(\bar{0})$  compacto

y discreto, por lo que es finito.

**Observación:** Mientras el teorema 3.4.2 se interesa por la cadena de facetas que intersectan a  $f^{-1}(\bar{0})$  el 4.2.3 se interesa por  $f^{-1}(\bar{0})$  mismo

El teorema 4.2.3 puede generalizarse para obtener una versión P.L. del teorema de la Preimagen.

**Teorema 4.2.6** Sean  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L.,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  un mapeo P.L.,  $n > k$  y  $y$  un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(y)$  es una  $(n-k)$ -variedad P.L. triangulada por  $(n-k)$ -simplejos de la forma  $\sigma \cap f^{-1}(y)$  y  $\partial f^{-1}(y) = \partial M \cap f^{-1}(y)$ .

Finalmente escribamos en terminología P.L. el lema de Sperner para etiquetación vectorial.

**Teorema 4.2.7 (3.4.3)** Sea  $(S, T)$  una  $n$ -variedad PL con  $S$  un  $n$ -simplejo, si  $\lambda$  es una etiquetación regular de  $T$  entonces existe un número impar de  $n$  simplejos  $\lambda$  regulares

En el inciso siguiente se trabajará con una versión P.L. del lema de Sard para ver que la petición de que  $\lambda$  sea una etiquetación vectorial es regular no es tan restrictiva como parece.

### 4.3. La versión P.L. del Lema de Sard y los algoritmos para obtener puntos fijos. En su artículo [1981] Peitgen y Seigberg dan,

inspirándose en el papel que juega el lema de Sard en topología diferencial, una versión P.L. de éste, que es una técnica de "regularización" usual en programación lineal.

Sea  $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$

definida como  $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^n)'$ .

Dada  $\epsilon > 0$  llamaremos  $\bar{\epsilon}$  a  $\gamma(\epsilon)$ .

#### Teorema 4.3.1 (Brown-Sard P.L.)

Sean  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L compacta y  $f$  una  $m$ -etiquetación y  $\bar{Y}$  matriz invertible  $n \times n$ , entonces existe  $\epsilon_0$  positiva tal que  $\forall \epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$ ,  $\bar{Y}(\bar{\epsilon})$  es un valor regular de  $f_T$ .

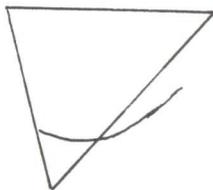
Demostración Si  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  reales positivos y distintos entonces  $\bar{Y}(\bar{\epsilon}_0), \bar{Y}(\bar{\epsilon}_1), \dots, \bar{Y}(\bar{\epsilon}_m)$  son afinmente independientes pues  $|\bar{Y}(\bar{\epsilon}_1) - \bar{Y}(\bar{\epsilon}_0), \dots, \bar{Y}(\bar{\epsilon}_m) - \bar{Y}(\bar{\epsilon}_0)| \neq 0$ , cómo veremos

$$|\gamma(\epsilon_1) - \gamma(\epsilon_0), \dots, \gamma(\epsilon_m) - \gamma(\epsilon_0)| = |\bar{Y}| |\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0, \dots, \bar{\epsilon}_m - \bar{\epsilon}_0|$$

$$y \begin{vmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_0 & \dots & \epsilon_m - \epsilon_0 \\ \epsilon_1^2 - \epsilon_0^2 & & \epsilon_m^2 - \epsilon_0^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_1^m - \epsilon_0^m & & \epsilon_m^m - \epsilon_0^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \epsilon_0 & \dots & \epsilon_m \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_0^m & & \epsilon_m^m \end{vmatrix}$$

Definición 4.3.2 Sea  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L. y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua, matriz  $n \times n$  invertible, decimos que  $t \in T^m$  es  $(\bar{Y}, T)$  regular

$$\begin{vmatrix} \epsilon_0 & \dots & \epsilon_m \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_0^m & & \epsilon_m^m \end{vmatrix} \neq 0$$



pues es un determinante de Van der Monde.

Si  $\tau \in T^{m-1}$  entonces  $f_T(\tau)$  está en un hiperplano de  $R^m$  y a lo más pueden existir  $m$  reales positivos distintos  $\epsilon_1', \dots, \epsilon_m'$  tales que  $\bar{Y}(\bar{\epsilon}) \in f_T(\tau)$ . Y  $f_T(T^{m-1})$  tiene un número finito de vectores de la forma  $\bar{Y}(\bar{\epsilon})$  pues  $T$  finita.

Denotemos  $C_r(f, \bar{Y}) = \{\epsilon > 0 \mid \bar{Y}(\bar{\epsilon}) \in f_T(T^{m-1})\}$ . Si  $C_r(f, \bar{Y}) \neq \emptyset$  Sea  $\epsilon_0 = \min \{\epsilon > 0 \mid \bar{Y}(\bar{\epsilon}) \in f_T(T^{m-1})\}$ . Si  $C_r(f, \bar{Y}) = \emptyset$ ,  $\epsilon_0$  cualquier positivo.

Por lo tanto si  $\epsilon < \epsilon_0$  y  $\epsilon > 0$ ,  $\bar{Y}(\bar{\epsilon})$  es un valor regular de  $f_T$ .

Allgower y Georg [1990] dan una versión para  $R^{n+1}$  del Lema de Sard P.L.

**Teorema 4.3.2** Sean  $f: R^{n+1} \rightarrow R^n$  y  $T$  triangulación, entonces el conjunto de reales positivos tales que  $\bar{\epsilon}$  valor crítico es numerable.

**Demostración**  $T$  es localmente finita, entonces cada elemento de  $K(1)$  intersecciona a  $T^n$  en un número finito de elementos, por 4.3.1, existe un número finito de  $\epsilon > 0$  tales que  $\bar{\epsilon}$  valor crítico.

Pero  $K(1)$  es numerable y cubre a  $R^{n+1}$

**Definición 4.3.3** Sea  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L.,  $f: M \rightarrow R^m$  continua,  $\bar{Y}$  matriz  $m \times m$  invertible, decimos que  $\tau \in T^m$  es  $(\epsilon, \bar{Y})$  regular

es regular respecto a  $f_T - \tilde{Y}(\bar{\epsilon})$  para toda  $\epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$  ó equivalentemente  $\tilde{Y}(\bar{\epsilon})$  está en  $f_T(\tau)$  y es un valor regular de  $f_T|_\tau$  para  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  (Si  $\tilde{Y} = I$ , decimos que  $\tau$  es  $\epsilon$ -regular)

Si  $(M, T)$   $(n+1)$ -variedad y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua decimos que  $\sigma \in T$  es  $\epsilon$ -transversal respecto a  $f_T$  si tiene una faceta  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$  (análogamente se define  $(\epsilon, \tilde{Y})$  transversal).

**Teorema 4.3.2. (2 ó ninguna perturbado).**

Sea  $(M, T)$   $(n+1)$ -variedad P.L. y  $f: T^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  etiquetación. Si  $\sigma \in T$  es  $\epsilon$ -transversal respecto a  $f_T$ , entonces tiene exactamente dos facetas  $\epsilon$ -regulares respecto a  $f_T$ . (También se puede establecer para  $\sigma$   $(\epsilon-)$ -transversal).

**Demostración:**

Sean  $\tau \in \sigma^n$   $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$  y  $\epsilon'_0 > 0$  tal que  $\bar{\epsilon} \in f_T(\tau)$  y  $\bar{\epsilon}$  valor regular de  $f_\sigma$  para toda  $\epsilon$  en  $(0, \epsilon'_0)$  por el teorema 4.3.1 (B.S P.L) existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que si  $\epsilon < \epsilon_0$  y  $\epsilon > 0$   $\bar{\epsilon}$  es un valor regular de  $f_T$ ,  $\epsilon_0 < \epsilon'_0$

Entonces para cualquier  $\epsilon_1$  en  $(0, \epsilon_0)$   $f_\sigma^{-1}(\bar{\epsilon}_1)$  es una recta que corta interiormente a  $\tau$  y que no puede cortar a  $\sigma$  en ninguna cara de dimensión menor que  $n$  por lo que corta a una única faceta  $\tau'$  distinta de  $\tau$ .

Para cualquier otra  $\epsilon_2$  positiva, menor que  $\epsilon_0$  y distinta de  $\epsilon_1$ ,  $f_\sigma^{-1}(\bar{\epsilon}_2)$  debe cortar también a  $\tau'$ , pues si no es así existiría un valor  $\epsilon_3$  entre  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  tal que  $f_\sigma^{-1}(\bar{\epsilon}_3)$  corta una cara  $\sigma$  de dimensión menor que  $n$ ; por lo tanto  $\tau'$  es

$\epsilon$ -regular y única.

El teorema anterior da de nuevo lugar a un principio de puerta de entrada - puerta de salida.

**Teorema 4.3.4** (3er principio de puerta de entrada-puerta de salida, algoritmo perturbado de Scarf.) Sean  $(M, T)$   $(n + 1)$ -variedad P.L y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Si  $\tau_0$ , faceta de  $T$ ,  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$ , entonces  $\exists$  cadena única de facetas  $\epsilon$ -regulares a la que pertenece  $\tau_0$ . (Análogamente para  $\tau_0$   $(\epsilon - \bar{Y})$  regular); la cadena puede ser un ciclo o una trayectoria, en este último caso puede ser finita con 2 puntos frontera ó infinita (con un punto frontera ó con frontera vacía).

La demostración es el mismo algoritmo de Scarf (2.1.2) y se basa en 1.2.3 y en 4.3.3)

Podemos, como hicimos en 4.2.3, dar una forma que corresponda más al teorema de la preimagen.

**Teorema 4.3.5** Sean  $(M, T)$   $(n + 1)$ -variedad P.L. y  $f: M \rightarrow T$  continua, tal que alguna faceta de  $T$  es  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$ , entonces existe  $\epsilon_0$  tal que para  $\epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$   $f_T^{-1}(\bar{\epsilon})$  es una 1-variedad P.L.,  $\omega = \{\sigma \cap f^{-1}(\bar{\epsilon})\}$  triangula a  $f_T^{-1}(\bar{\epsilon})$  y  $\partial f_T^{-1}(\bar{\epsilon}) = \partial M \cap f_T^{-1}(\bar{\epsilon})$

Queremos ahora probar un lema de Sperner perturbado.

**Def. 4.3.6** Si  $(S, T)$  una  $n$ -variedad P.L. ( $S$  un  $n$ -simplejo), decimos que  $\lambda$ ,  $n$ -etiquetación de  $T$ , es de Sperner, si

$\{\lambda_T(v^i)\}_{i=0}^n$  afinmente independiente y  $\bar{0} = \sum \alpha_i \lambda_T(v^i)$  con  $\alpha_i \geq 0$  y  $\sum \alpha_i = 1$ .

Si  $\lambda$  es de Sperner, es claro que existen  $\bar{Y}$  y  $\epsilon_0$  tales que para cualquier  $\epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$ , entonces  $\bar{Y}(\bar{\epsilon}) \in \lambda_T(Sx\{0\})$  es valor regular de  $\lambda_T$ , donde  $T$  y  $\lambda$  son la triangulación y la etiquetación construidas en 2.13 para  $Sx[0,1]$ ;

#### Teorema 4.3.7 (Lema de Sperner perturbado)

Sean  $S$   $n$ -simplejo,  $T$  una  $n$ -triangulación y  $\lambda$  una  $n$ -etiquetación de Sperner de  $T$ , entonces existe un número impar de  $n$ -simplejos en  $T$  que son  $(\epsilon - \bar{Y})$ -regulares, para alguna  $\bar{Y}$  invertible.

#### **Demostración:**

Sea  $M = S \times [0,1]$ ,  $\bar{T}$  la triangulación de  $M$  construida en 2.1.3.  $\bar{\lambda}$  definida en  $\bar{T}^0$  como  $\bar{\lambda}(v,t) = \lambda(v)$ ,  $Sx\{0\}$  es una faceta  $\epsilon$ -regular, por ser  $\lambda$  de Sperner, llamémosla  $\tau_0$ . Como está en  $\partial M$ , si empezamos el algoritmo de Scarf por  $\tau_0$ , terminaremos en una faceta  $\tau$  en  $\partial M$ . Si probamos que  $\tau \subset Sx\{1\}$ , habríamos terminado, pues  $\tau$  sería igual a  $\sigma x\{1\}$  para alguna  $\sigma \in T$  y  $\sigma x\{1\}$   $\epsilon$ -regular  $\Rightarrow \sigma \in$  regular. La única faceta de  $\bar{T}$ , que está en  $Sx\{0\}$ , es  $\tau_0$ , ninguna de las facetas que está contenida en  $\partial S \times [0,1]$  puede ser  $(\epsilon - \bar{Y})$ -regular pues ninguna  $\bar{Y}(\bar{\epsilon})$  sería valor regular de  $f$  - si estuviera en  $\partial S \times [0,1]$ , entonces  $\tau$  tiene que estar en  $Sx\{1\}$ ; si empezamos por  $\tau_1$  en  $Sx\{1\}$   $(\epsilon - \bar{Y})$ -regular y distinta de  $\tau$ , llegaremos a  $\tau_2$   $(\epsilon, \bar{Y})$ -regular, también en  $Sx\{1\}$ .

### Los teoremas de punto fijo y el lema de Sperner perturbado

El lema de Seprner perturbado sirve para probar los teoremas de punto fijo de Brouwer para el  $n$ -simplejo unitario sin tener que poner restricciones a la función, aparte de la continuidad.

Análogamente para el teorema de Kakutani. Ilustremos, demostrando el teorema de Brouwer.

Demostración del teorema de Brouwer, sea  $S$  el  $n$ -simplejo unitario de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f: S \rightarrow S$  continua. Supongamos  $\{f(e^i)\}_{a.i}$

$$S = e^1 \dots e^{n+1}, e^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Sea } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea  $a_{ij} = f_i(e^j)$ , entonces  $\sum_i a_{ij} = 1$ ,  $a_{ij} \geq 0$  y  $e' A = e'$ , para  $A = (a_{ij})$ , por lo que 1 es valor propio de  $A$ , 1 es la llamada raíz de Frobenius y tiene asociado un vector propio  $x$  no negativo (Teorema de Frobenius, para una demostración que no use el teorema de Brouwer ver Nikaido [ ]). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $|x|_1 = 1$

Entonces  $(I-A)x = \bar{0}$  y  $\sum_j (e^j - f(e^j)) = \bar{0}$  con  $x_j \geq 0$  y  $\sum x_j = 1$

Es decir la etiquetación basada en  $Id - f$  es de Sperner

Consideremos una sucesión de triangulaciones  $\{T_m\}$  de  $S$  cuyo diámetro tiende a cero definimos una  $n$ -etiquetación  $\lambda$  como  $\lambda(v) = v - f(v)$ ; hemos demostrado  $\lambda$  de Sperner, entonces existe  $\sigma_m \in T_m$   $\epsilon$ -regular, es decir existe  $\epsilon_m$  tal que si

$\epsilon$  positivo menor que  $\epsilon_m$ ,  $\bar{\epsilon} \in \lambda_T(\sigma_m)$ . Si  $v(i,j)$  es el  $i$ -ésimo vértice de  $\sigma_j$ ; sabemos que existen  $n$  subsucesiones  $\{v(i, \varphi(k))\}$  convergentes y como el diámetro de  $\sigma_m$  tiende a cero, todas ellas convergen al mismo punto  $\hat{v}$ .

$$\sum_i \alpha_i \lambda(v(i, \varphi(k))) = \bar{\epsilon} \quad \text{si } \epsilon < \epsilon_{\varphi(k)} \text{ para toda } k$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi(k) \\ \vdots \\ \alpha_n \varphi(k) \end{pmatrix} \quad \text{está en } S \text{ para toda } k \quad \therefore$$

tiene una subsucesión convergente, llamemos  $\bar{\alpha}$  al límite.

Tomando límites en la sumatoria anterior ;

$$\sum \bar{\alpha}_i \lambda(\hat{v}) = \bar{0} \quad \text{pues } \epsilon_{\varphi(k)} \rightarrow 0 \text{ cuando } k \text{ tiende a infinito.}$$

$$\text{Por lo que } \sum \bar{\alpha}_i (\hat{v} - f(\hat{v})) = (\hat{v} - f(\hat{v})) \sum \bar{\alpha}_i = \hat{v} - f(\hat{v})$$

pues  $\bar{\alpha}$  está en  $S$ .

$$\text{Entonces } \hat{v} - f(\hat{v}) = 0 \quad \text{y} \quad f(\hat{v}) = \hat{v}$$

Si  $\{\lambda(e^i)\}$  no es a.i., se escoge subconjunto máximo que si lo sea. Para  $\bar{S}$ , determinado por el subconjunto de  $\{e^j\}$  correspondientes, les de Sperner.

#### 4.4 Algunos conceptos importantes para implementar el algoritmo con etiquetación vectorial.

Para construir un algoritmo práctico con etiquetación vectorial, serán útiles los resultados siguientes que ayudan a en-

contrar el vértice que hay que eliminar en cada paso, para seguir teniendo un simplejo  $\epsilon$ -regular. Estos resultados son los usuales en programación lineal.

**Definición 4.4.1** Decimos que una matriz  $A$  es lexicográficamente positiva, si para cada renglón  $i$  existe una columna  $\hat{j}$  tal que  $a_{ij} > 0$  y  $a_{ik} = 0$  si  $k < \hat{j}$ .

**Proposición 4.4.2** Sean  $(M, T)$  una  $(n+1)$ -variedad P.L.,  $f$  una  $n$ -etiquetación, entonces  $\tau \in T^n$ ,  $\tau = v^0 \dots v^n$ , es  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$  si y sólo si  $\Delta(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & \dots & f(v^n) \end{pmatrix}^{-1}$  existe y es lexicográficamente positiva.

**Demostración:**

Si  $\tau$  es  $\epsilon$ -regular, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que si  $\epsilon$  positiva y menor que  $\epsilon_0$ ,  $\bar{\epsilon}$  esta en  $f_T(\tau)$  y es un valor regular de  $f_T$ . Llamemos  $\{\alpha_i(\epsilon)\}$  al conjunto de coordenadas baricéntricas de  $\bar{\epsilon}$  respecto a  $f_T(\tau)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & \dots & f(v^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(\epsilon) \\ \vdots \\ \alpha_n(\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Como para cada  $\epsilon$  positivo menor que  $\epsilon_0$  existe solución de la ecuación, entonces  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & \dots & f(v^n) \end{pmatrix}$  es invertible,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(\varepsilon) \\ \vdots \\ \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = \Delta(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{Si } \Delta(\tau)_{ij} = S_{ij},$$

$$\alpha_i(\varepsilon) = \sum_{j=0}^n S_{ij} \varepsilon^j$$

Sea  $\hat{j}$  la primera columna de  $\Delta(\tau)$  tal que  $S_{i\hat{j}} \neq 0$ ,

$$\alpha_i(\varepsilon) = \sum_{j=\hat{j}}^n S_{ij} \varepsilon^j \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_i(\varepsilon)}{\varepsilon^{\hat{j}}} = \sum_{j=\hat{j}+1}^n S_{ij} \varepsilon^{j-\hat{j}} + S_{i\hat{j}}$$

si  $S_{i\hat{j}} < 0$ , existe  $\varepsilon_1$  en  $(0, \varepsilon_0)$  tal que si  $\varepsilon < \varepsilon_1$ , entonces  $|\sum_{j=\hat{j}+1}^n S_{ij} \varepsilon^{j-\hat{j}}|$  es menor que  $|S_{i\hat{j}}|$ . Entonces para  $\varepsilon < \varepsilon_1$ ,

$\alpha_i(\varepsilon) < 0$  absurdo. Por lo tanto  $S_{i\hat{j}}$  es positivo, es decir  $\Delta(\tau)$  es lexicográficamente positiva.

Recíprocamente, supongamos que  $\Delta(\tau)$  existe y que es lexicográficamente positiva. Para  $i = 0, \dots, n$  sea  $\hat{j}_i$  tal que  $S_{i\hat{j}_i} > 0$  y  $S_{ij} = 0$  si  $j < \hat{j}_i$ .

Sea  $\varepsilon_0$  tal que  $|\sum_{j>\hat{j}_i} S_{ij} \varepsilon_0^{j-\hat{j}_i}| < S_{i\hat{j}_i}$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

Entonces  $\Delta(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} > \bar{0}$  y para toda  $\varepsilon$  positiva menor que  $\varepsilon_0$  se cumple que  $\Delta(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} > \bar{0}$  y si definimos

$$\alpha_i(\varepsilon) = \sum_{j=0}^n S_{ij} \varepsilon^j, \quad \alpha_i(\varepsilon) > 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(\varepsilon) \\ \vdots \\ \alpha_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = \Delta(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & & f(v^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(\epsilon) \\ \vdots \\ \alpha_n(\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Entonces  $\alpha_j(\epsilon) > 0$  para  $j = 0, \dots, n$ ,  $\sum_{j=0}^n \alpha_j(\epsilon) = 1$  y

$$\bar{\epsilon} = \sum_{j=0}^n \alpha_j(\epsilon) f(v^j).$$

Es decir  $\bar{\epsilon}$  está en  $f_T(\tau)$  y es un valor regular de  $f_T|_\tau$  para toda  $\epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$ , por lo que  $\tau$  es  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$ .

Observación: En programación lineal un conjunto de vectores afinmente independiente se llama base L.P., si existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para toda  $\epsilon$  en  $(0, \epsilon_0)$   $\bar{\epsilon}$  está en la cerradura convexa de dichos vectores. Entonces la proposición 4.4.2 se podría enunciar como  $\tau \in T^n$  es  $\epsilon$ -regular respecto a  $f_T$  si y sólo si las imágenes de sus vértices bajo  $f$  forman una base L.P.

La siguiente proposición es de nuevo 4.2.1, la demostración que damos encuentra la segunda faceta  $\epsilon$ -regular de un simplejo, y es un método usual en programación lineal.

**Proposición 4.4.3** Sea  $\tau = v^0 \dots v^n$  una faceta  $\epsilon$ -regular, respecto a  $f_T$ , de  $\sigma = v^0 \dots v^n$ , existe un único índice  $i$  tal que  $\tau' = v^0 \dots v^{i-1} v^{i+1} \dots v^n$  es otra faceta  $\epsilon$ -regular de  $\sigma$  respecto a  $f_T$ .

Demostración.

$$\text{Sean } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ f(v^0) & \dots & f(v^n) & f(v) \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \Delta(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} B = I.$$

El núcleo de  $\tilde{A}$  es de dimensión 1, consideremos  $e$  tal que no existe  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $Bx = e$ , entonces  $z = e - BAe$  es es tá en el núcleo y es distinto de cero.

$$\text{Definimos } B^{(i)} = B - \frac{zB_i}{z_i},$$

donde  $B_i^{(i)}$  el  $i$ -ésimo renglón de  $B^{(i)}$ , es  $\bar{0}$  y  $\tilde{A}B^{(i)} = I$ ,

entonces  $B^{(i)}$  es la única matriz inversa por la derecha de  $\tilde{A}$  que tiene el renglón  $i$ -ésimo igual al vector cero; pero eso quiere decir que la matriz  $\hat{B}^{(i)}$  que resulta de  $B^{(i)}$

borrarle el renglón  $i$ , es la inversa de la matriz que resulta después de tachar a  $\tilde{A}$  la  $i$ -ésima columna.

Tenemos entonces que encontrar una  $\hat{i}$  en  $\{0, \dots, n\}$  tal que  $B^{(\hat{i})}$  sin el renglón  $\hat{i}$ -ésimo sea lexicográficamente positiva y hacer ver que  $\hat{i}$  es única.

$\hat{B}^{(j)}$   $\succ_{\text{lex}} \bar{0}$  (lexicográficamente positiva) si  
para  $j \neq \hat{i}$  y  $z_i \neq 0$ ;

$$\frac{B_j}{z_j} \underset{\text{lex}}{>} \frac{B_i}{z_i}, \text{ si } z_j > 0.$$

$$\text{Si } z_j < 0, \quad \frac{B_j}{z_j} \underset{\text{lex}}{<} \frac{B_i}{z_i} \quad \gamma$$

$$\frac{B_j}{\underset{\text{lex}}{>}} > \bar{0}, \text{ si } z_j = 0$$

Como sabemos que para  $i = n + 1$  se cumple, entonces  $\frac{B_j}{\underset{\text{lex}}{>}} > 0$

$$\text{si } z_j = 0.$$

$$\therefore \hat{B}^{(1)} \underset{\text{lex}}{>} \bar{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{B_{j_0}}{z_{j_0}} \underset{\text{lex}}{>} = \frac{B_i}{z_i} > \frac{B_{j_1}}{z_{j_1}} \quad \bullet \text{ para } j_0 \neq j_1$$

$$\text{tales que } z_{j_0} > 0 > z_{j_1} \quad \text{y } z_{j_0} \neq z_i, \quad z_{j_1} \neq z_i.$$

Entonces hay dos soluciones:  $\bar{i}$  tal que

$$\min_{\text{lex}} \left\{ \frac{B_j}{z_j} \right\} = \frac{B_{\bar{i}}}{z_{\bar{i}}}, \quad j | z_j > 0$$

$$\text{e } \bar{i} \text{ tal que } \max_{\text{lex}} \left\{ \frac{B_j}{z_j} \right\} = \frac{B_{\bar{i}}}{z_{\bar{i}}}, \quad j | z_j < 0$$

Una de las 2 soluciones es  $n + 1$  y la otra es la  $\hat{i}$  buscada.

Una proposición interesante es la siguiente; pues permite calcular un cero de  $f_T$  en cada  $\tau$   $\epsilon$ -regular que se va generando con el algoritmo

**Proposición 4.4.4** Si  $(M-T)$   $(n+1)$ -variedad P.L.,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, y  $\tau \in T^n$  es  $\epsilon$  regular respecto a  $f_T$ , entonces la primera columna de  $\Delta(\tau)$  es un cero de  $f_T$ , (sus coord. bari-  
centricas respecto a  $\tau$ ).

**Demostración:**

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & & f(v^n) \end{pmatrix} \Delta(\tau) = I,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & & f(v^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{00} \\ \vdots \\ s_{n0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó' lo que es lo mismo:}$$

$$\sum_{j=0}^n s_{j0} \begin{pmatrix} 1 \\ f(v^j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad y$$

$$\sum_{j=0}^n s_{j0} f(v^j) = \bar{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto } f_T(\sum_{j=0}^n s_{j0} v^j) &= \sum_{j=0}^n s_{j0} f_T(v^j) = \\ &= \sum_{j=0}^n s_{j0} f(v^j) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Según el libro de Allgower y Georg [1981], para propósitos numéricos, la minimización lexicográfica, para encontrar el pivote puede llevarse a cabo trabajando con la primera columna de  $\Delta(\zeta)$ ; entonces el algoritmo trabaja básicamente con tales columnas de las matrices actualizadas. En 4.5 describimos la versión de Allgower y Georg del algoritmo de Eaves y Saigal.

#### 4.5 El Algoritmo de Eaves y Saigal.

Para ilustrar los conceptos que se han estudiado hablemos de un algoritmo construido por Eaves y Saigal (Para calcular ceros de una cierta correspondencia) que pertenece a los llamados algoritmos de homotopía.

Supongamos que se quiere encontrar un cero de  $f$ , función continua definida en  $\mathbb{R}^n$ . Relacionada con  $f$  se construye una homotopía  $h$  definida en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ , de tal manera que tenga un cero  $x_0$  único y conocido en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  y sea "igual" a  $f$  en  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ ,  $h$  es continua.

Se triangula  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  y se etiqueta usando a  $h$ . Si empezamos un algoritmo de Scarf en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ , en el simplejo que contiene a  $x_0$ , bajo ciertas condiciones se llegará a un simplejo  $\sigma$  c.e. en  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ , es decir  $\sigma$  contiene un cero  $x$  de  $f$ , que por lo tanto es una aproximación a un cero de  $f$ .

Definición 4.5.2. Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapeo continuo...

Si  $\hat{x}$  no resulta satisfactorio se puede recomenzar el algoritmo usando a  $\hat{x}$  como punto inicial y construyendo como antes una triangulación, pero con diámetro menor, reempezando en condiciones mejores el algoritmo.

La idea E-S es trabajar en  $\mathbb{R}^n \times [0, 1)$  (ó en  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ ) con una triangulación tipo Kuhn ó Todd (sección 2.3), de esta manera se reemplaza el algoritmo cada vez que se alcanza un nuevo nivel. Alcanzar un nivel  $\hat{\epsilon}$ , por primera vez, quiere decir que en el nivel  $\hat{\epsilon}-1$  tenemos un simplejo c.e. respecto de  $h_T$ , que será tanto más pequeño cuanto más grande sea  $\hat{\epsilon}$ . Esta forma de usar la homotopía tiene, respecto a la primera, la ventaja de reempezar automáticamente sin tener que construir de nuevo la triangulación. Sin embargo cómo en los niveles  $t > 0$ ,  $h_T$  puede tener más de un cero, no necesariamente el cero de  $h_T$ , es "mejor", en un nivel  $\hat{\epsilon}$  que en otro inferior, pues puede "estar acercándose a otro cero de  $f$ ". Además que son posibles, por la misma razón, retrocesos de nivel.

El algoritmo E-S está construido para funciones asintóticamente lineales lo que definimos enseguida:

Definición 4.5.1.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente acotada, si para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  existe una vecindad  $V_x$  tal que  $f(V_x)$  es acotado.

Definición 4.5.2. Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente acotado, la co

correspondencia  $f^\#$  (cerradura de  $f$ ) definida en  $\mathbb{R}^n$  es tal

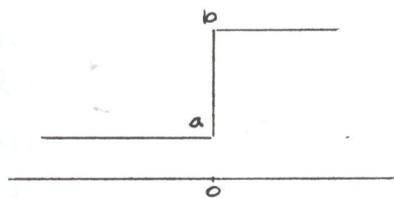
$$\text{que } f^\#(x) = \bigcap_{v \in \mathcal{U}_x} \overline{c \circ f(v)}$$

Donde  $\mathcal{U}_x$  es la familia de vecindades de  $x$  y  $\overline{c \circ f(B)}$  la cerradura convexa de  $B$ .

Ejemplo:

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} a & \text{para } x \leq 0 \\ b & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y } a < b$$

$$f^\#(x) = \begin{cases} ]a[ & \text{para } x < 0 \\ [a, b] & \text{para } x = 0 \\ ]b[ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



gráfica de  $f^\#$

Definición 4.5.3  $x \in \mathbb{R}^n$  es un cero de  $f^\#$  si  $0 \in f^\#(x)$ .

Definición 4.5.4  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente acotado es asintóticamente lineal, si existe una matriz no singular  $B_f$  tal

$$\text{que } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|f(x) - B_f(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Teorema 4.5.5 Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  asintóticamente lineal. En tonces  $f^\#$  tiene un cero de  $\mathbb{R}^n$ .

El algoritmo de Eaves y Saigal puede considerarse una demostración constructiva del teorema bajo algunos supuestos para

$f$ .

Definamos la función  $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$h(x, t) = \begin{cases} B_f(x - x_0) & \text{para } t \leq 0 \\ f(x) & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto inicial que podemos dar.

Se considera una triangulación  $T$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  que es una deformación afín de  $\bar{J}_3$ , la triangulación de Todd extendida a  $\mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)$ ; esta triangulación se determina dando un  $(n+1)$ -simplejo inicial. Etiquetamos los vértices usando a  $h$  y desarrollamos el algoritmo siguiente:

1. Inicializamos con  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  consideramos un  $n$ -simplejo en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  que contenga a  $(x_0, 0)$  como baricentro y completamos un  $(n+1)$ -simplejo con un vértice que no esté en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

$$j = n+1$$

2. Consideramos

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} h(v_0) & \cdots & h(v_{n+1}) \end{pmatrix}$$

3. Resolvemos  $\tilde{A}y = \bar{0}$  con  $y_j = -1$ .

4. Sea  $\tilde{B}$  una inversa por la derecha de  $\tilde{A}$ .

5. Minimizamos  $\frac{B_k}{y_k}$  lexicográficamente para los  $k=0, \dots, n$ .

tales que  $\gamma_k \neq 0$ , encontramos la  $k$  donde sucede esto.

6. Pivoteamos  $v^k$  en el vector  $\tilde{w}^k$  determinado por las reglas de pivoteo de Todd.

7. Actualizamos  $\tilde{A}$  calculando

$$A + (w^k \tilde{w}^k) (e^k)^T - \tilde{A}^k (e^k)^T$$

8. Hacemos  $j = k$  y regresamos a 3.

Teorema 4.5.7. Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  asintóticamente lineal, entonces la trayectoria poligonal cuyos nodos  $\{x_s, t\}$  son creados por el algoritmo de Eaves Saigal tiene las propiedades siguientes:

1.  $(x_s, s)$  cero de  $h_T$ , existe para  $s \geq 0$
2.  $t(s) \rightarrow 0$  si  $s \rightarrow \infty$
3.  $\{x_s\}$  está acotado para  $s \rightarrow \infty$  y tiene al menos un punto de acumulación.
4. Cada punto de acumulación de  $\{x_s\}$  es un cero de  $f^\#$ .

Existe un problema  $\gamma$  es que no se puede garantizar que  $\{x(s)\}$  converja.

Teorema 4.5.8 Si  $f^\#$  tiene sólo ceros aislados, entonces la trayectoria creada por el algoritmo converge a un cero de  $f$ .

Observaciones: el algoritmo es infinito en la práctica se da un nivel de paro (también puede darse máximo de interacciones).

Numéricamente se considera que la minimización del paso 5, se puede hacer sobre la primera columna de la inversa de  $\tilde{A}$  sin columna, la que se obtiene resolviendo y

El programa incorpora a los elementos esenciales del algoritmo de Eaves y Saigal 2 mejoras.

La primera consiste en intentar pasos de un método de Newton modificado cada vez que aparece un vértice en un nivel más alto que los anteriormente alcanzados, tratando de acelerar la rapidez de convergencia.

La segunda consiste en realizar pivoteos automáticos en ciertas ocasiones, ahorrando algunos pasos P.L.

#### 1. Combinación de pasos P.L. y pasos Newton.

Esta se puede lograr porque al expresar los pasos del Newton modificando en coordenadas baricéntricas se llega a sistemas de ecuaciones lineales muy semejantes a los obtenidos en los pasos del algoritmo de Lemke-Scarf (pasos P.L.).

Definición 4.5.9. Sean  $f: R^n \rightarrow R^n$  y  $\sigma$  un simplejo  $\epsilon$ -regular respecto a  $f$ , entonces un paso modificado de Newton es la función  $N: R^n \rightarrow R^n$  definida como  $N(x) = x - A_\sigma^{-1} f(x)$  donde  $A_\sigma$  la parte lineal de  $f_\sigma$ .

Observación: recordemos que  $A_\sigma$  es la matriz Jacobiana de

$F_\sigma$  en cada punto de  $x \in \sigma$ ;  $A_\sigma$  es no singular debido a la regularidad de  $\sigma$ .

Proposición 4.5.10. Sean  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma = v^0 \dots v^n$  regular respecto a  $F_T$ , entonces  $N(v^i)$  es el cero de  $F_T$  en  $\sigma$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

Además para  $v^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ , si

$$\tilde{A}(\sigma, v^{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ F(v^0) \dots F(v^n) & F(v^{n+1}) \end{pmatrix}$$

y  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{R}^n$  son soluciones a

$$\begin{aligned} \tilde{A}x &= e^i \text{ con } x_{n+1} = 0 \\ \text{y } \tilde{A}y &= \bar{0} \text{ con } y_{n+1} = -L, \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } N(v^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (x_i - y_i) v^i$$

Demostración:

$$N(x) = x - A_\sigma^{-1} F(x)$$

$$\therefore F(x) = A_\sigma(x) - A_\sigma N(x)$$

Si  $v \in \sigma$

$$F_T(v) = A_\sigma v + a_\sigma = F(v) = A_\sigma v - A_\sigma N(v)$$

$$\text{Por lo tanto } A_\sigma(N(v)) = -a_\sigma$$

Por otro lado

$$F_T(N(v)) = F_\sigma(N(v)) = A_\sigma(N(v)) + a_\sigma = \bar{0}$$



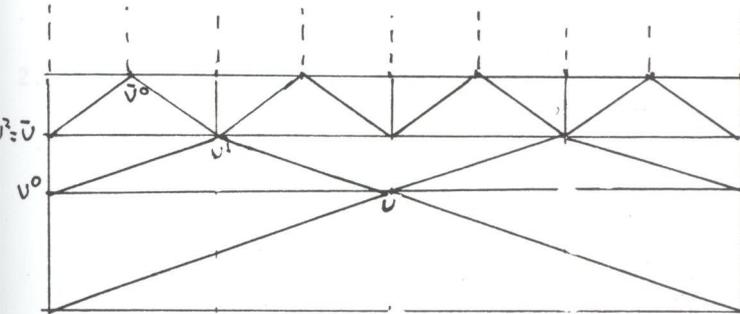
2. Si la norma de  $f(\omega_i)$  es suficientemente pequeña terminamos.
3. Si no calculamos  $\omega_{i+1} = N(\omega_i)$ .
4. Si  $\|f(\omega_{i+1})\| > K \|f(\omega_i)\|$ , con  $K$  un número preasignado en  $(0,1)$ , entonces los pasos Newton no son útiles pues no bajan la norma suficiente.
5. Si  $\|f(\omega_{i+1})\| \leq K \|f(\omega_i)\|$  hacemos  $i = i+1$  y regresamos a 2.

## 2. Pasos automáticos de pivoteo.

Consideremos que en el proceso de desarrollo del algoritmo se tiene un simplejo  $Z = v^0 \dots v^n$  c.e. y que se ha obtenido en el último pivoteo un punto  $v^{n+1}$  que es de la forma  $(x, t)$ , mientras que para alguna  $j$   $v^j = (x, \bar{t})$ ; las etiquetas de  $v^{n+1}$  y  $v^j$  son iguales, por el tipo de etiquetación que se está usando, entonces sin necesidad de llevar a cabo los pasos P.L. sabemos que la faceta opuesta a  $v^j$  es c.e. y hay que pivotar automáticamente a  $v^j$ .

En la siguiente figura se ilustra un caso que lleva a pivoteo automático:

si tenemos un simplejo  $v^0 v^1 v^2$  como en la figura, si  $v^2$  es el resultado de el último pivoteo y  $v^1 = (x, t')$  mientras que  $v^0 = (x, t'')$ , seguirá un pivoteo automático de  $v^0$  en  $\bar{v}^0$ .



A continuación resumimos la versión de Allgower y Georg del algoritmo Eaves-Saigal.

Supongamos que queremos encontrar un cero de una función  $f$  definida de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

### 1. Inicialización.

Desde afuera se da el cero de  $h_T$  en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$

$$x_0 := (x_0, 0)$$

Construcción de un simplejo inicial, conveniente cuyo baricentro sea  $x_0$

$$z = v^0 \dots v^n$$

$$v^i := (v^i, 0)$$

Determinación de la triangulación dando un vértice

$$v^{n+1} \notin \alpha_f(\tau):$$

$$v^{n+1} := (v^{n+1}, t) \quad t \neq 0$$

2. Etiquetación de los primeros vértices con  $h(x, t) = \begin{cases} x - x_0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(x) & \text{si } t > 0 \end{cases}$

$$B = \begin{pmatrix} h(v^0) & 1 \\ h(v^{n+1}) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\tau) = B^{-1}$$

no se calcula

3. Por medio de rotaciones se triangula superiormente a  $B$  y se guarda el producto de las rotaciones en  $Q$ .

$$U := Q^r \dots Q^1 B$$

$$Q = Q^r \dots Q^1$$

4. Se checa si  $B$  es lexicográficamente positiva sin el renglón  $n+1$ , si no lo fuera estaría mal escogido  $\tau$ .

Hacemos  $k_n = 0$

5. Determinación del renglón de  $B$  que debe eliminarse para obtener otra matriz lex. positiva.

$\hat{Q}$  submatriz de  $Q$  eliminados renglón y columna  $n+2$

$\bar{B}$  submatriz de  $B$  eliminando renglón  $n+1$

$$\hat{Q}_n \bar{B} = \alpha e^1$$

$$\hat{Q}_{n+1} \bar{B} = 0^1$$

Si  $q_{n+1, k_2} > 0$   $\hat{Q}_{n+1} := -\hat{Q}_n$

Se calcula  $k_2$ , con la idea de que numéricamente basta trabajar con el primer renglón de  $\Delta(z)$ .

$k_2$  es tal que

$$\min_{\substack{i=0, n+1 \\ \text{tales que } q_{n+1, i} \neq 0}} \left\{ \frac{q_{ni}}{q_{n+1, i}} \right\} = \frac{q_{n, k_2}}{q_{n+1, k_2}}$$

6. Pivoteo de  $\tilde{r}^{k_2}$  en  $\tilde{r}^{k_2}$  con las reglas de Todd ( $J_S$ ) y usando cuando se requiera pivoteo automático

$$x_j = \tilde{r}_{j-1}^{k_2} \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

$x_0 = \tilde{d}^{k_2}$  tamaño del paso con signo.

7. Cálculo del nivel en que está  $\tilde{r}^{k_2}$

$$\text{level} = \text{parte entera de } \left( \frac{-\log |x_0|}{\log 2} \right)$$

Si el nivel de  $\tilde{r}^{k_2}$  es mayor a los que han aparecido, llamamos a Newton si no etiquetamos  $\tilde{r}^{k_2}$ .

8. Pasos Newton

Cálculo del cero de  $h_T$  en el nivel que se está abandonando

$$c = \frac{\hat{Q}_n}{u_{nn}} - \frac{\hat{Q}_{n+1}}{\hat{Q}_{n+1, k_2}} \frac{\hat{Q}_n}{u_{nn}}$$

$$x = \sum_{j=0}^{n+1} c_j v_j$$

$y = f(x)$ . Si  $\|y\| < \epsilon$  terminamos con  $x$  como solución aproximada.

Si no, actualizamos  $U$  y  $Q$  con  $(f(x), L)$  y reiniciamos el paso Newton iterando hasta que  $\|y\| < \epsilon$  ó  $\|y\|$  no baje suficientemente.

9. Si level  $>$  bis terminamos.

10. Etiquetamos  $\tilde{w}_k$  con  $\gamma = (h(\tilde{w}_k, 1))$

11. Count = count + 1

Si count  $>$  max c terminamos.

12. Actualizamos  $U$  y  $Q$  con  $\gamma$ .

13. Regresamos a 5.

La versión de Allgower y Georg del algoritmo de Eaves y Saigal está construida para ilustrar los rasgos esenciales de éste y no con pretensiones de construir un algoritmo "competitivo", es decir eficiente, robusto, etc. Enseguida lo aplicamos a 14 ejemplos de prueba, los 13 primeros buscan un punto en donde la norma de una función se minimice y están tomados del artículo de Moré, Garbow y Hillstom (1981).

El último (14) es un problema de encontrar un punto fijo y está tomado de Allgower y Georg:

### 1. Función valle espiral

$$f_1(x) = 10(x_3 - 10\theta)(x_1, x_2)$$

$$f_2(x) = 10((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$$f_3(x) = x_3$$

$$\text{donde } \theta(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & \text{si } x_1 > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

### 2. Función de Powell mal escalada

$$f_1(x) = 10^4 x_1 x_2 - 1$$

$$f_2(x) = e^{-x_1} + e^{-x_2} - 1.0001$$

### 3. Función caja tridimensional

$$f_i(x) = e^{-t_i x_1} - e^{-t_i x_2} - x_3(e^{-t_i} - e^{-10^{t_i}})$$

$$\text{donde } t_i = .1_i \quad i = 1, 2, 3.$$

## 4. Función de dimensión variable

$$f_i(x) = x_i - 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^n j (x_j - 1)$$

$$f_{n+2} = \left( \sum_{j=1}^n j (x_j - 1) \right)^2$$

## 5. Función de Watson

$$2 \leq n \leq 31$$

$$f_i(x) = \sum_{j=2}^n (j-1) x_j t_i^{j-2} - \left( \sum_{j=1}^n x_j t_i^{j-1} \right)^2 - 1$$

$$\text{donde } t_i = \frac{i}{29} \quad \text{si } 1 \leq i \leq 29$$

$$f_{30}(x) = x_1, \quad f_{31}(x) = x_2 - x_1^2 - 1.$$

## 6. Función de Penalización 1.

n variable

$$f_i(x) = a^{\frac{1}{2}} (x_i - 1) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{n+1}(x) = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) - \frac{1}{4} \quad \text{con } a = 10^{-5}$$

## 7. Función de penalización 2

n - variable

$$f_1(x) = x_1 - .2$$

$$f_i(x) = a^{\frac{1}{2}} \left( e^{\frac{x_1}{10}} + e^{\left(\frac{x_i-1}{10}\right)} - Y_i \right), \quad 2 \leq i \leq n$$

$$f_i(x) = a^{\frac{1}{2}} \left( e^{\frac{x_i-x+2}{10}} - e^{\frac{-1}{10}} \right), \quad n < i < 2n$$

$$f_{2n}(x) = \left( \sum_{j=1}^n (n-j+1) x_j^2 \right) - 1, \quad a = 10^{-5} \quad \text{y} \quad Y_i = e^{\frac{i}{10}} + e^{\frac{i-1}{10}}$$

## 8. Función de Dennis y Brown

$$n = 4$$

$$f_i(x) = (x_1 + t_i x_2 - e^{t_i}) + (x_3 + x_4 \operatorname{sen}(t_i) - \cos(t_i))^2$$

$$\text{donde } t_i = \frac{i}{5}, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \geq n$$

## 9. Función trigonométrica

n variable

$$f_i(x) = n - \sum_{j=1}^n \cos x_j + i(1 - \cos x_i) - \operatorname{sen} x_i,$$

$$i = 1, \dots, n$$

## 10. Función singular extendida de Powell. n variable múltiple de 4

$$f_{4i-3}(x) = x_{4i-3} + 10 x_{4i-2}$$

$$f_{4i-2}(x) = 5^{\frac{1}{2}} (x_{4i-1} - x_{4i})$$

$$f_{4i-1}(x) = (x_{4i-2} - 2 x_{4i-1})^2$$

$$f_{4i}(x) = 10^{\frac{1}{2}} (x_{4i-3} - x_{4i})^2$$

## 11. Función de Beale

$$f_i(x) = Y_i - x_1 (1 - x_2^i) \quad \text{donde } Y_1 = 1.5, Y_2 = 2.25, Y_3 = 2.625,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

12. Función Chebiquad n variable  $m \geq n$ 

$$F_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_i(x_j) - \int_0^1 T_i(x) dx \quad i=1, \dots, m,$$

donde  $T_i$  es el  $i$ -ésimo polinomio de Chebyshev trasladado al intervalo  $[0,1]$

### 13. Función de Rosenbrock extendida

$n$  variable par

$$f_{2i-1}(x) = 10 (x_{2i} - x_{i-1}^2)$$

$$f_{2i} = 1 - x_{2i-1}$$

### 14. Encontrar un punto fijo de

$$f_i(x) = e^{\cos(\sum_{k=1}^n x_k)}$$

$n$  variable  $i=1, \dots, n$ .

Observaciones generales:

- 1- Las condiciones para la convergencia del algoritmo que se establecen en el teorema 4.5 son suficientes, aquí se lo aplicamos a ejemplos que no cumplen estas condiciones.
- 2- Se está usando para la etiquetación la función  $H(x,t) = \begin{cases} x - x_0 & \text{si } t \leq 0 \\ \|\nabla f(x)\| & \text{si } t > 0 \end{cases}$ , para problemas 1-13 lo que no tiene por que ser adecuado y se puede llegar a violar el principio de que los simplejos tengan 2 ó ninguna faceta c.e; apareciendo con ello, en el desarrollo del algoritmo, simplejos no completamente etiquetados.

Para prob 14  $H(x,t) = \begin{cases} x - x_0 & \text{si } t \leq 0 \\ x - f(x) & \text{si } t > 0 \end{cases}$

- 3- Todos los ejemplos están corridos permitiendo un máximo de iteraciones igual a 501 y un máximo número de bisecciones igual a 11.
- 4- Para cada ejemplo iniciamos con el  $x_0$  propuesto por Moré Garbouw y Hillstrom [1981].
- 5- El algoritmo termina cuando la norma de  $f$  es menor que .001.
- 6- El simplejo inicial, que determina la triangulación de Todd usada, es en todos los casos una traslación del simplejo que tiene como vértice  $v^0 v^1 \dots v^n$  con  $v^0 = 0$  y  $v^j = 10 e^j$  para  $j = 1, \dots, n$ .

si  $n = 2$



El cambio del simplejo inicial, aunque el punto  $x_0$  sea el mismo, puede alterar completamente el comportamiento del algoritmo e incluso obtenerse soluciones distintas; al final del inciso presentamos pruebas de los mismos problemas iniciando el algoritmo con otros simplejos distintos del anterior. Como  $\bar{v}^0 \dots \bar{v}^n$  con  $\bar{v}^0 = 10 e$ ,  $\bar{v}^j = \bar{v}^{j-1} - 10 e^j$  y  $\bar{\bar{v}}^0 \dots \bar{\bar{v}}^n$  con  $\bar{\bar{v}}^j = \frac{\bar{v}^j}{10}$

si  $n = 2$



- 7- Recordamos que el algoritmo puede retroceder de nivel pues no está garantizado que en un nivel mayor que cero haya sólo un cero de  $H_T$ . Lo que no puede pasar es que exista

más de un  $n$ -simplejo c.e en el nivel cero, por lo que no pueden aparecer niveles negativos.

Resumen del comportamiento del algoritmo

| Prob        | número de iteraciones | Newton Sucede | número de bisecciones | aparecen simplejos no c.e. | retrocesos de nivel | norma inicial<br>norma final  |
|-------------|-----------------------|---------------|-----------------------|----------------------------|---------------------|---|
| 1<br>dim 3  | 155                   | si            | 10                    | no                         | si                  | norma inicial:<br>1584.51<br>norma final:<br>.358999 x 10 <sup>-4</sup> |
| 2<br>dim 2  | 64                    | no            | máximo<br>= 11        | si                         | no                  | norma inicial:<br>311119 x 10 <sup>10</sup><br>norma final:<br>.658879  |
| 3<br>dim 3  | 81                    | si            | 3                     | no                         | si                  | norma inicial:<br>22.5<br>norma final:<br>.188273810 <sup>-1</sup>      |
| 8<br>dim 4  | 113                   | no            | máximo<br>= 11        | si                         | no                  | norma inicial:<br>30<br>norma final:<br>.11165695                       |
| 11<br>dim 2 | 69                    | si            | 10                    | no                         | si                  | norma inicial:<br>4449.26<br>norma final:<br>.610625 x 10 <sup>-4</sup> |

Tabla I Los ejemplos de dimensión fija

178.  
Tabla II Ejemplos de dimensión variable

| Prob    | Número de Iteraciones | Newton útil | Número de bisecciones | Aparición de simples | retroceso de nivel | normas inicial (ni) final (nf)                                 |
|---------|-----------------------|-------------|-----------------------|----------------------|--------------------|--|
| 4 dim 2 | 8                     | si          | 2                     | no                   | no                 | ni = 206.167<br>nf = .238419X10 <sup>-5</sup>                  |
| dim 4   | 13                    | si          | 2                     | no                   | no                 | ni = 676<br>nf = .492334X10 <sup>-4</sup>                      |
| dim 6   | 88                    | si          | 8                     | si                   | no                 | ni = 88701.6<br>nf = .630617X10 <sup>-4</sup>                  |
| dim 8   | 102                   | si          | 7                     | si                   | no                 | ni = .124206X10 <sup>+7</sup><br>nf = .170469X10 <sup>-4</sup> |
| dim 10  | 177                   | si          | 4                     | si                   | no                 | ni = .827468X10 <sup>+7</sup><br>nf = .131130X10 <sup>-4</sup> |
| 5 dim 2 | 36                    | si          | 5                     | no                   | no                 | ni = 2804.21<br>nf = .391089X10 <sup>-4</sup>                  |
| dim 4   | 122                   | no          | máximo = 11           | no                   | si                 | ni = 1831.85<br>nf = .109818                                   |
| dim 6   | máximo = 501          | no          | 1                     | si                   | si                 | ni = 331.59<br>nf = 1482.45                                    |
| dim 8   | máximo = 501          | no          | 1                     | si                   | estancado          | ni = 5110.45<br>nf = 20418.1                                   |
| dim 10  | máximo = 501          | no          | 1                     | si                   | estancado          | ni = 6950.77<br>nf = 211.470                                   |
| 6 dim 2 | 32                    | si          | 7                     | no                   | no                 | ni = 138.222<br>nf = .30874X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 4   | 70                    | si          | 9                     | no                   | no                 | ni = 1467<br>nf = .840166X10 <sup>-4</sup>                     |
| dim 6   | 178                   | no          | máximo = 11           | no                   | no                 | ni = 7585.59<br>nf = .23422X10 <sup>-3</sup>                   |
| dim 8   | 336                   | no          | máximo = 11           | no                   | no                 | ni = 28132<br>nf = .17014219X10 <sup>-3</sup>                  |
| dim 10  | máximo = 501          | no          | 1                     | si                   | estancado          | ni = 81235.3<br>nf = 30180                                     |
| 7 dim 2 | 42                    | si          | 9                     | no                   | no                 | ni = 344.10<br>nf = 264525X10 <sup>-4</sup>                    |
| dim 4   | 75                    | si          | 8                     | no                   | si                 | ni = 7156.6<br>nf = .496405X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 6   | máximo = 501          | no          | 6                     | no                   | si                 | ni = 21107.5<br>nf = 1.0754855                                 |

| Prob     | Núm. it.     | Newton | Núm. bis.   | Simp. n.c.e. | ret. niv. | normas ni y nf  |
|----------|--------------|--------|-------------|--------------|-----------|---|
| 7 dim 8  | máximo = 501 | no     | 7           | no           | si        | ni = 40875.9<br>nf = .12585711                                  |
| dim 10   | máximo = 501 | no     | 8           | si           | si        | ni = 65276.8<br>nf = .71665901                                  |
| 9 dim 2  | 40           | si     | 9           | no           | no        | ni = 33.5332<br>nf = .541344X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 4    | 131          | si     | 9           | no           | no        | ni = 278.225<br>nf = .521464X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 6    | 317          | no     | máximo = 11 | no           | si        | ni = 1031.66<br>nf = .172586X10 <sup>-2</sup>                   |
| dim 8    | máximo = 501 | no     | 8           | no           | no        | ni = 1750.52<br>nf = .53376377X10 <sup>-1</sup>                 |
| dim 10   | máximo = 501 | no     | 1           | no           | estancado | ni = 2353.84<br>nf = 4310.11                                    |
| 10 dim 4 | 123          | si     | 9           | si           | no        | ni = 9990<br>nf = .792205X10 <sup>-4</sup>                      |
| dim 8    | máximo = 501 | no     | 8           | si           | si        | ni = 15684.9<br>nf = .48473716X10 <sup>-3</sup>                 |
| dim 12   | máximo = 501 | no     | 4           | si           | si        | ni = 15684.9<br>nf = 5.9983912                                  |
| 12 dim 2 | 48           | si     | 10          | no           | no        | ni = 3617.18<br>nf = .207394X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 4    | máximo = 501 | no     | 7           | si           | no        | ni = 64236600<br>nf = 7.75011                                   |
| dim 6    | -            | -      | -           | -            | -         | -   |
| dim 8    | máximo = 501 | no     | 9           | si           |           | ni = .329951X10 <sup>13</sup><br>nf = .1526780X10 <sup>17</sup> |
| 13 dim 2 | 181          | no     | máximo = 11 | no           | si        | ni = 947.97<br>nf = .11967322                                   |
| dim 4    | máximo = 501 | no     | 8           | no           | si        | ni = 13146<br>nf = 3.74743                                      |
| dim 6    | máximo = 501 | no     | 6           | no           | si        | ni = 19077.4<br>nf = 8.522077                                   |
| 14 dim 2 | 23           | si     | 4           | no           | no        | ni = 2.15316<br>nf = .112952X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 4    | 82           | si     | 8           | no           | no        | ni = 11.6080<br>nf = .166641X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim 6    | 73           | si     | 4           | no           | no        | ni = 16.4736<br>nf = .266391X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim      | 408          | si     | 8           | no           | no        | ni = 22.7936<br>nf = .953331X10 <sup>-4</sup>                   |
| dim      | 276          | si     | 7           | no           | no        | ni = 19.873<br>nf = .392092X10 <sup>-4</sup>                    |
| dim 12   | máximo = 501 | no     | 7           | no           | no        | ni = 25.5442<br>nf = .91933715                                  |
| dim 14   | máximo = 501 | no     | 5           | no           | no        | ni = 28.2169<br>nf = 3.65039                                    |
| dim 16   | máximo = 501 | no     | 4           | no           | no        | ni = 30.8291<br>nf = 9.12670                                    |

## Comentarios

1. En la mayoría de los casos, a pesar de las observaciones que hicimos sobre el no cumplimiento de las hipótesis de suficiencia, el algoritmo funciona, llegando en muchas ocasiones a una solución satisfactoriamente cercana; en otras la tabla nos indica que está avanzando bien, pero que son necesarias más bisecciones ó iteraciones.

2. La 2a. columna nos indica si los pasos Newton del algoritmo fueron útiles ó no. En caso afirmativo, la norma de la función se ha hecho menor que un milésimo. En los siguientes ejemplos se comparan las soluciones obtenidas con soluciones conocidas.

| Prob     | Solución  | Solución obtenida  |
|----------|---|--|
| 1        | (1,0,0)   | (.99999982, - .66519363X10 <sup>-8</sup> , - .1080965X10 <sup>-7</sup> ) |
| 3        | (1,10,1), (10,1,-1)<br>y si $x_1 = x_2$ y $x_3 = 0$ | (17.499992, 17.499998, .188273X10 <sup>-7</sup> )                        |
| 4 dim n  | (1,...,1)   | dim = 2 (1.0000001, .99999976)<br>dim = 4 (1,.99999994, 1.0000008, 1)    |
| 10 dim n | (0,...,0)   | dim = 4<br>(-.0075807977, .000758080, .0023646124, .0023646092)          |
| 11       | (3, .5)   | (2.999933, .49998224)  |

3. La columna **?** nos informa si en el desarrollo del algoritmo aparecieron simplejos no completamente, lo que se detecta porque la matriz de etiquetación está mal condicionada ("aproximadamente singular").

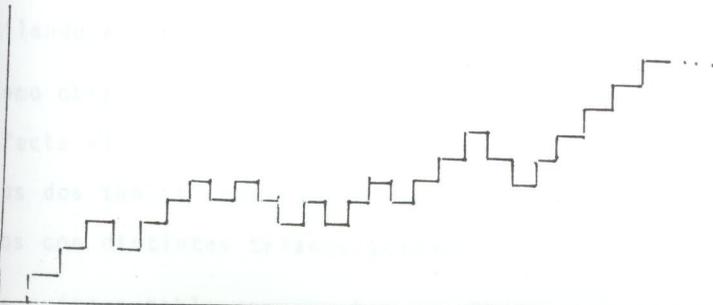
Gracias por su interés en el problema.  
sin considerar el número de iteraciones  
seguidas que permanezca en el mismo nivel.

Lo usual sería cortar el algoritmo cuando esto ocurre, sin embargo hemos permitido su continuación. La mayor parte de las veces el algoritmo se recupera regresando a los simplejos completamente etiquetados y llegando incluso, en algunos ejemplos a una solución "satisfactoria", como en los problemas: 4 (dim 6, 8 y 10) y 10 (dim 4).

En algunos otros ejemplos, aunque el algoritmo se recupera y se encamina a una solución, no le son suficientes el número de bisecciones e iteraciones. Problemas: 2, 8, 7 (dim:8 y 10), 10 (dim: 8 y 12), 12 (dim 4) y 13(dim:2, 4, 6).

4. Indicamos, en la columna 5, los ejemplos para los que en el transcurso del algoritmo ocurren retrocesos de nivel. Muchos de estos ejemplos sólo tienen unos pocos retrocesos y la tendencia esencial del algoritmo es de avance; sin embargo hay casos en que el algoritmo oscila repetidamente de un nivel a otro.

El problema 1, como vemos en la gráfica siguiente, es uno de estos últimos lo que no le impide llegar a una meta satisfactoria.



Gráfica de los niveles del problema 1, sin considerar el número de iteraciones seguidas que permanece en el mismo nivel.

Otro problema, que tiene gráficas que oscilan entre varios niveles, es el problema 13 en todas las dimensiones que se trabajaron.

5. El número de bisecciones  $t$ , que también es el nivel más alto en que aparecen vértices, está relacionado con el tamaño de los simplejos que están en el nivel  $t$ . Cada  $v^j$  vértice de un simplejo en el nivel  $t$ , con  $j \neq 0$ , es de la forma  $v^{j-1} +$

$\frac{10}{2^t} s_j e^{\Pi(j)}$ , cómo vimos en el capítulo 2.

Es natural que en muchos problemas un simplejo completamente etiquetado en el nivel 11 no es garantía de que cualquiera de sus puntos sea cercano a una solución.

Pero como lo que calcula el algoritmo es un cero de  $H_t$ , se puede estar cerca de la solución aunque el nivel sea muy bajo.

6. La columna de las normas, nos da una visión gruesa de la disminución de la norma que ha logrado el algoritmo desde el inicio hasta el final.

Ese puede ser un criterio para decidir si es necesario permitir más iteraciones, en el supuesto caso que el algoritmo haya llegado a la iteración 501 sin que se encuentre estancado en un nivel u os cilando entre algunos niveles dados.

Como observábamos, más arriba, la elección de la triangulación afecta el comportamiento del algoritmo. A continuación presentamos dos tablas comparando resultados de algunos ejemplos trabajados con distintas triangulaciones.

La primera tabla compara los resultados obtenidos con el simplejo

anterior ( $\Delta$ ) usado para iniciar con los obtenidos con  $\bar{v}^0 \dots \bar{v}^n$  donde  $\bar{v}^0 = 10e$  y  $\bar{v}^j = \bar{v}^{j-1} - 10^{ej}$  para  $j = 1, \dots, n$  ( $\nabla$ ).

simplejo  $\Delta$ simplejo  $\nabla$ 

| Prob     | it   | New | Solución                  | it   | New | Solución                |
|----------|------|-----|---------------------------|------|-----|-------------------------|
| 1        | 155  | si  | $\approx (1,0,0)$         | 89   | si  | $\approx (1,0,0)$       |
| 3        | 81   | si  | $\approx (17.5, 17.5, 0)$ | 116  | si  | $\approx (1,10,1)$      |
| 11       | 69   | si  | $\approx (3, .5)$         | 1001 | no  | n.f. $> 10^{-4}$        |
| 10 dim 4 | 123  | si  | $\approx (0, \dots, 0)$   | 73   | si  | $\approx (0, \dots, 0)$ |
| dim 8    | 1001 | no  | n.f. $> 10^{-3}$          | 169  | si  | "                       |
| dim 12   | 1001 | no  | $> 10$                    | 290  | si  | "                       |
| dim 16   | 1001 | no  | -                         | 495  | si  | "                       |
| dim 20   | 1001 | no  | -                         | 800  | si  | "                       |
| 14 dim 2 | 23   | si  | la misma sol.             | 28   | si  | misma sol               |
| dim 4    | 82   | si  | sol. dist.                | 109  | si  | sol. dist.              |
| dim 6    | 73   | si  | sol. dist.                | 436  | si  | sol. dist.              |
| dim 8    | 276  | si  |                           | 474  | no  | $  f(x)   > 10^{-2}$    |
| dim 10   | 408  | si  |                           | 1001 | no  | $  f(x)   > 10$         |

Cómo se puede apreciar en la tabla, para algunos ejemplos es mejor la triangulación 1a. y para otros la 2a.

Hay ejemplos como el problema 3 y el 14 dimensión 4 y 6 que no son

comparables en cuanto a eficiencia, pues llevan a soluciones distintas.

Veremos que también el cambio de tamaño del simplejo inicial produce comportamientos diferentes. La tabla siguiente compara resultados obtenidos con el segundo simplejo de la tabla anterior ( $\mathcal{D}_{10}$ ) con aquellos que se obtuvieron iniciando con el simplejo  $\hat{v}^0 \dots \hat{v}^n$  con  $\hat{v}^0 = e$  y  $\hat{v}^j = \hat{v}^{j-1} - e^j$  ( $\mathcal{D}_1$ )

| Prob   | $\mathcal{D}_0$ |     |                      | $\mathcal{D}_1$            |     |                    |           |
|--------|-----------------|-----|----------------------|----------------------------|-----|--------------------|-----------|
|        | it              | New | Solución             | it                         | New | Solución           |           |
| 1      | 89              | si  | $\approx (1,0,0)$    | 1001                       | no  | —                  |           |
| 3      | 116             | si  | $\approx (1,10,1)$   | 27                         | si  | $\approx (1,10,1)$ |           |
| 11     | 1001            | no  | $\ f(x)\  > 10^{-4}$ | 37                         | si  | $\approx (3, .5)$  |           |
| 9 dim  | 5               | 147 | si                   | sol dist                   | 62  | si                 | sol dist  |
|        | 6               | 218 | si                   | sol dist                   | 162 | si                 | sol dist  |
|        | 7               | 298 | no   niv=11          | $\ f(x)\  \approx 10^{-3}$ | 207 | si                 | sol dist  |
|        | 8               | 301 | no   niv=11          | $\ f(x)\  \approx 10^{-3}$ | 163 | si                 | sol dist  |
|        | 9               | 513 | no   niv=11          | $\ f(x)\  \approx 10^{-3}$ | 304 | si                 |           |
| 14 dim | 2               | 28  | si                   | igual sol                  | 19  | si                 | igual sol |
|        | 4               | 109 | si                   | sol dist                   | 234 | si                 | sol dist  |
|        | 6               | 436 | si                   | igual sol                  | 769 | si                 | igual sol |

Cómo puede observarse, aunque la forma de los simplejos iniciales es la misma, el tamaño diferente lleva a resultados distintos. Para algunos problemas resulta más conveniente iniciar

con el grande, para otros con el pequeño, mientras que para otros más, los resultados son incomparables pues se obtienen soluciones distintas.

Para el problema 14 estos tres casos distintos los tenemos cuando la dimensión es 6, 2 y 4 respectivamente. En el caso de dim 4 el simplejo pequeño conduce a la misma solución que el primer simplejo que trabajamos. ( $\Delta_{10}$ ).

Otro problema que puede surgir se ilustra con el problema siguiente:

Minimizar la norma de la función siguiente

Función de Wood

$$f_1(x) = 10 (x_2 - x_1^2)$$

$$f_2(x) = \sqrt{90} (x_4 - x_3^2)$$

$$f_4(x) = (1 - x_3)$$

$$f_5(x) = \sqrt{10} (x_2 + x_4^{-2})$$

$$f_6(x) = \sqrt{10} (x_2 - x_4)$$

Con el simplejo  $\nabla_{10}$ , después del número máximo de iteraciones  $\|f(x)\| > 10^{+5}$ , con el simplejo  $\nabla_{10}$  después de 136 iteraciones se llega al número máximo de bisecciones y la norma de  $f(x)$  es cercana a  $10^{-3}$ , mientras que con  $\nabla_1$ , en 575 iteraciones la norma de  $f(x)$  es menor que la tolerancia.

Sin embargo en el último caso a pesar de que la norma de  $f$  es muy pequeña estamos muy lejos de la solución, mientras que con

$\nabla_{10}$ , aunque la norma todavía es mayor que  $t_0$  estamos muy cerca de la solución  $(1, \dots, 1)$ .

## CAPITULO 5

UNA APROXIMACION P.L. AL GRADO DE BROUWER DE UN MAPEO

El grado topológico de un mapeo  $f$ , definido en un conjunto  $U$  abierto y acotado cuenta el número algebraico de ceros de  $f$  en  $U$ .

En topología diferencial se define, cuando  $\bar{0}$  es un valor regular, como la suma, para toda  $x$  en  $f^{-1}(\bar{0})$ , del signo del determinante de  $df(x)$  y después se generaliza para el caso que  $\bar{0}$  no es valor regular. Brouwer fué el que introdujo el concepto para mapeos continuos de  $U \subset \mathbb{R}^n$ , trabajó con triangulaciones  $T$  de  $U$  y aproximaciones lineales  $f_T$  de  $f$  y definió el grado de  $f$  relativo a  $U$ , como la suma sobre  $\sigma \in T$  del signo del determinante de las partes lineal de  $f_T|_{\sigma}$ , cuando  $\bar{0}$  es valor regular de  $f$  y también generalizó posteriormente el concepto en mapeos para los que  $\bar{0}$  no es valor regular.

En su artículo Peitgen y Sieberg siguen la misma idea que Brouwer, pero la definición de los simplejos  $\epsilon$ -regulares les permite dar de una vez la definición de grado de  $f$  sin importar si  $\bar{0}$  es valor regular ó no de  $f_T$ .

El signo del determinante de la parte lineal de  $f_T|_{\sigma}$  está muy relacionado con el problema de la orientación de  $\sigma$ , empezaremos este capítulo con las ideas sobre orientación para

después dar la definición de grado y estudiar sus propiedades.

### 5.1. Orientación

Definición 5.1.1. Una orientación de  $\mathbb{R}^n$  es una función  $or : E \longrightarrow \{0, 1\}$ , donde  $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  ( $n$  veces), que cumple las propiedades siguientes:

1.  $or(x^1, \dots, x^n) \neq 0$  si y sólo si  $\{x^i\}$  es linealmente independiente.
2.  $or(x^1, \dots, x^n) = or(y^1, \dots, y^n) \neq 0$  si y sólo si la transformación lineal que manda a  $x^i$  en  $y^i$  tiene determinante positivo.

Proposición 5.1.2. Sea  $x^1, \dots, x^n$  una base ordenada de  $\mathbb{R}^n$ , basta conocer  $or(x^1, \dots, x^n)$  para que quede determinada la orientación en  $\mathbb{R}^n$ .

Demostración: La propiedad 1 de una orientación implica que las  $n$ -adas de vectores linealmente dependiente tienen orientación cero.

Dada una  $n$ -ada de vectores l.i.,  $y^1, \dots, y^n$  su orientación será la misma que la de  $x^1, \dots, x^n$  si la transformación lineal que manda a  $x^i$  en  $y^i$  tiene determinante positivo y será  $-or(x^1, \dots, x^n)$  si el determinante de dicha transformación es negativo.

Entonces  $\mathbb{R}^n$  admite únicamente 2 orientaciones. Se llama orientación de la mano derecha o positiva la que cumple que  $or(e^1, \dots, e^n) = 1$  y orientación de la mano izquierda o negativa si  $or(e^1, \dots, e^n) = -1$ .

Llamamos orientación estándar a la primera y con ella  $or(x^1, \dots, x^n) = \text{sign det } |x^1 \dots x^n|$ .

Definición 5.1.3. Dada una orientación de  $\mathbb{R}^n$  se llama la orientación del simplejo  $\sigma = v^0 \dots v^n$ , con los vértices ordenados, a  $or(v^1 - v^0, \dots, v^n - v^0)$  y se denota como  $or(\sigma)$ .

La orientación de un simplejo induce la orientación de cada una de sus facetas de la siguiente manera:

$$or_{\sigma}(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^n) = or(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^n v^j)$$

### Orientación de variedades P.L.

Definición 5.1.4. Sea  $(M, T)$  una  $(n+1)$ -variedad P.L., entonces una orientación de  $(M, T)$  es una elección de una orientación para cada  $\sigma \in T$  de tal manera que  $or_{\sigma_1}(\tau) = -or_{\sigma_2}(\tau)$ , donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son elementos de  $T$  y  $\tau$  es la faceta común.

Proposición 5.1.5. Sea  $(M, T)$   $(n+1)$ -variedad y elijamos para cada  $\sigma$  la orientación estándar, es decir si  $\sigma = v^0 \dots v^{n+1}$ ,  $or(\sigma) = \text{sig } |v^1 - v^0 \dots v^{n+1} - v^0|$ , esta elección es una orienta-

ción de  $(M, T)$  a la que se llama la orientación natural.

Para demostrarla usemos el lema siguiente:

Lema 5.1.6. Si  $H$  es un hiperplano  $H$  de  $R^{n+1}$  generado por los vectores afinmente independientes  $\{v^i\}_{i=0}^n$ ; las regiones en que  $H$  divide a  $R^{n+1}$  corresponden al signo de la función  $\ell_H : R^{n+1} \rightarrow R$ , definida como

$$\ell_H(z) = |v^1 - v^0 \dots v^n - v^0 \quad z - v^0|$$

Demostración:

Si  $z \in H$   $z - v^0$  depende linealmente de  $\{v^i - v^0\}_{i=1}^n$  y  $\ell_H(z) = 0$ , recíprocamente si  $\ell_H(z) = 0$   $z - v^0$  depende linealmente de  $\{v^i - v^0\}_{i=1}^n$  y  $z \in H$ .

Ahora supongamos dos puntos  $z$  y  $\bar{z}$  de  $R^{n+1}$  que no están en  $H$ , existe  $t \in (0, 1)$  tal que  $t \ell_H(z) + (1-t)\ell_H(\bar{z}) = 0$  si y sólo si  $\ell_H(z)$  tiene distinto signo que  $\ell_H(\bar{z})$ .

Pero  $t \ell_H(z) + (1-t)\ell_H(\bar{z}) = \ell_H(tz + (1-t)\bar{z})$  y entonces existe  $t$  en  $(0, 1)$  tal que  $\ell_H(tz + (1-t)\bar{z}) = 0$  si y sólo si  $z$  y  $\bar{z}$  están en distintas regiones pues  $tz + (1-t)\bar{z}$  es un punto intermedio a  $z$  y  $\bar{z}$ . Por tanto el signo de  $\ell_H$  caracteriza a las regiones determinadas por  $H$ .

Demostración

Demostración de 5.1.5. Sean  $\sigma_1 = v^0 \dots v^j \dots v^{n+1}$   
 $\sigma_2 = v^0 \dots \bar{v}^j \dots v^{n+1}$   
 $\tau = v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1}$

$$\text{or}_{\sigma_1}(\tau) = \text{sign} |v^1 - v^0 \dots v^{j-1} - v^0 v^{j+1} - v^0 \dots v^{n+1} - v^0 \quad v^j - v^0|$$

$$= \ell_H(v^j).$$

Donde  $H$  es el hiperplano generado por los vectores afinmente independientes  $\{v^0, v^1, \dots, v^{j-1}, v^{j+1}, \dots, v^{n+1}\}$

$$\text{or}_{\sigma_2}(\tau) = \text{sign} |v^1 - v^0 \dots v^{j-1} - v^0 \quad v^{j+1} - v^0 \dots v^{n+1} - v^0 \bar{v}^j \quad -v^0|$$

$$= \ell_H(\bar{v}^j)$$

Pero  $v^j$  y  $\bar{v}^j$  están en distintas regiones de las determinadas por  $H$  y  $\text{or}_{\sigma_1}(\tau) = -\text{or}_{\sigma_2}(\tau)$ .

Ahora estudiaremos como transforma una función la orientación de una variedad.

Definición 5.1.7. Sean  $(M, T)$  una  $n$ -variedad P.L. orientada,  $\mathbb{R}^n$  con la orientación estándar  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y  $\sigma$  un elemento de  $T$ ,  $\epsilon$ -regular. Definimos la orientación de  $\sigma$  respecto a  $f$ ,  $\text{or}_F(\sigma)$ , al número:  
 $\text{or}(\sigma) \times \text{or}(f(\sigma))$ .

Proposición 5.1.8.  $\text{or}_f(\sigma)$  es 1 ó -1 y si la orientación de  $(M, T)$  es la natural  $\text{or}_f(\sigma) = \text{sign det } A_\sigma$ .

Demostración: Si  $\sigma = v^0 \dots v^n$ , el conjunto  $\{v^i - v^0\}_{i=1}^n$

es l.i. y  $\text{or}_f(\sigma)$  es 1 ó -1. Si la orientación de  $(M, T)$  es la natural,

$$\text{or}_f(\sigma) = \text{sig}|v^1 - v^0 \dots v^n - v^0| \times \text{sig}|f(v^1) - f(v^0) \dots f(v^n) - f(v^0)|$$

Ahora si  $\alpha = \{e^i\}_{i=1}^n$  y  $\beta = \{v^i - v^0\}_{i=1}^n$

$$\begin{aligned} M_\alpha^\alpha(A_\sigma) &= M_\alpha^\beta(\text{id}) \quad M_\beta^\alpha(A_\sigma) = \\ &= (v^1 - v^0, \dots, v^n - v^0)^{-1} \quad (A(v^1 - v^0) \dots A(v^n - v^0)) \end{aligned}$$

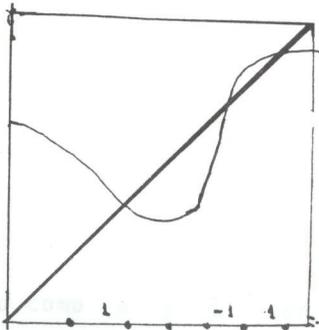
$$A(v^i - v^0) = Av^i - Av^0 = f(v^i) - f(v^0)$$

$$\text{sig det}(v^1 - v^0 \dots v^n - v^0)^{-1} = \text{sig det}(v^1 - v^0 \dots v^n - v^0),$$

entonces

$\text{sig det } M_\alpha^\alpha(A_\sigma) = \text{sig det } M_\gamma^\gamma(A_\sigma)$  para toda base  $\gamma$  y es igual a  $\text{or}_f(\sigma)$ .

Para ilustrar  $\text{or}_f(\sigma)$  en el caso de una función continua de un intervalo  $[a, b]$  en sí mismo tenemos el dibujo siguiente:



Los 3 segmentos señalados con flechas son los  $\epsilon$ -regulares respecto a  $(I - f)_T$  y en cada uno se señala la orientación, -1 si corta a la diagonal desde arriba, 1 si la corta desde abajo.

Ahora veremos que  $or_{\mathcal{F}}$  es una orientación para los simplejos  $\epsilon$ -regulares. Sea

$$S_T^{\mathcal{F}} = \left\{ \sigma \in T \mid \sigma \text{ es } \epsilon\text{-regular} \right\}$$

$S_T^{\mathcal{F}}$  es una triangulación y  $or_{\mathcal{F}}$  la orientación que sirve para definir el grado de  $f$ .

Proposición 5.1.9.  $or_{\mathcal{F}}$  es una orientación de  $S_T^{\mathcal{F}}$ .

Demostración: Sea  $\tau$  la faceta opuesta al vértice  $v$  en  $\sigma$  y al vértice  $\bar{v}$  en  $\bar{\sigma}$ . Si  $\tau = v^0 \dots v^{n-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} or_{\mathcal{F}\sigma}(\tau) &= or(v^0, \dots, v^{n-1}, v) \times \text{sig} |f(v^1) - f(v^0) \dots f(v^{n-1}) - f(v^0)f(v) - f(v^0)| \\ &= or_{\sigma}(\tau) \times \text{sig} \ell_{H_{\mathcal{F}(\tau)}}(f(v)). \end{aligned}$$

Donde  $H_{\mathcal{F}(\tau)}$  es el hiperplano generado por  $f(v^0), \dots, f(v^{n-1})$ .

Análogamente

$$or_{\mathcal{F}\bar{\sigma}}(\tau) = or_{\bar{\sigma}}(\tau) \times \text{sign} \ell_{H_{\mathcal{F}(\tau)}}(f(\bar{v})).$$

$$or_{\sigma}(\tau) = -or_{\bar{\sigma}}(\tau)$$

Por otro lado como  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$  son  $\epsilon$ -regulares, existe  $\epsilon_0$  tal

que si  $\varepsilon$  positiva es menor que  $\varepsilon_0$ ,  $\bar{\varepsilon}$  está en el interior de  $f_T(\sigma)$  y de  $f_T(\bar{\sigma})$  y por lo tanto  $f(v)$  y  $f(\bar{v})$  tienen que estar en la misma región de  $H_{f(\tau)}$  en que está  $\bar{\varepsilon}$  y

$$\text{Sign } \ell_{H_{f(\tau)}}(f(v)) = \text{sign } \ell_{H_{f(\tau)}}(f(\bar{v})).$$

Por lo tanto  $or_{f\sigma}(\tau) = -or_{f\bar{\sigma}}(\tau)$  y  $or_f$  es una orientación de  $S_T^f$ .

Dada  $(M, T)$  una  $(n+1)$ -variedad P.L. orientada, una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, y  $\mathbb{R}^n$  con la orientación estándar. Introduciremos la orientación de una faceta  $\tau$  respecto de  $\sigma$ , con  $\tau < \sigma^n$  y de  $F_T$ .

Definición 5.1.10.

Dado  $\sigma \in T$  transversal respecto a  $F$ . Si  $\sigma = v^0 \dots v^{n+1}$  y  $\tau = v^0 \dots v^n$  faceta  $\varepsilon$ -regular de  $\sigma$  respecto a  $F_T$ , definimos la orientación de  $\tau$  respecto a  $\sigma$  y  $F_T$ ,  $or_{F\sigma}(\tau)$ , como  $or_\sigma(\tau) \times or(F(\tau))$ .

Proposición 5.1.11.  $or_{F\sigma_1}(-\tau) = -or_{F\sigma_2}(\tau)$ . Si  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$  es  $\varepsilon$ -regular respecto a  $F_T$ .

Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  transversales y  $\tau$  la faceta  $\varepsilon$ -regular común si  $\sigma_1 = v^0 \dots v^j \dots v^{n+1}$ ,  $\sigma_2 = v^0 \dots v^{-j} \dots v^{n+1}$  y

Demostración. Si  $\sigma_1 = v^0 \dots v^j \dots v^{n+1}$  y  $\sigma_2 = v^0 \dots v^{-j} \dots v^{n+1}$  y  $\tau = v^0 \dots v^j \dots v^{-j} \dots v^{n+1}$

$\tau = v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1}$ , entonces  $or_{\bar{f}\sigma_1}(\tau) =$

$$or(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1} v^j) \times \text{sign} |f(v^1) - f(v^0) \dots f(v^{j-1}) - f(v^0) f(v^{j+1}) - \\ - f(v^0) \dots f(v^{n+1}) - f(v^0)|$$

$|f(v^1) - f(v^0) \dots f(v^{j-1}) - f(v^0) f(v^{j+1}) - f(v^0) \dots f(v^{n+1}) - f(v^0)| \neq 0$ , pues

$\tau$  es  $\epsilon$ -regular.

$$or_{\bar{f}\sigma_2}(\tau) =$$

$$or(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1} \bar{v}^j) \times \text{sign} |f(v^1) - f(v^0) \dots f(v^{j-1}) - f(v^0) f(v^{j+1}) - f(v^0) \dots \\ \dots f(v^{n+1}) - f(v^0)|.$$

$$or(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1} v^j) = or_{\sigma_1}(\tau),$$

$$or(v^0 \dots v^{j-1} v^{j+1} \dots v^{n+1} \bar{v}^j) = or_{\sigma_2}(\tau),$$

pero  $or_{\sigma_1}(\tau) = -or_{\sigma_2}(\tau)$  pues  $or$  es una orientación de  $(M, \tau)$ .

$$\text{Entonces } or_{\bar{f}\sigma_1}(\tau) = -or_{\bar{f}\sigma_2}(\tau).$$

En seguida suponiendo que la orientación de  $(M, \tau)$  es la natural,  $f$  y  $R^n$  como antes probamos la siguiente proposición.

Proposición 5.1.12. Sea  $\sigma$  transversal y  $\tau_1$  y  $\tau_2$  sus facetas  $\epsilon$ -regulares entonces  $or_{f\sigma}(\tau_1) = -or_{f\sigma}(\tau_2)$ .

Demostración. Si  $\sigma = v^0 \dots v^{n+1}$ ,  $\tau_1$  faceta opuesta a  $v^j$  y  $\tau_2$  opuesta a  $v^k$ .

$$\text{or}_{f\sigma}(\tau_1) =$$

$$\text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ v^0 & v^{j-1} & v^{j+1} & v^{n+1} & v^j & \dots & \dots \end{vmatrix} \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \bar{f}(v^0) & \bar{f}(v^{j-1}) & \bar{f}(v^{j+1}) & \dots & \bar{f}(v^{n+1}) \end{vmatrix},$$

$$\text{or}_{\bar{f}\sigma}(\tau_2) =$$

$$\text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ v^0 & v^{k-1} & v^{k+1} & v^{n+1} & v^k & \dots & \dots \end{vmatrix} \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \bar{f}(v^0) & \bar{f}(v^{k-1}) & \bar{f}(v^{k+1}) & \dots & \bar{f}(v^{n+1}) \end{vmatrix}.$$

$\tau_1$  y  $\tau_2$  son  $\varepsilon$ -regulares entonces existe  $\varepsilon_0$  tal que si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\bar{\varepsilon} \in (f_{\tau_1}(\tau_1)) \cap (f_{\tau_2}(\tau_2))$ .

Sea  $H$  el hiperplano de  $R^n$  generado por los vectores a.i  $f(v^0), \dots, \bar{f}(v^{j-1}), \bar{f}(v^{j+1}), f(v^{k-1}), f(v^{k+1}), \dots, f(v^{n+1})$ .

$f(v^j)$  no está en  $H$ , pues

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & f(v^j) & f(v^{k-1}) & f(v^{k+1}) & f(v^{n+1}) & \dots & \dots \end{vmatrix} \neq 0.$$

Análogamente  $f(v^k)$  no está en  $H$ , pero como  $f_{\tau_1}(\tau_1)$  y  $f_{\tau_2}(\tau_2)$  se intersectan en su interior, entonces  $f(v^j)$  y  $f(v^k)$  están en la misma región de  $H$ .

Por lo tanto  $\text{sig } \ell_H(f(v^k)) = \text{sig } \ell_H(f(v^j))$ .

$$\begin{aligned} & \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & f(v^{j-1}) & f(v^{j+1}) & f(v^{k-1}) & f(v^k) & f(v^{k+1}) & f(v^{n+1}) & & & & & \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{n+1-j} (-1)^{n+1-k-1} \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ f(v^0) & f(v^j) & f(v^{k-1}) & f(v^{k+1}) & f(v^n) & & & \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} & \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ v^0 & v^{j-1} & v^{j+1} & v^k & v^{n+1} & v^j & & & \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{n+1-j} (-1)^{n+1-k} \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ v^0 & v^j & v^{k-1} & v^{k+1} & v^{n+1} & v^k & & & \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados podemos ver que  $or_{f\sigma}(\tau_1) = -or_{f\sigma}(\tau_2)$   
Orientaciones de las facetas frontera, relativas al simplejo  
que pertenecen en las cadenas (trajectorias) de simplejos  
 $\epsilon$ -regulares.

Teorema 5.1.13 (Versión P.L. de la construcción de Pontryagin).

Sean  $(M, T)$ ,  $f$  y  $R^n$  como antes y  $\tau_0, \dots, \tau_s$  una cadena finita de facetas de  $T$ ,  $\epsilon$ -regulares y  $\tau_0$  y  $\tau_k$  en la frontera de  $T$ , entonces  $or_{f\sigma_0}(\tau_0) = or_{f\sigma_k}(\tau_k) = -or_{f\sigma_k}(\tau_{k+1})$  para  $k = 1, \dots, s-1$ .

Demostración por inducción: Sea  $\sigma_0$  el elemento de  $T$  con las facetas  $\tau_0$  y  $\tau_1$  de nuestra cadena.

$$\text{or}_{f\sigma_0}(\tau_0) = -\text{or}_{f\sigma_0}(\tau_1) \text{ por 5.1.12.}$$

$$\text{y } \text{or}_{f\sigma_1}(\tau_1) = -\text{or}_{f\sigma_0}(\tau_1) \text{ por 5.1.13.}$$

Supongamos que para  $\hat{k} < s - 1$

$$\text{or}_{f\sigma_0}(\tau_0) = \text{or}_{f\sigma_{\hat{k}}}(\tau_{\hat{k}}) = -\text{or}_{f\sigma_{\hat{k}}}(\tau_{\hat{k}+1}),$$

$$\text{or}_{f\sigma_{\hat{k}+1}}(\tau_{\hat{k}+1}) = -\text{or}_{f\sigma_{\hat{k}}}(\tau_{\hat{k}+1}) \text{ por 5.1.11.}$$

$$\text{or}_{f\sigma_{\hat{k}+1}}(\tau_{\hat{k}+1}) = -\text{or}_{f\sigma_{\hat{k}+1}}(\tau_{\hat{k}+2}) \text{ por 5.1.12.}$$

Por lo tanto

$$\text{or}_{f\sigma_0}(\tau_0) = \text{or}_{f\sigma_k}(\tau_k) = -\text{or}_{f\sigma_k}(\tau_{k+1})$$

para  $k = 1, \dots, s-1$ .

Ejemplo: Sea  $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$  definida como

$$f(x) = x^2 - x + .5$$

Consideremos la triangulación de  $[0,1]$  con vértices

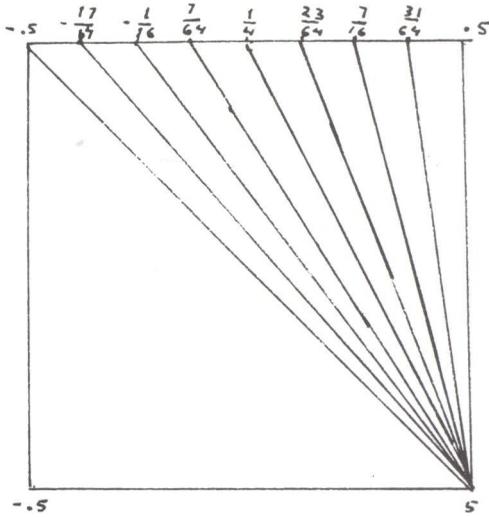
$\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$  y una triangulación de

$[0,1] \times [0,1]$  como en el lema 2. y sea  $h(x,t) = -f(x) + x$

$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$  usando a  $h$  para etiquetar

$$h(0,t) = -.5, \quad h(\frac{1}{8},t) = -\frac{17}{64}, \quad h(\frac{1}{4},t) = -\frac{1}{16} \quad h(\frac{3}{8},t) = \frac{7}{64}$$

$$h(\frac{1}{2},t) = \frac{1}{4}, \quad h(\frac{5}{8},t) = \frac{23}{64}, \quad h(\frac{3}{4},t) = \frac{7}{16}, \quad h(\frac{7}{8},t) = \frac{31}{64}, \quad h(1,t) = .5$$



$$\text{or}_{h\sigma}(\tau_0) = 1, \quad \text{or}_{h\sigma_0}(\tau_1) = -1, \quad \text{or}_{h\sigma_1}(\tau_1) = 1$$

$$\text{or}_{h\sigma_1}(\tau_2) = -1, \quad \text{or}_{h\sigma_2}(\tau_2) = 1, \quad \text{or}_{h\sigma_2}(\tau_3) = -1$$

$$\text{or}_{h\sigma_3}(\tau_3) = 1, \quad \text{or}_{h\sigma_3}(\tau_4) = -1$$

Con la siguiente proposición relacionaremos la orientación que una faceta frontera en  $Mx\{a\}$  ó  $Mx\{b\}$  recibe de  $h$  con la que recibe de  $f$  considerada como simplejo en  $M$ , lo que será de gran utilidad técnica.

Proposición 5.1.14. Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos triangulaciones de  $M$  y  $T$  una triangulación de  $Mx[a,b]$  tal que si  $\bar{\tau}$  es una faceta de la frontera de  $T$  contenida en  $Mx\{a\}\{b\}$ , entonces es de la forma  $\tau \times \{a\}\{b\}$ , con  $\tau \in T_1(T_2)$ .

Si consideramos a  $(M, T_1)$  y a  $(M, T_2)$  orientadas natural



Análogamente para  $or(\tau \times \{b\})$  sólo que  $c \in [a, b]$

$$\left| \begin{pmatrix} v^1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^0 \\ b \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} v^n \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^{n+1} \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^0 \\ b \end{pmatrix} \right| = (c-b) |v^1 - v^0 \dots v^n - v^0|$$

$$\text{sig}|\bar{v}^1 - \bar{v}^0 \dots \bar{v}^{n+1} - \bar{v}^0| = -\text{sig}|v^1 - v^0 \dots v^n - v^0|$$

$$y \text{ or}_{\bar{f}_0}(\tau \times \{b\}) = -\text{or}_f(\tau)$$

Corolario 5.1.15. Sean  $M, T_1, T_2, T$  como en 5.1.14,  $(M, T_1), (M, T_2)$  y  $(M \times [a, b], T)$  orientados naturalmente, si  $\tau_0$  y  $\tau_k$  son 2 simplejos  $\epsilon$ -regulares en  $M \times \{a\}$  ó en  $M \times \{b\}$  ligados por una cadena de simplejos  $\epsilon$ -regulares (4.3.4), entonces  $\text{or}_f(\tau_0) = -\text{or}_f(\tau_k)$  si están en la misma  $M \times \{a\}$  ó  $M \times \{b\}$  y  $\text{or}_f(\tau_0) = \text{or}_f(\tau_k)$  si están en distinta.

5.2. Grado de un mapeo. En este inciso, daremos la definición establecida por Peitgen y Sieberg [1981] del grado de una función continua relativa a un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^m$  abierto y acotado. La notación  $U$  se empleará en lo que resta del capítulo para un conjunto de este tipo.

Supondremos además que todas las variedades P.L. estarán orientadas naturalmente y  $\mathbb{R}^n$  tendrá la orientación estándar.

De notemos como  $M(U)$  al conjunto de funciones continuas definidas de  $\bar{U}$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\bar{0}$  no está en  $F(\partial U)$ .

Consideramos una triangulación  $T$  tal que  $U \subset |T|$ ; si  $F \in M(U)$  cabe esperar, dada la relación que se ha establecido entre los ceros de  $F$  y los simplejos  $\epsilon$ -regulares respecto a  $F_T$ , que el "número algebraico" de ceros de  $F$  se pueda obtener con la suma de las orientaciones de dichos simplejos. Para hacer válida una definición de este tipo, necesitamos que no dependa de la triangulación involucrada, lo que se cumple sólo en el caso de que el diámetro de la triangulación sea lo suficientemente pequeña para que los simplejos "cercaños" a la frontera de  $U$ , no sean  $\epsilon$ -regulares respecto a  $F_T$ .

Lo primero que haremos en este inciso será construir la cota  $r(F)$ , para que cualquier triangulación cuyo diámetro sea menor que ésta, sirva para definir el grado de  $F$  en  $\bar{0}$  respecto a  $U$ .

Posteriormente daremos la definición de grado y demostraremos su independencia respecto a la triangulación usada.

Para demostrar esa independencia se toman dos triangulaciones  $T_0$  y  $T_1$  tales que  $U \subset |T_i|$  y  $\text{diam } T_i < r(F)$ ; consideramos  $M = M_{T_0}(U) \times [0, .5] \cup M_{T_1}(U) \times [.5, 1]$  y triangulamos  $M$  de tal manera que las facetas de  $M \times \{i\}$  sean de la forma  $\tau \times \{i\}$ , donde  $\tau \in M_{T_i}(U)$  con  $i = 0, 1$ . Recíprocamente, que las facetas de dicha forma estén en  $M_{T_i}(U) \times \{i\}$ , si  $T$  es la triangulación de  $M$ , se etiqueta de acuerdo a  $h(x, t) ; f(x)$ .

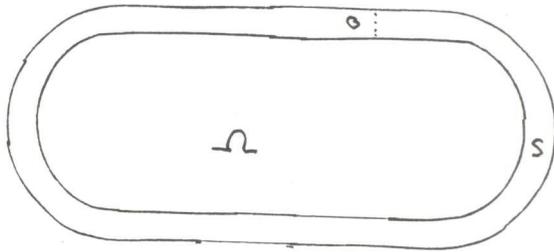
Las únicas facetas  $\epsilon$ -regulares, respecto de  $h_T$ , que están en la frontera de  $M$ , pertenecen a  $M_{T_i}(U) \times \{i\}$  para alguna  $i$ .

Cómo  $M$  es compacta, las cadenas de facetas  $\epsilon$ -regulares, ó no tienen elementos en  $\partial M$  ó tienen exactamente 2. Estos elementos frontera pertenecen a  $M_{T_i}(U) \times \{i\}$  para alguna  $i$ .

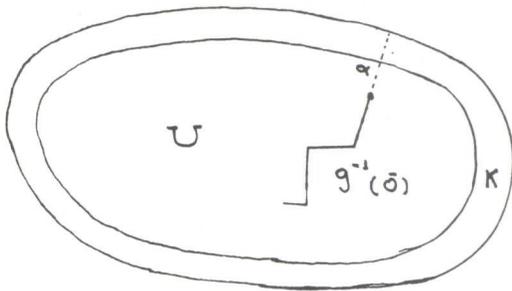
Los resultados obtenidos en 5.1 nos aseguran que la orientación de dos elementos frontera que están en la misma cadena son contrarios si están en la misma  $M_{T_i}(U)$  y son iguales si están en diferente, entonces  $\sum_{\sigma \in M_{T_i}(U)} \text{or}_F(\sigma)$  no depende de  $T_i$ , ó lo que es lo mismo el grado no depende de la triangulación.

Finalmente demostraremos las propiedades centrales de grado: normalización, invarianza homotópica y aditividad; que junto con la extensión de la definición de grado en cualquier punto  $p \notin F(\partial U)$ , permiten derivar todas las otras propiedades.

Definición 5.2.1. Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $\beta > 0$ , el conjunto  $S = \{x \in \Omega \mid \exists a \in \partial\Omega \text{ con } |x-a| \leq \beta\}$ , se llama el collar de  $\Omega$  con diámetro  $\beta$



Sea  $U \subset \mathbb{R}^n \times [a, b]$  y  $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $g \in M(U)$  y  $g^{-1}(\bar{0}) \neq \emptyset$ ,  $g^{-1}(\bar{0})$  y  $\partial U$  compactos, se puede, entonces, hablar de la distancia entre ellos, sea  $\alpha = \text{dist}(g^{-1}(\bar{0}), \partial U)$ ; denotemos como  $K$  al collar de  $U$  de diámetro  $\frac{\alpha}{2}$ .



Teorema 5.2.2. Si  $g$  es como antes existe  $\lambda > 0$  tal que si  $S \subset K$  cerrado y  $\text{diam } S < \lambda$ , entonces  $g(S)$  está en alguna región abierta que no contiene a cero, determinada por un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ .

La demostración se basa en el siguiente teorema que enunciamos sin demostrar:

Teorema 5.2.3. Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  compacto y  $\{U_i\}$  una cubierta abierta de  $D$ , entonces existe un número positivo  $\lambda(\{U_i\})$  (número de Lebesgue) tal que si  $S \subset D$  cerrado y  $\text{diam } S < \lambda(\{U_i\})$ ,  $S$  está contenido en algún  $U_i$  de la cubierta.

Demostración de 5.2.2.

Consideremos a  $H$ , un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que no contenga a  $\bar{0}$  y llamemos  $R_H$  a la región abierta de  $\mathbb{R}^n$ , determinada por  $H$ , que no contiene a cero.

La familia  $\{g^{-1}(R_H)\}_H$  es una cubierta abierta de  $K$ . Pues si  $x \in K$ ,  $g(x) \neq \bar{0}$ , entonces  $g(x)$  está en  $R_H$  para algún  $H$  y  $x$  está en  $g^{-1}(R_H)$ , por lo que  $\{g^{-1}(R_H)\}_H$  cubre a  $K$ , además  $g^{-1}(R_H)$  es abierto pues  $g$  continúa.

Sea  $\{U_i\}_{i=1}^m$ , una subcubierta finita de  $\{g^{-1}(R_H)\}_H$  y  $\lambda(\{U_i\})$  el número de Lebesgue correspondiente.

Sea  $S \subset U_i$  para alguna  $i$  y  $g(S) \subset g(U_i) = g(g^{-1}(R_H))$  para alguna  $H$ .

Es decir  $g(S)$  está contenido en una de las regiones, la que no contiene a cero, de un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que no pasa por el origen. Además para garantizar que  $|g_r(x) - g(x)|$  sea pequeño hacemos las consideraciones:

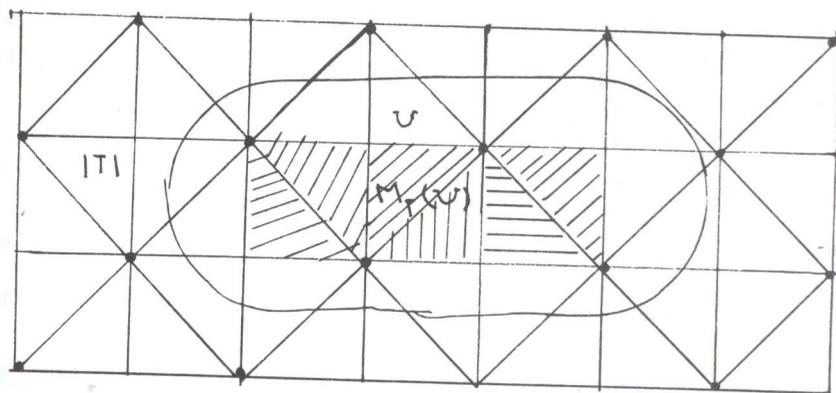
$|g|$  es continua, entonces alcanza un mínimo positivo en  $K$ , sea  $\delta$  tal que si  $\text{diam } T < \delta$  entonces

$$|g_T(x) - g(x)| < \min_{x \in K} |g(x)|.$$

Denotemos como  $r(g) = \min\{\frac{\alpha}{2}, \lambda, \delta\}$ .

Consideremos  $U \subset \mathbb{R}^m$  y  $T$  una triangulación en  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$U \subset |T| \quad \text{denotamos} \quad M_T(U) = \bigcup_{\sigma \in T} \bigcap_{\sigma \subset U} \sigma$$



Proposición 5.2.4. Sean  $U \subset \mathbb{R}^n \times [a, b]$  y  $g \in M(U)$ , para cualquier  $(n+1)$ -triangulación  $T$  tal que  $U \subset |T|$  y  $\text{diam } T < r(g)$ , se tiene que  $\bar{0}$  no está en  $\overline{g(U - M_T(U))}$  y cualquier  $\sigma$  en  $T$ ,  $\sigma \subset \overline{U - M_T(U)}$ , no es  $\epsilon$ -regular respecto a  $g_T$ .

Demostración: Si  $x \in \overline{U - M_T(U)}$ ,  $x$  está en algún  $\sigma$  de  $T$  que intersecta a  $\partial U$  y existe  $a$  en  $\partial U$  tal que  $|x-a| < \frac{\alpha}{2}$ , por lo tanto  $g(x) \neq 0$ .

Además  $\overline{U - M_T(U)}$  compacto y si  $\sigma$  está contenido en  $\overline{U - M_T(U)}$ ,  $\sigma \subset K$  y  $g(\sigma) \subset R_H$ , para algún hiperplano  $H$ ,  $\bar{0} \notin R_H$ .

Supongamos que para alguna  $\hat{x} \in \sigma \subset K$   $g_T(\hat{x}) = \bar{0}$ , entonces  $|g(x)| < \min_{x \in K} |g(x)|$ !!

Además el  $\min_{x \in K} |g_T(x)|$  es positivo, entonces para toda  $\epsilon_0 > 0$ , existe  $\epsilon$  positivo menor que  $\epsilon_0$  tal que  $\bar{\epsilon}$  no está en  $g_T(x)$ , basta que  $\epsilon < \min_{x \in K} \underbrace{|g(x)|}_{n+1}$  y por lo tanto

$\sigma$  no es  $\epsilon$ -regular.

De aquí en adelante consideraremos a todas las variedades P.L. orientadas naturalmente y a  $R^m$  con la orientación estandar.

Definición 5.2.5. Sean  $U \subset R^n$ ,  $f \in M(U) \rightarrow T$  tal que  $U \subset |T|$  y  $\text{diam } T < r(f)$ .

El grado de  $f$  en  $\bar{0}$  respecto a  $U$   $\text{deg}(f, U, \bar{0})$ , es  $\sum_{\sigma \in S_T^f(U)} \sigma_r f(\sigma)$ , donde  $S_T^f(U)$  es el subconjunto de  $T$  de los  $n$ -simplejos  $\epsilon$ -regulares respecto a  $f_T$ .

Para demostrar que la definición de grado no depende de la triangulación, necesitamos construir una  $(n+1)$ -triangulación que enlace a dos triangulaciones que tengan las propiedades de la definición 5.2.5.

Lema 5.2.6. Dados  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in M(U)$ ,  $T_0$  y  $T_1$  (dos triangulaciones tales que  $U \in |T_i|$  y  $\text{diam}(T_i) < r(f)$ ) y  $0 \notin f(U - (M_{T_i}(U)))$  para  $i = 0, 1$ , entonces existe una  $(n+1)$ -variedad  $(M, T)$  tal que  $M \subset \mathbb{R}^n \times [0, 1]$  y se cumplen:

- 1-  $M \cap \mathbb{R}^n \times \{i\} = |M_i(U)| \times \{i\}$  para  $i = 0, 1$
- 2- Las facetas de  $T$  contenidas en  $\mathbb{R}^n \times \{i\}$  son de la forma  $\tau \times \{i\}$  con  $\tau \in T_i$  para  $i = 0, 1$ .
- 3- Todas las facetas  $\epsilon$ -regulares respecto a  $h_T$  y que son de frontera de  $T$  son de la forma  $\tau \times \{i\}$  con  $\tau \in M_{T_i}(U)$  para  $i = 1$  ó  $i = 0$ . Donde  $h(x, t) = f(x)$ .

A  $T$  se le llama triangulación de enlace.

Demostración:

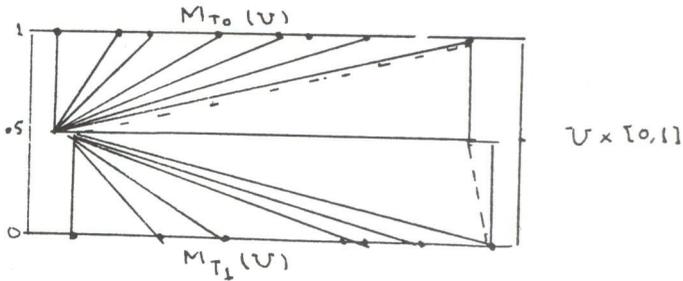
Sea  $M = M_{T_0}(U) \times [0, .5] \cup M_{T_1}(U) \times [.5, 1]$ .

Para triangular  $M$  con  $T$  que tenga la propiedad 2, se usan técnicas estándar en topología P.L. Rourke Saunders [1]).

Si  $U$  es convexo podemos construir un  $n$ -simplejo  $S$  que lo contenga y triangular  $S \times [0, .5]$  por un lado y  $S \times [.5, 1]$  por otro, con las técnicas usadas en el inciso 2.1, de tal manera que las facetas en  $S \times \{i\} \cap |T| \times \{i\}$  son de la forma  $\tau \times \{i\}$  con  $\tau \in T_i$ , para  $i = 0, 1$ . (La

etiquetación fuera de  $U \times \{i\}$  se hace de tal manera de no introducir simplejos  $\epsilon$ -regulares).

En la figura ilustramos  $T$  cuando  $n = 1$



Etiquetamos  $T^0$  de acuerdo a  $h_T(x,t) = f(x)$ . Las facetas de  $T$  que se encuentran en  $\partial M$  pueden ser de 3 tipos:

a- Estar contenidas en  $\tau \times [0, .5]$  con  $\tau$  en  $(M_{T_0}(U))^{n-1}$  ó en  $\tau \times [.5, 1]$  con  $\tau$  en  $(M_{T_1}(U))^{n-1}$ .

b- Estar contenidas en la diferencia simétrica de

$$M_{T_0}(U) \times \{.5\} \text{ y de } M_{T_1}(U) \times \{.5\}$$

$$[(|M_{T_0}(U)| - |M_{T_1}(U)|) \cup (|M_{T_1}(U)| - |M_{T_0}(U)|)] \times \{.5\}$$

c- Ser de la forma  $\tau_i \times \{i\}$  con  $\tau_i \in M_{T_i}(U)$ ,  $i = 0, 1$

Las de los 2 primeros tipos no son  $\epsilon$ -regulares, pues las primeras tienen etiquetas repetidas y las segundas son mapeadas por  $f_T$ , en una región abierta  $R_H$  que no contiene a cero (5.2.2). Las facetas que cumplen son las únicas que pueden ser  $\epsilon$ -regulares y  $T$  cumple las propiedades 1,2,3.

Teorema 5.2.7. La definición de grado no depende de la triangulación.

Demostración: Sean  $T_0$  y  $T_1$  dos triangulaciones tales que  $U \subset |T_i|$  y  $\text{diam } T_i < r(f)$  para  $i = 0, 1$ .

Por 5.2.6 existe  $(M, T)$  tal que

$\partial T \cap \mathbb{R}^n \times \{i\}$  es  $\bar{T}_i = \{\tau \times \{i\} \mid \tau \in M_{T_i}(U)\}$  para  $i = 0, 1$ .

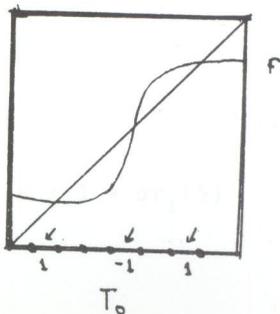
Definimos  $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $h(x, t) = f(x)$

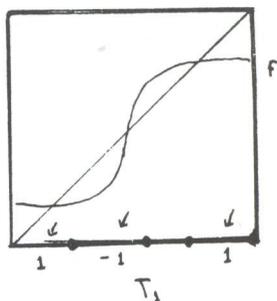
Los únicos simplejos  $\epsilon$ -regulares  $(h_T)$  que pertenecen a  $\partial T$  son de  $M_{T_i}(U)$  para alguna  $i$ .

Entonces todas las cadenas de facetas  $\epsilon$ -regulares de  $\bar{T}$  que empiezan en  $\bar{T}_0$  terminan en  $\bar{T}_0$  ó en  $\bar{T}_1$  y lo mismo para las cadenas que empiezan en  $\bar{T}_1$  terminan en  $\bar{T}_1$  ó en  $\bar{T}_0$ .

Consideremos  $(M, T_i)$  con la orientación natural, aplicando el corolario 5.1.2. tenemos que

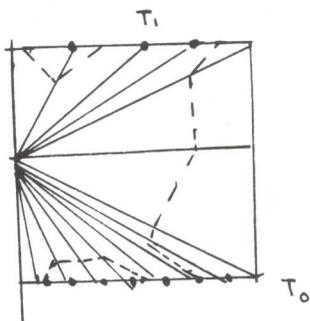
$$\sum_{\sigma \in S_{T_0}^f(U)} \text{or}_f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_{T_1}^f(U)} \text{or}_f(\sigma).$$





Los 3 simplejos con flecha son los  $\epsilon$ -regulares  $(1-f)$

$$\deg(f, U, \bar{0}) = -1.$$



Definición 5.2.8. Si  $f \in M(U)$  y  $P \notin f(\partial U)$

$$\deg(f, U, P) = \deg(f-P, U, \bar{0}).$$

Como un corolario de 5.1.12 y del lema 2. tenemos

Proposición 5.2.9. Si  $S$   $n$ -simplejo de  $R^n$ ,  $f \in M(\overset{\circ}{S})$  y existe  $x \in \overset{\circ}{S}$  tal que  $f(x) = \bar{0}$  entonces

$$\deg(f, \overset{\circ}{S}, \bar{0}) = \pm 1 = \text{or}_f(S)$$

## Propiedades del grado de Brouwer

### Normalización

Teorema 5.2.1. Si  $\bar{0}$  está  $U \subset \mathbb{R}^n$ , pero  $\bar{0} \notin \partial U$ , entonces  $\deg(\text{Id}_{\bar{U}}, U, \bar{0}) = 1$ .

Demostración: Sea  $T$  con las propiedades  $U \subset |T|$  y  $\text{diam } T < \frac{\alpha}{2} = r(\text{Id}_{\bar{U}})$  y sea  $\bar{\alpha} = d(\bar{0}, \partial \bar{U})$ . Existe un sólo  $\sigma \in T$  tal que es  $\epsilon$ -regular, pues para  $\epsilon < \frac{\alpha}{2}$ ,  $\bar{\epsilon}$  está en el interior de un sólo  $\sigma$ ,  $\sigma \in M_T(U)$ . Si  $\sigma = v^0 \dots v^n$ , entonces  $\deg(\text{Id}_{\bar{U}}, U, \bar{0}) = \text{or}_{\text{Id}_{\bar{U}}}(\sigma) =$   
 $= \text{sig det} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v^0 & & v^n \end{pmatrix} \times \text{sig det} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v^0 & & v^n \end{pmatrix} = 1$ .

Con la definición de grado se obtiene directamente la propiedad de invarianza homotópica.

### Invarianza homotópica

Teorema 5.2.12. Para  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $h: [a, b] \rightarrow M(U)$  continua,

$\deg(h(t), U, \bar{0})$  es constante respecto a  $t \in [a, b]$ .

Demostración: Para  $\hat{t}$  en  $(a, b)$  sean  $T_a$  y  $T_{\hat{t}}$  triangulaciones tales que  $U \subset |T_a|$  y  $U \subset |T_{\hat{t}}|$ , consideramos la triangulación  $\bar{T}(5.2.)$  de enlace de  $T_a$  y  $T_{\hat{t}}$ .

Si  $\text{diam}(T_a) < r(h(a))$  y  $\text{diam}(T_{\hat{t}}) < r(h(\hat{t}))$ , entonces

Los únicos simplejos  $\epsilon$ -regulares respecto a  $h_{T_a}$  en  $\partial M$ , corresponden a  $M_{T_a}(U)$  y a los de  $M_{\hat{T}_a}(U)$ , entonces las cadenas que empiezan en  $M_{T_a}(U)$  terminan allí mismo o en  $M_{\hat{T}_a}(U)$  y análogamente para las que empiezan en  $M_{\hat{T}_a}(U)$  por lo que por el corolario 5.1.15

$$\sum_{\sigma \in S_{T_a}^h(a)(U)} \text{or}_{h(a)}(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_{\hat{T}_a}^h(\hat{a})(U)} \text{or}_{h(\hat{a})}(\sigma)$$

es decir  $\text{deg}(h(\cdot, t), U, \bar{0})$  no depende de  $t$ .

Propiedad de aditividad.

Teorema 5.2.12. Sea  $f \in M(U)$ ,  $U \neq \emptyset$  y sean  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos de  $U$  abiertos y ajenos con  $0 \notin f(U - U_1 \cup U_2)$ .

Entonces

$$\text{deg}(f, U, \bar{0}) = \text{deg}(f, U_1, \bar{0}) + \text{deg}(f, U_2, \bar{0}).$$

Demostración: Sea  $T$  una triangulación tal que  $U \subset |T|$  y  $\text{diam } T < r(f)$

$$S_T^f(U) = S_T^f(U_1) \cup S_T^f(U_2) \cup S_T^f(U - U_1 \cup U_2)$$

$$\text{pero } S_T^f(U - U_1 \cup U_2) = \emptyset$$

$$\text{deg}(f, U, \bar{0}) = \sum_{\sigma \in S_T^f(U_1)} \text{or}_f(\sigma) + \sum_{\sigma \in S_T^f(U_2)} \text{or}_f(\sigma) =$$

$$= \text{deg}(f, U_1, \bar{0}) + \text{deg}(f, U_2, \bar{0}).$$

### 5.3. Unicidad del grado

Amann y Weiss [1973] son los que establecieron la definición axiomática de grado topológico para cualquier conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado; cómo una función  $g(\cdot, U)$  definida de  $M(U)$  en los enteros que cumple las propiedades:  $g(\text{Id}_{\bar{U}}, U) = 1$  si  $\bar{0} \in U - \partial U$  (normalización); si  $h: [0,1] \rightarrow M(U)$  continua,  $g(h(t), U)$  no depende de  $t$  (invarianza homotópica) y si  $U \neq \emptyset$  y  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos ajenos de  $U$  tales que  $0 \notin F(\bar{U} - U_1 \cup U_2)$ , entonces  $g(F, U) = g(F|_{U_1}, U_1) + g(F|_{U_2}, U_2)$  (aditividad). Tenemos además que si  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \notin F(\partial U)$  se define  $g(F, U, p) = g(F - p, U)$ . En su artículo Amann y Weiss demuestran que el grado topológico es único.

Los resultados del inciso 5.2 demuestran que  $\text{deg}(\cdot, U)$  es un grado topológico y entonces la definición de grado de Peitgen y Sieberg coincide con otras más usuales.

En este inciso probamos que el único grado topológico es  $\text{deg}(\cdot, U)$ .

Para demostrarlo es necesario hacer ver que

$g(F, U) = g(F_T, M_T(U))$ , para  $T$  triangulación tal que  $U \subset |T|$  y  $\text{diam } T < \epsilon(F)$ .

Por aditividad finita  $g(F_T, M_T(U)) = \sum_{\sigma \in T} g(F_T, \sigma)$ .

Entonces sólo falta probar que  $g(F_T, \sigma) = \text{or}_F(\sigma)$ ; para que se obtenga que  $g(F, U)$  es  $\text{deg}(F, U)$ .

Para llevar a cabo los detalles de la demostración es necesario establecer varias propiedades del grado, que tienen interés, por sí mismas, tanto teórico como práctico; dentro de 5.3 se demuestran algunas de ellas dejando la demostración de otras para un apéndice que se incluye al final del capítulo.

### Definición de grado topológico

Sea  $C$ , las funciones continuas de  $R^n$  en  $R^n$ , con la topología de la convergencia uniforme.

$$V = \{U \subset R^n \mid U \text{ abierto y acotado}\}$$

Las propiedades siguientes son ciertas

Para  $U \in V$ ,  $\text{id}_U \in M(U)$

Si  $U_1 \subset U$ ,  $U_1$  abierto,  $f \in M(U)$ , y  $\bar{0} \notin f(\bar{U} - U_1)$ , entonces  $f|_{\bar{U}_1}$  está en  $M(U_1)$

Sea  $M(V) = \{M(U) \mid U \in V\}$

Definición 5.3.1. Un grado topológico  $g$  para  $M(V)$  es una colección de funciones  $\{g(\cdot, U) : M(U) \longrightarrow Z \mid U \in V\}$  que satisface:

a - (normalización) para cada  $U \in V$  con  $\bar{0} \in U$   $g(\text{id}_{\bar{U}}, U) = 1$ ,

b - (aditividad) para cada  $U \in V \mid U \neq \emptyset$  y  $U_1$  y  $U_2$  abiertos y ajenos subconjuntos de  $U$  y para cada  $f \in M(U)$  tal que  $\bar{0} \notin f(\bar{U} - U_1 \cup U_2)$ ,

$$g(f, U) = g(f|_{\bar{U}_1}, U_1) + g(f|_{\bar{U}_2}, U_2),$$

c - (invarianza homotópica) para cada  $U \in V$   $U \neq \emptyset$  y cada función continua  $h : [0, 1] \longrightarrow M(U)$ ,  $g(h(t), U)$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ .

Denotemos  $g(f, U_i)$  a  $g(f|_{\bar{U}_i}, U_i)$ .

Definición 5.3.2. Sean  $U \in V$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $f - p \in M(U)$  (es decir  $p \notin f(\partial U)$  y  $f \in M(U)$ ).

$$g(f, U, p) = g(f - p, U).$$

Proposición 5.3.3. Si  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \in V$ ,  $U \neq \emptyset$ , y  $f - p \in M(U)$ :

a). Si  $p \in U$ ,  $g(\text{id}, U, p) = 1$ .

b). Si  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos de  $U$  tales que  $p \notin f(\bar{U} - U_1 \cup U_2)$ , entonces

$$g(f, U, p) = g(f, U_1, p) + g(f, U_2, p)$$

c). Si  $U \neq \emptyset$ . Si  $h : [0, 1] \rightarrow C$  tal que  $p \notin h(t)(\partial U)$  para  $t \in [0, 1]$ , entonces  $g(h(t), U, p)$  no depende de  $t$ .

Teorema 5.3.4. Existe un grado topológico para  $M(V)$ .

Demostración: En el inciso 5.2 se demuestra que  $\text{deg}$  es un grado topológico.

Veremos ahora otras propiedades de  $g$  que se desprenden de las anteriores y que sirven para probar la unicidad del grado.

Teorema 5.3.5.  $g(f, \emptyset, p) = 0$ , donde  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Demostración: Sean  $U \in V$ . Sea  $U_1 = U$  y  $U_2 = \emptyset$

$p \notin f(\bar{U} - U_1 \cup U_2)$ , entonces por la propiedad de aditividad

$$g(f, U, p) = g(f, U, p) + g(f, \emptyset, p)$$

por lo tanto  $g(f, \emptyset, p) = 0$ .

Teorema 5.3.6. (traslación),  $f$  y  $p$  como en 5.3.1. y  $q$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $(p-q) \notin f(\partial U)$ , entonces  $g(f, U, p) =$   
 $= g(f - q, U, p - q)$ .

Demostración: por definición  $g(f - q, U, p - q) =$   
 $= g(f - q - (p - q), U) = g(f - q, U, p - q) =$   
 $= g(f - p, U, \bar{0}) = g(f, U, p)$  de nuevo por la definición 5.3.2.

Teorema 5.3.7. (Propiedad de Solución). Si  $f \in M(U)$  y  $p \notin f(\bar{U})$ ,  $g(f, U, p) = 0$

Demostración:

Sea  $U_1 = \emptyset$  y  $U_2 = \emptyset$ .

$p \notin f(\bar{U} - U_1 \cup U_2)$ , entonces por la propiedad de aditividad

$$g(f, U, p) = g(f, U_1, p) + g(f, U_2, p) = 0,$$

Proposición 5.3.8. Si  $K$  cerrado contenido en  $U$ ,

$f \in M(U)$  y  $p \notin f(K)$  entonces

$$g(f, U, p) = g(f, U-K, p).$$

Demostración: Por las propiedades de aditividad y solución tenemos

$$g(f, U, p) = g(f, U-K, p) + g(f, \text{int } K, p) = g(f, U-K, p).$$

Teorema 5.3.9. Sean  $f$  y  $\bar{f}$  en  $M(U)$  y

$p \notin f(\partial U) \cup \bar{f}(\partial U)$  tales que  $\|f - \bar{f}\| < m$ , donde

$m = \min \{ \text{dist}(p, f(\partial U)), \text{dist}(p, \bar{f}(\partial U)) \} > 0$ , entonces

$$g(f, U, p) = g(\bar{f}, U, p)$$

Demostración: Sea  $h : U \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida como

$$h(x,t) = t(\bar{f}(x) - p) + (1-t)(f(x)-p)$$

Si  $\hat{x} \in \partial U$

$$|t(\bar{f}(\hat{x}) - p) + (1-t)(f(\hat{x}) - p)| >$$

$$|f(\hat{x}) - p| - t|f(\hat{x}) - f(\hat{x})| > m - tm = (1-t)m \geq 0$$

entonces  $h(\hat{x}, t) \neq \bar{0} \quad \forall t \in [0,1]$

Por la propiedad de invarianza homotópica

$$g(\bar{f} - p, U, 0) = g(f - p, U, 0) \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$g(\bar{f}, U, p) = g(f, U, p)$$

Por inducción se prueba la aditividad en general

Teorema 5.3.10. Sean  $U_1, \dots, U_n$  abiertos ajenos subconjuntos de  $U$ .

$f \in M(U)$  y  $p$  tal que  $p \notin f(\bar{U} - \bigcup_{i=1}^n U_i)$ , entonces

$$g(f, U, p) = \sum_{i=1}^n g(f, U_i, \bar{p}).$$

En el apéndice demostramos:

Teorema 5.3.11. Si  $f \in M(U)$ ,  $T$  tal que  $U \subset |T|$ ,  $\sigma \in T$ ,  $\epsilon$ -regular,  $F_\sigma = A_\sigma - a_\sigma$ , y  $\bar{0} \in A_\sigma(\sigma)$  y  $a_\sigma \notin A_\sigma(\partial\sigma)$ , entonces  $g(F_\sigma, \text{int}\sigma) = \text{or}_F(\sigma)$ .

Teorema 5.3.12. (Unicidad del grado). Si  $g$  es como en la definición 5.3.1, 5.3.2,  $g$  es único.

Demostración: Sean  $U \in V$ ,  $F \in M(U)$ ,  $T$  una triangulación con diámetro menor que  $r(F)$  y  $U \subset |T|$ .

Por 5.3.8  $g(F, U) = g(F, \text{int}M_T(U))$ .

Por 5.3.9  $g(F, \text{int}M_T(U)) = g(F_T, \text{int}M_T(U))$ .

Si  $\epsilon_0$  es menor que  $\text{dist}(\bar{0}, F_T(\partial M_T(U)))$  y para  $\epsilon$  positiva menor que  $\epsilon_0$ ,  $\bar{\epsilon}$  es un valor regular de  $F_T$ , entonces

$$g_T(F_T, \text{int}M_T(U)) = g(F_T - \bar{\epsilon}, \text{int}M_T(U)).$$

$$g(F_T - \bar{\epsilon}, \text{int}M_T(U)) = \sum_{\sigma \in S_T^F(U)} g(F_T - \bar{\epsilon}, \text{int}\sigma) \text{ (aditividad)}.$$

Por 5.3.14

$$g(F_T - \bar{\epsilon}, \text{int}\sigma) = g(F_\sigma - \bar{\epsilon}, \text{int}\sigma) = g(F_\sigma, \text{int}\sigma) = \text{or}_F(\sigma)$$

$$\text{y por lo tanto } g(F, U) = \sum_{\sigma \in S_T^F(U)} \text{or}_F(\sigma) = \text{deg}(F, U).$$

Demostración: En primer lugar...

APENDICE

Consideremos una función  $f$  afín, definida en un simplejo  $\sigma$ , tal que su parte lineal  $A$  es no singular,  $\bar{0} \in A(\sigma)$  y el vector  $f(x) - A$  no está en  $A(\partial\sigma)$ , entonces  $g(F, \text{int } \sigma) = \text{or}_F(\sigma)$ . (Teorema 5.3.11).

Para ello demostraremos algunos resultados.

Teorema A.5.1. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\text{Id}$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $g(-\text{Id}, U) = (-1)^n$ .

Demostración: En primer lugar sea  $n$  par.

Consideremos la transformación lineal  $T$  que manda a  $x^j$  en  $x^{j+1}$ , si  $j$  impar y en  $-x^{j-1}$  si  $j$  par.

Claramente  $T$  es inyectiva.

Por lo tanto si  $T(\bar{x}) = 0$ , entonces  $\bar{x} = \bar{0}$  y  $\bar{x} \notin \partial U$ , es decir  $\bar{0} \notin T(\partial U)$ .

Además  $T^2 = -Id$ .

Supongamos que, para alguna  $t \in [0, 1]$ ,  $\hat{x}$  es tal que

$t T(\hat{x}) + (1-t) Id(\hat{x}) = \bar{0}$ , entonces si  $t \neq 0$ ,

$T(\hat{x}) = \frac{-(1-t)}{t} \hat{x}$  y si  $\hat{x} \neq \bar{0}$ ,  $T$  tiene como valor propio a

$\frac{-(1-t)}{t} \leq 0$  asociado a  $\hat{x}$ .

Pero también se cumple:

$T(t\hat{x} + (1-t)(-T)(\hat{x})) = \bar{0}$  y como  $T$  inyectiva,

$t\hat{x} + (1-t)(-T\hat{x}) = \bar{0}$ .

Si  $t \neq 1$ ,  $T\hat{x} = \frac{t\hat{x}}{1-t}$  y  $\frac{t}{1-t} > 0$  es valor propio de  $T$  asociado a  $\hat{x}$ , entonces

$\frac{-(1-t)}{t} = \frac{t}{1-t}$  absurdo por lo que  $\hat{x} = \bar{0}$  ó  $t$

tiene que ser 0 ó 1, examinemos esos dos casos.

Si  $t = 0$ , tendríamos que  $\hat{x}$  cumpliría

$$I \hat{x} = \bar{0} \quad \text{y} \quad \hat{x} = \bar{0}.$$

Si  $t = 1$ ,  $t(\hat{x}) = \bar{0}$  y  $\hat{x} = \bar{0}$ .

Entonces  $\bar{0} \notin (tT + (1-t)I)(\partial U)$  para cualquier  $t \in [0,1]$ .

Y por la propiedad de invarianza homotópica

$$g(T, U, \bar{0}) = g(I, U, \bar{0}) = 1.$$

Ahora sea  $n$  impar, consideremos a  $T$  la transformación lineal tal que  $T(x^j) = x^{j+1}$  si  $j$  par,  $T(x^j) = -x^{j-1}$  si  $j$  impar mayor que 1 y  $T(x^1) = -x^1$ . ( $\{x^i\}$  base de  $\mathbb{R}^n$ )

$\phi$  denotará a la transformación lineal que deja fijo a  $x^j$  si  $j \neq 1$  y  $\phi(x^1) = -x^1$ .

Procediendo análogamente al caso  $n$  par, se demuestra que las homotopías

$$h_1(t) = tT + (1-t)(-I_d) \quad \text{y}$$

$$h_2(t) = tT + (1-t)\phi \quad \text{cumplen con}$$

$$\bar{0} \notin h_1(\partial U) \cup h_2(\partial U) \quad \text{y tenemos que}$$

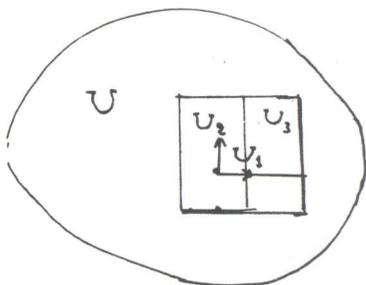
$$g(T, U, \bar{0}) = g(-I_d, U, \bar{0}) = g(\phi, U, \bar{0}).$$

Calcularemos ahora  $d(\phi, U, \bar{0})$ .

Supongamos una base ortogonal en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $U_1, U_2, U_3$  estén contenidos en  $U$ , donde

$$U_1 = (-1, 3)^n, \quad U_2 = (-1, 1) \times (-1, 3)^{n-1} \quad y$$

$$U_3 = (1, 3) \times (-1, 3)^{n-1}$$



Definimos

$\phi_1, \phi_2, \phi_3$  de  $\bar{U}$  en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$\phi_1(x) = (|x_1 - 1| - 1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\phi_2(x) = (1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\phi_3(x) = (x_1 - 2, x_2, \dots, x_n),$$

$\phi_1(x) = \bar{0}$  implica  $x_j = 0$  si  $j \neq 1$  y  $|x_1 - 1| = 1$  y  $x_1 = 2$  ó  $x_1 = 0$ ,

$\phi_2(x) \neq \bar{0}$  para toda  $x$ ,

$\phi_3(x) = 0$  implica  $x_j = 0$  si  $j \neq 1$  y  $x_1 = 2$ .

Supongamos que  $(2, 0, \dots, 0)$  no está en  $\partial U$ .

$\bar{U}_1 - (U_2 \cup U_3) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1, -1 \leq x_j \leq 3 \text{ para } j \neq 1\}$

Entonces  $\bar{0} \notin \phi_i(\bar{U}_1 - (U_2 \cup U_3))$ ,

entonces por aditividad

$$g(\phi_1, U_1, \bar{0}) = g(\phi_1, U_2, \bar{0}) + g(\phi_1, U_3, \bar{0})$$

Consideremos la homotopía  $t\phi_1 + (1-t)\phi$ , definida en  $\bar{U}_2$ .

Si  $\hat{x} \in U_2$  y  $t \in [0, 1]$  son tales que

$t\phi_1(\hat{x}) + (1-t)\phi(\hat{x}) = \bar{0}$ , entonces para  $j \neq 1$

$$t\hat{x}_j + (1-t)\hat{x}_j = \hat{x}_j = 0 \text{ y } t(|\hat{x}_1 - 1| - 1) + (1-t)(-\hat{x}_1) = 0,$$

como  $\hat{x} \in U_2$ ,  $\hat{x}_1 \in (-1, 1)$  y  $|\hat{x}_1 - 1| = 1 - \hat{x}_1$

$$t(1 - \hat{x}_1 - 1) + t\hat{x}_1 - \hat{x}_1 = -\hat{x}_1 = 0.$$

Es decir  $\hat{x} = \bar{0}$  y  $\bar{0} \notin (t\phi_1 + (1-t)\phi)(\partial U_2)$ , entonces por la propiedad de invarianza homotópica tenemos

$$g(\phi_1, U_2, \bar{0}) = g(\phi, U_2, \bar{0}).$$

Ahora para  $t\phi_1 + (1-t)\phi_3$  definida en  $U_3$ , tenemos que si  $\hat{x} \in U_3$  y  $t \in [0, 1]$  tales que  $t\phi_1(\hat{x}) + (1-t)\phi_3(\hat{x}) = \bar{0}$ ,

Entonces  $\hat{x}_j = 0$  si  $j \neq 1$  y

$$t(|\hat{x}_1 - 1| - 1) + (1-t)(x_1 - 2) = 0$$

$\hat{x}_1 \in (1, 3)$  entonces  $|\hat{x}_1 - 1| = \hat{x}_1 - 1$  y

$$t(\hat{x}_1 - 1 - 1) + (1-t)(\hat{x}_1 - 2) = \hat{x}_1 - 2 = 0, \hat{x}_1 = 2,$$

$$y \quad \bar{0} \notin (t\phi_1 + (1-t)\phi_3)(\partial U).$$

Por homotopía

$$g(\phi_1, U_3, \bar{0}) = g(\phi_3, U_3, \bar{0}).$$

Para  $a = (2, 0, \dots, 0)$  y  $x \in U_3$ ,

$$(\phi_3 + a)x = (x_1 - 2 + 2, x_2, \dots, x_n) = x = \text{Id}(x)$$

Usando el teorema de traslación

$$g(\phi_3, U_3, \bar{0}) = g(\phi_3 + a, U_3, a) = g(\text{Id}, U_3, a)$$

Como  $a \in U_3$ , pero  $a \notin \partial U_3$ , por la propiedad de normalización:

$$g(\phi_3, U_3, \bar{0}) = 1$$

Ahora consideremos la homotopía  $t\phi_2 + (1-t)\phi_1$  definida en  $U_1$ .

Si  $\hat{x} \in U_1$  y  $t \in [0, 1]$  son tales que

$t\phi_2(\hat{x}) + (1-t)\phi_1(\hat{x}) = \bar{0}$ , entonces  $\hat{x}_j = 0$  para  $j \neq 1$  y

$$(1-t)(|\hat{x}_1 - 1| - 1) + t = 0. \text{ Si } \hat{x}_1 \geq 1,$$

$$t + (1-t)(\hat{x}_1 - 2) = 3t + (1-t)(\hat{x}_1) - 2 = 0.$$

Por lo tanto  $t \neq 1$  y  $\hat{x}_1 = \frac{-3t+2}{1-t} \geq 0$ ,  $\hat{x} = (\hat{x}, 0, \dots, 0)$  con  $\hat{x}_1 \neq 1$ , entonces  $\hat{x} \notin \partial U_1$  y por invarianza homotópica

$$g(\phi_2, U_1, \bar{0}) = g(\phi_1, U_1, \bar{0}), \text{ también vale}$$

si  $\hat{x}_1 < 1$ , pues  $t - (1-t)\hat{x}_1 = 0$  implica  $t \neq 1$  y  $\hat{x}_1 \in [0, 1)$ .

Pero  $\phi_2(x) \neq \bar{0}$  para toda  $x \in U_1$ , entonces por la propiedad de solución  $g(\phi_2, U_1, \bar{0}) = 0$  y  $g(\phi_1, U_1, \bar{0}) = 0$  y  $g(\phi_1, U_2, \bar{0}) + g(\phi_1, U_3, \bar{0}) = 0$ . Por lo que  $g(\phi, U_2, \bar{0}) + g(\phi_3, U_3, \bar{0}) = 0$ , ó lo que es lo mismo  $g(\phi, U_2, \bar{0}) = -1$ .

Sea  $x \in \bar{U} - U_2$ ,  $\phi(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $\bar{0} \in U_2$ , entonces  $x \neq \bar{0}$  y  $x_j \neq 0$  para alguna  $j$  por lo que  $\phi(x) \neq \bar{0}$ .

Entonces  $g(\phi, U, \bar{0}) = g(\phi, U_2, \bar{0}) = -1$ .

Tenemos entonces que también  $g(-I, U, \bar{0}) = -1$  cuando  $n$  impar.

Teorema A.5. 2. Sea  $T$  una transformación lineal de  $R^n$  en  $R^n$  biyectiva y supongamos que  $\bar{0} \in U$  y  $\bar{0} \notin \partial U$ , entonces  $g(T, U, \bar{0}) = (-1)^m$  donde  $m$  es el número de valores propios negativos (contando multiplicidad) de  $T$ .

Demostración. Si  $m > 0$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son los valores propios negativos distintos de  $T$ . Sea  $N_i$  el subespacio invariante asociado a  $\lambda_i$ .

Sea  $M$  invariante bajo  $T$  tal que  $R^n = M \oplus N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ .  $T_1 \cong T|_M$ ,  $T_2 = T|_{N_i}$  y  $T \cong T_1 \oplus T_2$ .  $T_1$  sólo tiene valores propios no negativos y  $T_2$  negativos.

Donde si  $f : S \longrightarrow R^n$  y  $g : D \longrightarrow R^n$ , entonces

$f \oplus g : S \oplus D \longrightarrow R^n$  se define como

$(f \oplus g)(x + y) = f(x) + g(y)$  con  $x \in S$ ,  $y \in D$ .

Tenemos para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = x^1 + x^2$  con  $x^1 \in M$   $x^2 \in N$ .

Definamos la homotopía  $h$  como

$$h(t) = t(I_M \oplus -I_N) + (1-t)(T_1 \oplus T_2).$$

Sean  $\hat{x} \in U$  y  $t \in [0,1]$  tales que  $h(t)\hat{x} = \bar{0}$ , entonces si  $\hat{x} = \hat{x}^1 + \hat{x}^2$ ,  $t(I_M \oplus -I_N)(\hat{x}^1 + \hat{x}^2) + (1-t)(T_1 \oplus T_2)(\hat{x}^1 + \hat{x}^2) = \bar{0}$ .

Por lo tanto :

$$t\hat{x}^1 - t\hat{x}^2 + (1-t)(T_1(\hat{x}^1) + T_2(\hat{x}^2)) = \bar{0}, \text{ entonces}$$

$$t\hat{x}^1 + (1-t)T_1(\hat{x}^1) = \bar{0}; \text{ si } t = 1, \hat{x}^1 = \bar{0}; \text{ si } t \neq 1,$$

$$T_1(\hat{x}^1) = \frac{-t}{1-t} \hat{x}^1 \text{ y si } \hat{x}^1 \neq \bar{0}, \frac{-t}{1-t} \text{ es un valor propio no}$$

positivo de  $T_1$ , entonces  $t = 0$ , pero entonces  $\hat{x}^1 = \bar{0}$ ,  
pues  $T_1$  inyectiva.

Por otro lado,

$$-t\hat{x}^2 + (1-t)T_2(\hat{x}^2) = \bar{0}; \text{ si } t = 1, -\hat{x}^2 = \bar{0} \text{ y } \hat{x}^2 = \bar{0}.$$

$$\text{Supongamos } t \neq 1, \text{ entonces } T_2(\hat{x}^2) = \frac{t}{1-t} \hat{x}^2 \text{ y } \frac{t}{1-t} \geq 0$$

es un valor propio no negativo de  $T_2$  si  $\hat{x}^2 \neq 0$ , lo

que sería absurdo, por lo que  $\hat{x}^2 = 0$ , entonces

$h(t)x = \bar{0}$  implica  $x = \bar{0}$  como  $\bar{0}$  no está en  $\partial U$ , tenemos

$$g(\tau, U, \bar{0}) = g(I_M \oplus -I_N, U, \bar{0}).$$

si  $x \in \bar{U} - U \cap N$  y suponemos  $x = x^1 + x^2, x \neq \bar{0}$  pues  $\bar{0} \in U \cap N$ .

$$(I_M \oplus -I_N)(x) = x^1 - x^2;$$

$$\text{como } -x^1 + x^2 = \bar{0} \iff x^1 = x^2,$$

$$\bar{0} \notin (I_M \oplus -I_N)(U - U \cap N).$$

Tenemos entonces, por 5.3.7, que

$$g(I_M \oplus -I_N, U, \bar{0}) = g(I_M \oplus -I_N, U \cap N, \bar{0}).$$

Sea la homotopía  $t(I_M \oplus -I_N) + (1-t)(-I_N)$  definida en  $U \cap N$ .

Si  $x \in U \cap N$  y  $t$  son tales que

$$t(I_M \oplus -I_N)(x) + (1-t)(-I_N)x = \bar{0}, \text{ entonces, como } x = x^2,$$

$$t(\bar{0} - x^2) + (1-t)(-x^2) = -x^2 = \bar{0} \text{ y como } \bar{0} \text{ no está en}$$

$\partial(U \cap N)$ , pues  $\partial(U \cap N) = \partial U \cap N$ , entonces

$$g(I_M \oplus -I_N, U \cap N, \bar{0}) = g(-I_N, U \cap N, \bar{0}) = (-1)^n \text{ y}$$

$$g(T, U, \bar{0}) = (-1)^n.$$

Teorema A5.3. Sean  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  transformación lineal inyectiva,  $\sigma$  un simplejo tal que  $\bar{0} \notin T(\sigma)$  y  $P \in \mathbb{R}^n$  con  $P \notin T(\partial\sigma)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $T(a) = P$ .

Si  $\hat{\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x - a \text{ con } x \in \sigma\}$ , entonces

$$g(T - P, \text{int } \sigma) = g(T, \text{int } \hat{\sigma}) = \text{sig det}(M_\alpha(T)) \text{ para } \alpha \text{ cualquier base de } \mathbb{R}^n.$$

Demostración:

$T \in M(\hat{\sigma})$ , pues  $\bar{0} \notin T(\partial\hat{\sigma})$  ya que si  $y \in \hat{\sigma}$  es tal que  $T(y) = \bar{0}$ , entonces  $y = \bar{0}$  y como  $y = x - a$  para algún  $x \in \sigma$ ,  $x = a$  y  $a \notin \partial\sigma$  y  $0 \notin \partial\hat{\sigma}$ .

Sea  $\sigma_t = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x - (1-t)a \text{ con } x \in \sigma\}$ .

Sea  $S$  tal que  $\sigma_t \subset S$  para  $t$  en  $[0,1]$ .

Definimos  $h : [0,1] \rightarrow M(S)$  como  $h(t) = (1-t)I + t(T-P) = T - tP$ .

Si  $x \in \sigma_t$ ,  $\bar{h}(t)(x) = h(t)(x)$ ; si  $x \notin \sigma_t$  y  $\hat{y}$  el más cercano elemento de  $\partial\sigma_t$  a  $x$ ,  $\bar{h}(t)(x) = h(t)(\hat{y})$ .

Si  $\hat{x} \in S$  y  $t$  tales que  $h(t)(\hat{x}) = \bar{0}$ , entonces para alguna  $z \in \sigma_t$ ,  $T(z) - tP = 0$ ,  $T(z) = tT(a)$  y  $z = ta$ , pero  $z = x - (1-t)a = ta$ ; por lo tanto  $x - a = \bar{0}$  y  $x = a$  entonces  $z \notin \partial\sigma_t$  y  $g(h(t), S)$  no depende de  $t \in [0,1]$ , entonces  $g(T-P, \text{int } S) = g(T, \text{int } S)$ , pero

$$g(T-P, \text{int } S) = g(T-P, \text{int } \sigma) + g(T-P, S - \sigma) =$$

$$= g(T-P, \text{int } \sigma) \text{ y } g(T, \text{int } S) = g(T, \text{int } \hat{\sigma}) +$$

$$+ g(T, S - \hat{\sigma}) = g(T, \text{int } \hat{\sigma}).$$

Por A.5.2  $g(T, \text{int } \hat{\sigma}) = (-1)^m$  donde  $m$  es el número de valores propios negativos de  $T$ , contando multiplicidad.

Pero  $\det(M_\alpha(T)) = \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_s^{n_s}$ , donde  $\lambda_i$  valor propio de  $T$ . y  $\text{sig det } (M_\alpha(T)) = (-1)^m$ .

**B I B L I O G R A F I A**

Allgower y Georg (1980). Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations SIAM Rev. 22.

Allgower y Georg (1990). Numerical continuation methods: an introduction.

Amann (1973). On the uniqueness of the topological degree.

Border (1985). Fixed point theorems with applications to economics and game theory.

Bowman y Karamardian (1977). Error bounds for approximate fixed points In: fixed points: Algorithms and applications S. Karamardian.

Brouwer (1912). Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math Ann 71.

Cohen (1967). On the Sperner Lemma J. Combin Theory 2.

Cohen (1980). On the Kakutani fixed point theorem In: Numerical solution of highly nonlinear problems. W. Foster.

Eaves (1971). Computing Kakutani fixed points SIAMJ. Appl. Math. 21.

Eaves (1972): Homotopies for the Computation of fixed points. Math. Programming 3.

Eaves (1976): A Short course in solving equations with PL Homotopies. In: Non linear programming, Cottle y Lemke.

Eaves (1984): A course in triangulations for solving equations with deformations.

Eaves y Saigal (1972). Homotopies for Computation of fixed points on unbounded regions Math. Programming 3.

Guillemin y Pollack (1979). Differential topology'

Hansen (1974). On the approximation of Nash equilibrium points in a N-person noncooperative game.

Hudson (1969). Piecewise linear topology.

Kakutani (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem Duke Math. J. 8.

Karamardian (1977). Fixed points: Algorithms and applications.

Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz.  $E_{1n}$  Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensionale Simplexe. Fund. Math. 14.

Kuhn (1960). Some combinatorial lemmas in topology IBM J. Res Develop 4.

Kuhn (1968). Simplicial approximation of fixed points. Proc. Nat. Acad Sci USA 61.

- Kuhn (1974). A new proof of the fundamental theorem of algebra. In: Pivoting and extensions: in honor A. W. Tucker.
- Lemke y Howson Equilibrium points of bimatrix games S/AM J. Appl. Math. 12.
- Lloyd (1978). Degree Theory.
- Milnor (1969). Topology from the differentiable viewpoint.
- Moré, Garbow y Hillstom (1981). Testing Unconstrained optimization Software .
- Morgan (1987). Solving polynomial Systems using continuation for engineering and scientific problems.
- Nikaido (1978). Métodos matemáticos del análisis económico moderno.
- Peitgen y Sieberg (1981). An  $\epsilon$ -perturbation of Brouwer's definition of degree. In: fixed point theory Fadell y Fourrier.
- Rourke y Sanderson (1972): Introduction to piecewise-linear topology.
- Sard (1942). The measure of the critical values of differentiable maps. Bull. Amer. Math. Soc. 48.

- Scarf (1967). The approximation of fixed points of a continuous mapping SIAMJ. Appl. Math. 15.
- Scarf (1984). The computation of equilibrium prices. In: Applied general equilibrium analysis Scarf y Shoven.
- Scarf y Hansen (1973): The computation of economic equilibria.
- Sieberg. Some historical remarks concerning degree theory Amer. Math. Monthly 88.
- Spanier (1966). Algebraic Topology.
- Sperner (1928). Never Beweisuber die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes Abn. Math. Sem. Univ. Hamburg 6.
- Todd (1976). The computation of fixed points and applications.
- Todd (1977). Union Jack triangulations In Fixed points: algorithms and applications. S. Karamardian.