

**SOBRE UN TEOREMA GEOMETRICO
DE HENRI POINCARÉ**

T E S I S

que para obtener el título de

MATEMATICO

p r e s e n t a

Pablo Barrera Sánchez



A mi madre

A mi hermana María

A mi tía Lucha

A mis amigos.

*La amistad es una
de las razones de
mi existencia.*

Gracias amigos míos

*Bendito aquel cuya
fama no es mayor
que su verdad.*

R. Tagore.

PREFACIO

A principios de este siglo, poco antes de su muerte, Henri Poincaré publicó el trabajo "Sur un théorème de Géométrie" en la Revista del Circolo Matematico di Palermo; en este trabajo aparece, como resultado de sus estudios sobre los sistemas dinámicos con dos grados de libertad, la afirmación de que: "Una transformación topológica de un anillo plano sobre sí mismo, que deja invariante el área, tiene por lo menos dos puntos fijos". La importancia del teorema se debe a que de él se obtienen resultados importantes en el estudio de un caso particular del problema de los tres cuerpos. Considerando Poincaré que le quedaba poco tiempo de vida y tenía otros problemas más importantes que atender, decidió publicar su trabajo incompleto con la idea de que fuera de alguna utilidad para otros jóvenes matemáticos que se interesaran en este resultado.

En efecto, el entonces joven matemático G. D. Birkhoff estudió este trabajo y un año más tarde de la muerte de Poincaré publicó una demostración.

El objeto del presente trabajo es dar una demostración basada en la original, pero que para su comprensión no se requiera un alto grado de madurez matemática.

En las notas preliminares se estudia el concepto de índice

de un punto con respecto a un campo vectorial, puesto que el mismo juega un papel muy importante en la demostración del teorema.

En la segunda parte se dá la demostración detallada del teorema. Una generalización del teorema, es el tema de la tercera parte. Y para finalizar, se estudia el problema de la bola de billar que es una aplicación del teorema generalizado.

No quiero terminar sin antes manifestar mi sincero agradecimiento a todos mis profesores, en particular al Dr. Solomon Lefschetz, no solo por sus enseñanzas y la dirección del presente trabajo sino por la ayuda y las orientaciones que de él sigo recibiendo. También deseo agradecer a mis maestros: Dr. Guillermo Torres, Dr. Emilio Lluis, Prof. Gonzalo Zubieta y Dr. Humberto Cárdenas las atenciones que me han brindado durante toda mi carrera.

INDICE

	Pág.
1. PRELIMINARES.....	1
2. EL TEOREMA GEOMETRICO DE POINCARÉ.....	10
3. UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA GEOMETRICO DE POINCARÉ.....	30
4. APLICACIONES. EL PROBLEMA DE LA BOLA DE BILLAR.....	35
REFERENCIAS.....	47

1. PRELIMINARES

Llamaremos curva a la imagen de una función continua α de un intervalo cerrado $[a, b]$ en el espacio euclidiano E^n . Si $\alpha(a) = \alpha(b)$ se dice que la curva es cerrada y si $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ la curva se llama un arco con punto inicial $\alpha(a)$ y punto final $\alpha(b)$. Si α es inyectiva la curva se llama un arco simple o arco de Jordan. Si α es inyectiva en $[a, b)$ y $\alpha(a) = \alpha(b)$ la curva se llama una curva cerrada simple o curva de Jordan.

Sea $D \subset E^N$ y sean $\lambda_i : D \rightarrow E^1$ ($i = 1, 2, \dots, N$) funciones continuas; la función Λ que a cada punto p en D le asocia el vector de componentes $(\lambda_1(p), \lambda_2(p), \dots, \lambda_N(p))$ se llama un campo vectorial definido en D . En notación, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Si q en D es tal que $\Lambda(q)$ es el vector nulo, entonces q se llama un punto crítico del campo vectorial Λ .

En particular, si $f: D \rightarrow D$, $D \subset E^N$, es una función continua, entonces podemos definir un campo vectorial Λ en D como sigue:

$$\Lambda(p) = \overrightarrow{p f(p)},$$

es decir, $\Lambda(p)$ es el vector cuyo origen es p y cuyo extremo final es $f(p)$. Los puntos críticos de Λ son los puntos tales que $f(q) = q$; estos puntos se llaman los puntos fijos de f .

Se dice que dos funciones continuas $f, g: X \rightarrow E'$ son homotópicas si existe una función continua $H: X \times I \rightarrow E'$, $I = [0, 1]$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

Sea X un espacio topológico arcoconectable y p_0 un punto de X ; consideremos la colección T de todas las curvas cerradas basadas en p_0 . En T definimos la siguiente relación que es de equivalencia: $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si y sólo si γ_1 es homotópica a γ_2 ; además definimos en T una operación binaria: si γ_1, γ_2 son dos elementos de T entonces el producto $\gamma_2 \circ \gamma_1$ es la curva que se obtiene al describir primero γ_1 y después γ_2 . También se puede probar que si $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ y $\gamma_2 \sim \gamma_2'$ entonces $\gamma_2 \circ \gamma_1 \sim \gamma_2' \circ \gamma_1'$. Este resultado implica que la operación definida en T induce una operación en la colección S de clases de equivalencia de T bajo \sim . También es fácil comprobar que bajo esta operación S tiene estructura de grupo; este grupo se denota con $\pi(X, p_0)$. Si p_1 es otro punto de X , se tiene entonces que $\pi(X, p_0)$ y $\pi(X, p_1)$ son isomorfos, y así $\pi(X, p_0)$ es llamado el grupo fundamental de X .

Se llama 2-celda a cualquier conjunto homeomorfo a $\Delta_2 = \{x \in E^2 \mid |x| < 1\}$ y se llama 1-esfera al conjunto $S^1 = \{x \in E^2 \mid |x| = 1\}$. Se puede probar que $\pi(S^1, p_0)$ es un grupo cíclico infinito.

Sea ξ un generador del grupo fundamental $\pi(S^1, p_0)$; esta

elección constituye una orientación del plano en la forma usual.

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow E^2$ una curva cerrada contenida en una región Ω sobre la cual se ha definido un campo vectorial $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ que no se anula sobre la curva γ .

Sea $\gamma^*: [a, b] \rightarrow S^1$ la curva cerrada definida por

$$\gamma^*(x) = \left(\frac{\lambda_1(\gamma(x))}{|\Lambda(\gamma(x))|}, \frac{\lambda_2(\gamma(x))}{|\Lambda(\gamma(x))|} \right)$$

cuando x describe $[a, b]$ en sentido positivo.

DEFINICION. - El índice de la curva γ con respecto al campo vectorial Λ , es el entero k tal que $\tilde{\pi}^k = \phi(\tilde{\gamma}^*)$, donde ϕ es el isomorfismo natural entre $\pi(S^1, \gamma_1^*(0))$ y $\pi(S^1, p_0)$, y $\tilde{\gamma}^*$ de nota la clase de γ^* .

En notación: $n(\gamma, \Lambda) = k$.

PROPOSICION 1. - Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva cerrada en una región Ω sobre la cual están definidos dos campos vectoriales $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \Gamma = (f_1, f_2)$ tales que para toda $x \in [a, b]$ los vectores $\Lambda(\gamma(x))$ y $\Gamma(\gamma(x))$ nunca están en oposición; entonces

$$n(\gamma, \Lambda) = n(\gamma, \Gamma).$$

Demostración: Sean $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow S^1$ las curvas cerradas definidas por

$$\gamma_1(x) = \left(\frac{\lambda_1(\gamma(x))}{|\Lambda(\gamma(x))|}, \frac{\lambda_2(\gamma(x))}{|\Lambda(\gamma(x))|} \right),$$

$$\gamma_2(x) = \left(\frac{f_1(\lambda(x))}{|\Gamma(\gamma(x))|}, \frac{f_2(\gamma(x))}{|\Gamma(\gamma(x))|} \right).$$

Sea $\alpha_0 : [c, d] \rightarrow S'$ un arco de Jordan cuyo punto inicial es $\gamma_1(a)$ y cuyo punto final es $\gamma_2(a)$.

Sea $\Psi : \pi(S', \gamma_2(a)) \rightarrow \pi(S', \gamma_1(a))$ el isomorfismo natural dado por:

$$\Psi(\bar{\beta}) = \overline{\alpha_0^{-1} \beta \alpha_0},$$

donde $\bar{\beta}$ denota la clase de β en $\pi(S', \gamma_2(a))$ y $\overline{\alpha_0^{-1} \beta \alpha_0}$ la clase de $\alpha_0^{-1} \beta \alpha_0$ en $\pi(S', \gamma_1(a))$.

Vamos a ver ahora que $\Psi(\bar{\gamma}_2) = \overline{\alpha_0^{-1} \gamma_2 \alpha_0} = \bar{\gamma}_1$. Lo anterior es consecuencia inmediata del hecho que γ_1 y $\alpha_0^{-1} \gamma_2 \alpha_0$ son homotópicos en S' ; en efecto, la homotopía está dada por la contracción lineal de $\gamma_2(x)$ en $\gamma_1(x)$ a través del arco de menor longitud que los une en S' . Esta homotopía está bien definida puesto que la hipótesis nos garantiza que nunca $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$ están diametralmente opuestos en S' .

Ahora bien, es inmediato de lo anterior y de la definición de índice que

$$\eta(\gamma, \Lambda) = \eta(\gamma, \Gamma).$$

La demostración de la siguiente proposición es totalmente análoga a la anterior.

PROPOSICION 2. - Sea Γ un campo vectorial definido en una región Ω y sean $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \Omega$ dos curvas cerradas tales que para toda $x \in [a, b]$ los vectores $\Gamma(\alpha(x))$ y $\Gamma(\beta(x))$ nunca están en oposición; entonces

$$\eta(\alpha, \Gamma) = \eta(\beta, \Gamma).$$

La siguiente proposición es esencial en lo que sigue:

PROPOSICION 3. - Sea Λ un campo vectorial definido en una región Ω y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$, dos curvas cerradas las cuales son homotópicas en Ω y supongamos que Λ no tiene puntos críticos en la imagen de la homotopía; entonces

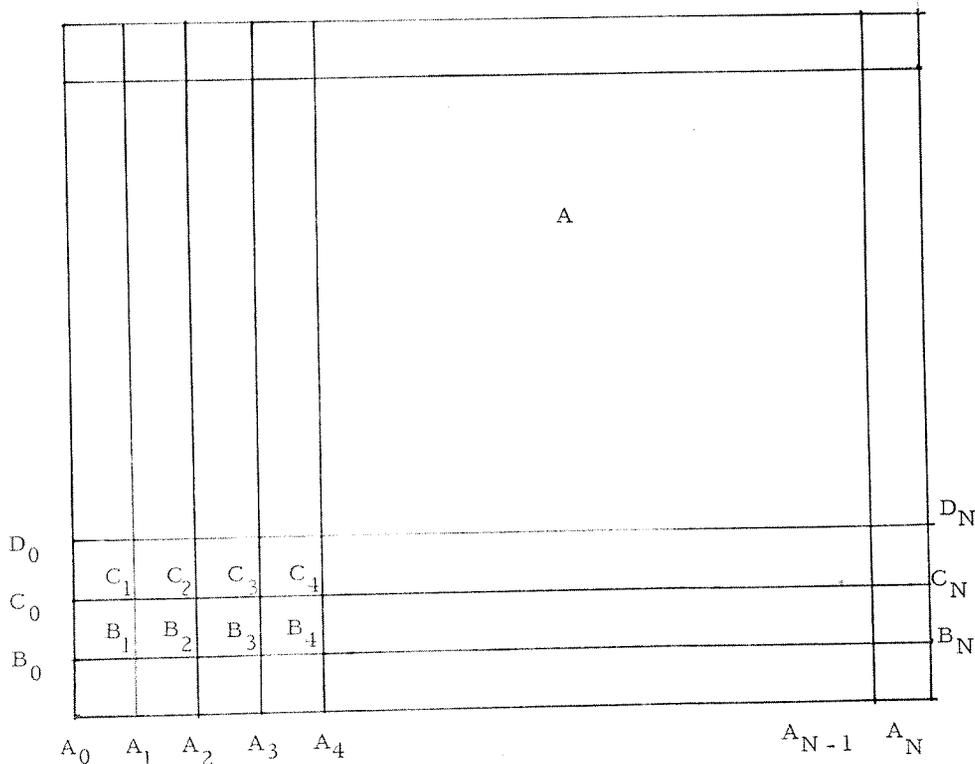
$$\eta(\gamma_1, \Lambda) = \eta(\gamma_2, \Lambda).$$

Demostración:

Sea $H: A \rightarrow \Omega$, con $A = [a, b] \times [0, 1]$, la homotopía de γ_1 y γ_2 es decir $H(x, 0) = \gamma_1(x)$ y $H(x, 1) = \gamma_2(x)$. Ahora sea $\varphi: H(A) \rightarrow \mathbb{R}$ una de las ramas continuas del argumento de $\Lambda(p)$; consideremos para cada p en A una vecindad abierta $V(p)$ de p tal que para todo q, r en $V(p)$

$$|\varphi H(q) - \varphi H(r)| < \tau.$$

La colección $\{V(p)\}_{p \in A}$ es una cubierta abierta de A ; sea δ el número de Lebesgue de la cubierta; consideremos una partición de A en N^2 rectángulos iguales, con N elegido de tal manera que la diagonal de cada rectángulo sea menor que δ .



Sea $\beta_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ la curva definida por la imagen bajo H de la poligonal $A_0 B_0 B_1 A_1 A_N$ de la figura anterior. De la construcción se concluye inmediatamente que γ_1 y β_1 satisfacer las hipótesis de la proposición anterior y por consiguiente $\eta(\gamma_1, \Lambda) = \eta(\beta_1, \Lambda)$.

Si llamamos β_2 a la curva definida por la imagen bajo H de la poligonal $A_0 B_0 B_2 A_2 A_N$, se tiene entonces, de manera análoga,

$\eta(\beta_1, \Lambda) = \eta(\beta_2, \Lambda)$. Así sucesivamente, concluimos que

$\eta(\gamma_1, \Lambda) = \eta(\beta_N, \Lambda)$, donde β_N es la curva definida por la imagen de la poligonal $A_0 B_0 B_N A_N$. Pero evidentemente $\eta(\alpha_1, \Lambda) = \eta(\beta_N, \Lambda)$

donde α_1 es la curva definida por la imagen bajo H del segmento $B_0 B_N$, ya que la imagen bajo H de $A_0 B_0$ y $A_N B_N$ son las mismas.

El resultado del teorema se concluye inmediatamente ya que se repite el proceso anterior N veces y se obtiene

$$\eta(\gamma, \Lambda) = \eta(\alpha_N, \Lambda)$$

y observando que $\alpha_N = \gamma_2$ se tiene el resultado.

COROLARIO: Si γ es una curva cerrada en una región Ω donde está definido un campo vectorial Λ y si γ es contractible a un punto en Ω y la contracción no pasa por puntos críticos de Λ , entonces $\eta(\gamma, \Lambda) = 0$.

Consideremos una región Ω donde está definido un campo vectorial Λ , sea p un punto de Ω y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$, una curva de Jordan que rodea a p tal que cuando x describe el intervalo $[a, b]$ de a a b $\alpha(x)$ describe la curva en sentido positivo y además α no rodea ningún punto crítico excepto posiblemente p .

DEFINICION: El índice de p con respecto al campo vectorial Λ es el índice de α con respecto a Λ ; en notación,

$$\eta(p, \Lambda) = \eta(\alpha, \Lambda).$$

La anterior definición es correcta ya que si α_1, α_2 son dos curvas con las propiedades antes mencionadas entonces α_1 y α_2 son homotópicas y por la proposición anterior

$$\eta(\alpha_1, \Lambda) = \eta(\alpha_2, \Lambda).$$

La siguiente proposición es evidente.

PROPOSICION 4. Si p no es un punto crítico de Λ , entonces $\eta(p, \Lambda) = 0$.

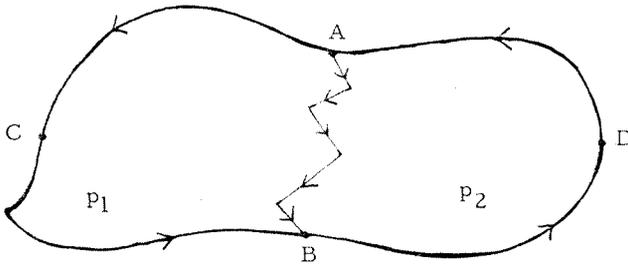
DEFINICION: Si p es un punto crítico de Λ tal que $\eta(p, \Lambda) = \pm 1$ entonces diremos que p es un punto crítico simple.

En este trabajo consideraremos solamente campos vectoriales con puntos críticos simples.

PROPOSICION 5. Sea Λ un campo vectorial definido en Ω y sea $\mathcal{W} \subset \Omega$ una 2-celda. Si α es una curva de Jordan en \mathcal{W} y α rodea 2 puntos críticos p_1, p_2 , entonces $\eta(p_1, \Lambda) + \eta(p_2, \Lambda) = \eta(\alpha, \Lambda)$.

Demostración: Sean $\alpha(a) = A$ y B otro punto sobre α ; es fácil ver que se puede elegir una poligonal con punto inicial A y

final B de tal manera que, como se ve en la figura,



la curva de Jordan α_1 formada por ACBA rodee solamente un punto crítico y análogamente $\alpha_2 = ABDA$. Es claro entonces

$$n(\alpha_1, \Lambda) = n(p_1, \Lambda); \quad n(\alpha_2, \Lambda) = n(p_2, \Lambda).$$

Además de la definición de índice de una curva se concluye inmediatamente que

$$n(\alpha_1, \Lambda) + n(\alpha_2, \Lambda) = n(\alpha, \Lambda),$$

de donde el resultado.

COROLARIO. - Si una curva cerrada γ no rodea puntos críticos, entonces $n(\gamma, \Lambda) = 0$.

2. EL TEOREMA GEOMETRICO DE POINCARÉ.

Sea π el plano euclidiano y consideremos un sistema de coordenadas polares en dicho plano.

Sea $R = \{(\theta, r) \mid 0 < a \leq r \leq b\}$ y $T: R \rightarrow R$ un homeomorfismo con las siguientes propiedades:

- i) T desplaza a los puntos sobre $r = b$ en dirección positiva y a los puntos sobre $r = a$ en dirección negativa.
- ii) T preserva las áreas.

Entonces se afirma que existen por lo menos dos puntos fijos bajo T .

Antes de pasar a la demostración, haremos unas aclaraciones y observaciones acerca del enunciado.

En i) T desplaza a los puntos sobre $r = b$ en la dirección positiva, significa lo siguiente:

Pensemos en el círculo $r = b$ como la recta real módulo 2π ; entonces



debe tenerse que $T(x) > x$ para toda x . Análogamente para $r = a$.

En ii) T preserva las áreas, significa lo siguiente: si $B \subset R$ y si $\iint_B dA$ existe, entonces existe $\iint_{T(B)} dA$ y además

$$\iint_B dA = \iint_{T(B)} dA$$

Supongamos que $T: R \rightarrow R$ está dada por

$$\theta' = \eta(\theta, r)$$

$$r' = \rho(\theta, r).$$

Entonces $\rho(\theta, r)$ es continua por serlo T y además

$\rho(\theta + 2\pi, r) = \rho(\theta, r)$ ya que (θ, r) y $(\theta + 2\pi, r)$ representan al mismo punto; por lo tanto $\rho(\theta, r)$ es periódica en θ de período 2π .

$\eta(\theta, r)$ admite una infinidad de determinaciones continuas; dos cualesquiera difieren por un múltiplo entero de 2π .

Sea $\psi(\theta, r) = \eta_1(\theta + 2\pi, r) - \eta_1(\theta, r)$, donde $\eta_1(\theta, r)$ es una determinación cualquiera de $\eta(\theta, r)$; claramente $\psi(\theta, r)$ siempre debe tomar valores que sean múltiplos enteros de 2π ; pero como ψ es continua por ser diferencia de funciones continuas, resulta que $\psi(\theta, r) = 2k\pi$ es constante; pero cuando (θ, r) se mueve sobre $r = b$ y hace un circuito en sentido positivo, lo mismo hace su imagen (θ', r') , es decir; cuando θ aumenta 2π , $\eta_1(\theta, r)$ aumenta 2π . Por lo tanto

$$\psi(\theta, r) = 2\pi \quad \sigma \quad \text{sea}$$

$$\eta_1(\theta + 2\pi, r) = \eta_1(\theta, r) + 2\pi$$

Entonces el preciso significado del teorema es el siguiente:

Para cualquier determinación de $\eta(\theta, r)$ tal que $\eta(\theta, r) = \theta' > \theta$ sobre $r = b$ y $\theta' < \theta$ sobre $r = a$, entonces existen dos puntos (θ, r)

de R tales que

$$\theta' = \theta \quad \text{y} \quad r' = r.$$

Realicemos el siguiente cambio de coordenadas

$$x = \theta$$

$$y = r^2$$

Luego el anillo R se transforma en un anillo

$R' = \{ (x, y) \mid 0 < a^2 \leq y \leq b^2 \}$, y la transformación T induce una transformación F de R' en sí mismo, definida como sigue:

$$f(x, y) = f(\theta, r^2) = f(\theta', r'^2) = (x', y').$$

Se puede comprobar fácilmente que F es un homeomorfismo con las mismas propiedades de T sobre $y = a^2$ y $y = b^2$; además F preserva las áreas ya que la integral de área se transforma en:

$$\iint r \, dr \, d\theta = \iint \sqrt{y} \left| J \left(\frac{\theta, r}{x, y} \right) \right| \, dx \, dy$$

$$J \left(\frac{\theta, r}{x, y} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

de donde

$$\iint r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \iint dx \, dy.$$

Pero como

$$\iint r \, dr \, d\theta = \iint r' \, dr' \, d\theta'$$

se concluye que

$$\iint dx dy = \iint dx' dy'$$

de donde F preserva las áreas.

Además es claro que F tiene puntos fijos si y sólo si T tiene puntos fijos.

Supongamos que F está dada por

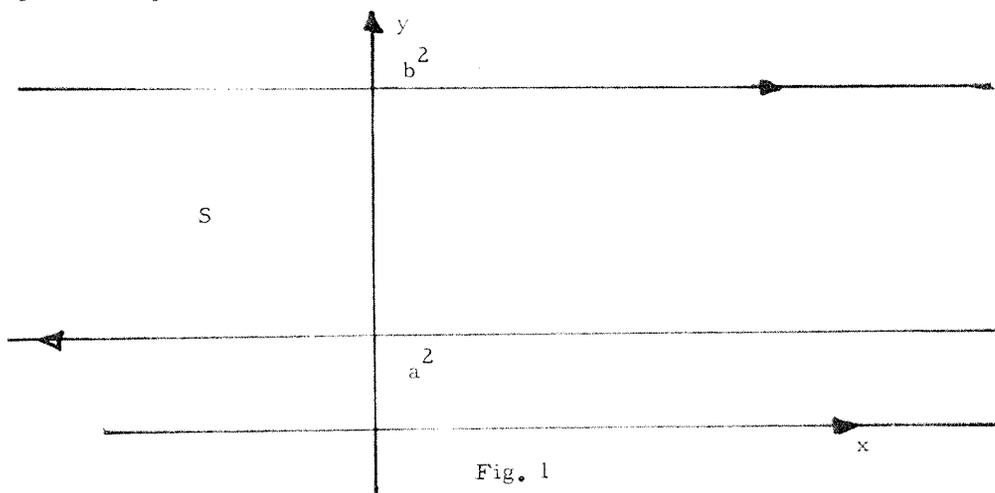
$$x' = \eta(x,y) \qquad y' = \rho(x,y),$$

donde $\eta(x,y)$ y $\rho(x,y)$ son totalmente análogos a los de T (por eso los denotamos de la misma manera); por consiguiente, los resultados del análisis anterior para T , siguen siendo válidos para F .

Consideremos ahora a (x,y) como las coordenadas rectangulares de un punto de la banda

$$S = \{ (x,y) \mid -\infty < x < \infty; a^2 \leq y \leq b^2 \}$$

que corresponde al anillo R .



Fácilmente observamos que F sobre S es un homeomorfismo que preserva las áreas y que sobre $y = a^2$ los puntos viajan de derecha a izquierda y sobre $y = b^2$ en dirección contraria. También F es periódica en x de periodo 2π .

Luego, para demostrar que existen dos puntos fijos bajo T , bastará demostrar que F tiene dos puntos fijos en H , donde

$$H = \{(x, y) \mid x_0 \leq x < x_0 + 2\pi; a^2 \leq y \leq b^2; x_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Veremos ahora que la existencia de un punto fijo en H , implica la existencia de otro punto fijo, también en H . Elijamos x_0 de tal manera que el punto fijo no esté sobre $x = x_0$; ahora bien, F nos define un campo vectorial en S como sigue: $\Gamma(P) = \overrightarrow{PF(P)}$; los puntos críticos de Γ son los puntos fijos de F .

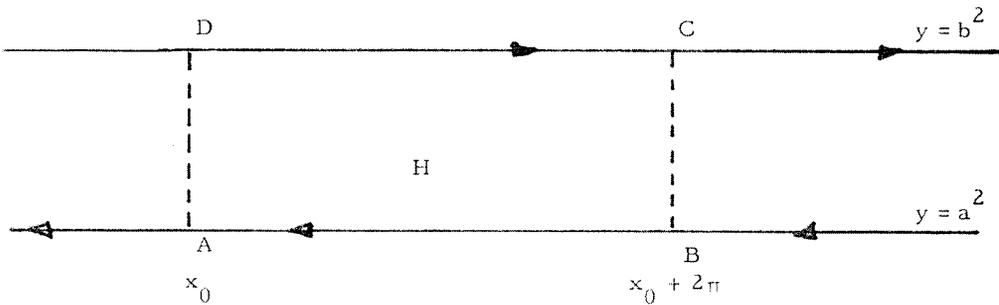


Fig. 2.

Si nos movemos ahora sobre la frontera ABCD de H , haciendo un circuito positivo vemos que la variación angular de $\Gamma(P)$ es cero; ya que sobre $y = a^2$ y $y = b^2$ la variación angular es cero y en $x = x_0$ y

$x = x_0 + 2\pi$ son las mismas pero están recorridas en sentido opuesto, esto es, el índice de $\alpha = ABCDA$ con respecto a Γ es cero $I(\alpha, \Gamma) = 0$; pero el índice de una curva que rodea a un punto crítico simple es +1; por consiguiente existe por lo menos otro punto crítico cuyo índice es simétrico al del punto que tenemos.

Entonces para demostrar el teorema, basta demostrar que F tiene un punto fijo en S .

Demostación:

Construcción de una curva invariante.

Supongamos que $F: S \rightarrow S$ no tiene puntos fijos; entonces por ser F periódica, existe $d > 0$ tal que la distancia entre cualquier punto de S y su transformado es mayor que d .

Elijamos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < d$, $\epsilon < b^2 - a^2$ y sea $T_\epsilon: E^2 \rightarrow E^2$ la transformación del plano en sí mismo que traslada los puntos una distancia ϵ en el sentido de las ordenadas negativas.

Como T_ϵ conserva el área, resulta que $T_\epsilon F: S \rightarrow E^2$ también; además $T_\epsilon F = W$ no tiene puntos fijos, debido a la forma como se eligió ϵ .

Consideremos ahora la banda angosta $b^2 \geq y \geq b^2 - \epsilon$. Bajo la transformación W , el "borde" superior $y = b^2$ es transformado en el borde inferior $y = b^2 - \epsilon$. (fig. 3) y la banda se transforma en una segunda banda, encontrándose totalmente abajo de la primera y con un "borde" co-

mún. Aplicando W a la segunda banda, ésta va en una tercera, con la cual tiene solamente un "borde" en común. Continuando este proceso se obtiene una serie de bandas que forman "estratos" consecutivos.

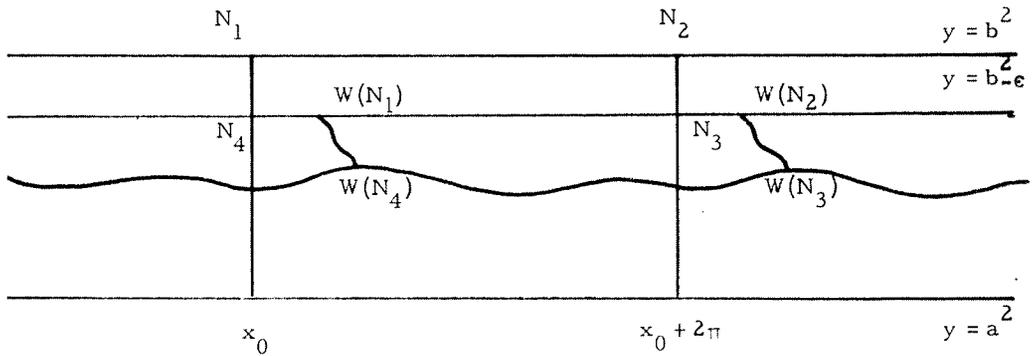


Fig. 3

Consideremos la porción de la banda S que está comprendida entre x_0 y $x_0 + 2\pi$ (x_0 arbitrario). El área de la primera banda comprendida en esta porción de la banda S (la parte acotada por $N_1 N_2 N_3 N_4$ en la fig.3) es $2\pi\epsilon$. Consideremos la imagen de esta porción bajo W , la cual es una parte finita de la segunda banda y con área $2\pi\epsilon$; (ver fig.3), pero haciendo uso del hecho de que W es periódica en x de período 2π , concluimos que el área de la región de la segunda banda, comprendida entre x_0 y $x_0 + 2\pi$ es también igual a $2\pi\epsilon$; y así sucesivamente obtenemos que el área de la K -ésima banda comprendida entre x_0 y $x_0 + 2\pi$ es $2\pi\epsilon$. Además como el área de S comprendida entre x_0 y $x_0 + 2\pi$ es finita e igual a $2\pi(b^2 - a^2)$, se deduce que existe N tal que

la N -ésima banda corta al borde $y = a^2$

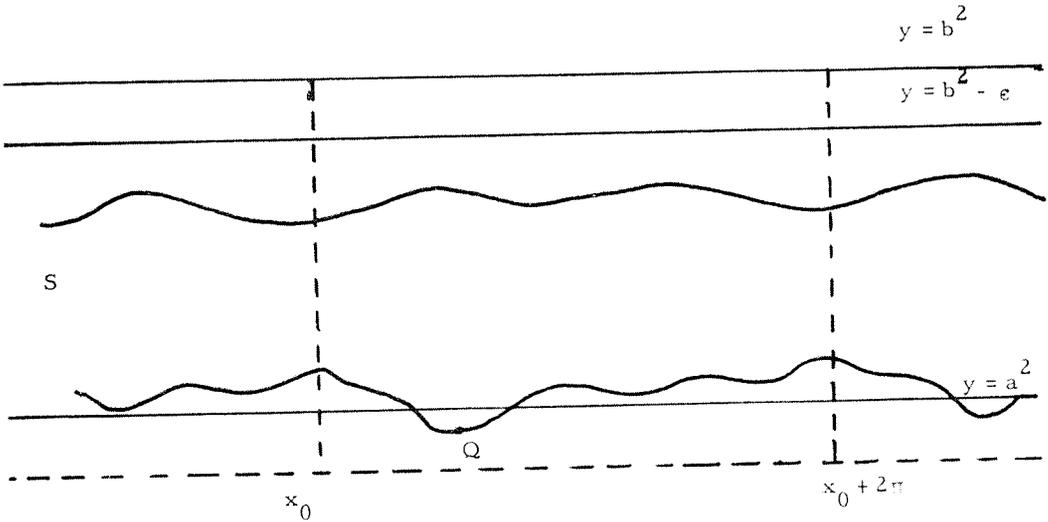


Fig. 4.

Sea Q un punto en la N -ésima banda, tal que su ordenada sea mínima. Supongamos que P es el punto sobre $y = b^2$ del cual proviene Q , es decir, $Q = W^N(P)$. Sean $P_1 = W(P)$, $P_2 = W^2(P), \dots, P_N = Q = W^N(P)$.

Consideremos el segmento PP_1 que está contenido en la primera banda; su imagen bajo W es un arco simple cuyos extremos son P_1P_2 y el cual está contenido totalmente en la segunda banda; análogamente, si consideramos la imagen del arco P_1P_2 bajo W , obtendremos un arco simple totalmente contenido en la tercera banda cuyos extremos son P_2P_3 , etc. Continuando este proceso obtenemos N arcos $PP_1, P_1P_2, \dots, P_{N-1}P_N$

que se encuentran en bandas sucesivas y no tienen puntos en común, excepto en los puntos terminales de arcos sucesivos. (ver fig. 5)

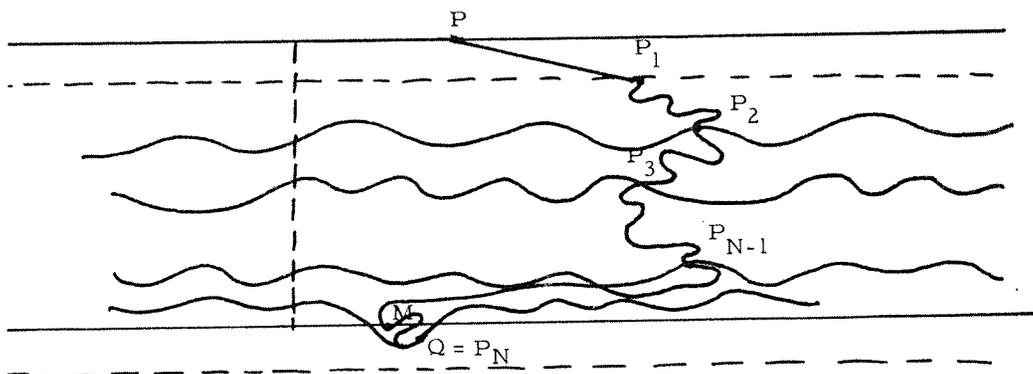


Fig. 5

Sea M la primera intersección del arco $P_{N-1} P_N$ con $y = a^2$; la curva PM formada por la sucesión de arcos $PP_1, P_1 P_2, \dots, P_{N-1} M$ es simple ya que cada uno de los arcos lo es y no tienen puntos comunes, excepto los extremos. Por consiguiente PM es un arco simple totalmente contenido entre $y = b^2$ y $y = a^2$.

La imagen del arco PM bajo la transformación W , se compone del arco simple $P_1 M$ y de un arco simple MM' ; este último es la imagen del arco mM , donde $m = W^{-1}(M)$; además $W(M) = M'$ está sobre $y = a^2 - \epsilon$. Es claro que MM' es un arco simple y que además no tiene otro punto en común con PM que M ; por consiguiente PM' forma una curva simple.

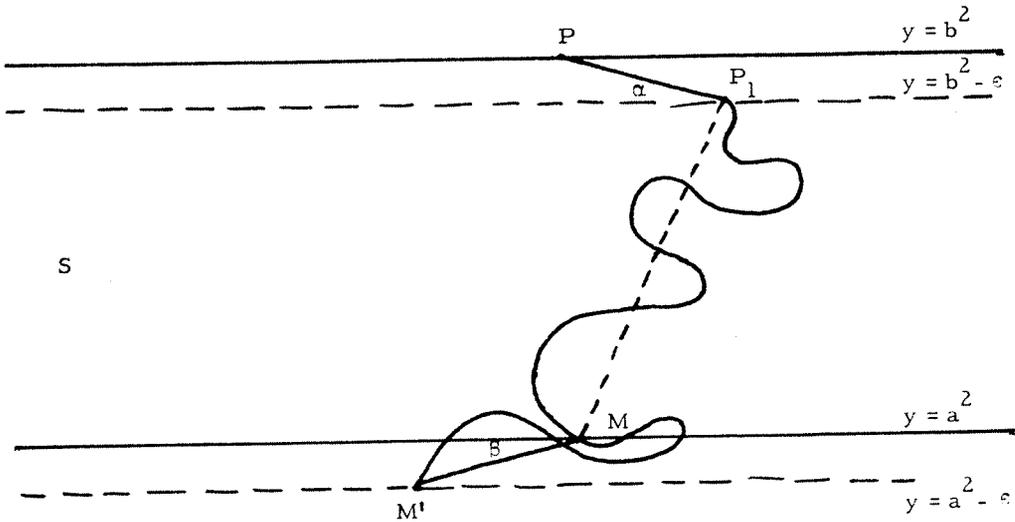


Fig. 6.

W transforma el arco PM de la curva PM' en el arco P_1M' de la misma, avanzando cada punto de PM a lo largo de PM' ; así que para todo punto A del arco PM , resulta que $W(A) \neq A$.

En este sentido la curva PM' es invariante con respecto a la transformación W .

Es claro de la definición de W , que $P_1 = W(P)$ tiene una abscisa mayor que la de P y que $M' = W(M)$ tiene una abscisa menor que la de M .

Recordemos que en S hay un campo vectorial Γ , asociado a F y definido como sigue: $\Gamma(P) = \overrightarrow{PF(P)}$. Definiremos ahora otro campo vectorial Γ' en S , en la siguiente forma: $\Gamma'(P) = \overrightarrow{PW(P)}$; esto es,

$\Gamma'(P)$ es el vector que va de P a su imagen bajo W . De la definición se sigue inmediatamente que Γ' es continuo y que no tiene puntos críticos en S .

Variación angular del vector $\Gamma'(P)$
cuando P se mueve sobre la curva
invariante.

Estamos interesados ahora en calcular la variación angular del vector $\Gamma'(P)$ cuando P se mueve a lo largo de la curva PM' desde P hasta M .

Vamos a establecer el hecho (intuitivamente casi evidente) de que la variación angular de $\Gamma(P)$ es $-\pi + (\alpha + \beta)$, donde α y β son los ángulos agudos que forman los segmentos PP_1 con $y = b^2 - \epsilon$ y MM' con $y = a^2$ respectivamente. (ver fig. 7).

Sea φ un arco de Jordán de extremos P_1 y M , contenido en la banda $a^2 \leq y \leq b^2 - \epsilon$; y tal que no interseque al arco P_1M antes construido ni al segmento P_1M . La curva formada por φ y el arco P_1M es una curva de Jordán.

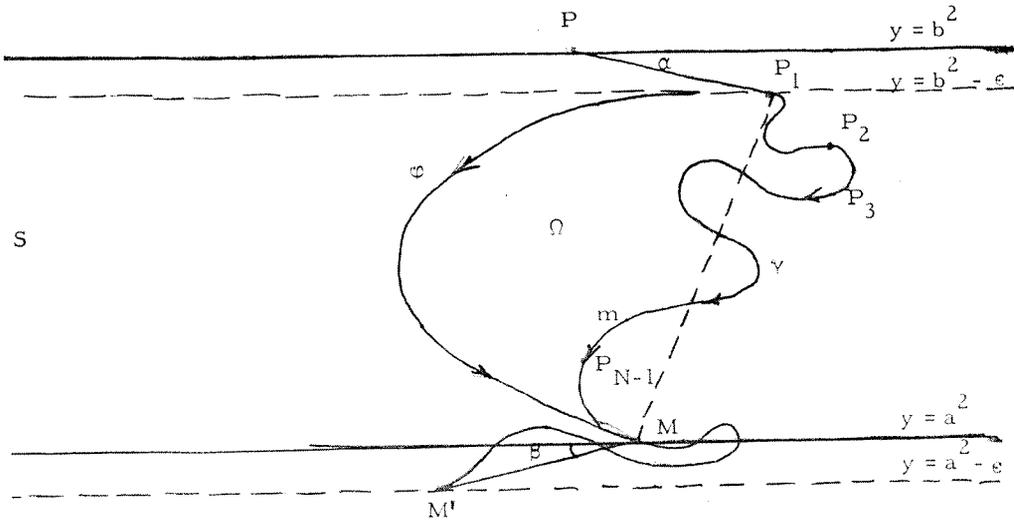


Fig. 7.

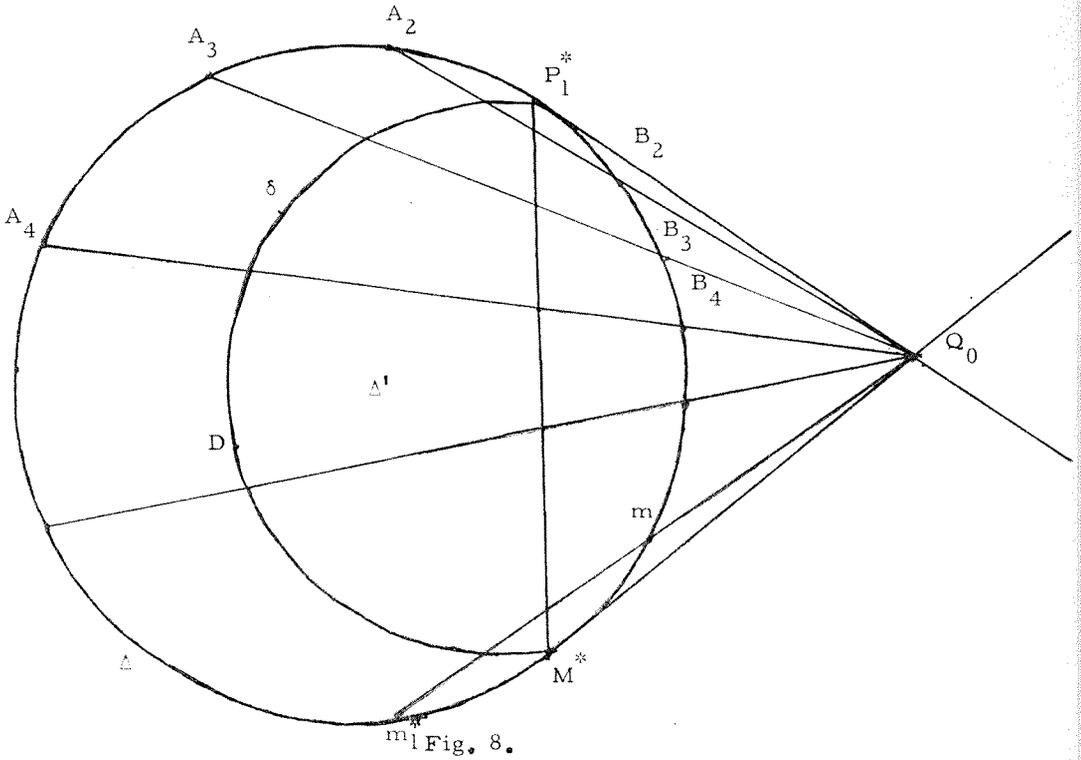
Por consiguiente, existe un homeomorfismo $h: \Omega \rightarrow \Delta$, donde Δ es el disco unitario y Ω es la 2-celda cerrada limitada por la curva de Jordan J .

Sean $P_1^* = h(P_1)$, $M^* = h(M)$, $m^* = h(m)$ y $B_i = h(P_i)$

($i = 2, 3, \dots, N-1$.)

Consideremos las rectas tangentes η_1, η_2 , al círculo unitario en P_1^* y M^* , tracemos por B_K, m^* ($K = 2, \dots, N-1$) líneas que pasen por el punto de intersección Q_0 de N_1 y N_2 ; en caso que η_1 y η_2 sean paralelas, entonces tracemos rectas paralelas; llamemos a los nuevos puntos de intersección de estas rectas con el círculo unitario

A_K, m_1^* ($K = 2, \dots, N-1$) respectivamente.



El segmento $m^* m_1^*$ divide al disco Δ en dos subconjuntos; sea Δ' el subconjunto que no contiene a M^* , pero que contiene el segmento $m^* m_1^*$. (Ver fig. 8). Sea γ el arco $P_1 M$ en la banda y $\gamma^* = h(\gamma)$.

Sea $p: \Delta \rightarrow \gamma^*$ la proyección de Δ sobre γ^* dada por las rectas que pasan por Q_0 y sea $i_D: \gamma^* \rightarrow \delta$ la inclusión de γ^* en el arco de círculo δ que pasa por P_1^* , M^* y D , donde D es cualquier punto

de Δ' , dada por la misma proyección p .

Definimos $L: \Delta' \rightarrow \Delta$ como sigue: $L(D) = (i_D W_1 p)(D)$, donde $W_1: \gamma^* \rightarrow \gamma^*$ es la inducida por W en γ^* y está dada por $W_1 = h W (h^{-1} |_{\gamma_1^*})$, donde γ_1^* es el arco γ^* menos el arco $m^* M^*$.

Consideremos un arco de círculo en Δ que pasa por P_1^* y M^* . Este arco intersecta al segmento $m_1^* m^* = \lambda^*$ en un punto K ; fijémonos ahora en la cuerda KM^* y el arco de círculo KM^* y proyectemos normalmente la cuerda sobre el arco. Procediendo de esta manera para cada arco, obtenemos un homeomorfismo ϕ del triángulo cuyos vértices son m_1^* , m^* y M^* sobre el casquete circular m_1^*, M^*, m^* .

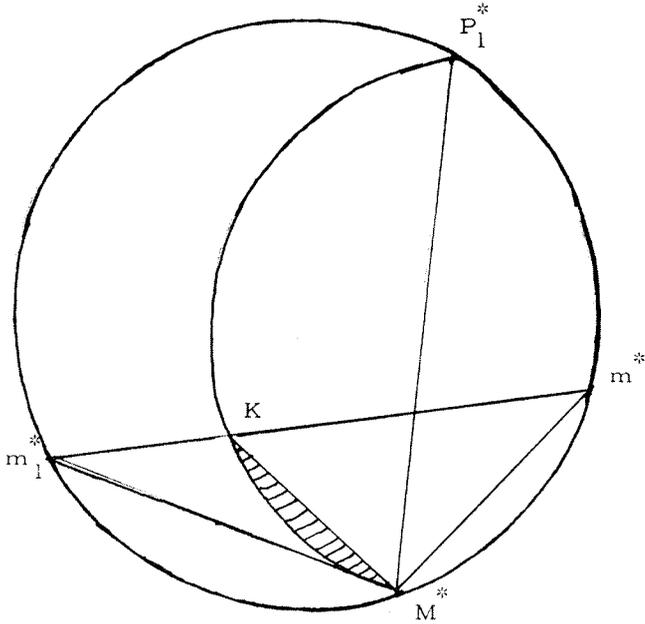


Fig. 9.

Sea g la proyección paralela al segmento $\overline{m_1^* m^*}$ del triángulo $M^* m_1^* m^*$ sobre el segmento $\overline{M^* m^*}$.

Definamos ahora $\psi: \text{triángulo } M^* m_1^* m^* \rightarrow \text{arco } MM'$ de la siguiente manera: $\psi(P) = (Wh^{-1}\phi g)(P)$.

Sea $\Lambda: \Omega \rightarrow S$ como sigue:

$$\Lambda(P) = \begin{cases} h L h^{-1}(P) & \text{si } P \in h^{-1}(\Delta') \\ \psi \phi^{-1} h(P) & \text{si } P \notin h^{-1}(\Delta') \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que $\Lambda(P)$ es continua, $\Lambda(P) \neq P$ para todo P en Ω y que además $\Lambda/\gamma = W$.

Consideremos ahora el campo vectorial Γ_Λ definido por Λ sobre Ω , $\Gamma_\Lambda(P) = P \Lambda(P)$. Del hecho de que $\Lambda/\gamma = W$ se tiene que la variación angular de $\Gamma'(P)$ a lo largo de γ es igual a la variación angular de $\Gamma_\Lambda(P)$ a lo largo de ϕ . Nótese que el campo vectorial $\Gamma_\Lambda(P)$ sobre ϕ está "distribuido" de una manera totalmente análoga a la de $\Gamma'(P)$ sobre γ .

Efectuando un razonamiento totalmente análogo al anterior, se obtiene que la variación angular de $\Gamma_\Lambda(P)$ sobre ϕ es igual a la variación angular del campo vectorial $\Sigma(P)$ sobre la curva k , la cual está formada por el segmento $P_1 M$ y donde $\Sigma(P)$ está definido sobre esta curva de una manera semejante a la de $\Gamma'(P)$ sobre γ , esto es, a medida que P se mueve sobre k , los extremos de los vectores recorren el segmento

$P_1 M$ y el arco MM' , siempre avanzando; por consiguiente, se tiene que el vector $\Sigma(P) \neq \vec{0}$ para todo P en k .

Notación.- $V(\gamma, \Gamma')$ = variación angular de $\Gamma'(P)$ sobre γ .

Luego, las condiciones anteriores se pueden escribir como sigue:

$$V(\gamma, \Gamma') = V(\varphi, \Gamma'_A) = V(k, \Sigma)$$

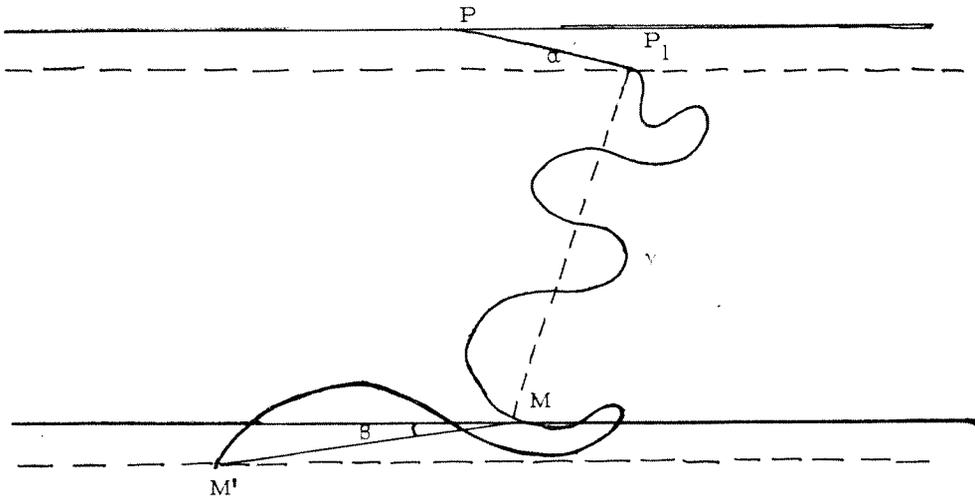


Fig. 10

Sea γ' la curva formada por el segmento PP_1 y la curva γ (γ' = la curva PM , antes descrita).

$$\begin{aligned} V(\gamma', \Gamma') &= \overline{V(PP_1, \Gamma')} + V(\gamma, \Gamma') \\ &= \overline{V(PP_1, \Gamma')} + V(k, \Sigma) \end{aligned}$$

De las propiedades de Σ y recordando que la abscisa de P es

menor que la de P_1 y la de M mayor que la de M' , se obtiene que

$$V(\gamma', \Gamma') = -\pi + (\alpha + \beta),$$

donde α y β son los ángulos agudos positivos que hacen los segmentos $\underline{PP_1}$ y $\underline{MM'}$ con el eje x respectivamente; además nótese que α y β son funciones continuas de ϵ y que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta = 0$$

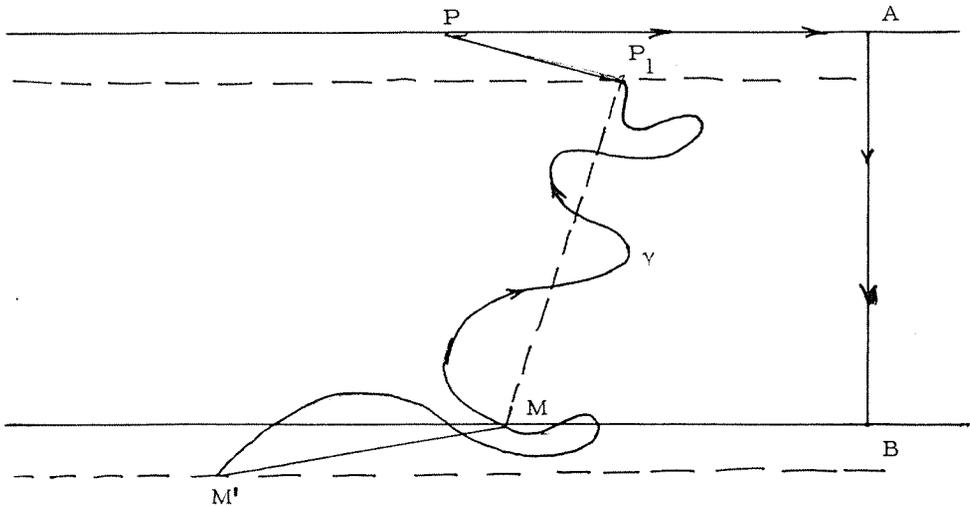


Fig. 11.

Consideremos un segmento vertical AB , que empiece sobre $y = b^2$ y termine sobre $y = a^2$ (ver fig. 11) y el circuito λ formado por los segmentos \underline{PA} , \underline{AB} , \underline{BM} y la curva γ' ; como Γ' no tiene puntos críticos resulta que $V(\lambda, \Gamma') = 0$, por lo cual $V(\gamma', \Gamma') = V(\underline{PABM}, \Gamma')$,

donde $PABM$ es la poligonal con esos vértices; luego la variación de $\Gamma'(P)$ sobre \overline{PA} y \overline{BM} es pequeña y además es una función continua de ϵ ; por lo tanto

$$V(\overline{AB}, \Gamma') = -\pi + (\alpha + \beta) + \eta,$$

donde $\eta = \eta(\epsilon)$ y además $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta = 0$.

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y recordando que Γ es el campo vectorial definido por F en S , se tiene que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(\overline{AB}, \Gamma') = V(\overline{AB}, \Gamma) = -\pi$$

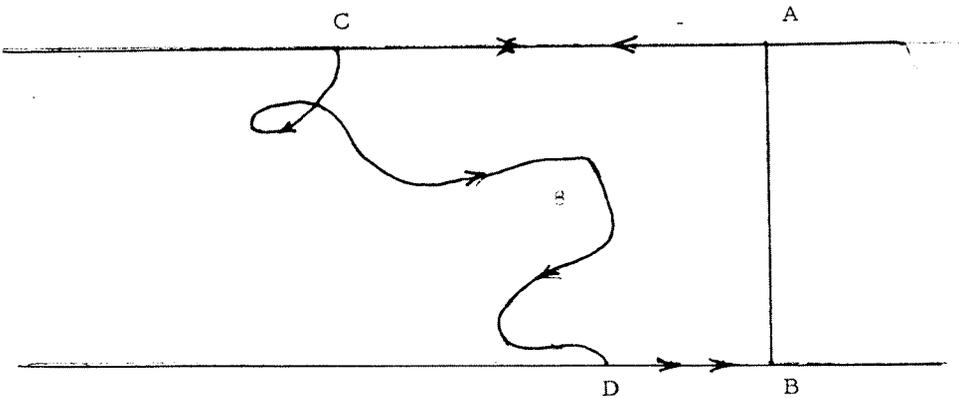


Fig. 12

Sea C un punto sobre $y = b^2$ y D otro punto sobre $y = a^2$.
 Sea $\beta = \widehat{CD}$ un arco cualquiera que une C con D . Queremos ahora
 calcular la variación angular de $\Gamma(P)$, cuando P se mueve de C a
 D a lo largo de β . Llamemos β' al arco formado primero por el seg-
 mento que va de A a C , a continuación el arco β y finalmente el seg-
 mento que va de D a B .

$$V(\beta, \Gamma) = V(\beta', \Gamma)$$

ya que cuando P se mueve sobre \overline{AC} y \overline{DB} , $\Gamma(P)$ no tiene variación
 angular; pero por ser S simplemente conexo, existe una familia continua
 $\{\beta_\lambda\}$ de arcos con $0 \leq \lambda \leq 1$ tales que tienen los mismos puntos termina-
 les y $\beta_0 = AB$, $\beta_1 = \beta'$; ya que Γ no tiene puntos críticos en S enton-
 ces por la proposición 3 de los preliminares

$$-\pi = V(\overline{AB}, \Gamma) = V(\beta', \Gamma)$$

$$V(\beta, \Gamma) - \pi.$$

Cualquiera que sea la manera en que un punto P se mueve de
 $y = b^2$ a $y = a^2$ en S , la variación angular de $\Gamma(P)$ es $-\pi$.

Consideremos ahora la inversa F^{-1} de F , la cual es similar
 a F , excepto sobre $y = b^2$ y $y = a^2$ en que los puntos son movidos en
 direcciones opuestas a como los desplaza F . Por simetría, el vector
 $\overrightarrow{PF^{-1}(P)}$ debe tener ahora una variación angular igual a $+\pi$ cuando P
 se mueve de cualquier manera desde $y = b^2$ hasta $y = a^2$.

Sea δ una curva cualquiera con puntos terminales sobre $y = b^2$

y sobre $y = a^2$, cuando P se mueve a lo largo de δ desde $y = b^2$ hasta $y = a^2$, la variación del vector $\overrightarrow{PF(P)}$ es $-\pi$. Consideremos $F(\delta) = \theta$; claramente θ es una curva con puntos terminales sobre $y = b^2$ y $y = a^2$. La variación angular del vector $\overrightarrow{PF^{-1}(P)}$ es π cuando P recorre θ ; pero el vector $\overrightarrow{F(P)P} = \overrightarrow{QF^{-1}(Q)}$, donde $Q = F(P)$, es de sentido opuesto al de $\overrightarrow{PF(P)}$, entonces la variación angular del vector $\overrightarrow{QF^{-1}(Q)}$ a lo largo de θ es igual a la variación angular del vector $\overrightarrow{PF(P)}$ a lo largo de δ , ya que siempre se encuentran en direcciones opuestas.

Pero esta es una contradicción puesto que la variación angular del vector $\overrightarrow{QF^{-1}(Q)}$ es simultáneamente $-\pi$ y $+\pi$. (Ver fig. 13).

Por consiguiente F debe tener un punto fijo, de donde el teorema queda completamente demostrado.

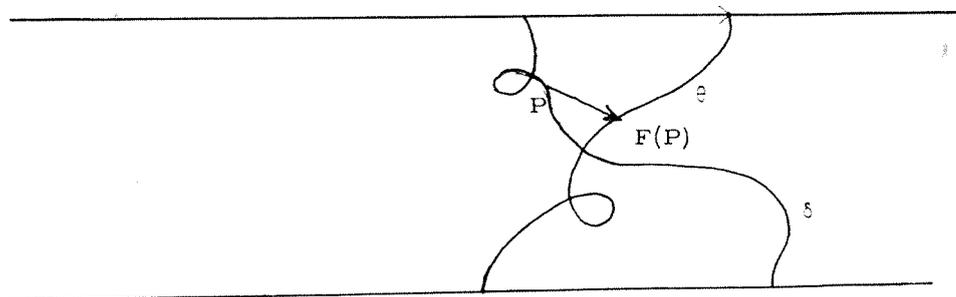


Fig. 13

3. UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA GEOMETRICO DE POINCARÉ

Estableceremos ahora una generalización del teorema geométrico de H. Poincaré de la manera siguiente:

TEOREMA: Sea $R = \{(\theta, r) \mid 0 < a \leq r \leq b\}$ y si

$T: R \rightarrow R$ es un homeomorfismo sobre con las siguientes propiedades:

i) T desplaza a los puntos sobre $r = b$ en dirección positiva y a los puntos sobre $r = a$ en dirección negativa.

ii) T deja invariante la integral

$$\iint_A P(\theta, r) \, d\theta \, dr, \quad A \subset R.$$

donde $P(\theta, r)$ es positiva y de clase C^1 en R .

Entonces existen por lo menos dos puntos fijos bajo T .

Sea U el plano con coordenados polares modificados i.e. en términos de coordenados polares $(\theta', r') \in U$ si $(\theta', \sqrt{r'}) \in \pi$ [$\pi =$ el plano euclidiano con coordenadas polares].

Definiremos ahora

$$\Phi: R \rightarrow U$$

como sigue

$$\Phi(\theta, r) = (\theta', r')$$

$$\theta' = f(\theta, r) = 2\pi \frac{\int_0^\theta P(\theta, r) \, d\theta}{\int_0^{2\pi} P(\theta, r) \, d\theta}$$

$$r' = a^2 + \int_a^r \int_0^{2\pi} P(\theta, r) \, d\theta \, dr = a^2 + \eta(r)$$

claramente Φ es continua y ya que $f(0, r) = 0$, $f(2\pi, r) = 2\pi$ para cada $r \in [a, b]$, por consiguiente $f(\theta, r)$ es una función sobre $[0, 2\pi]$ para cada r .

Sea
$$I = \int_a^b \int_0^{2\pi} P(\theta, r) d\theta dr, \text{ entonces}$$

$$\Phi(R) = \{ (\theta', r') \mid 0 \leq \theta' \leq 2\pi : a^2 \leq r' \leq a^2 + I \}$$

i.e. $\Phi(R)$ es un anillo.

Φ es de clase C^1 ya que :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = 2\pi \frac{P(\theta, r)}{\int_0^{2\pi} P(\theta, r) d\theta} ; \quad \frac{\partial r'}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial r} = \frac{2\pi \left\{ \left(\int_0^{2\pi} P(\theta, r) d\theta \right) \left(\int_0^{\theta} \frac{\partial P}{\partial r} d\theta \right) - \left(\int_0^{\theta} P(\theta, r) d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial r} d\theta \right) \right\}}{\left[\int_0^{2\pi} P(\theta, r) d\theta \right]^2}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = \int_0^{2\pi} P(\theta, r) d\theta .$$

además Φ es biunívoca ya que :

$$\Phi(\theta, r) = \Phi(\theta_1, r_1) \text{ implica } f(\theta, r) = f(\theta_1, r_1) \text{ y}$$

$$a^2 + \eta(r) = a^2 + \eta(r_1) \text{ de donde } f(\theta, r) = f(\theta_1, r_1) \text{ y}$$

$$\eta(r) = \eta(r_1) \text{ implican } f(\theta, r) = f(\theta_1, r_1) , \quad r = r_1$$

de la definición de η , pero esto último de la definición de f se sigue

$$\theta = \theta_1 \quad \text{de donde} \quad (\theta, r) = (\theta_1, r_1).$$

$$\frac{\partial(\theta', r')}{\partial(\theta, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} & \frac{\partial r'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial r} & \frac{\partial r'}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial r'}{\partial r} = 2\pi P(\theta, r) > 0$$

de donde Φ es un homeomorfismo de clase C^1 .

Definimos ahora

$$T' : \Phi(R) \rightarrow \Phi(R)$$

$$T' = \Phi T \Phi^{-1}$$

de donde T' es un homeomorfismo, también se concluye de la definición de T' que:

i) T' desplaza los puntos sobre $r' = a^2 + 1$ en dirección positiva y a los puntos sobre $r' = a^2$ en dirección negativa.

ii) T' deja invariante el área, es decir T' deja invariante la integral $\iint d\theta' dr'$.

Demostración:

$$\iint_A d\theta' dr' = \iint_{\Phi^{-1}(A)} \frac{\partial(\theta', r')}{\partial(\theta, r)} d\theta dr = 2\pi \iint_{\Phi^{-1}(A)} P(\theta, r) d\theta dr$$

lo anterior es debido al teorema del cambio de variable y ahora utilizando

la invariancia de la integral $\iint_{\mathbb{R}^2} P(\xi, r) d\xi dr$ concluimos que:

$$\iint_A d\xi' dr' = 2\pi \iint_{T\xi^{-1}(A)} P(\xi, r) d\xi dr .$$

y ahora por la primera de las razones anteriores concluimos que:

$$\iint_{T'(A)} d\xi' dr' = \iint_{\xi T\xi^{-1}(A)} d\xi' dr' = \iint_{T\xi^{-1}(A)} \frac{\partial(\xi', r')}{\partial(\xi, r)} d\xi dr = 2\pi \iint_{T\xi^{-1}(A)} P(\xi, r) d\xi dr$$

de donde finalmente

$$\iint_A d\xi' dr' = \iint_{T'(A)} d\xi' dr'$$

iii) T' tiene puntos fijos si y solo si T tiene puntos fijos.

Demostración:

Supongamos que M en \mathbb{R} es un punto fijo de T , entonces

$\xi(M)$ es un punto fijo de T' ya que:

$$T'(\xi(M)) = (\xi T\xi^{-1})(\xi(M)) = (\xi T)(M) = \xi(T(M)) = \xi(M).$$

Supongamos que N en $\xi(\mathbb{R})$ es un punto fijo de T' , entonces

$\xi^{-1}(N)$ es un punto fijo de T ya que:

$$N = T'(\xi^{-1}(N)) = \xi T\xi^{-1}(\xi^{-1}(N)) = \xi(T\xi^{-1}(\xi^{-1}(N)))$$

de donde

$$\xi^{-1}(N) = \xi^{-1}(\xi(T\xi^{-1}(\xi^{-1}(N)))) = T\xi^{-1}(\xi^{-1}(N)).$$

De lo anterior concluimos que T' satisface las hipótesis del teorema geométrico de H. Poincaré y por consiguiente T' tiene dos puntos

fijos, pero esto último implica que T tiene dos puntos fijos.

4. APLICACIONES.

EL PROBLEMA DE LA BOLA DE BILLAR.

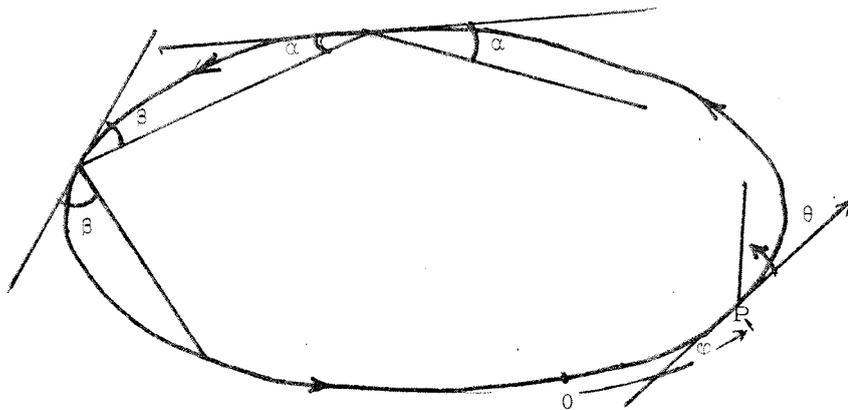


Fig. 1.

1.- Consideremos una curva plana convexa y diferenciable C .

Vamos a estudiar el movimiento de una bola sobre una mesa de billar cuya frontera es la curva C (fig. 1) y en particular vamos a demostrar la existencia de cierto tipo de movimientos periódicos.

Supongamos que la longitud de C es 2π y que es medida desde un punto fijo 0 a un punto variable P por una coordenada angular φ (fig. 1).

Sea P tomado como el punto de proyección de la bola de billar y denotemos por θ el ángulo entre la dirección positiva de la tangente y la dirección de proyección. La variable θ varía entre 0 y π solamente. Estas coordenadas θ y φ son suficientes para representar todos los estados de proyección sin ambigüedad. Si φ es tomada como una coorde-

nada angular en el plano, mientras que θ aumentada por π es tomada como una coordenada radial, el conjunto de parejas $(\varphi, \theta + \pi)$ están representadas sobre un anillo acotado por dos círculos concéntricos de radios π y 2π .

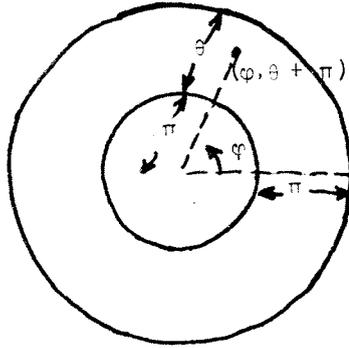


Fig. 2.

2.- Consideremos ahora un estado definido de proyección en P con (φ, θ) dadas; la bola de billar deja P y choca en P_1 para ser proyectada en un estado (φ_1, θ_1) , digamos, y así indefinidamente (ver fig. 3), entonces tenemos una correspondencia en la que a cada estado de proyección (φ, θ) le corresponde otro, digamos (φ_1, θ_1) .

Utilicemos la correspondencia anterior para definir una transformación T del anillo sobre sí mismo:

$$T(\varphi, \theta + \pi) = (\varphi_1, \theta_1 + \pi).$$

Es evidente que esta transformación es continua, diferenciable y uno-uno; es to es T es topológica y diferenciable.

Notemos que cuando θ es muy próxima a 0 ó π , la bola es proyectada en un ángulo muy pequeño con la frontera, y choca otra vez en un punto cercano y con θ_1 cercana a 0 ó π según sea el caso. Por consiguiente los círculos frontera se corresponden a ellos mismos.

Necesitamos hacer una observación más acerca de la transformación de los círculos frontera del anillo. La transformación T efectuará un cierto número de rotaciones completas del círculo interior y del círculo exterior, pero arbitrariamente podemos suponer que el círculo interior no ha tenido ninguna rotación bajo T ; pero lo mismo no podemos suponer del círculo exterior puesto que la rotación en este último está determinada por la continuidad y vamos a ver que se realiza una rotación completa en el sentido positivo ya que, si hacemos variar θ el ángulo de proyección de un punto P de 0 a π , entonces es claro que θ_1 varía de 0 a π mientras que φ_1 varía de 0 a 2π puesto que el punto P_1 hace un circuito completo de C en sentido positivo (ver fig. 3). En otras palabras, la transformación T transforma los segmentos radiales a través del anillo en curvas que parten del mismo punto del círculo interior pero que rodean el anillo justamente una vez mientras lo cruza. Por consiguiente la frontera exterior ha realizado una rotación completa en sentido positivo bajo la transformación T .

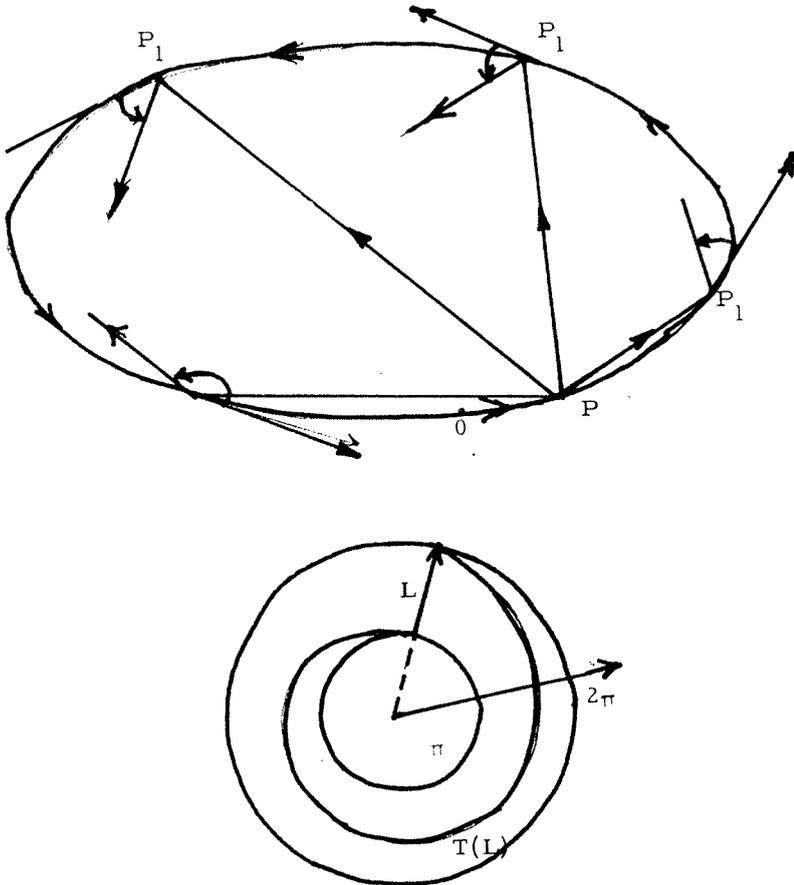


Fig. 3.

Supongamos ahora que tenemos un movimiento periódico, por ejemplo el correspondiente a un triángulo tomado en sentido positivo (fig. 4). Es evidente que $T(P) = Q$, $T(Q) = R$; $T(R) = P$ así que cuando T es aplicada, los tres puntos P, Q, R son cíclicamente avanzados y cada punto queda inalterado por la aplicación de T^3 . Recíprocamente, a cualquier terna de puntos con esta propiedad o a cualquier punto invariante bajo T^3

junto con sus imágenes bajo T y T^2 , corresponde un movimiento periódico (un triángulo armónico).

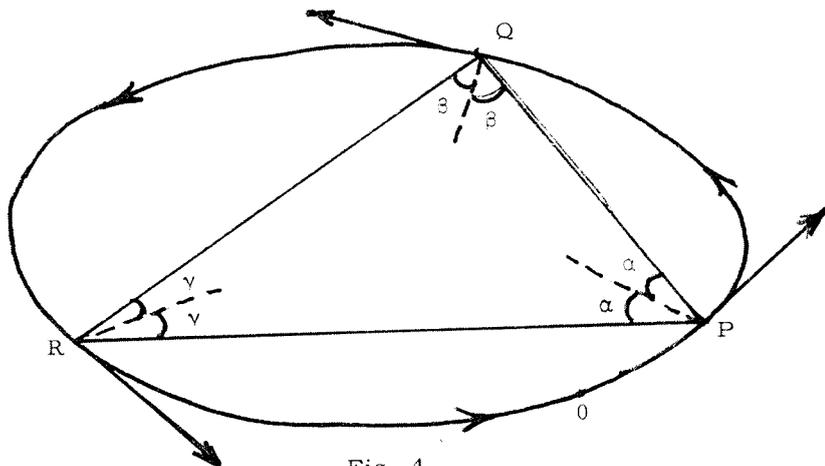


Fig. 4.

Es evidente que no existen puntos interiores invariantes bajo T misma ya que φ es aumentada por menos de 2π .

En esta forma la búsqueda de los movimientos periódicos en el problema de la bola de billar se reduce a la determinación de los conjuntos de puntos distintos P_1, \dots, P_n transformados cíclicamente por T , tal que en general tengamos $T^n(P_i) = P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Puede demostrarse, más generalmente, que cada propiedad interesante del movimiento de la bola de billar se refleja en una propiedad correspondiente de la transformación T . Así, el problema dinámico está reducido efectivamente a aquel de una transformación particular de un anillo circular sobre sí mismo.

3.- La Integral Invariante.

Hay además una propiedad de la transformación

$T: \theta_1 = f(\varphi, \theta), \varphi_1 = g(\varphi, \theta)$ la cual juega un papel fundamental en la aplicación del teorema geométrico de Poincaré:

la doble integral $\iint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ tomada sobre cualquier área σ del anillo, tiene el mismo valor que sobre las imágenes $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ bajo T, T^2, \dots etc., esto es, esencialmente una propiedad de preservar áreas en coordenadas modificadas.

Antes de pasar a la demostración de lo antes afirmado podemos hacer notar el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata de la invariancia de la integral. Como las integrales sobre $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ tienen el mismo valor y como su valor sobre todo anillo es finito e igual a 2π , esto implica que algunas imágenes σ_i y σ_j se intersectan. Empleando la transformación inversa concluimos que σ_{i-j} y σ_{j-1} se intersectan y así finalmente que σ_{i-j} y σ se intersectan ($j < i$). Pero interpretado en el problema de la bola de billar, esto significa que la bola puede ser proyectada con posición y dirección arbitrarias y que la bola regresa subsecuente mente muy cerca de la misma posición y dirección.

Pasemos ahora a la demostración de que la doble integral es invariante. Como se verá, esto depende de la evaluación explícita del Jacobiano

$$J = \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} > 0$$

En efecto, si $\iint M(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$ es invariante, tenemos

$$\iint_{\sigma_1} M(\theta_1, \varphi_1) d\theta_1 d\varphi_1 = \iint_{\sigma} M(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

Pero de acuerdo con el teorema fundamental para cambio de variables, T da para la integral de la izquierda la forma

$$\iint M(\theta_1, \varphi_1) |J| d\theta d\varphi.$$

Comparando esta expresión y la integral sobre la derecha, las cuales son ambas integrales sobre la misma región arbitraria σ , deducimos la relación funcional:

$$M(\theta_1, \varphi_1) |J| = M(\theta, \varphi)$$

Que es la bien conocida condición necesaria y suficiente para la invariancia.

Por consiguiente para establecer que $\iint \text{sen } \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ es invariante debemos solo probar que

$$J = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta_1}$$

Sean

$$X = F(\varphi) \quad y = G(\varphi)$$

las ecuaciones de C en coordenadas rectangulares, tal que si τ denota al ángulo entre la dirección positiva tangencial en un punto de C y el eje x positivo, tenemos

$$\tau = \text{ang tan } \frac{G'(\varphi)}{F'(\varphi)}$$

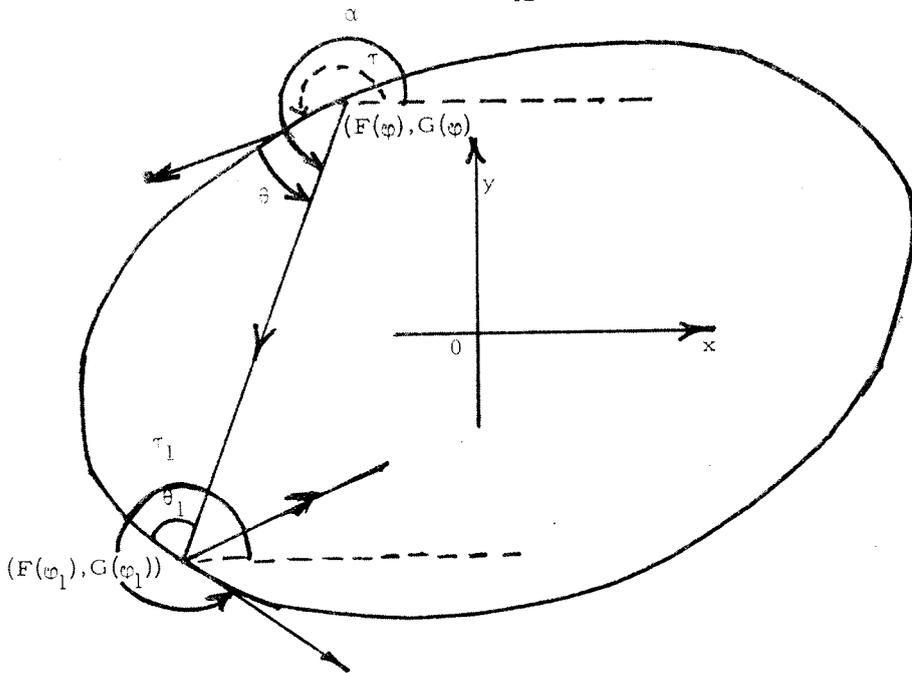


Fig. 5

Similarmente llamemos τ_1 al ángulo en el punto transformado, el cual será dado por la misma expresión excepto que φ es reemplazado por φ_1 .

Finalmente si denotamos por α el ángulo entre la dirección positiva del eje x , y la dirección inicial de proyección (fig. 5). Es evidente que las dos siguientes relaciones son válidas:

$$\theta = \alpha - \tau \quad ; \quad \theta_1 = \tau_1 - \alpha$$

Substituyendo en estas relaciones τ y τ_1 por sus valores y a la α por

$$\alpha = \text{ang tan } \frac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)}$$

obtenemos las fórmulas explícitas

$$\theta = \text{ang tan } \frac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)} - \text{ang tan } \frac{G'(\varphi)}{F'(\varphi)} \equiv L(\varphi, \varphi_1)$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{G'(\varphi_1)}{F'(\varphi_1)} - \text{ang tan } \frac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)} \equiv M(\varphi, \varphi_1).$$

Estas dos expresiones definen la transformaciones T de (φ, θ) en (φ_1, θ_1) .

Tomando diferenciales, encontramos:

$$d\theta = L_{\varphi} d\varphi + L_{\varphi_1} d\varphi_1; \quad d\theta_1 = M_{\varphi} d\varphi + M_{\varphi_1} d\varphi_1,$$

de donde se obtiene

$$d\theta_1 = \frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}} d\theta + \left(M_{\varphi} - \frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}} L_{\varphi} \right) d\varphi$$

$$d\varphi_1 = \frac{1}{L_{\varphi_1}} d\theta - \frac{L_{\varphi}}{L_{\varphi_1}} d\varphi,$$

de donde obtenemos para el Jacobiano

$$J = - \frac{M_{\varphi}}{L_{\varphi_1}} = - \frac{[F(\varphi_1) - F(\varphi)] G'(\varphi) - [G(\varphi_1) - G(\varphi)] F'(\varphi)}{[F(\varphi_1) - F(\varphi)] G'(\varphi_1) - [G(\varphi_1) - G(\varphi)] F'(\varphi_1)}$$

Pero $F(\varphi_1) - F(\varphi)$, $G(\varphi_1) - G(\varphi)$ son proporcionales a $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, respectivamente, mientras que también

$$F'(\varphi) = \cos \tau, \quad G'(\varphi) = \operatorname{sen} \tau,$$

$$F'(\varphi_1) = \cos \tau_1, \quad G'(\varphi_1) = \operatorname{sen} \tau_1.$$

Así, finalmente, obtenemos:

$$J = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \tau)}{\operatorname{sen}(\tau_1 - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta_1},$$

como se había asegurado.

4.- Aplicación del Teorema de Poincaré.

Como se ha visto, no hay puntos interiores invariantes bajo T . Consideremos ahora T^2 seguida de una rotación del plano (φ, θ) a través de un ángulo de -2π alrededor del origen, la cual denotaremos por R_{-1} . La transformación resultante $R_{-1}T^2$ admite la misma integral invariante que T , por supuesto, pero desplaza los puntos del círculo exterior un ángulo de 2π y los del círculo interior un ángulo de -2π estas son las dos condiciones esenciales para la aplicación del Teorema geométrico de Poincaré. Por consiguiente, $R_{-1}T^2$ tiene dos puntos geoméricamente distintos invariantes de índices opuestos, aunque estos correspondan a un incremento de φ por 2π . Si P es un punto invariante también lo es $T(P)$ por supuesto, pero con el mismo índice; así conseguimos dos pares de puntos, digamos $P, T(P), Q, T(Q)$ los cuatro distintos los cuales claramente corresponden a los dos movimientos periódicos fundamentales.

Para la aplicación del Teorema de Poincaré a los movimientos periódicos más complicados es necesario observar el hecho de que uno de tales movimientos está asociado con un segundo de tales movimientos, a

saber el obtenido cambiando la dirección de descripción, aunque esos movimientos tienen el mismo índice. Sin embargo uno de esos movimientos aumenta φ por $2k\pi$, el otro por $2(n-k)\pi$. Entonces nos basta considerar los puntos invariantes de T^n para los cuales φ aumenta por $2k\pi$, $k \leq \frac{n}{2}$.

Así claramente obtenemos un polígono de n lados solamente una vez.

Vamos ahora a demostrar el resultado siguiente que es la conclusión fundamental del problema de la bola de billar.

Sea $n \geq 2$ un natural y sea $k \leq \frac{n}{2}$ otro natural tal que el máximo común divisor de k y n es 1; entonces existen dos polígonos de n lados, esto es, movimientos periódicos de la bola de billar que se repiten al cabo de n choques y además esto último sucede al cabo de un incremento $2k\pi$ de φ .

Para establecer el resultado anterior consideramos la transformación $R_{-k} T_n$ donde R_{-k} denota una rotación del plano por un ángulo de $-2k\pi$; las rotaciones del círculo interior y exterior bajo $R_{-k} T^n$ son respectivamente $-2k\pi$ y $2(n-k)\pi$ las cuales claramente son de signos opuestos y además es claro que $R_{-k} T^n$ admite la misma integral invariante; por consiguiente podemos aplicar el teorema geométrico de Poincaré. Por lo tanto existen dos puntos invariantes bajo $R_{-k} T^n$ de lo cual concluimos que existen dos puntos P, Q geoméricamente distintos tales

que $T^n(P) = P$ y $T^n(Q) = Q$, mientras que φ ha aumentado por $2k\pi$; se ve fácilmente que $P, T(P), \dots, T^{n-1}(P)$ y $Q, T(Q), \dots, T^{n-1}(Q)$ son dos series geométricamente distintas de puntos. Para que el resultado quede totalmente establecido lo que resta es probar que

$$P, T(P), \dots, T^{n-1}(P)$$

son n puntos distintos. Para ello supongamos lo contrario.

Esto es, $T^m(P) = P$ ($m \leq n-1$) y que φ es incrementada por $2j$; de $T^n(P) = P = T^m(P)$ concluimos que $T^d(P) = P$ ($d \neq 1$ claramente), donde d es el máximo común divisor de m y n ; supongamos que bajo T^d , la φ de P aumenta por $2l\pi$ de $T^n = T^{qd}$. Vemos que T^n aumenta φ por $2ql$ así que $ql = k$, de donde k y n poseerían el factor común q , contrario a la hipótesis.

Por consiguiente el resultado queda establecido ya que en forma análoga $Q, T(Q), \dots, T^{n-1}(Q)$ es una serie de puntos distintos entre sí y distintos de los anteriores ya que los índices de una y otra serie de puntos son opuestos.

REFERENCIAS

1. - George D. Birkhoff.
American Mathematical Society
Colloquium Publications
Volume IX.
2. - George D. Birkhoff.
Proof of Poincaré's Geometric Theorem
Trans. of American Math. Soc.
January 1913, Vol. 14, pág. 14-22.
3. - George D. Birkhoff.
Collected Math. Papers
Vol. I, 1950, pág. 673-681.
4. - Henri Poincaré.
Sur un théoreme de Géométrie
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
Vol. 33, 1912, pág. 375-407.
5. - Henri Poincaré.
Oeuvres de Henri Poincaré
Tome VI, pág. 499-538.