U. N. A. M.

TRANSFORMADAS DE FOURIER EN ESPACIOS DE HILBERT REAL Y METODO DE FRECUENCIA DE POPOV.

Tésis que para obtener el grado de

DOCTOR EN MATEMATICAS

presenta

PABLO BARRERA SANCHEZ

MEXICO, 1970.

A MI ESPOSA

A la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO, que tanto me ha dado.

PREFACIO

Uno de los problemas más importantes en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, durante los últimos 25 años, es el de dar condiciones suficientes para la estabilidad absoluta de sistemas de regulación automática del tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi$$
$$\dot{\xi} = \varphi(\sigma)$$
$$\sigma = c'x.$$

[donde $x(\cdot), b, c$ son vectores ξ, σ son escalares y φ es una función escalar no lineal del tipo

$$0 \leq \sigma\,\varphi(\sigma) \leq k\,\sigma^2 .]$$

Fué el académico rumano V. Popov [1] el primero en dar un criterio basado en la respuesta en frecuencias del sistema, análogo al criterio de Nyquist para sistemas lineales. En 1964 V. Dolezal [1] logró aplicar el método para sistemas de regulación gobernados por un sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales no-lineales, con un número finito de grados de libertad.

Ha sido mi interés extender el método de frecuencia de Popov, para sistemas con un número no finito de grados de libertad; esto me ha llevado a responder a la pregunta siguiente: ¿Cuál es la transformada de Fourier de funciones, cuyos valores están en un espacio de dimensión no-finita? Afortunadamente, he podido dar una respuesta siguiendo los lineamientos clásicos [Goldberg [1]] y, al mismo tiempo, extender el método de Popov.

Así que el contenido de este trabajo es el siguiente:

Se presenta, en las tres primeras partes, una teoría constructiva de la transformada de Fourier para funciones con valores en un espacio de Hilbert real y, en la última parte, se extiende el método de Popov a ecuaciones íntegro-diferenciales definidas sobre un espacio de Hilbert real.

Quiero agradecer a mi amigo el doctor Zdenek Vorel su valiosa ayuda, sobre todo en estos últimos tiempos tan difíciles aquí y en el otro lado del Atlántico.

Al mismo tiempo, agradezco a todas las personas del Instituto Mexicano del Petróleo, así como de la Facultad de Ciencias y del Centro de Cálculo Electrónico de la U.N.A.M., la ayuda que me han brindado durante estos últimos años.

INDICE

I N T R O D U C C I O N

Vamos a definir transformada de Fourier para funciones que toman sus valores en un espacio de Hilbert Real.

Sea H un espacio de Hilbert Real, construiremos un espacio de Hilbert Complejo H_2 que llamaremos la complexificación de H.

i) H_2 es el producto directo $H \times H$ como espacios vectoriales reales.

ii) Introducimos la multiplicación por números complejos en H_2 como sigue si $\lambda = \lambda_1 + i \; \lambda_2$ $\quad x = (x_1, x_2)$

Definición:

$$\lambda x = (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \; \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1)$$

es inmediato que esta definición satisface las condiciones necesarias para que H_2 sea un espacio vectorial complejo.

iii) Ahora introduciremos un producto interior $<.,.>_2$ en H_2 en términos del producto interior $<.,.>$ en H. si $x = (x_1, x_2)$, $\quad y = (y_1, y_2)$

Definición:

$$<x,y>_2 = <x_1,y_1> + <x_2,y_2> + i \, [<x_2,y_1> - <x_1,y_2>]$$

Se checa directamente que esta definición satisface los requisitos para ser un producto interior en H_2.

Además la norma de un elemento $x = (x_1, x_2)$ en H_2 esta dada por

$$||x||_2 = (<x,x>_2)^{1/2}$$

iv) Como H es completo, lo mismo es cierto de H_2.

$\therefore$ H_2 es un espacio de Hilbert Complejo.

En lo que sigue haremos uso de la integral de Bochner en H y H_2, seguiremos la notación y propiedades como estan en Hille-Phillipe [1] Dunford - Schwartz [1], Lang- [2].

Denotaremos con $E_p(R,H,\mu)$ $1 \leq p < \infty$ a las clases de funciones $\sigma: R \longrightarrow H$ fuertemente medibles y tales que

$$\int_R ||\sigma(t)||^p d\mu(t) < \infty$$

donde μ es la medida de Lebesgue en R. Claramente $E_p(R,H,\mu)$ es un espacio de Banach Real con la norma

$$||\sigma||_{E_p} = [\int_R ||\sigma(t)||^p d\mu(t)]^{1/p}$$

· Transformada de Fourier en $B_1(R,H,\mu)$

Definición

Sea $\sigma : R \to H$, $\sigma(.) \in B_1(R,H,\mu)$ la transformada de Fourier de σ es la función $\hat{\sigma} : R \to H_2$ definida como sigue.

La función de $R \to H_2$ definida por $s \to (\sigma(s),0)\, e^{i\omega s} \in H_2$ es claramente fuertemente medible y además

$$\|(\sigma(s),0)e^{i\omega s}\|_2 = \|(\sigma(s),0)\|_2 . |e^{i\omega s}|$$

$$= \|\sigma(s)\|$$

Así que $(\sigma(s),0)e^{i\omega s}$ es Bocchner integrable para toda $\omega \in R$. Por consiguiente

$$\hat{\sigma}(\omega) = \int_R (\sigma(s),0)e^{i\omega s}\, d\mu(s)$$

está bien definida. Algunas veces denotaremos $\hat{\sigma}(\omega)$ como $\mathcal{T}(\sigma)(\omega)$ para evitar ambiguedad en algunos enunciados claramente

$$\hat{\sigma}(\omega) = \left(\int_R \sigma(s) \cos \omega s d\mu(s), \int_R \sigma(s) \operatorname{sen} \omega s d\mu(s)\right)$$

Teorema 1.

Si $\sigma(.) \in B_1(R,H,\mu)$ entonces

i) $\|\hat{\sigma}(\omega)\| \leq \|\sigma\|_{B_1}$

ii) $\hat{\sigma}(\omega)$ es continua en R

iii) si $\{\sigma_n(.)\} \subset B_1(R,H,\mu)$ y

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n - \sigma\|_{B_1} = 0$$

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\sigma}_n(\omega) = \hat{\sigma}(\omega)$$

uniformemente sobre R.

. iv) $\widehat{\sigma(t+a)}(\omega) = T(\sigma(t+a))(\omega) = \hat{\sigma}(\omega)e^{-ia\omega}$

. v) $\lim\limits_{\omega \to \pm\infty} ||\hat{\sigma}(\omega)||_2 = 0$

Demostración.

i) Se sigue de la definición.

ii) $$\hat{\sigma}(\omega+h) - \hat{\sigma}(\omega) = \int_R (\sigma(s),0)\,(e^{i(\omega+h)s} - e^{i\omega s})d\mu(s)$$

$$||\hat{\sigma}(\omega+h) - \hat{\sigma}(h)||_2 \leq \int_R ||\sigma(s)||\,|e^{ihs} - 1|d\mu(s)$$

claramente $\qquad ||\sigma(s)||.|e^{ihs} - 1| \leq 2||\sigma(s)||$

y

$$\lim_{h \to 0} ||\sigma(s)||.|e^{ihs} - 1| = 0$$

Así que por el teorema de convergencia denominada de Lebesgue tenemos

$$\lim_{h \to 0} \int_R ||\sigma(s)||.|e^{ihs} - 1| = 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} ||\hat{\sigma}(\omega+h) - \hat{\sigma}(\omega)||_2 = 0$$

iii) Notese que

$$\|\hat{\sigma}_n(\omega) - \hat{\sigma}(\omega)\|_2 \leq \int_R \|\sigma_n(s) - \sigma(s)\| \, d\mu(s)$$

se sigue inmediatamente de la definición y entonces

$$\sup_{\omega \in R} \|\hat{\sigma}_n(\omega) - \hat{\sigma}(\omega)\|_2 \leq \|\sigma_n - \sigma\|_{E_1}$$

y el resultado se sigue inmediatamente.

iv) Se sigue inmediatamente de la invariancia de μ bajo translaciones.

v) $$\hat{\sigma}(\omega) = \int_R (\sigma(s),0) \, e^{i\omega s} \, d\mu(s)$$

$$-1 = e^{i\Pi}$$

multiplicando tenemos

$$-\hat{\sigma}(\omega) = \int_R (\sigma(s),0) \, e^{i\omega(s+\frac{\Pi}{\omega})} \, d\mu(\omega)$$

$$\therefore \quad -\hat{\sigma}(\omega) = \int_R (\sigma(t - \tfrac{\Pi}{\omega}),0) \, e^{i\omega t} \, d\mu(t)$$

esta última por la invariancia bajo translaciones

$$2\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega) - (-\hat{\sigma}(\omega)) = \int_R (\sigma(s) - \sigma(s - \tfrac{\Pi}{\omega}),0) \, e^{i\omega s} \, d\mu(s)$$

$$\therefore \quad 2\|\hat{\sigma}(\omega)\|_2 \leq \int_R \|\sigma(s) - \sigma(s - \tfrac{\Pi}{\omega})\| \, d\mu(s)$$

ahora por continuidad en $E_1(R, F, \mu)$ tenemos

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_R \|\sigma(s) - \sigma(s - \tfrac{\Pi}{\omega})\| \, d\mu(s) = 0$$

y la prueba es completa.

Definición

Sea $\sigma : R \to H$, si para cada $A > 0$

$$\int_{[-A,A]} \sigma(s)\, d\mu(s)$$

existe, entonces $\int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$ se dice que es (c,1) sumable a $\sigma_o \varepsilon H$ si

$$\lim_{A \to \infty} \int_{[-A,A]} \left(1 - \frac{|s|}{A}\right) \sigma(s)\, d\mu(s) = \sigma_o$$

Proposición

Si $\sigma(.)\varepsilon P_1(R,H,\mu)$ entonces $\int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$ es (c,1) sumable a $\int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$. i.e.

$$\lim_{A \to \infty} \int_{[-A,A]} \left(1 - \frac{|s|}{A}\right) \sigma(s)\, d\mu(s) = \int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$$

Demostración

Definimos

$$\sigma_A(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{A}\right) \sigma(s) & \text{si} \quad |s| \leq A \\ 0 & \text{si} \quad |s| > A \end{cases}$$

entonces

$$||\sigma_A(s)|| \leq ||\sigma(s)|| \qquad \text{para toda} \quad s\varepsilon R.$$

y

$$\lim_{A \to \infty} \sigma_A(s) = \sigma(s) \qquad \text{para todo} \quad s\varepsilon R.$$

Por el teorema de Lebesgue para la integral de Bochner tenemos:

$$\lim_{A \to \infty} \int_R \sigma_A(s)\, d\mu(s) = \int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$$

substituyendo ahora obtenemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{[-A,A]} (1 - \frac{|s|}{A})\sigma(s)\, d\mu(s) = \int_R \sigma(s)\, d\mu(s)$$

que es el resultado deseado.

Teorema

Si $\sigma(\cdot) \varepsilon\ F_1(R,H,\mu)$ y si r en R pertenece al conjunto de Lebesgue para σ entonces

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\Pi} \int_{[-A,A]} (1 - \frac{|\omega|}{A})\, e^{-i\omega r}\ \hat{\sigma}(\omega)\, d\mu(\mu) = \sigma(r)$$

si

$\hat{\sigma}(\omega) \varepsilon\ F_1(R,\ H_2,\ \mu)$ entonces

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\Pi} \int_R \hat{\sigma}(\omega)\, e^{-i\omega r}\, d\mu(\omega)$$

para casi toda r en R.

Demostracion

Sea $A > 0$ consideremos

$$I_A(r) = \frac{1}{2\Pi} \int_{[-A,A]} (1 - \frac{|\omega|}{A})\, e^{-i\omega r}\ \hat{\sigma}(\omega)\, d\mu(\omega)$$

$$I_A(r) = \frac{1}{2\Pi} \int_{[-A,A]} (1 - \frac{|\omega|}{A})\, e^{-i\omega r} \int_R (\sigma(s),0) e^{i\omega s}\, d\mu(s).d\mu(\omega)$$

por el teorema de Fubini tenemos

$$I_A(r) = \frac{1}{2\pi}\int_R (\sigma(s),0)\int_{[-A,A]} e^{-i\omega(r-s)}\,(1-\frac{|\omega|}{A})\,d\mu(\omega).d\mu(s)$$

no es dificil checar que

$$\int_{[-A,A]}(1-\frac{|\omega|}{A})\,e^{-i\omega(r-s)}\,d\mu(\omega) = \frac{2(1-\cos A(r-s))}{A(r-s)^2}\;.$$

asi que

$$I_A(r) = \frac{1}{\pi}\int_R (\sigma(s),0)\,\frac{1-\cos A(r-s)}{A(r-s)^2}\,d\mu(s)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_R \sigma(s)\,\frac{1-\cos A(r-s)}{A(r-s)^2}\,d\mu(s)$$

otra vez por la invariancia bajo traslaciones

$$I_A(r) = \frac{1}{\pi}\int_R \sigma(r-t)\,\frac{1-\cos At}{At^2}\,d\mu(t)$$

ahora por la invariancia bajo reflexión

$$I_A(r) = \frac{1}{\pi}\int_R \sigma(r+t)\,\frac{1-\cos At}{At^2}\,d\mu(t).$$

Sumando

$$2I_A(r) = \frac{1}{\pi}\int_R [\sigma(r+t)+\sigma(r-t)]\,\frac{1-\cos At}{At^2}\,d\mu(t).$$

Sea

$$\gamma(t) = [\sigma(r+t)+\sigma(r-t)]\,\frac{1-\cos At}{At^2}$$

claramente

$$\gamma(t) = \gamma(-t).$$

$$2I_A(r) = \frac{1}{\Pi} \int_{[-\infty,0] \cup [0,\infty]} \gamma(t)d\mu(t) = \frac{1}{\Pi}\Big[\int_{[-\infty,0]} \gamma(t)d\mu(t)$$

$$+ \int_{[0,\infty]} r(t)d\mu(t)\Big]$$

como

$$\int_{[-\infty,0]} \gamma(t) \quad d\mu(t) = \int_{[0,\infty]} \gamma(t)d\mu(t)$$

$$\therefore \quad 2I_A(r) = \frac{2}{\Pi} \int_{[0,\infty]} \gamma(t) \; d\mu(t).$$

$$I_A(r) = \frac{1}{\Pi} \int_{[0,\infty]} [\sigma(r+t) + \sigma(r-t)] \; \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t)$$

es bien conocido que

$$\int_{[0,\infty]} \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t) = \int_{[0,\infty]} \frac{1 - \cos t}{t^2} \; dt = \frac{\Pi}{2}$$

Entonces

$$I_A(r) - \sigma(r) = \frac{1}{\Pi} \int_{[0,\infty]} [\sigma(r+t) + \sigma(r-t)] \; \frac{1 - \cos At}{At^2} \; d\mu(t)$$

$$- \frac{2}{\Pi} \sigma(r) \int_{[0,\infty]} \frac{1 - \cos At}{At^2} \; d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\Pi} \int_{[0,\infty]} [\sigma(r+t) + \sigma(r-t) - 2\sigma(r)] \; \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t)$$

Sea

$$\Sigma(t) = \sigma(r+t) + \sigma(r-t) - 2\sigma(r)$$

entonces

$$I_A(r) - \sigma(r) = \frac{1}{\Pi} \int_{[0,\delta]} \Sigma(t) \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t) + \frac{1}{\Pi} \int_{[\delta,\infty]} \Sigma(t) \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t)$$

donde $\delta > 0$ va a ser escogido.

Sea

$$\Pi \cdot I_1 = \int_{[0,\delta]} \Sigma(t) \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t)$$

y

$$S(t) = \int_0^t ||\Sigma(s)|| \, ds.$$

Como r pertenece al conjunto de Lebesgue para σ, se sigue que

$$\lim_{t \to 0} \frac{S(t)}{t} = 0$$

asi que si $\varepsilon > 0$ es pequeno podemos elegir la δ mencionada tal que

$$S(t) \leq \varepsilon t \qquad\qquad 0 < t < \delta$$

ahora elegimos $A > 0$ tal que $\frac{1}{A} < \delta$. Entonces

$$||\Pi I_1|| \leq \int_{[0,\delta]} ||\Sigma(t)|| \frac{1 - \cos At}{At^2} d\mu(t) =$$

$$= \int_{[0,1/A]} ||\Sigma(t)|| \frac{1-\cos At}{At^2} d\mu(t) + \int_{[1/A,\delta]} ||\Sigma(t)|| \frac{1-\cos At}{At^2} d\mu(t)$$

Es claro que $1 - \cos At \leq \frac{A^2 t^2}{2}$ por consiguiente

$$I_1' = \int_{[0,1/A]} ||\Sigma(t)|| \frac{1-\cos At}{At^2} d\mu(t) \leq \frac{A}{2} \int_0^{1/A} ||\Sigma(t)|| dt =$$

$$\therefore \quad I_1' \leq \frac{A}{2} S(\tfrac{1}{A}) \leq \frac{A}{2} \cdot \varepsilon \frac{1}{A} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_1'' = \int_{[1/A,\delta]} ||\Sigma(t)|| \frac{1-\cos At}{At^2} d\mu(t) \leq \frac{2}{A} \int_{[1/A,\delta]} \frac{||\Sigma(t)||}{t^2} d\mu(t)$$

$$\therefore \quad I_1'' \leq \frac{2}{A} \left[\frac{S(t)}{t^2}\right]_{1/A}^{\delta} + \frac{4}{A} \int_{[1/A,\delta]} \frac{S(t)}{t^3} dt$$

$$I_1'' \leq \frac{2}{A} \left[\frac{S(\delta)}{\delta^2} - A^2 S(\tfrac{1}{A})\right] + 4\varepsilon \int_{[1/A,\delta]} \frac{dt}{At^2}$$

$$I_1'' \leq \frac{2}{A}\frac{\varepsilon}{\delta} + 4\varepsilon < 2\varepsilon + 4\varepsilon = 6\varepsilon$$

$$||\pi I_1|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 6\varepsilon = \frac{13\varepsilon}{2}$$

Sea

$$\pi I_2 = \int_{[\delta,\infty]} \Sigma(t) \frac{1-\cos At}{At^2} d\mu(t)$$

Entonces

$$||\pi I_2|| \leq \frac{2}{A} \int_{[\delta,\infty]} \frac{||\Sigma(t)||}{t^2} d\mu(t)$$

Pero ahora observemos que

$$\int_{[\delta, \infty]} \frac{||\Sigma(t)||}{t^2} \, d\mu(t) < \infty$$

Así que

$$\lim_{A \to \infty} ||\Pi I_2|| = 0$$

Finalmente

$$\overline{\lim_{A \to \infty}} ||I_A(r) - \sigma(r)|| \leq \overline{\lim_{A \to \infty}} ||I_1|| + \overline{\lim_{A \to \infty}} ||I_2||$$

$$\leq \frac{13\varepsilon}{2\Pi}$$

Como $\varepsilon < 0$ es arbitrario tenemos

$$\lim_{A \to \infty} I_A(r) = \sigma(r)$$

y la demostración esta completa.

Corolario.

Si $\sigma(.) \varepsilon B_1(R, H, \mu)$ y si $\hat{\sigma}(\omega) = 0$ para toda ω en R. Entonces

$$\sigma(t) = 0 \qquad \text{para casi toda } t \text{ en } R.$$

Corolario.

(Unicidad de la Transformada de Fourier). Si $\sigma_1(.), \sigma_2(.)$ - estan en $B_1(R, H, \mu)$ y si

$$\hat{\sigma}_1(\omega) = \hat{\sigma}_2(\omega) \qquad \text{para toda } \omega \varepsilon R.$$

entonces

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) \qquad \text{para casi toda } t \in R.$$

TEORIA DE CONVOLUCION

Sea $O(H)$ el espacio de Banach de los operadores lineales acotados de H en si mismo.

El siguiente teorema nos permite definir convolución.

Teorema

Sea $E : R \to O(H)$, $E(.)\varepsilon\ P_1(R,O(H),\mu)$ y $\sigma(.)\varepsilon\ P_1(R,H,\mu)$ entonces:

i) La siguiente integral

$$\int_R E(t-s)\ \sigma(s)\ d\mu(s)$$

existe para casi todo t en R.

ii)

$$\int_R \left|\left| \int_R E(t-s)\ \sigma(s)\ d\mu(s) \right|\right| d\mu(t) \leq ||E||_{P_1} . ||\sigma||_{P_1}$$

Demostración

Consideremos la función $||E(t-s)||.||\sigma(s)||$ lo cual es integrable con respecto a t y además:

$$\int_R ||E(t-s)||.||\sigma(s)||\ d\mu(t) = \int_R ||E(t-s)||.d\mu(t).||\sigma(s)||$$

$$= K||\sigma(s)|| \qquad 0 \leq K < \infty$$

esto significa que

$$\int_R ||\ E(t-s)||.||\sigma(s)||\ d\mu(t)$$

es integrable con respecto a s. i.e.

$$\int_R [\int_R ||E(t-s)||.||\sigma(s)|| \, d\mu(t)] \, d\mu(s) < \infty$$

entonces por el teorema de Fubini para integral de Lebesgue obtenemos:

$$\int_R ||E(t-s)||.||\sigma(s)|| \, d\mu(s) < \infty$$

para casi toda $t \in R$.

Ahora de la siguiente desigualdad

$$||E(t-s) \, \sigma(s)|| \leq ||E(t-s)||.||\sigma(s)||$$

y del hecho que $E(t-s) \, \sigma(s)$ es fuertemente medible (con respecto a s) tenemos que

$$\int_R E(t-s) \, \sigma(s) \, d\mu(s)$$

existe para casi toda t en R.

De las estimaciones anteriores se sigue que

$$I = \int_R || \int_R E(t-s) \, \sigma(s) \, d\mu(s)|| \, d\mu(t) < \infty$$

y entonces

$$I \leq \int_R [\int_R ||E(t-s)||.||\sigma(s)|| \, d\mu(s)] \, d\mu(t)$$

$$I \leq \int_R ||E(t-s)|| \, d\mu(t)] \cdot ||\sigma(s)|| \, d\mu(s)$$

$$I \leq ||E||_{B_1} \cdot ||\sigma||_{B_1}$$

así que la demostración es completa.

Definición

Dada $E(.) \varepsilon B_1(R_1, O(H), \mu)$ y $\sigma(.) \varepsilon B_1(R, H, \mu)$ la convolución de $E(.)$ y $\sigma(.)$ es la función $h(.) \varepsilon B_1(R, H, \mu)$ dada por:

$$h(t) = \int_R E(t-s)\, \sigma(s)\, d\mu(s)$$

la cual denotaremos por $h = E * \sigma$

Corolario

$$||E * \sigma||_{B_1} \leq ||E||_{B_1} \cdot ||\sigma||_{B_1}$$

La siguiente proposición es obvia:

Proposición

Si $h = E * \sigma$ entonces h es continua cuando E ó σ son continuas.

Proposición

Si $h = E * \sigma$ entonces

$$h(t) = \int_R E(t-s)\, \sigma(s)\, d\mu(s) = \int_R E(r)\, \sigma(t-r)\, d\mu(r)$$

Demostración

Se sigue inmediatamente de la invariancia de μ bajo translaciones y reflexiones.

Definición

Si $E(.)$, $F(.)\varepsilon B_1(R,O(H),\mu)$ entonces definimos

$$G(.)\varepsilon B_1(R,O(H),\mu)$$

$$G(t) = \int_R E(t-s) \circ F(s)\, d\mu(s)$$

y llamamos a $G \doteq E * F$ la convolución de E y F.

Es totalmente análogo a la definición anterior checar que es una buena definición y que además

$$||G||_{B_1} \leq ||E||_{B_1} \cdot ||F||_{B_1}$$

Transformada de Fourier en $B_1(R,O(H),\mu)$.

Consideremos el espacio de Banach $O(H_2)$ donde H_2 es la complexificacion de H. El subespacio $O_2(H_2)$ definido por

$$O_2(H_2) = \{T\varepsilon\, O(H_2)\ |T = (T^1,T^2), \quad T^i:H_2 \to H$$

$$i = 1,2 \qquad T^1(0,\sigma) = 0 \qquad T^2(\sigma,0) = 0\ \}$$

es claramente cerrado. Asi que $O_2(H_2)$ es un espacio de Banach complejo.

Dada $E : R \to O(H)$ definimos

$$(E,0) : R \to O_2(H_2)$$

por

$$(E,0)\ (t)[(x_1,x_2)] = (E(t)x_1,0)$$

$$(E,0)(t) = (E(t),0)$$

Definición

Si $E(\cdot)\varepsilon\ B_1(R,O(H),\mu)$ definimos la transformada de Fourier de $E(t)$ como el operador

$$\hat{E}(\omega) = T(E)(\omega) \quad \text{en} \quad O_2(H_2)$$

dado por:

$$\hat{E}(\omega) = T(E)(\omega) = \int_R (E(t),0)\ e^{i\omega t}\ d\mu(t)$$

$$= (\int_R E(t)\ \cos\omega t\ d\mu(t), \int_R E(t)\ \operatorname{sen}\omega t\ d\mu(t))$$

Teorema de Convolución

Sea

$$h = E * \sigma$$

entonces $\hat{h}(\omega) = \hat{E}(\omega)\ [\hat{\sigma}(\omega)]$

Demostración

$$\hat{h}(\omega) = \int_R (h(t),0)e^{i\omega t}d\mu(t) = \int_R (\int_R E(t-s)\sigma(s)d\mu(s),0)e^{i_\omega t}\ d\mu(t)$$

Por el teorema de Fubini para la integral de Bochner en H_2 tenemos

$$\hat{h}(\omega) = \int_R [\int_R (E(t-s)\sigma(s),0)\ e^{i\omega t}\ d\mu(t)]\ d\mu(s)$$

Notemos ahora que

$$(E(t-s)\ \sigma(s),\ 0) = (E(t-s),0)\,[(\sigma(s),0)]$$

luego entonces

$$\hat{h}(\omega) = \int_R [\int_R (E(t-s),0)\,[(\sigma(s),0)]\ e^{i\omega t} d\mu(t)]\ d\mu(s)$$

Ahora para s fija podemos considerar a $(\sigma(s),0)$ como un operador lineal acotado definido por

$$\Sigma_s : O_2(H_2) \to H_2$$

$$\Sigma_s(T) = T[(\sigma(s),0)]$$

así que por Hille-Phillips [1] podemos sacar a $(\sigma(s),0)$ fuera de la primera integral

$$\hat{h}(\omega) = \int_R [\int_R (E(t-s),0) e^{i\omega t} d\mu(t)]\ (\sigma(s),0) d\mu(s).$$

es claro que

$$\int_R (E(t-s),0)e^{i\omega t}d\mu(t) = \hat{E}(\omega)e^{i\omega s}$$

por consiguiente:

$$\hat{h}(\omega) = \int_R \hat{E}(\omega)\ e^{i\omega s}\ (\sigma(s),0)d\mu(s)$$

sacando fuera de la integral el operador lineal acotado $\hat{E}(\omega)$ tenemos:

$$\hat{h}(\omega) = \hat{E}(\omega) \int_R (\sigma(s),0)e^{i\omega s}d\mu(s)$$

$$\hat{h}(\omega) = \hat{E}(\omega)[\hat{\sigma}(\omega)]$$

esta última igualdad es la afirmación del teorema, así que la demostración es completa.

La demostración del siguiente teorema es completamente análoga - del que le precede.

<u>Teorema</u>

Si $G = E * F$ entonces

$$\hat{G}(\omega) = \hat{E}(\omega) \circ \hat{F}(\omega)$$

Transformada de Fourier sobre $B_2(R,H,\mu)$

<u>Teorema</u>

Si $\sigma(.) \in B_1(R,H,\mu) \cap B_2(R,H,\mu)$ entonces

$$\hat{\sigma}(.) \in B_2(R,H_2,\mu)$$

y además

$$||\hat{\sigma}||_{B_2} = \sqrt{2\Pi}\ ||\sigma||_{B_2}$$

Demostración

$$||\hat{\sigma}(\omega)||_2^2 = <\hat{\sigma}(\omega),\ \hat{\sigma}(\omega)>_2 = <\int_R (\sigma(s),0)e^{i\omega s}d\mu(s),\ \int_R (\sigma(t),0)e^{i\omega t}d\mu(t)>$$

sacando las integrales obtenemos

$$||\hat{\sigma}(\omega)||_2^2 = \int_R \int_R <(\sigma(s),0)e^{i\omega s},\ (\sigma(t),0)e^{i\omega t}>_2 d\mu(t)d\mu(s)$$

$$= \int_R \int_R <(\sigma(s),0),\ (\sigma(t),0)>_2 e^{i\omega(s-t)}\ d\mu(t)d\mu(s)$$

$$= \int_R \int_R <\sigma(s),\ \sigma(t)> e^{i\omega(s-t)}\ d\mu(t)\ d\mu(s)$$

Para cada $n = 1,2,\ldots$ $e^{-\frac{\omega^2}{n}} ||\hat{\sigma}(\omega)||_2^2$ es integrable ya que $||\hat{\sigma}(\omega)||_2$ esta acotada por consiguiente

$$I(n) = \int_R e^{-\frac{\omega^2}{n}} ||\hat{\sigma}(\omega)||_2^2\ d\mu(\omega) =$$

$$= \int_R \int_R \int_R <\sigma(s),\ \sigma(t)> e^{i\omega(s-t)}\ e^{-\frac{\omega^2}{n}}\ d\mu(t)d\mu(s)d\mu(\omega)$$

Por el teorema de Fubini:

$$I(n) = \int_R \int_R <\sigma(s),\sigma(t)> \int_R e^{i\omega(s-t)}\ e^{-\frac{\omega^2}{n}}\ d\mu(\omega).d\mu(t)d\mu(s)$$

Ahora por Tich march [1] tenemos

$$\int_R e^{i\omega(s-t)} e^{-\frac{\omega^2}{n}} d\mu(\omega) = \sqrt{n\Pi} \quad e^{-n\frac{(t-s)^2}{4}}$$

Sustituyendo queda

$$I(n) = \sqrt{n\Pi} \int_R \int_R < \sigma(s), \sigma(t) > e^{-n\frac{(t-s)^2}{4}} d\mu(t).d\mu(s)$$

efectuando una traslación resulta

$$I(n) = \sqrt{n\Pi} \int_R \int_R < \sigma(t-r), \sigma(t) \quad e^{-\frac{nr^2}{4}} d\mu(t)\, d\mu(r)$$

Por el teorema de Fubini

$$I(n) = \sqrt{n\Pi} \int_R e^{-\frac{nr^2}{4}} \int_R < \sigma(t-r), \sigma(t) > d\mu(t).d\mu(r)$$

Definamos

$$F(r) = \int_R < \sigma(t-r), \sigma(t) > d\mu(t)$$

entonces

$$|F(r) - F(0)|^2 = |\int_R < \sigma(t-r) - \sigma(t), \sigma(t) > \quad d\mu(t)|^2$$

$$\leq [\int_R ||\sigma(t-r) - \sigma(t)||.||\sigma(t)||d\mu(t)]^2$$

$$\leq \int_R ||\sigma(t-r) - \sigma(t)||^2 d\mu(t).||\sigma||^2_{B_2}$$

Ahora por continuidad en $B_2\ (R,H,\mu)$ [Dunford-Schwartz[1]] obtenemos

$$\lim_{r\to 0} |F(r) - F(0)|^2 \leq \lim_{r\to 0} \int_R || \sigma(t-r) - \sigma(t)||^2 \, d\mu(t).||\sigma||^2_{B_2} = 0$$

$\therefore$ F es continua en $r = 0$.

En la misma forma conseguimos que

$$|F(r)|^2 \leq ||\sigma||^4_{B_2}$$

Además

$$I(n) = \sqrt{n\Pi} \int_R e^{-\frac{nr^2}{4}} F(r)\, d\mu(r)$$

$I(n)$ es ahora una integral de Lebesgue asi que cambiando de variable tenemos:

$$I(n) = \sqrt{n\Pi} \int_R e^{-t^2} \; F(\tfrac{2}{\sqrt{n}}t) \,.\, \tfrac{2}{\sqrt{n}}\, d\mu(t)$$

$$= 2\sqrt{\Pi} \int_R e^{-t^2} F(\tfrac{2}{\sqrt{n}}t)\, d\mu(t)$$

$$|I(n)| \leq 2\sqrt{\Pi} \int_R e^{-t^2} \; ||\sigma||^2_{B_2}\, d\mu(t) < \infty$$

Por el teorema de Lebesgue tenemos

$$\lim_{n\to\infty} I(n) = 2\sqrt{\Pi} \int_R e^{-t^2} \lim_{n\to\infty} F(\tfrac{2}{\sqrt{n}}t)\, d\mu(t)$$

$$= 2\sqrt{\Pi}\, F(0) \int_R e^{-t^2}\, d\mu(t)$$

$$\lim_{n \to \infty} I(n) = 2\sqrt{\Pi} \cdot F(0) \cdot \sqrt{\Pi} = 2\Pi\, F(0)$$

pero

$$F(0) = \int_R < \sigma(t), \sigma(t) > d\mu(t) = ||\sigma||^2_{B_2}$$

$$\therefore \qquad \lim_{n \to \infty} I(n) = 2\Pi\, ||\sigma||^2_{B_2}$$

Notemos ahora que

$$\lim_{n \to \infty} e^{-\frac{\omega^2}{n}} ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2 = ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2$$

y ahora por el lema de Fatou

$$||\hat{\sigma}||^2_{B_2} = \int_R ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2\, d\mu(\omega) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \int_R e^{-\frac{\omega^2}{n}} ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2\, d\mu(\omega)$$

$$\therefore \qquad ||\hat{\sigma}||^2_{B_2} \leq \lim_{n \to \infty} I(n) = 2\Pi\, ||\sigma||^2_{B_2}$$

de donde $\hat{\sigma}(\cdot) \in B_2\ (R, H_2, \mu)$ y ahora volviendo a usar el teorema de Le besgue y el hecho que

$$e^{-\frac{\omega^2}{n}} ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2 \leq ||\hat{\sigma}(\omega)||^2_2$$

para toda $n = 1,2,\ldots$

Concluimos

$$||\hat{\sigma}(\omega)||^2_{B_2} = \lim_{n \to \infty} I(n) = 2\Pi\, ||\sigma||^2_{B_2}$$

y la demostración es completa.

<u>Teorema</u>

Sea $\sigma(.) \in E_2\ (R,H,\mu)$ entonces la sucesión $\{\sigma_N(s)\}$ definida por:

$$\sigma_N\ (s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } |s| < N \\ 0 & |s| > N \end{cases}$$

esta contenida en $E_1(R,H,\mu) \cap E_2\ (R,H,\mu)$ y es fundamental en $E_2(R,H_2\mu)$.

<u>Demostración</u>

Sea:

$$I(N) = \int_R ||\sigma_N(s)||\ d\mu(s)$$

entonces

$$I(N) = \int_{[-N,N]} ||\sigma(s)||\ d\mu(s) \leq [\int_{[-N,N]} ||\sigma(s)||^2\ d\mu(s)\ .\ \int_{[-N,N]} 1 d\mu(s)]^{1/2}$$

$$\therefore \quad I(N) \leq ||\sigma||_{E_2}\ .\ \sqrt{2N} < \infty$$

$$\therefore \quad \sigma_N(.) \in E_1(R,H,\mu) \cap E_2(R,H,\mu)$$

para $N = 1,2,\ldots,$ y por consiguiente $\hat{\sigma}_N(\omega)$ esta definida para toda N natural, ahora por el teorema precedente si $M > N$.

$$||\hat{\sigma}_M - \hat{\sigma}_N||^2_{B_2} = 2\pi\ ||\sigma_M - \sigma_N||^2_{B_2}$$

$$= 2\pi\ [\int_{[-M,-N]} ||\sigma(t)||^2 d\mu(t) + \int_{[N,M]} ||\sigma(t)||^2 d\mu(t$$

la última afirmacion del teorema se sigue del hecho que estas integrales tieden a cero cuando M,N tienden a ∞.

Debido a que $B_2(R,H_2,\mu)$ es completo tiene sentido la siguiente definición.

Definición

Si $\sigma(.) \varepsilon B_2(R,H,\mu)$ entonces su transformada de Fourier esta definida por

$$\hat{\sigma}(\omega) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{[-N,N]} (\sigma(t),0)\ e^{i\omega t}\ d\mu(t)$$

donde l.i.m. se entiende por el límite en $B_2(R,H_2,\mu)$.

Nota

Esta es una buena definición en el sentido de que si $\sigma(.) \varepsilon B_1(R,H,\mu) \wedge B_2(R,H,\mu)$ entonces tenemos dos definiciones y ambas -- coinciden, la demostración es inmediata.

Teorema de Parseval

Si $\sigma(.) \varepsilon B_2(R,H,\mu)$ entonces

$$||\hat{\sigma}||_{B_2} = \sqrt{2\pi}\ ||\sigma||_{B_2}$$

Demostración

Consideremos la sucesión $\{\sigma_N(t)\}$ del teorema precedente entonces:

$$\lim_{N \to \infty} \|\hat{\sigma}_N - \hat{\sigma}\|_{B_2} = 0$$

$$\lim_{N \to \infty} \|\hat{\sigma}_N\|_{B_2} = \|\hat{\sigma}\|_{B_2}$$

además

$$\lim_{N \to \infty} \|\sigma_N\|_{B_2} = \|\sigma\|_{B_2}$$

y como

$$\sigma(.) \in B_1(R,H,\mu) \cap B_2(R,H,\mu)$$

entonces

$$\|\hat{\sigma}_N\|_{B_2} = \sqrt{2\pi}\, \|\sigma_N\|_{B_2}$$

Por consiguiente

$$\|\hat{\sigma}\|_{B_2} = \lim_{N \to \infty} \|\hat{\sigma}_N\|_{B_2} = \lim_{N \to \infty} \|\sigma_N\|_{B_2} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, \|\sigma\|_{B_2}$$

y la prueba es completa.

<u>Teorema</u>

Si $\sigma_1(.)$, $\sigma_2(.) \in B_2(R,H,\mu)$ entonces

$$\int_R < \sigma_1(t), \sigma_2(t) > d\mu(t) = \mathrm{Re} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_R < \hat{\sigma}_1(\omega), \hat{\sigma}_2(\omega) >_2 d\mu(\omega)$$

Demostración

Por un teorema anterior

$$||\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2||^2_{B_2} = 2\Pi \; ||\sigma_1 + \sigma_2||^2_{B_2}$$

desarrollando y cancelando obtenemos

$$4\Pi. \int_R < \sigma_1(t), \; \sigma_2(t) > d\mu(t) = \int_R (< \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2 >>_2 + < \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1 >_2) d\mu(\omega)$$

de donde el resultado.

Definición

Si x esta en H_2, $x = (x_1, x_2)$, el conjugado de x es el elemento $x^* = (x_1, - x_2)$.

Las siguientes propiedades son obvias

i) $||x||_2 = ||x^*||_2$ para toda x en H_2

ii) $(x + y)^* = x^* + y^*$ para toda x, y en H_2.

iii) $(\lambda \; x)^* = \lambda^* \; x^*$ para toda x en H_2 y todo el numero complejo λ.

iv) $[\int_R x(t) \; d\mu(t)]^* = \int_R x(t)^* \; d\mu(t)$.

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del primer teorema de esta sección y será omitida.

Teorema

Si $\sigma_1(.)$, $\sigma_2(.)$ estan en $B_2(R, H, \mu)$ entonces

$$\int_R < (\sigma_1(t), 0) \; \hat{\sigma}_2(t)^* >_2 d\mu(t) = \int_R < \hat{\sigma}_1(\omega), \; (\sigma_2(\omega), 0) >_2 d\mu(\omega)$$

Es claro que la siguiente definicon es una buena definicion

Definicion

Si $\phi(.)$ esta en $B_2(R,H_2,\mu)$ entonces su transformada de Fourier es la funcion $\hat{\phi}(.)$ definida por

$$\hat{\phi}(\omega) = \underset{N \to \infty}{1.i.m.} \int_{[-N,N]} \phi(t)\, e^{i\omega t}\, d\mu(t)$$

Esta definicion y el teorema anterior nos dan el siguiente corolario:

Corolario

Si $\sigma(.)$ esta en $B_2(R,H,\mu)$ y $\phi(.)$ esta en $B_2(R,H_2\mu)$ entonces

$$\int_R < (\sigma(t),0),\ \hat{\phi}(t)^* >_2 d\mu(t) = \int_R < \hat{\sigma}(\omega),\ \phi(\omega)^* >_2 d\mu(\omega)$$

El siguiente teorema es una de las culminaciones de la teoria aqui elaborada.

Teorema

Si $\sigma(.)$ esta en $B_2(R,H,\mu)$ y si $\phi(\omega) = \hat{\sigma}(\omega)^*$ entonces

$$\sigma = \frac{1}{2\Pi}\ \hat{\phi}^*$$

Demostracion

Consideremos

$$|||(\sigma,0) - \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}^*||^2_{B_2} = \int_R < (\sigma(t),0) - \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}(t)^*,\ (\sigma(t),0) - \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}(t)^* >_2 d\mu(t)$$

$$= ||\sigma||^2_{B_2} - \frac{1}{2\Pi}\int_R < (\sigma(t),0),\ \hat{\phi}(t)^* >_2 d\mu(t) -$$

$$- \frac{1}{2\Pi} \int_R < \hat{\phi}(t)^*, \ (\sigma(t),0) >_2 d\mu(t) + \frac{1}{4\Pi^2} ||\hat{\phi}^*||^2_{B_2}$$

por el teorema anterior se tiene

$$\int_R < (\sigma(t),0), \hat{\phi}(t)^* >_2 d\mu(t) = \int_R <\hat{\sigma}(t), \phi(t)^* >_2 d\mu(t)$$

sustituyendo $\phi(t)^* = \hat{\sigma}(t)$ obtenemos

$$\int_R < (\sigma(t),0), \hat{\phi}(t)^* >_2 d\mu(t) = ||\sigma||^2_{B_2} = 2\Pi||\sigma||^2_{B_2}$$

tomando en cuenta que

$$<(\sigma(t),0), \hat{\phi}(t)^* >_2 = < \hat{\phi}(t)^*, (\sigma(t),0) >_2^*$$

y sustituyendo encontramos

$$||(\sigma,0) - \frac{1}{2\Pi} \hat{\phi}^*||^2_{B_2} = - ||\sigma||^2_{B_2} + \frac{1}{4\Pi^2} ||\hat{\phi}^*||^2_{B_2}$$

Pero

$$||\hat{\phi}^*||^2_{B_2} = ||\hat{\phi}||^2_{B_2} = 2\Pi||\phi||^2_{B_2} = 2\Pi||\hat{\sigma}^*||^2_{B_2}$$

$$= 2\Pi||\hat{\sigma}||^2_{B_2} = 4\Pi^2||\sigma||^2_{B_2}.$$

Por consiguiente: $||(\sigma,0) - \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}^*||^2_{B_2} = 0$ i.e.

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}(t)^*$$

y la demostración es completa.

Corolario

Si $\sigma(.)$ esta en $B_2(R,H,\mu)$ entonces

$$\sigma(t) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\Pi} \int_{[-N,N]} \hat{\sigma}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\mu(\omega)$$

Demostración

Si $\phi(\omega) = \hat{\sigma}(\omega)^*$ entonces por el teorema anterior $\sigma(t) = \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}(t)^*$ de donde $\sigma(t)^* = \frac{1}{2\Pi}\hat{\phi}(t)$ i.e.

$$\sigma(t)^* = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\Pi} \int_{[-N,N]} \phi(\omega) e^{i\omega t}\, d\mu(\omega)$$

$$= \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\Pi} \int_{[-N,N]} \hat{\sigma}(\omega)^* e^{+i\omega t}\, d\mu(\omega)$$

y la prueba es completa.

Corolario

Si $\sigma(.)$ esta en $B_2(R,H,\mu)$ entonces $\sigma(.)$ es única.

El siguiente teorema resume los importantes resultados de esta sección.

Teorema de Plancherel

Si $\sigma(.)$ esta en $B_2(R,H,\mu)$ entonces existe una única $\sigma(.)$ en $B_2(R, H_2,\mu)$ tal que:

i) $\hat{\sigma}(\omega) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{[-N,N]} (\sigma(t),0)\, e^{i\omega t}\, d\mu(t)$

ii) $\sigma(t) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\Pi} \int_{[-N,N]} \hat{\sigma}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\mu(\omega)$

iii) $||\hat{\sigma}||^2_{B_2} = 2\Pi||\sigma||^2_{B_2}$:

Aplicaciones.

Consideremos el sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales siguiente:

$$\sigma(t) = z(t) + \int_0^t E(t-s)F(\sigma(s))\,ds - \Gamma\xi(t)$$
$$\dot{\xi}(t) = F(\sigma(t)) \qquad \text{para} \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

donde

i) $\sigma(.)$, $z(.)$, $\xi(.)$ son funciones definidas sobre los reales no-negativos R^+ y con valores en un espacio de Hilbert real.

ii) $E : R^+ \rightarrow O(H)$

iii) $F : H \rightarrow H$ un operador no-lineal.

iv) $\Gamma \in O(H)$.

Vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de (1), pero antes estableceremos el siguiente teorema de existencia.

TEOREMA 1

Sean

i) $E(t)$ fuertemente medible y acotada en R^+.

ii) $F(\sigma)$ es un operador de Lipschitz. i.e. existe $\mu > 0$ tal que

$$\| F(\sigma_1) - F(\sigma_2) \| \leq \mu \| \sigma_1 - \sigma_2 \|$$

para toda σ_1, σ_2 en H.

Entonces dada $\xi(0) \in H$ y $z(t)$ continua, existe una única solución $\sigma(t)$, $\xi(t)$ de (1) definida para toda $t \geq 0$.

Demostración.

Usando la expresión

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t F(\sigma(s))\, ds$$

obtenida de (1) es fácil ver que $\sigma(t)$ se puede escribir como

$$\sigma(t) = z(t) - \Gamma^1 \xi(0) + \int_0^t \left[E(t-s) - \Gamma^1\right] F(\sigma(s))ds \quad \ldots \quad (2)$$

si ahora hacemos

$$\alpha(t) = z(t) - \Gamma^1 \xi(0); \quad K(t-s) = E(t-s) - \Gamma^1$$

(2) queda

$$\sigma(t) = \alpha(t) + \int_0^t K(t-s)\, F(\sigma(s))\, ds$$

donde $\alpha(t)$ es continua y $K(t)$ es fuertemente medible y acotada.

Sea $C(H) = \{\sigma : [0,a] \longrightarrow H \mid \sigma(0) = \alpha(0)$ y $\sigma(t)$ continua en $[0,a]\}$, claramente $C(H)$ es un espacio métrico completo con la métrica

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{s \in [0,a]} \| \sigma_1(s) - \sigma_2(s) \| .$$

El operador $A : C(H) \longrightarrow C(H)$ definido por :

$$A\phi(t) = \alpha(t) + \int_0^t K(t-s)\, F(\phi(s))\, ds$$

es una contracción si a es tomado suficientemente pequeño, ya que

$$\| A\phi_1(t) - A\phi_2(t) \| \leq \int_0^t \|K(t-s)\| \cdot \| F(\phi_1(s)) - F(\phi_2(s)) \, ds$$

$$\leq M\mu \int_0^t \| \phi_1(s) - \phi_2(s) \| \, ds$$

donde $\|K(t-s)\| \leq M$ así que

$$d(A\phi_1, A\phi_2) \leq M\mu a\, d(\phi_1, \phi_2).$$

entonces si $a < \frac{1}{M\mu}$ existe una única solución $\sigma(t)$ definida en el intervalo $[0, a]$, además como a no depende de la condición inicial, el proceso puede repetirse para extender la solución a todo R^+. Es obvio que $\xi(t)$ está unívocamente determinada por $\sigma(t)$ y que $\xi(t)$ está definida en todo R^+.

Los siguientes resultados serán de utilidad para establecer un teorema sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de (1).

<u>Definición.</u> Sea U funcional no-lineal Frechet diferenciable en todo H, entonces el gradiente de U es el operador $F: H \to H$ tal que

$$U'(\sigma_1)(\sigma_2) = \langle F(\sigma_1), \sigma_2 \rangle$$

para toda σ_1, σ_2 en H, donde $U'(\sigma_1)$ es la derivada de U en σ_1. En notación escribiremos F = grad U.

Definición.

Un operador $F : H \to H$ continuo se dice que es un operador Potencial si existe una funcional $U : H \to R$ tal que F = grad U.

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en Vainberg - [1] .

TEOREMA 2.

Sea $F : H \to H$ un operador continuo, una condición necesaria y suficiente para que la integral de linea

$$\int_c \langle F(\sigma), d\sigma \rangle$$

sea independiente de la trayectoria de integración en H es que F sea un operador Potencial.

Ahora veremos como obtener U tal que F = grad U cuando F es un operador Potencial.

TEOREMA 3.

$F : H \to H$ continuo es un operador Potencial si y sólo si la siguiente identidad se satisface para toda σ_1, σ_2 en H.

$$\int_0^1 [\langle \sigma_1, F(s\sigma_1)\rangle - \langle \sigma_2, F(s\sigma_2)\rangle] \, ds = \int_0^1 \langle \sigma_1 - \sigma_2, T(s\sigma_1 + (1-s)\sigma_2)\rangle \, ds \quad \ldots (3)$$

Además $F = \text{grad } U$ donde

$$U(\sigma) = \int_0^1 < \sigma, F(s\sigma)> ds$$

Demostración.

Supongamos que (3) se verifica si

$$U(\sigma) = \int_0^1 < \sigma, F(s\sigma)> ds$$

entonces

$$U(\sigma_1 + \epsilon\sigma_2) - U(\sigma_1) = \epsilon \int_0^1 <\sigma_2, F(s(\sigma_1 + \epsilon\sigma_2) + (1-s)\sigma_s > ds$$

$$= \epsilon \int_0^1 <\sigma_2, F(\sigma_1 + s\epsilon\sigma_2)> ds$$

por la continuidad del producto escalar tenemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} < \sigma_2, F(\sigma_1 + s\epsilon\sigma_2)> = <\sigma_2, \lim_{\epsilon \to 0} F(\sigma_1 + s\epsilon\sigma_2)>$$

además como F es continua

$$\lim_{\epsilon \to 0} F(\sigma_1 + s\epsilon\sigma_2) = F(\sigma_1).$$

Finalmente como $g_\epsilon(s) = < \sigma_2, F(\sigma_1 + s\epsilon\sigma_2)>$ converge uniformemente a $<\sigma_2, F(\sigma_1)>$ cuando $\epsilon \to 0$.

Obtenemos finalmente

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{U(\sigma_1 + \epsilon\,\sigma_2) - U(\sigma_1)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^1 \langle \sigma_2, F(\sigma_1 + s\,\epsilon\,\sigma_2) \rangle\, ds$$

$$= \int_0^1 \lim_{\epsilon \to 0} \langle \sigma_2,\ F(\sigma_1 + s\,\epsilon\,\sigma_2) \rangle\, ds$$

$$= \int_0^1 \langle \sigma_2,\ F(\sigma_1) \rangle\, ds = \langle \sigma_2, F(\sigma_1) \rangle$$

de donde $F = \text{grad } U$.

Ahora si F es un operador potencial i.e. $F = \text{grad } U$, tenemos:

$$\frac{d}{ds}\, U(\sigma_1 + s\,\sigma_2) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{U(\sigma_1 + (s+\epsilon)\,\sigma_2) - U(\sigma_1 + s\,\sigma_2)}{\epsilon} =$$

$$= \langle \sigma_2,\ F(\sigma_1 + s\,\sigma_2) \rangle$$

de la definición, entonces:

$$\frac{d}{ds}\, U(\sigma_2 + s(\sigma_1 - \sigma_2)) = \langle \sigma_1 - \sigma_2,\ F(\sigma_2 + s(\sigma_1 - \sigma_2)) \rangle$$

por consiguiente

$$\int_0^1 \frac{d}{ds}\, U(\sigma_2 + s(\sigma_1 - \sigma_2))\,ds = \int_0^1 \langle \sigma_1 - \sigma_2, F(s\,\sigma_1 + (1-s)\,\sigma_2) \rangle\, ds$$

$$U(\sigma_1) = U(\sigma_2) + \int_0^1 \langle \sigma_1 - \sigma_2,\ F(s\,\sigma_1 + (1-s)\,\sigma_2) \rangle\, ds \qquad \ldots (4)$$

si $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma$ obtenemos

$$U(\sigma) = \int_0^1 \langle \sigma, F(s\sigma) \rangle \, ds \qquad \ldots \quad (5)$$

con esta última ecuación y (4) obtenemos (3) así que la prueba es completa.

LEMA 1.

Sea $G: H \to R$ una funcional no-lineal continua, positiva definida y tal que

$$G(\sigma) \geq h(\|\sigma\|)$$

donde $h: R \to R$ es continua y positiva definida.

Sea $\sigma(t)$ definida en R^+ y con valores en H tal que

i) $\sigma(t)$ es continua y acotada en R^+

ii) $\dot{\sigma}(t)$ existe y está acotada en R^+

iii) $\int_0^\infty G(\sigma(s))ds < \infty$.

entonces

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0.$$

Demostración.

Supongamos que la afirmación no es cierta, entonces existen $\delta > 0$ y $\{t_n\} \to \infty$ tal que $\|\sigma(t_n)\| > \delta$, además podemos suponer que $t_i - t_{i-1} > m = \frac{\delta}{2A}$ donde $\|\dot{\sigma}(t)\| \leq A$ para toda t en R^+.

Sea $\alpha(t) = \|\sigma(t)\|$ entonces $\alpha(t)^2 = \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle$ de donde

$$2\alpha(t)\dot{\alpha}(t) = 2\langle \sigma(t), \dot{\sigma}(t) \rangle$$

lo que implica

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq \|\dot{\sigma}(t)\| \leq A$$

Sea $t \in (t_i - \frac{m}{2}, t_i + \frac{m}{2}) = I_i$ entonces

$$\alpha(t) - \alpha(t_i) = \dot{\alpha}(\theta)(t - t_i) \qquad \ldots (6)$$

donde θ es un número entre t y t_i, como

$$|\dot{\alpha}(\theta)(t - t_i)| \leq A \cdot \frac{\delta}{2A} = \frac{\delta}{2}$$

en I_i entonces (6) implica

$$|\alpha(t)| \geq \frac{\delta}{2}$$

para t en I_i, ahora por la hipótesis sobre $G(\sigma)$ tenemos que

$$\eta = \inf_{A_1 \geq \|\sigma\| \geq \frac{\delta}{2}} G(\sigma) > 0$$

donde $A_1 \geq \| \sigma(t) \|$ para toda t en R^+ por consiguiente

$$\int_0^\infty G(\sigma(t))dt \geq \sum_{i=2}^\infty \int_{I_i} G(\sigma(t))dt$$

$$\geq \sum_{i=2}^\infty \int_{I_i} \eta \, dt = \infty$$

lo que es una contradicción, así que finalmente

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0.$$

y la prueba es completa.

LEMA 2.

Sea $F: H \to H$ un operador Potencial $F = \operatorname{grad} U$ tal que

i) existen $h_1 > 0$ y h_2 tales que

$$h_1 \| \sigma \|^2 \leq \langle \sigma, F(\sigma) \rangle, \quad \| F(\sigma) \| \leq h_2 \| \sigma \|.$$

ii) sea $h > h_2^2 h_1^{-1}$ entonces existe $h_3 > 0$ tal que

$$\langle F(\sigma), \sigma - h^{-1} F(\sigma) \rangle \geq h_3 \| \sigma \|^2 \qquad \ldots (7).$$

Además

$$\tfrac{1}{2} h_1 \| \sigma \|^2 \leq U(\sigma) - U(0) = \int_0^1 \langle \sigma, F(\lambda \sigma) \rangle d\lambda \leq \tfrac{1}{2} h_2 \| \sigma \|^2. \quad \ldots (8)$$

la demostración es trivial.

LEMA 3.

Si $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ están en $B_1(R, H, \mu)$ y si

$$\lim_{t \to \pm\infty} \sigma(t) = 0$$

entonces

$$\hat{\dot{x}}(\omega) = i\omega \hat{x}(\omega).$$

Demostración.

Inmediata integrando por partes.

Estableceremos ahora el siguiente fundamental teorema sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de (1), que motivó toda la teoría aquí desarrollada y que generaliza trabajos como Popov [1], Doležal [1] y otros.

TEOREMA.

Sean

i) $E(t)$ fuertemente continua, $\dot{E}(t)$ existe para casi toda $t \geq 0$, además existen C, α números positivos tales que

$$\|E(t)\|, \ \|\dot{E}(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0.$$

ii) $z(t)$ es tal que $\dot{z}(t)$ existe en R^+ y $\ddot{z}(t)$ existe para casi toda t en R^+, además existen D, β números positivos tales que

$$\|z(t)\|, \ \|\dot{z}(t)\|, \ \|\ddot{z}(t)\| \leq D e^{-\beta t} \qquad t \geq 0$$

iii) Γ^1 es positivo definido i.e. existe $\mu > 0$ tal que

$$\langle \sigma_1, \Gamma^1 \sigma_2 \rangle = \langle \Gamma^1 \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

$$\langle \sigma, \Gamma^1 \sigma \rangle \geq \mu \|\sigma\|^2$$

para toda σ_1, σ_2, σ en H.

iv) F es un operador Potencial y existen $h_1 > 0$, h_2 tales que

$$h_1 \|\sigma\|^2 \leq \langle \sigma, F(\sigma) \rangle \; ; \; \|F(\sigma)\| \leq h_2 \|\sigma\| .$$

y si dada $h > h_2^2 h_1^{-1}$ existe $q > 0$ tal que $\mathcal{A} : R \to O_2(H_2)$ dado por

$$\mathcal{A}(\omega) = (1 + i\omega q)\, \hat{E}(\omega) - (h^{-1} I + q(\Gamma^1, 0))$$

donde I es el operador identidad en H_2 y $(\Gamma^1, 0)(\sigma_1, \sigma_2) = (\Gamma^1 \sigma_1, 0)$, satisface

$$\mathrm{Re} \langle x, \mathcal{A}(\omega) x \rangle_2 \leq 0$$

para toda $\omega \in R$ y x en H_2. Entonces existen funciones continuas $S(\gamma, \delta)$, $K(\gamma, \delta)$ continuas en R^2 y nulas en el origen tales que si $\sigma(t)$, $\xi(t)$ es la solución de (1) correspondiente a $\xi(0)$, $z(t)$, entonces

1. $\|\sigma(t)\| \leq S(D, \|\xi(0)\|)$ $\quad t \geq 0$

2. $$\| \xi(t) \| \leq K(D, \| \xi(0) \|) \qquad t \geq 0$$

y además

3. $$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = \lim_{t \to \infty} \xi(t) = 0.$$

Demostración.

Definamos las siguientes funciones para $T > 0$ arbitrario,

$F_T : R \to H$ dada por

$$F_T(t) = \begin{cases} F(\sigma(t)) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T, \text{ ó, } t < 0 \end{cases}$$

$W_T : R \quad H$ dada por

$$W_T(t) = \begin{cases} \sigma(t) + \Gamma \xi(t) - z(t) & 0 \leq t \leq T \\ \int_0^T E(t-s)F(\sigma(s))ds & t > T \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

donde $\sigma(t)$, $\xi(t)$ es la única solución correspondiente a $z(t)$, $\xi(0)$.

Ahora por el Lema 3 y las hipótesis sobre $E(t)$ se tiene que $W_T(t)$ y $\dot{W}_T(t)$ poseen transformadas de Fourier y que

$$\hat{W}_T(\omega) = (i\omega)^{-1} \hat{\dot{W}}_T(\omega)$$

Si extendemos $E(t)$ a todo R haciendo $E(t) = 0$ para $t < 0$ entonces

$$W_T(t) = \int_R \dot{E}(t-s)\, F_T(s)\, ds$$

para toda t en R y por el teorema de convolución

$$\hat{W}_T(\omega) = \hat{E}(\omega) \circ \hat{F}_T(\omega).$$

Sea $\Omega_T(t) = W_T(t) - h^{-1} F_T(t) + q(\dot{W}_T(t) - \Gamma F_T(t))$.

Consideremos el número real $\rho(T)$ dado por

$$\rho(T) = \int_0^T \langle F_T(t), \Omega_T(t) \rangle\, dt$$

claramente podemos escribir

$$\rho(T) = \int_R \langle F_T(t), \Omega_T(t) \rangle\, dt$$

ahora usando la fórmula

$$\int_R \langle \sigma_1(t), \sigma_2(t) \rangle\, dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_R \langle \hat{\sigma}_1(\omega), \hat{\sigma}_2(\omega) \rangle_2\, d\omega$$

tenemos

$$\rho(T) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_R \langle \hat{F}_T(\omega), \hat{\Omega}_T(\omega) \rangle_2\, d\omega$$

no es difícil checar que

$$\hat{\Omega}_T(\omega) = \mathcal{A}(\omega)\,\hat{F}_T(\omega)$$

así que

$$\rho(T) = \frac{1}{2\pi}\int_R \mathrm{Re} < \hat{F}_T(\omega), \mathcal{A}(\omega)\,\hat{F}_T(\omega) >_2 \, d\omega$$

así que por la hipótesis del teorema concluimos que

$$\rho(T) \leq 0$$

Sustituyendo en $\Omega_T(t)$ y después en $\rho(T)$ obtenemos

$$\int_0^T < F(\sigma), \sigma + \Gamma\xi - z - h^{-1}F(\sigma) + q(\dot{\sigma} + \Gamma\xi - \dot{z} - \Gamma F(\sigma)) > dt \leq 0$$

de donde

$$\int_0^T < F(\sigma), \sigma - h^{-1}F(\sigma) > dt + \int_0^T < \xi, \Gamma\xi > dt + q\int_0^T < F(\sigma), \dot{\sigma}) \, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T < \dot{\xi}, \; z + q\,\dot{z} > dt \leq < \xi(T), \; z(T) + q\,\dot{z}(T) >$$

$$- < \xi(0), \; z(0) + q\dot{z}(0) > - \int_0^T < \xi(t), \; \dot{z}(t) + q\ddot{z}(t) > dt \leq$$

$$\leq \| \xi(T) \| (1+q)\,D - \| \xi(0) \| \cdot (1-q)\,D \; +$$

$$+ \beta^{-1}(1+q)D \sup_{t \in [0,T]} \| \xi(t) \| . \qquad \ldots \; (9).$$

esta última por las hipótesis sobre $z(t)$, ahora por el Lema 2 tenemos

$$\int_0^T \langle F(\sigma), \sigma - h^{-1} F(\sigma) \rangle dt \geq h_3 \int_0^T \| \sigma(t) \|^2 dt \quad \ldots (10)$$

$$\int_0^T \langle F(\sigma), \dot{\sigma} \rangle dt \geq \tfrac{1}{2} h_1 \| \sigma(T) \|^2 - \tfrac{1}{2} h_2 \| \sigma(0) \|^2 \quad \ldots (11)$$

como Γ es positiva definida

$$\int_0^T \langle \dot{\xi}, \Gamma \xi \rangle dt = \tfrac{1}{2} \langle \xi(T), \Gamma \xi(T) \rangle - \tfrac{1}{2} \langle \xi(0), \Gamma \xi(0) \rangle \quad \ldots (12)$$

$$\langle \xi(T), \Gamma \xi(T) \rangle \geq \mu \| \xi(T) \|^2 \quad \ldots (13)$$

sustituyendo (10), (11), (12) y (13) en (9) obtenemos

$$h_3 \int_0^T \| \sigma(t) \|^2 dt + \tfrac{1}{2} \mu \| \xi(T) \|^2 + \tfrac{1}{2} q h_1 \| \sigma(T) \|^2 \leq$$

$$\leq \| \xi(0) \| \cdot (1+q) D + \tfrac{1}{2} \| \Gamma \| \cdot \| \xi(0) \|^2 + \tfrac{1}{2} q h_2 \| \sigma(0) \|^2 +$$

$$+ (1+\beta^{-1})(1+q) D \sup_{t \in [0,T]} \| \xi(T) \| \leq M_0 + M \sup_{t \in [0,T]} \| \xi(T) \|$$

$$\ldots (14)$$

donde $M_0 = \| \xi(0) \| (1+q) D + \tfrac{1}{2} \| \Gamma \| \cdot \| \xi(0) \|^2 +$

$+ \tfrac{1}{2} q h_2 (D + \| \Gamma \| \cdot \| \xi(0) \|)^2$,

$$M_1 = (1 + \beta^{-1})(1 + q) D.$$

inmediatamente de (14) se sigue que

$$\tfrac{1}{2}\mu \| \xi(T) \|^2 \leq M_0 + M_1 \sup_{t \in [0,T]} \| \xi(t) \|$$

la que implica que $\| \xi(t) \|$ debe ser acotada en R^+ y si $M_2 = \sup_{t \geq 0} \| \xi(t) \|$ se obtiene [Dolezal 1]

$$M_2 \leq \mu^{-1}(M_1 + (M_1^2 + 2\mu M_0)^{\frac{1}{2}}) = K(D, \| \xi(0) \|$$

donde K tiene las propiedades que se afirman.

También obtenemos de (14) que

$$\tfrac{1}{2} q h_1 \| \sigma(T) \|^2 \leq M_0 + M_1 K(D, \| \xi(0) \|)$$

de donde como T no aparece en el lado derecho de la desigualdad

$$\| \sigma(t) \| \leq S (D, \| \xi(0) \|) \qquad t \geq 0$$

donde S tiene las propiedades que se afirman.

La conclusión del teorema se obtiene checando que $\| \dot{\sigma}(t) \|$ está acotada y usando el Lema 1 obtenemos que

$$\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = 0$$

ahora es claro que

$$\left\| \int_0^t E(t-s)F(\sigma(s))ds \right\| \leq C\, h_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \| \sigma(s) \| \, ds \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Recordando que

$$\Gamma^1 \xi(t) = -\sigma(t) + \int_0^t E(t-s)\, F(\sigma(s))\, ds + z(t)$$

obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| \Gamma^1 \xi(t) \| = 0$$

lo que implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$$

ya que Γ^1 es positiva definida y la demostración es completa.

REFERENCIAS

Dolezal V. [1] — An extension of Popov's method for vector-valued nonlinearities. Czechoslovak Mathematical Jnl. T. 15 (90), 1965.

Dunford N. - Schwartz J. T. [1] — Linear Operators - Part I Interscience, 1966.

Goldburg R. R. [1] — Fourier transforms. Cambridge University Press, 1965.

Hille E. - Phillips R. S. [1] — Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society Vol. XXXI, 1957.

Lange Serge [1] — Analysis I Addison Wesley, 1968.

Lange Serge [2] — Analysis II Addison Wesley, 1969.

Popov V. N. [1] — Noveaux criteriums de stabilite pour les systémes automatiques non-linéaires. Rev. d'électrotechn et d'energetique. Academiei Rep. Pop. Romine, 1963.

Titchmarsh E. C. [1] — Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford at the Clarendon Press, 1937.

Zaanen A. C. [1] — Integration. North-Holland Publishing Co., 1967.

Zaanen A. C. [2] — Linear Analysis. North-Holland Publishing Co., 1956.