

Un sistema experimental para generar mallas no-estructuradas en regiones planas irregulares.

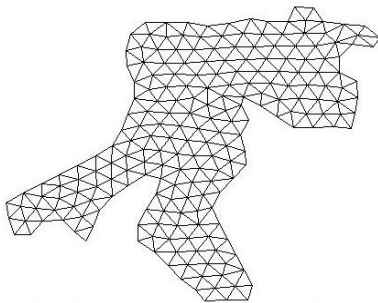
Luis Carlos Velázquez Guerrero

Facultad de Ciencias, UNAM

23-Abr-09

Planteamiento del Problema

Mostrar un método efectivo para generar mallas de **calidad** en regiones irregulares planas.

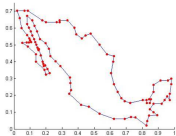


Malla de calidad: Bahía de La Habana, Cuba

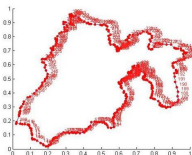
Regiones irregulares planas

Regiones simplemente conexas, poligonales con gran irregularidad en su geometría.

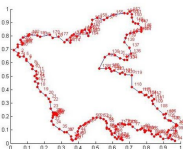
México



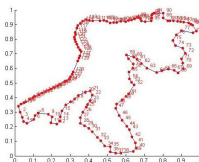
Edo. de México



Presa de Valle de Bravo



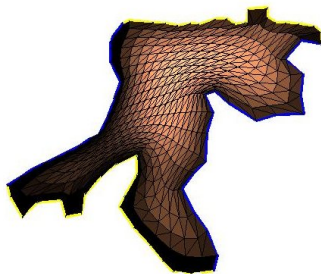
Bahía de la Habana



En particular una malla puede ser usada si se desea resolver numericamente una EDP's con condiciones a la frontera. En regiones de geometría complicada los métodos analíticos no son útiles para resolverlo.

Laplaciano con condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x, y) = 1 \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega$$

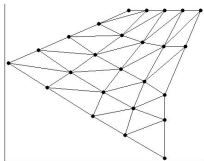


Estructuradas vs No-Estructuradas

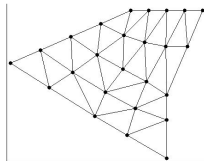
Las mallas son una descomposición en piezas simples de la región Ω .

- 1 Mallas Estructuradas. Presentan explícitamente una estructura de adyacencia (Diferencias Finitas)
- 2 Mallas No-Estructuradas. Requieren el almacenamiento de la estructura de adyacencia (Elemento Finito)

Malla Estructurada



Malla No-Estructurada

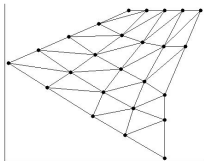


Estructuradas vs No-Estructuradas

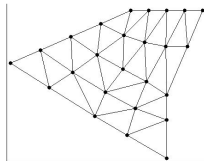
Las mallas son una descomposición en piezas simples de la región Ω .

- 1 Mallas Estructuradas. Presentan explícitamente una estructura de adyacencia (Diferencias Finitas)
- 2 Mallas No-Estructuradas. Requieren el almacenamiento de la estructura de adyacencia (Elemento Finito)

Malla Estructurada



Malla No-Estructurada

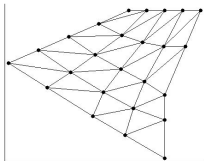


Estructuradas vs No-Estructuradas

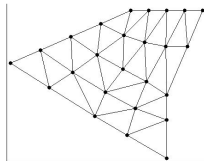
Las mallas son una descomposición en piezas simples de la región Ω .

- 1 Mallas Estructuradas. Presentan explícitamente una estructura de adyacencia (Diferencias Finitas)
- 2 Mallas No-Estructuradas. Requieren el almacenamiento de la estructura de adyacencia (Elemento Finito)

Malla Estructurada



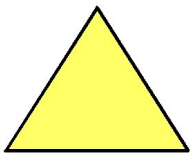
Malla No-Estructurada



¿Cuál es la calidad deseada de una malla?

Para resolver por el método de Elemento Finito (FEM) una EDP definida sobre Ω se ocupa la malla para plantear un sistema de ecuaciones sparse.

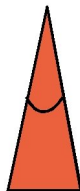
Se desea que todos y cada uno de los elementos de la malla sean lo más parecido posible a un triángulo equilátero.



Elemento de buena
calidad



Puede causar error
de discretización

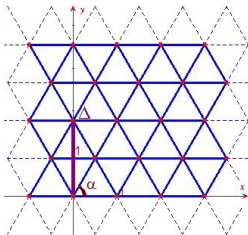


Puede causar mal
condicionamiento

¿Que cualidades tiene una triangulación regular ?

En una triangulación regular se pueden observar dos cualidades de diferente índole.

- 1 **Cualidad Topológica.** El numero de nodos adyacentes a cada nodo interior es siempre 6.
- 2 **Cualidad Geométrica.** El incentro y Curcincentro de cada elemento coinciden en posición



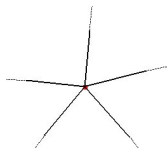
Medida de calidad Topológica

¿Qué tanto difiere la malla de tener todos los nodos interiores de grado seis?

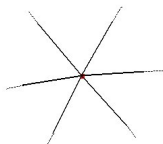
$$\varepsilon_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i - 6|,$$

δ_i Grado del i -ésimo nodo.

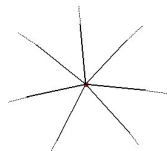
n Numero de nodos interiores.



Nodo de grado cinco



Nodo de grado seis



◀ □ Nodo de grado siete ≡



Medida de calidad Geométrica

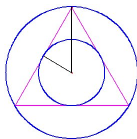
¿Cuanto difieren malla de tener las cualidades geométricas de los triángulos equiláteros?

$$\varepsilon_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(1/2 - \frac{r_i}{R_i} \right),$$

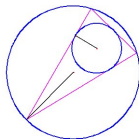
r_i Inradio del i -ésimo elemento.

R_i Circunradio del i -ésimo elemento.

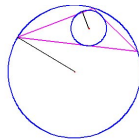
m Numero de elementos de la malla.



$$\frac{r_i}{R_i} = 1/2$$



$$\frac{r_i}{R_i} < 1/2$$



$$\frac{r_i}{R_i} < 1/2$$

Problema de optimización

Partiendo de un triangulación $T = \{\Delta_i\}$ que cumpla que

$$\Omega_h = \bigcup \Delta_i \subset \Omega$$

y posiblemente

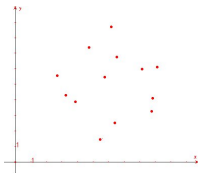
$$\partial(\bigcup \Delta_i) = \partial\Omega$$

de desea construir una triangulación $\{\Delta_i^*\}$ cuya medidas de calidad geométrica ε_g y topológica ε_t sean lo más cercano posible a 0.

Enfoque de generación de mallas por conexión de nodos

Diferentes enfoque se han estudiado para la generación de malla para elemento finito. En particular usaremos un enfoque conexión de nodos. Es decir, un enfoque que plantea que se resuelvan secuencialmente los dos siguientes problemas

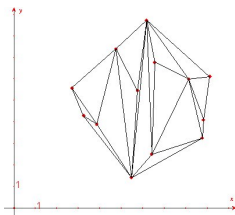
- 1 Colocar un conjunto de nodos S , de manera que sean estos los vértices de una triangulación.
- 2 Dotar a la colección de nodos de una estructura de adyacencia $G(S)$ de manera que se tenga una triangulación $T(S)$.



Colección de Nodo S

Técnicas libres de triangulación

Para tener una triangulación $T(S)$ sólo se necesita que ningún par de *conectores* se crucen, además se pide que todo *conector* interior sea arista de dos elementos.



Estructura $G(S)$ generada por barrimiento

Se puede triangular de distintas formas la colección de nodos, es de nuestro interés que el ángulo mínimo sea lo más grande posible por cuestiones de calidad.

Diagrama de Voronoi

Dada la colección S , es posible particionar el plano en un número finito de regiones poligonales convexas no necesariamente acotadas.

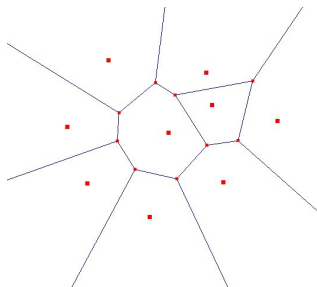
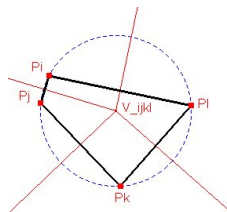
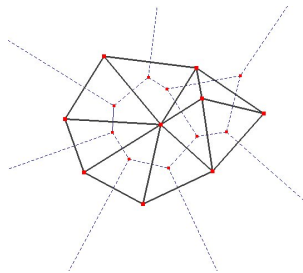


Diagrama de Voronoi

Una relación de influencia (cercanía al nodo) es útil para definir la partición.

Conexión de nodos definida por el diagrama de Voronoi

Un diagrama dual al diagrama de Voronoi puede ser definido si conectamos cada par de nodos cuyas regiones de influencia coinciden en más de un punto.



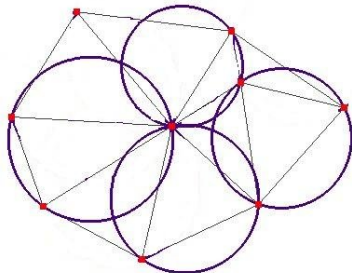
Caso Singular

En caso de que todos los nodos del diagrama de Voronoi sean de grado 3 el diagrama dual será una triangulación del casco convexo de S , la cual recibe el nombre de **Triangulación de Delaunay** y denotaremos por $T^*(S)$.

¿Qué hace que las triangulaciones de Delaunay sean favoritas?

Propiedad 1

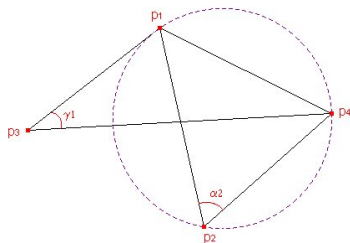
Para cualquier triángulo de $T^*(S)$ no existe un cuarto nodo de S en el interior de su círculo circunscrito.



¡¡Lo mejor de todo !!

Propiedad 2

El ángulo más agudo de la triangulación de Delaunay es más grande que el ángulo más agudo de cualquier otra triangulación de la lista de nodo S .



Métodos más usuales

- 1 **Divide y Vencerás.** Algoritmo recursivo con complejidad computacional de $O(n \cdot \log(n))$, propuesto por Lee y Schachter en 1980.
- 2 **Trueque de Aristas.** Algoritmo iterativo con complejidad computacional de $O(n^2)$, se parte de una triangulación inicial.
- 3 **Refinamiento de Delaunay.** Algoritmo incremental con complejidad computacional de $O(n^2)$, no es necesario partir de una triangulación inicial.

Métodos más usuales

- 1 **Divide y Vencerás.** Algoritmo recursivo con complejidad computacional de $O(n \cdot \log(n))$, propuesto por Lee y Schachter en 1980.
- 2 **Trueque de Aristas.** Algoritmo iterativo con complejidad computacional de $O(n^2)$, se parte de una triangulación inicial.
- 3 **Refinamiento de Delaunay.** Algoritmo incremental con complejidad computacional de $O(n^2)$, no es necesario partir de una triangulación inicial.

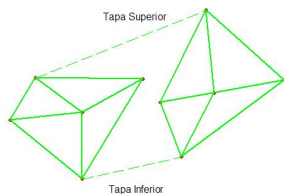
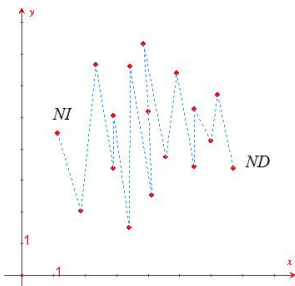
Métodos más usuales

- 1 **Divide y Vencerás.** Algoritmo recursivo con complejidad computacional de $O(n \cdot \log(n))$, propuesto por Lee y Schachter en 1980.
- 2 **Trueque de Aristas.** Algoritmo iterativo con complejidad computacional de $O(n^2)$, se parte de una triangulación inicial.
- 3 **Refinamiento de Delaunay.** Algoritmo incremental con complejidad computacional de $O(n^2)$, no es necesario partir de una triangulación inicial.

Divide y Vencerás

Método

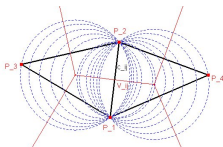
Dividir el conjunto S en S_1 y S_2 de forma adecuada, encontrar recursivamente $T^*(S_1)$ y $T^*(S_2)$ y unir ambas triangulaciones corrigiendo conectores para obtener $T^*(S)$.



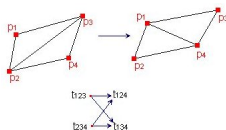
Trueque de aristas

Método

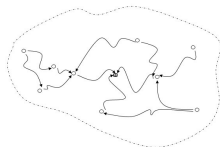
Si se sabe identificar cuando un conector coincide con un conector de la estructura $G^*(S)$ es posible ir intercambiando (*corrigiendo*) las aristas hasta tener la triangulación $T^*(S)$.



Familia de
circunferencias
vacías



Trueque 2 a 2

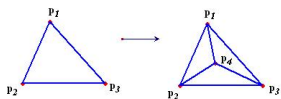


Convergencia del
método

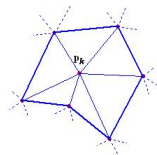
Refinamiento de Delaunay

Método

Partiendo de un subconjunto $S_3 \subset S$ cuya triangulación es elemental, se añade otro nodo $S_{k+1} = S_k \cup p_{k+1}$ y conecta de la forma más simple para generar una estructura $G(S_{k+1})$, a esta última estructura se le aplica el método de trueque de aristas para tener $G^*(S_{k+1})$.



Trueque 1 a 3, por inserción de nodo



Corrección en torno al nodo añadido

Origen del problema de ajuste a la región

\bar{S} Casco convexo de S

$T^*(S)$ Triangulación de Delaunay de \bar{S}

Encaje a la región

Contemplando la geometría de Ω , la estructura de la malla sería la correspondiente a

$$T|_{\Omega}^*(S) = T^*(S) \cap \Omega$$

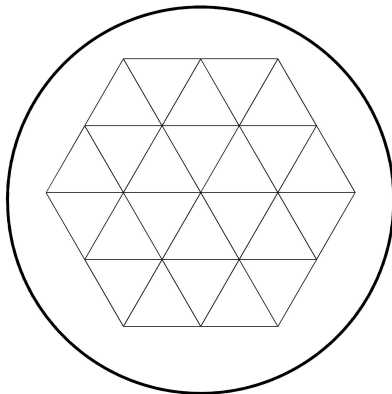
Debido a

$$S \in \Omega \not\Rightarrow T^*(S) \in \Omega$$

Que da origen al problema de ajuste puesto que

$$\partial \left(\bigcup \Delta_i^* \right) \neq \partial \Omega$$

Ejemplo



Punto de partida para el ajuste, $T^*(S)$

Problema de ajuste a la región

Para generar una malla de Ω no se pretende llenar la franja $\Omega \setminus T|_{\Omega}^*$ con una malla más.

El problema de ajuste plantea que la región Ω sea *mallada* por $T|_{\Omega}^*(\hat{S})$ reposicionando al conjunto de nodos

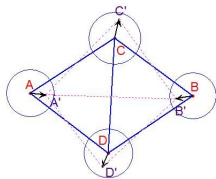
$$\hat{S} = \{p_i + \delta \mid p_i \in S\}$$

El problema de ajuste se resuelve fácilmente, pero si se desea que $\varepsilon_g(T|_{\Omega}^*(\hat{S})) \leq \varepsilon_g(T|_{\Omega}^*(S))$ la dificultad aumenta.

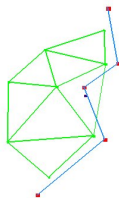
Un método numérico para resolver el problema de ajuste

Se plantea un método iterativo para la solución al problema de ajuste con calidad.
Partiendo de $T|_{\Omega}^*(S_k)$ se debe calcular

- 1 $T^*(S_{k+1})$
- 2 $T|_{\Omega}^*(S_{k+1}) = \{\Delta \in T^* | \text{baricentro}(\Delta) \in \Omega\}$



$$\nabla G = G(k+1) - G(k)$$



Criterio de aceptación de un elemento

El problema de malla de calidad optima

$$\underset{S}{\operatorname{argmin}} \{ \varepsilon_g(T^* |_{\Omega}(S)) \}$$

Posible cualidad del óptimo S^*

$$\|p_i - p_j\| \approx \|p_j - p_k\| \approx \|p_k - p_i\|$$

para todo

$$\Delta_{ijk} \in T^* |_{\Omega}(S^*)$$

Método de la ecuación de equilibrio

A $S = \{(x_i, y_i)\}$ se le considera como un vector $2n$ -dimensional, para el cual se definirán 2 funciones:

$F(\bar{x})$ Fuerza de repulsión de partículas dada por $G(S) = \{N^i\}$

$C(\bar{x})$ Fuerza de retención impuesta por Ω

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_j \\ y_j \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad F(\bar{x}) = \begin{bmatrix} F_{x_1}(\bar{x}) \\ F_{y_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ F_{x_j}(\bar{x}) \\ F_{y_j}(\bar{x}) \\ \vdots \\ F_{x_n}(\bar{x}) \\ F_{y_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad C(\bar{x}) = \begin{bmatrix} C_{x_1}(\bar{x}_1) \\ C_{y_1}(\bar{x}_1) \\ \vdots \\ C_{x_j}(\bar{x}_j) \\ C_{y_j}(\bar{x}_j) \\ \vdots \\ C_{x_n}(\bar{x}_n) \\ C_{y_n}(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

Método de la ecuación de equilibrio

A $S = \{(x_i, y_i)\}$ se le considera como un vector $2n$ -dimensional, para el cual se definirán 2 funciones:

$F(\bar{x})$ Fuerza de repulsión de partículas dada por $G(S) = \{N^i\}$

$C(\bar{x})$ Fuerza de retención impuesta por Ω

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_j \\ y_j \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad F(\bar{x}) = \begin{bmatrix} Fx_1(\bar{x}) \\ Fy_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ Fx_j(\bar{x}) \\ Fy_j(\bar{x}) \\ \vdots \\ Fx_n(\bar{x}) \\ Fy_n(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad C(\bar{x}) = \begin{bmatrix} Cx_1(\bar{x}_1) \\ Cy_1(\bar{x}_1) \\ \vdots \\ Cx_j(\bar{x}_j) \\ Cy_j(\bar{x}_j) \\ \vdots \\ Cx_n(\bar{x}_n) \\ Cy_n(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

Método de la ecuación de equilibrio

A $S = \{(x_i, y_i)\}$ se le considera como un vector $2n$ -dimensional, para el cual se definirán 2 funciones:

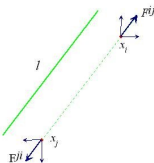
$F(\bar{x})$ Fuerza de repulsión de partículas dada por $G(S) = \{N^i\}$

$C(\bar{x})$ Fuerza de retención impuesta por Ω

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_j \\ y_j \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad F(\bar{x}) = \begin{bmatrix} Fx_1(\bar{x}) \\ Fy_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ Fx_j(\bar{x}) \\ Fy_j(\bar{x}) \\ \vdots \\ Fx_n(\bar{x}) \\ Fy_n(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad C(\bar{x}) = \begin{bmatrix} Cx_1(\bar{x}_1) \\ Cy_1(\bar{x}_1) \\ \vdots \\ Cx_j(\bar{x}_j) \\ Cy_j(\bar{x}_j) \\ \vdots \\ Cx_n(\bar{x}_n) \\ Cy_n(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

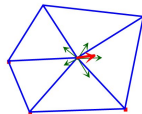
Fuerza de repulsión $F(\bar{x})$

$$F^{ij} = \begin{cases} (l - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|) \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|}, & \text{Si } \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| < l \\ 0, & \text{Si } \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| > l \end{cases}$$



Fuerza de repulsión
de Nodos vecinos,

$$l = l_G$$



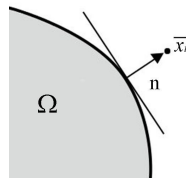
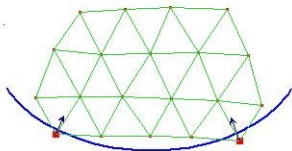
Suma de fuerzas

$$F_i(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} F^{ij} & \text{casi siempre} \\ 0 & \text{si es fijo} \end{cases}$$

Fuerza de retención o función de corrección $C(\bar{x})$

Si $\bar{x}_i + F_i(\bar{x}) \notin \Omega$ se aplica una función de corrección para que la fuerza esté dirigida al exterior de la región.

$$C_i = -(\hat{n} \cdot F_i)\hat{n}$$



Ecuación diferencial de equilibrio de fuerzas

Se introduce artificialmente un parámetro temporal al conjunto $S = S(t)$ sobre el cual se plantea la siguiente ecuación diferencial.

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = F(\bar{x}) + C(\bar{x}) & 0 < t \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \end{cases}$$

Solución de equilibrio

Si \bar{x} es tal que $F(\bar{x}) + C(\bar{x}) = 0$ entonces $\sum_{j \in N^i} F^{ij} = 0$ para todo i

Que genera una malla suave cuya estructura es $G^* |_{\Omega} (S(\bar{x}))$

Integración numérica de la ecuación

Método de Euler hacia adelante

$$\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \Delta t \cdot (F(\bar{x}) + C(\bar{x}))$$

Implementación numérica

Para cada nodo se realiza el siguiente avance

$$\bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i + \Delta t \cdot F_i(\bar{x})$$

Si \bar{x}_i es fijo, hacer

$$\cdot \quad \bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i - \Delta t \cdot F_i(\bar{x})$$

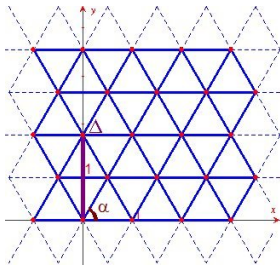
Si $\bar{x}_i \notin \Omega$, hacer

$$\cdot \quad \bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i + C_i(\bar{x})$$

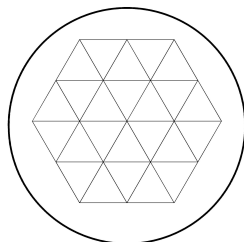
Basado en rejilla regular de parámetro h

Como podemos realizar ajuste y optimizar la calidad simultáneamente, conviene iniciar con una triangulación que tenga la mejor calidad posible.

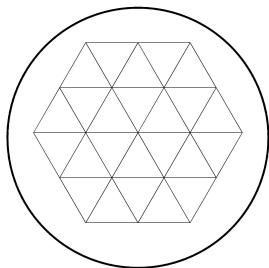
$$S_0 = \Sigma(h) \cap \Omega$$



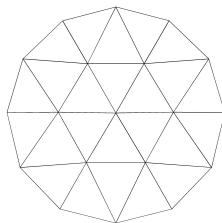
Rejilla regular



$T^* |_{\Omega}(S_0)$



$$T^* |_{\Omega} (S_0)$$



$$T^* |_{\Omega} (S^*)$$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla

Puntos Fijos en $G |_{\Omega}^* (S(t))$, ajuste reducido

Depuración de nodos

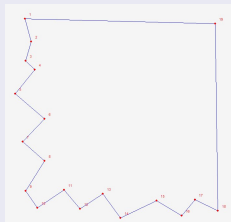
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P

Suavizado de contorno, tratamiento 2

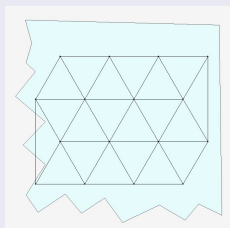
Convergencia

Origen del problema

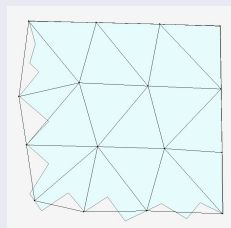
Ejemplo



$\partial\Omega$ Polígono irregular
inicial



$T^* |_{\Omega} (S_0)$



$T^* |_{\Omega} (S^*)$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla

Puntos Fijos en $G \mid_{\Omega}^* (S(t))$, ajuste reducido

Depuración de nodos

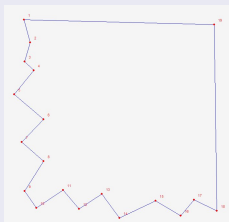
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P

Suavizamiento de contorno, tratamiento 2

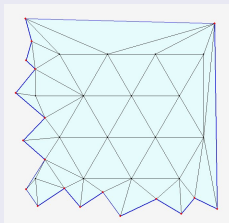
Convergencia

$$S_0 = \partial\Omega \cup S$$

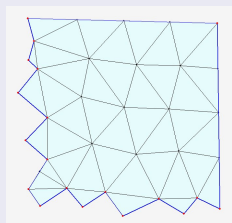
Ejemplo



$\partial\Omega$ Polígono inicial



$T^* \mid_{\Omega} (S_0)$



$T^* \mid_{\Omega} (S^*)$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla

Puntos Fijos en $G|_{\Omega}^*(S(t))$, ajuste reducido

Depuración de nodos

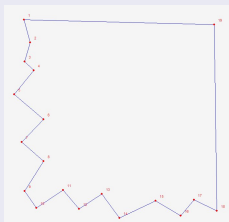
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P

Suavizado de contorno, tratamiento 2

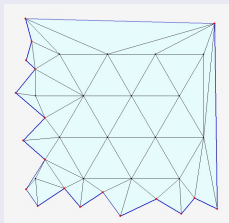
Convergencia

Eliminación de nodos interiores, $S^{[k]}$ dinámico

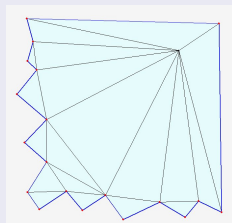
Ejemplo



$\partial\Omega$ Polígono inicial



$T^*|_{\Omega}(S_0)$



$T^*|_{\Omega}(S^*)$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla

Puntos Fijos en $G|_{\Omega}^*(S(t))$, ajuste reducido

Depuración de nodos

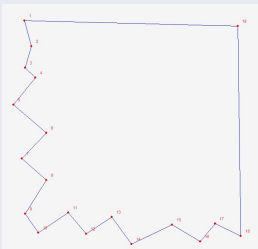
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P

Suavizamiento de contorno, tratamiento 2

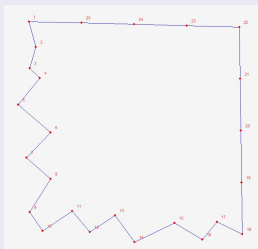
Convergencia

Más nodos fijos

Ejemplo



$\partial\Omega$ Polígono inicial P



$\partial\Omega$ Polígono Q por tratamiento 1

Algoritmo

$S_{\Omega} \leftarrow \text{Tratamiento}(S_{\Omega})$

$S_0 \leftarrow (\Sigma \cap \Omega) \cup S_{\Omega}$

$S \leftarrow S_0$

$S_{fix} \leftarrow S_{\Omega}$

$K \leftarrow 1$

Mientras $K \leq N$, hacer

. $G \leftarrow G(S, T_{\Omega}^*(S))$

. $l \leftarrow l_G^*$

. $F \leftarrow F(S, G; l)$

. Para $\bar{x}_j \in S_{fix}$

. $F_j \leftarrow \bar{0}$

. $S \leftarrow S + \Delta t \cdot F$

. $K \leftarrow K + 1$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

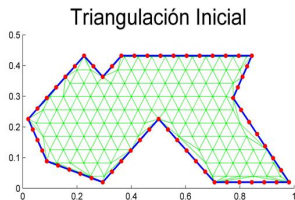
Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla
Puntos Fijos en $G |_{\Omega}^* (S(t))$, ajuste reducido
Depuración de nodos

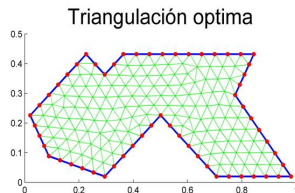
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P
Suavizamiento de contorno, tratamiento 2
Convergencia

Otro ejemplo, problema de ajuste resuelto por tratamiento 1

Ejemplo con $S^{[k]}$ dinámico



$T^* |_{\Omega} (S_0)$ Malla inicial



$T^* |_{\Omega} (S^*)$ Malla óptima

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay

Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

Ilustración de las falla

Puntos Fijos en $G \setminus \Omega^*$ ($S(t)$), ajuste reducido

Depuración de nodos

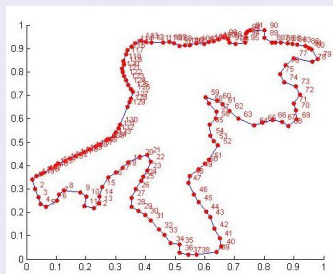
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P

Suavizado de contorno, tratamiento 2

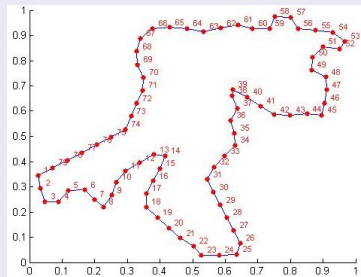
Convergencia

Regiones más generales

Suavizado de spline cónico



Polígono P



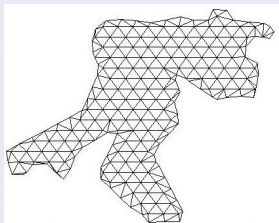
Polígono $Q = CS(P)$

Planteamiento del Problema
Triangulaciones de Delaunay
Generación de mallas por ajuste a la región
Generación de mallas en regiones irregulares

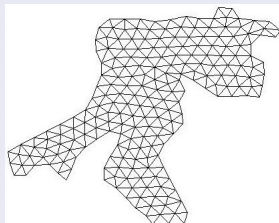
Ilustración de las falla
Puntos Fijos en $G |_{\Omega}^* (S(t))$, ajuste reducido
Depuración de nodos
Tratamiento de contorno por adhesión de puntos fijos a P
Suavizamiento de contorno, tratamiento 2
Convergencia

Malla generada por tratamiento 2

Triangulación de la Bahía de la Habana



$T^* |_{\Omega} (S_0)$



$T^* |_{\Omega} (S^*)$

