Las ecuaciones diferenciales parciales en el cálculo con imágenes.

Ángela Mireya León Mecías, Mariano Rodríguez Guerra
Juan Luis Valerdi, Michel Borroto

Universidad de La Habana

UNAM, 6 de Octubre 2014

La imagen:medio de comunicación poderoso

Contenido

- Procesos de cálculo con las imágenes
- Métodos basados en EDP's
- Ecuaciones de difusión
- Líneas de trabajo

- Imagen: función real que describe una escena del mundo real $u : \Omega \subset \Re^2 \rightarrow \Re^d$
- d=1 los valores de u representan intensidad en los tonos de grises
- d=3 imágenes a color

Procesos de cálculo con imágenes: sistema entrada-salida

Q_0	proceso	Q
$u_0 = Ku + n$	Desemborronar y eliminar ruido	u Imagen más nítida
u_0	segmentación	Objetos $[u_k, \Omega_k], k = 1,2,..$
$u_0\|_{\Omega \backslash D}$	Implante ó completamiento	$u_0\|_\Omega$ Imagen completa
u_0	Espacio escala	Imágenes multi-escalas $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}$
(u_0^1, u_0^2)	Estimación de movimiento	Flujos ópticos $(\vec{v}^1, \quad \vec{v}^2)$

- Modelación de la imagen
- Modelación de los procesos que actuan sobre las imágenes

Imagen digital

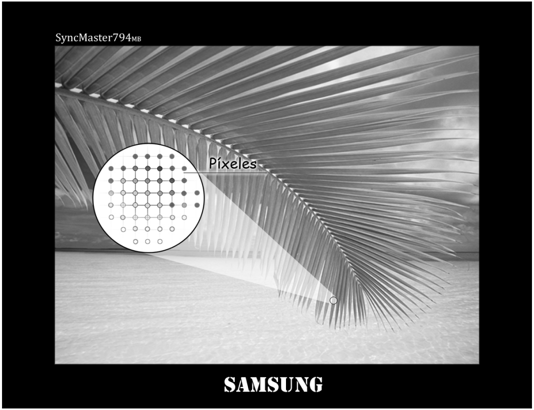
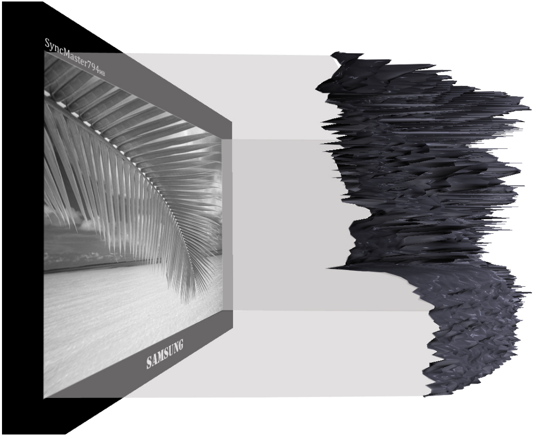


Imagen digital



Aproximaciones para procesos de cálculos con imágenes

Las más antiguas

- Teoría de filtros
- Análisis espectral
- Conceptos básicos de probabilidades y estadística

En los últimos 25 años

- Modelación estocástica
- Aproximación wavelets
- Métodos basados en EDP's

Conexión entre imágenes y ecuaciones diferenciales

- En un entorno dinámico la visión se convierte en nuestro sentido más valioso
- En un entorno estático donde no hay cambios en las escenas, pues la visión no sería imprescindible.
- Las imágenes son valiosas y necesarias cuando las componentes de la escena cambian, cuando hay movimiento ó cambio de escenas, es decir cuando hay cierta variación en espacio y tiempo
- La necesidad de contar con imágenes está basada en la presencia de cambios
- precisamente los mecanismos de cambio están descritos y gobernados por las ecuaciones diferenciales
- El interés fundamental en usar métodos basados en PDE's es que existe una teoría matemática bien establecida para PDE's.

Dos puntos de vista

- Elegir el funcional de energía que mejor se adapte al problema y resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema de minimización
- Trabajar directamente con las ecuaciones diferenciales sin pensar en la energía
    - Forma general de los modelos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(x, u(t,x), \nabla u(t,x), \nabla^2 u(t,x)) &= 0, \text{ en } (0, T) \times \Omega \\
\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} &= 0 \\
u(0,x) &= 0
\end{aligned}
$$

    - Destacar presencia del parámetro t,
    - variando t se crea familia de funciones $u(t,x)$, $t > 0$,
    - Selección de F, p.e. en Suavizado y Restauración

Suavizado. Ecuaciones que modelan procesos de difusión

Difusión

- un proceso que equilibra diferencias de concentración sin crear o destruir masa
- identificar la concentración u con el nivel de gris
- ley de Fick $j = -D.\nabla u$, D representa el tensor de difusión que es una matriz simétrica y definida positiva.
- ecuación de continuidad (la difusión sólo transporta la masa sin destruirla o crearla)
$$\partial_t u = -\nabla \bullet (j)$$
- ecuación de difusión
$$\partial_t u = -\nabla \bullet (D.\nabla u)$$

Difusión lineal y convolución Gaussiana

$u_0 \in L^1(\Re^2)$, imagen en escala de grises, entonces para suavizar u_0

$$(K_\sigma * u_0) := \int_{\Re^2} K_\sigma(x-y)u_0(y)dy, \text{filtro de paso bajo}$$

$$K_\sigma(x) := \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2})$$

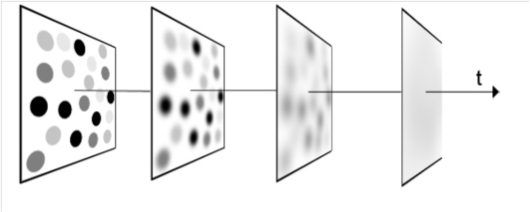
- $u_0 \in C(\Re^2)$ acotada, entonces para el proceso de difusión lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

- $$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x), \; x = 0 \\ (K_{\sqrt{2t}} * u_0)(x), \; t > 0 \end{cases}$$

- t está relacionado con el parámetro $\sigma = \sqrt{2t}$. Parar el proceso de difusión en $T = \frac{1}{2}\sigma^2$

Características de la difusión isotrópica



- Los bordes no son respetados
- El enlace entre regiones es destruido

Motivación para la difusión anisotrópica

Operador capaz de preservar la posición de los bordes y homogeneizar (o difuminar) otras partes

Generalización y preservación de los bordes

Sea ecuación de la difusión del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u) \, .$$

Considerando coeficiente de difusión no homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c\,(x, y, t)\,\nabla u) = c\,(t, x, y)\,\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u.$$

Respetar los bordes $(|\nabla u|) \Rightarrow c\,(x, y, t) = g\,(|\nabla u|)$

Generalización y preservación de los bordes

Sea ecuación de la difusión del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u) .$$

Considerando coeficiente de difusión no homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c(x, y, t) \nabla u) = c(t, x, y) \Delta u + \nabla c \cdot \nabla u.$$

Respetar los bordes $(|\nabla u|) \Rightarrow c(x, y, t) = g(|\nabla u|)$

Generalización y preservación de los bordes

Sea ecuación de la difusión del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u) .$$

Considerando coeficiente de difusión no homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c\,(x, y, t)\,\nabla u) = c\,(t, x, y)\,\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u.$$

Respetar los bordes $(|\nabla u|) \Rightarrow c\,(x, y, t) = g\,(|\nabla u|)$

Condiciones para el coeficiente de difusión

Intuitivamente:

$$
\begin{array}{ccccc}
|\nabla u| \downarrow & \Rightarrow & x \text{ no borde} & \Rightarrow & c\,(x, y, t) \to 1 \\
|\nabla u| \uparrow & \Rightarrow & x \text{ de borde} & \Rightarrow & c\,(x, y, t) \to 0
\end{array}
$$

Coeficientes de difusión

P. Perona and J. Malik. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-12:629–639, 1990.

$$c(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\left[\frac{|\nabla u\,(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right]^2\right\} \quad \text{y} \quad c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{1+\left(\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right)^2}$$

Difusión para distintos valores de k

(a)Figura original, (b), (c), (d) imagen suavizada luego de 20 iteraciones con $k = 6$, $k = 13$ y $k = 50$ respectivamente

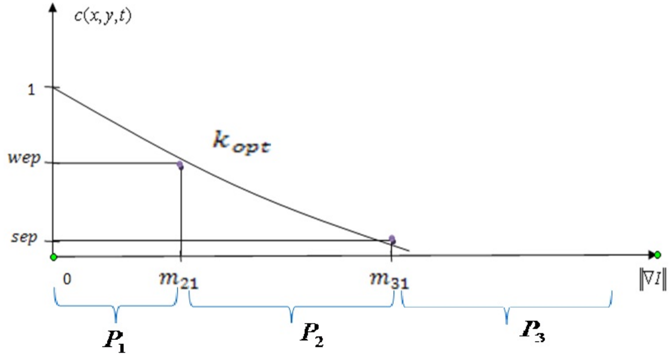
Problema

- Estimar el parámetro k que mejor se 'ajusta' a la imagen, para una expresión dada del coeficiente de difusión
- difusión que respete los bordes

More used expressions for the diffusivity function

$g(s^2)$	Reference
$g_1(s) = \frac{1}{1+\frac{s^2}{k^2}}$	PerMal90
$g_2(s) = exp(\frac{-s^2}{2k^2})$	PerMal90
$g_3(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \frac{s^2}{2k^2}]^2, \; s \leq \sqrt{2}k \\ 0, \text{ in other case} \end{cases}$	Tukey's biweight, bla
$g_4(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{k^2}}}$	charbonnier97
$g_5(s) = \begin{cases} 1, \; s \leq 0 \\ 1 - exp\left(\frac{-C_m}{(s/k)^m}\right), \; s > 0 \end{cases}$ m = 2, 3, and 4, Cm = 2.33666, 2.9183, and 3.31488	Wei98
$g_6(s) = \frac{1}{1+(\frac{s}{k_f})^n} - \frac{\alpha}{1+(\frac{(s-k_b)}{\omega})^2 m}$	gilboa02

Metodología de partición y ajuste



Algoritmo KMMC

(KM) K-Means, $K = 3$

- $\mu_1 = min\{\|\nabla I\|_{(x,y)}, (x,y) \in P\}$
- $\mu_3 = max\{\|\nabla I\|_{(x,y)}, (x,y) \in P\}$
- $\mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2}$
- $d((x,y), \mu_i) = |\|\nabla I\|_{(x,y)} - \mu_i|$
- $suma((x_1, y_1), (x-2, y_2)) = \|\nabla I\|_{(x_1,y_1)} + \|\nabla I\|_{(x_2,y_2)}$

Algoritmo KMMC

(MC) Mínimos cuadrados

- Aproximación mínimo cuadrática de la función $c(x, y, t) = g(\|\nabla I\|)$
- para $g(\|\nabla I\|) = \exp\left\{-\left[\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right]^2\right\}$ se obtiene expresión analítica para $k_{m\Delta t}$

Líneas de trabajo

- Detección de bordes. Aplicar difusión anisotrópica como preprocesamiento
- Solución numérica eficiente de la ecuación de difusión anisotrópica con diferentes coeficientes
  (Diferencias Finitas, Método de Líneas verticales, Método Wavelet-Galerkin)

Detección de bordes

Ejemplo: Leopardo

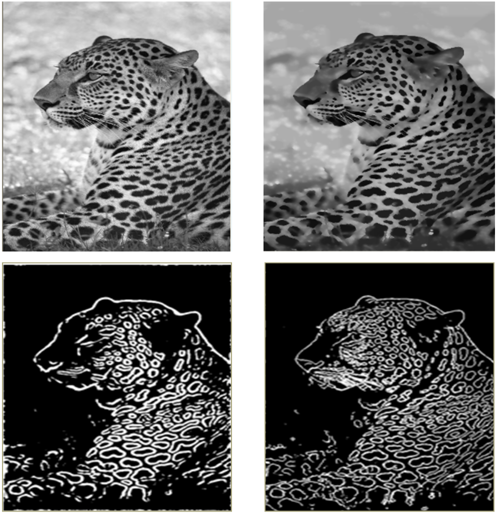
Detección de bordes

Ejemplo: Leopardo

Detección de bordes

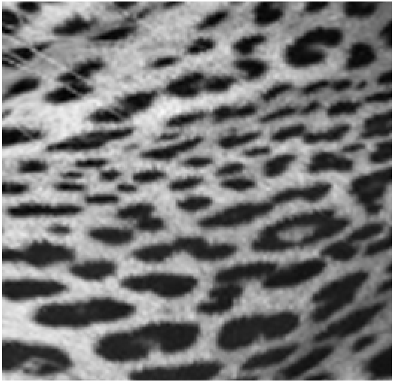
Ejemplo: Leopardo

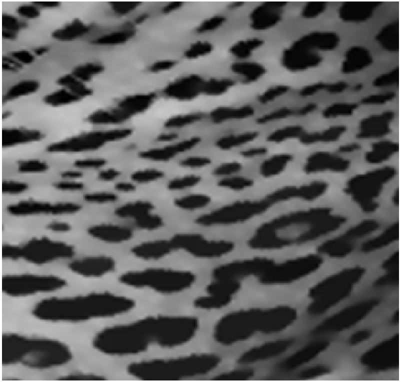
Ejemplo: Leopardo



Detección de bordes. Preprocesar con difusión anisotrópica

Ejemplo: Leopardo





Referencias

1. M. Borroto-Fernández, M. González-Hidalgo and A. León-Mecías. *New estimation method of the contrast parameter for the Perona Malik diffusion equation*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging Visualization, 2014 Taylor Francis, http://dx.doi.org/10.1080/21681163.2014.974289.
2. Aubert G., & Kornprobst *Mathematical Problems in Image Processing. PDEs & Calculus of Variations*. Springer 2006.
3. Bovik Al *The Essential Guide to Image Processing*. Elsevier 2009.
4. P. Perona and J. Malik. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-12:629–639, 1990.
5. Weickert Joachim, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. B. G. Teubner Stuttgart, Copyright 2008.