

Cinemática en el espacio de Minkowski

Punto fijo y eje de rotación de una rotación en el espacio de Minkowski

March 10, 2016

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante
- ▶ 1880- 1930- Éter. Michelson, Morley, Miller- 1887

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante
- ▶ 1880- 1930- Éter. Michelson, Morley, Miller- 1887
- ▶ 1904- Transformaciones de Lorentz

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante
- ▶ 1880- 1930- Éter. Michelson, Morley, Miller- 1887
- ▶ 1904- Transformaciones de Lorentz
- ▶ 1905- Relatividad especial, grupo de Lorentz

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante
- ▶ 1880- 1930- Éter. Michelson, Morley, Miller- 1887
- ▶ 1904- Transformaciones de Lorentz
- ▶ 1905- Relatividad especial, grupo de Lorentz
- ▶ 1908- Minkowski

Antecedentes

- ▶ 1864- Ecuaciones de Maxwell
- ▶ 1887- Hertz- Dipolo radiante
- ▶ 1880- 1930- Éter. Michelson, Morley, Miller- 1887
- ▶ 1904- Transformaciones de Lorentz
- ▶ 1905- Relatividad especial, grupo de Lorentz
- ▶ 1908- Minkowski
- ▶ 1916- Relatividad General

Einstein vs Minkowski

Einstein- Relatividad especial

- ▶ Teoría axiomática

Einstein vs Minkowski

Einstein- Relatividad especial

- ▶ Teoría axiomática
- ▶ Principio de la relatividad- Invariancia de las leyes de la física.

Einstein vs Minkowski

Einstein- Relatividad especial

- ▶ Teoría axiomática
- ▶ Principio de la relatividad- Invariancia de las leyes de la física.
- ▶ Constancia de la velocidad de la luz en los sistemas de referencia inerciales

Einstein vs Minkowski

Minkowski. Conferencia de 1908

- ▶ Hermann Minkowski, en su conferencia de 1908, sostuvo que el espacio en el que la física se desarrolla es un espacio con cuatro dimensiones en el que una métrica hiperbólica mezcla al espacio Euclidiano ordinario con el tiempo.

Einstein vs Minkowski

Minkowski. Conferencia de 1908

- ▶ Hermann Minkowski, en su conferencia de 1908, sostuvo que el espacio en el que la física se desarrolla es un espacio con cuatro dimensiones en el que una métrica hiperbólica mezcla al espacio Euclidiano ordinario con el tiempo.
- ▶ Principio del mundo absoluto. Invariancia de las leyes de la física.

Einstein vs Minkowski

Minkowski. Conferencia de 1908

- ▶ Hermann Minkowski, en su conferencia de 1908, sostuvo que el espacio en el que la física se desarrolla es un espacio con cuatro dimensiones en el que una métrica hiperbólica mezcla al espacio Euclidiano ordinario con el tiempo.
- ▶ Principio del mundo absoluto. Invariancia de las leyes de la física.
- ▶ Conclusión: Ecuaciones de Maxwell en un nivel jerárquico diferente al del espacio-tiempo.
- ▶ Pregunta: ¿Las ecuaciones de Maxwell conforman al espacio-tiempo o es al revés? O es que no tienen nada que ver.

El espacio de Minkowski

La visión actual

“Minkowski 4D world is a block universe. It is a frozen world in which nothing happens, since all moments of time are given 'at once', which means that physical bodies are 4D world tubes containing the whole histories in time of the 3D bodies of our every day experience.” . Petkov. Fundación Minkowski

Consecuencias

El nudo invisible

- ▶ En el espacio-tiempo, el tiempo no pasa, no fluye.

Consecuencias

El nudo invisible

- ▶ En el espacio-tiempo, el tiempo no pasa, no fluye.
- ▶ La pregunta antigua: ¿Qué es más esencial: el tiempo o el movimiento? (San Agustín)
- ▶ La pregunta moderna: ¿Qué es más esencial: el espacio-tiempo o las ecuaciones de Maxwell?
- ▶ DISCIPLINAS PROHIBIDAS: Cinemática y dinámica en el espacio-tiempo

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin, 6.* 185-217.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin*, 6. 185-217.
- ▶ Mozzi, G. (1763). *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo dei Corpi.* Stamperia di Donato Campo, Napoli. University of Michigan reprint (2014).

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin*, 6. 185-217.
- ▶ Mozzi, G. (1763). *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo dei Corpi.* Stamperia di Donato Campo, Napoli. University of Michigan reprint (2014).
- ▶ Euler, L. (1765). Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. Berlin*, 14, 154-193.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin*, 6. 185-217.
- ▶ Mozzi, G. (1763). *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo dei Corpi.* Stamperia di Donato Campo, Napoli. University of Michigan reprint (2014).
- ▶ Euler, L. (1765). Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. Berlin*, 14, 154-193.
- ▶ Rodrigues, O. (1840). Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant des ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Jour. Math. Pur. App.*, 5, 380-440.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin*, 6. 185-217.
- ▶ Mozzi, G. (1763). *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo dei Corpi.* Stamperia di Donato Campo, Napoli. University of Michigan reprint (2014).
- ▶ Euler, L. (1765). Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. Berlin*, 14, 154-193.
- ▶ Rodrigues, O. (1840). Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant des ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Jour. Math. Pur. Appl.*, 5, 380-440.
- ▶ Ribacour, A. (1876). Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. *Jour. Math. Pur. Appl.*, 7, 1891, Paris. In www.Gallica.BnF.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil.

Origen

- ▶ Bernoulli, J. (1742) *Opera omnia Mathematica. IV.* Laussane.
- ▶ Euler, L. (1752). Découverte d'un nouveau principe de mécanique. *Mém. Berlin*, 6. 185-217.
- ▶ Mozzi, G. (1763). *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo dei Corpi.* Stamperia di Donato Campo, Napoli. University of Michigan reprint (2014).
- ▶ Euler, L. (1765). Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mém. Berlin*, 14, 154-193.
- ▶ Rodrigues, O. (1840). Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant des ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Jour. Math. Pur. Appl.*, 5, 380-440.
- ▶ Ribacour, A. (1876). Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. *Jour. Math. Pur. Appl.*, 7, 1891, Paris. In www.Gallica.BnF.

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil

Origen

- ▶ Darboux, G. (1887). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Gauthier-Villars, Paris. Reprint: Chelsea Publishing Co., New York (1972).

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil

Origen

- ▶ Darboux, G. (1887). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Gauthier-Villars, Paris. Reprint: Chelsea Publishing Co., New York (1972).
- ▶ Cartan, E. (1937). *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, (1951), p. 175. Reprint: Éditions Jacques Gabay, Paris (1992).

Eje instantáneo de rotación. Marco móvil

Origen

- ▶ Darboux, G. (1887). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Gauthier-Villars, Paris. Reprint: Chelsea Publishing Co., New York (1972).
- ▶ Cartan, E. (1937). *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, (1951), p. 175. Reprint: Éditions Jacques Gabay, Paris (1992).
- ▶ Cartan, E. (1935). *La méthode du repère mobile*. Actualités scientifiques, 194. Paris.

Cinemática en el espacio de Minkowski

Punto fijo y eje de rotación

March 10, 2016

Cinemática

Marco móvil

- ▶ Métrica: $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Cinemática

Marco móvil

- ▶ Métrica: $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
- ▶ Marco de referencia: Cuatro ejes: $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, donde $\hat{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$, etc.
- ▶ Espacio rígido- distancias se conservan según la métrica.
- ▶ Seis planos con la propiedad de dualidad.
- ▶ El espacio es arrastrado por el marco cuando se mueve.

Cinemática

Rotación pequeña



$$(I + \epsilon_{10})(I + \epsilon_{20})(I + \epsilon_{30})(I + \epsilon_{32})(I + \epsilon_{13})(I + \epsilon_{21}) = \\ I + \epsilon_{10} + \epsilon_{20} + \epsilon_{30} + \epsilon_{32} + \epsilon_{13} + \epsilon_{21} = I + \epsilon$$

- ▶ Sea $r = (ct, x, y, z)$ el vector de posición. Si f es diferenciable en todas las variables, existe $\omega_{\alpha\beta}$ tal que,

$$f(\{I + \delta\lambda_{\alpha\beta}\}r) = \{I + \delta\omega_{\alpha\beta}\}f(r)$$

entonces, si

$$\omega_{\alpha\beta}f = 0$$

la función se encuentra en el eje de rotación.

Cinemática

Rotación pequeña

- ▶ La condición anterior no es suficiente. Es necesario tomar en cuenta la propiedad de dualidad entre los planos de la tétrada. La dualidad se indica con un asterisco y se define por medio del tensor de Levy-Civita, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, que relaciona los operadores diferenciales dos a dos: $\omega^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta}$.
- ▶ Entonces, la función f se encuentra en el eje de la rotación generada por $\lambda_{\alpha\beta}$ si:

$$\omega_{\alpha\beta}f = 0.$$

$$\omega_{\alpha\beta}^*f = 0.$$

Eje instantáneo de rotación

Ecuaciones diferenciales

- ▶ El objeto de seis componentes de funciones diferenciables, $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, es el eje instantáneo de rotación de la rotación más general del espacio-tiempo, si sus componentes satisfacen las ecuaciones:

$$\omega_{10}E_1 + \omega_{20}E_2 + \omega_{30}E_3 + \omega_{32}B_1 + \omega_{13}B_2 + \omega_{21}B_3 = 0$$



$$\omega_{10}^*E_1 + \omega_{20}^*E_2 + \omega_{30}^*E_3 + \omega_{32}^*B_1 + \omega_{13}^*B_2 + \omega_{21}^*B_3 = 0$$

Eje instantáneo de rotación

Ecuaciones diferenciales

- ▶ El objeto de seis componentes de funciones diferenciables, $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, es el eje instantáneo de rotación de la rotación más general del espacio-tiempo, si sus componentes satisfacen las ecuaciones:

$$\omega_{10}E_1 + \omega_{20}E_2 + \omega_{30}E_3 + \omega_{32}B_1 + \omega_{13}B_2 + \omega_{21}B_3 = 0$$



$$\omega_{10}^*E_1 + \omega_{20}^*E_2 + \omega_{30}^*E_3 + \omega_{32}^*B_1 + \omega_{13}^*B_2 + \omega_{21}^*B_3 = 0$$

Operaciones

Generadores de rotación planares y sus duales

► Generadores planares

$$\omega_{10} = x \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\omega_{20} = y \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\omega_{30} = z \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\omega_{32} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\omega_{13} = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\omega_{21} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

Operaciones

Generadores de rotación planares y sus duales

► Generadores planares

$$\omega_{10} = x \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\omega_{32} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\omega_{20} = y \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\omega_{13} = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\omega_{30} = z \frac{\partial}{c\partial t} + ct \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\omega_{21} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$



$$\omega_{10}^* = -\omega_{32}$$

$$\omega_{32}^* = +\omega_{10}$$

$$\omega_{20}^* = -\omega_{13}$$

$$\omega_{13}^* = +\omega_{20}$$

$$\omega_{30}^* = -\omega_{21}$$

$$\omega_{21}^* = +\omega_{30}$$

Sustitución

Agrupando por coordenada



$$ct \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) + x \left(\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y} \right) +$$
$$y \left(\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) + z \left(\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) = 0$$



$$ct \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) + x \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) +$$
$$y \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) = 0$$

- ▶ En el origen, que es el punto fijo, las ecuaciones se satisfacen idénticamente.

Operaciones

Fuera del origen, en el eje

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t} = 0$$

y,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t} = 0$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell para el vacío sin cargas.

Conclusiones

En el espacio de Minkowski:

- ▶ Un eje instantáneo de rotación tiene, a lo más, seis componentes.
- ▶ Un objeto de seis componentes es un eje instantáneo de rotación de una rotación en el espacio de Minkowski, si y solo si, sus componentes satisfacen las ecuaciones de Maxwell.
- ▶ La cinemática del espacio de Minkowski contiene a las ecuaciones de Maxwell.
- ▶ Las ecuaciones de Maxwell no tienen significado si el tiempo no transcurre. El tiempo debe fluir en el espacio de Minkowski para que la física tenga significado.
- ▶ Pregunta: ¿Por qué, en la Teoría Matemática del Punto Fijo, no aparece el concepto de dualidad?
- ▶ ¿Qué es más esencial: el espacio-tiempo o las ecuaciones de Maxwell?

El tiempo transcurre

Espacio-tiempo y cómo lo percibimos.

