



# Universidad Nacional Autónoma de México

## Laboratorio de Cómputo Científico

# Métodos Multigrid

presenta

Jorge Zavaleta Sánchez

México D.F., a 20 de Agosto de 2009.

- 1 Problemas Modelo
- 2 Métodos Iterativos
- 3 Métodos Multigrid

# Problema de Valor a la Frontera de una Dimensión

- Consideremos el siguiente problema de valor a la frontera de una dimensión:

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = f(x), & \text{en } \Omega = (0, 1), \quad \sigma \geq 0; \\ u(x) = 0, & \text{sobre } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Sea  $\Omega$  representado por una malla  $\Omega_h$ , con tamaño de malla  $h = \frac{1}{n}$  y puntos de la malla  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

- Un esquema de discretización para la segunda derivada en el punto  $x_j$ , dado por el método de diferencias finitas, es

$$\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1}))}{h^2} = u''(x_j) + O(h^2).$$

- Hacemos  $f_j \approx f(x_j)$  y  $v_j \approx u(x_j)$ , además  $v_0 = v_n = 0$ .
- Obtenemos el siguiente sistema tridiagonal de  $n - 1$  ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{h^2} + \sigma\right) v_1 - \frac{1}{h^2} v_2 &= f_1 \\ -\frac{1}{h^2} v_{j-1} + \left(\frac{2}{h^2} + \sigma\right) v_j - \frac{1}{h^2} v_{j+1} &= f_j, \quad j = 2, \dots, n-2 \\ -\frac{1}{h^2} v_{n-2} + \left(\frac{2}{h^2} + \sigma\right) v_{n-1} &= f_n \end{aligned}$$



# Problema de Valor a la Frontera de dos Dimensión

- Análogamente al problema anterior, se puede formular una versión en dos dimensiones. Consideremos el problema de valor a la frontera de dos dimensiones

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + \sigma u = f(x, y), & \text{en } \Omega = (0, 1)^2, \quad \sigma \geq 0; \\ u = 0, & \text{sobre } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- Como antes se formula el problema en forma discreta, donde el cuadrado unitario  $\Omega$  es representado por la malla  $\Omega_h$ , definiendo los puntos de la malla como  $(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$ , donde  $h_x = \frac{1}{m}$  y  $h_y = \frac{1}{n}$ .

- Reemplazando las derivadas parciales del problema mediante un esquema de diferencias finitas de segundo orden produciendo un sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\frac{-v_{i-1,j} + 2v_{ij} - v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{-v_{i,j-1} + 2v_{ij} - v_{i,j+1}}{h_y^2} + \sigma v_{ij} = f_{ij}$$

$$v_{i0} = v_{in} = v_{0j} = v_{nj} = 0 \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

- Hay ahora  $(m-1) \cdot (n-1)$  puntos interiores de la malla y el mismo número de incógnitas en el problema. Ahora se puede escoger muchos ordenamientos de las incógnitas. Por el momento, se considerara el ordenamiento lexicográfico por líneas de constantes  $i$ .





- Este sistema es simétrico, tridiagonal por bloques, y ralo. Tiene dimensión de bloque  $(m - 1) \times (m - 1)$ .
- Cada bloque diagonal,  $B$  es una matriz tridiagonal de  $(n - 1) \times (n - 1)$ , que es similar a la matriz del problema de una dimensión.
- Cada bloque fuera de la diagonal es un múltiplo  $a = \frac{1}{h_x^2}$ , de la matriz identidad  $I$  de  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

- 1 Problemas Modelo
- 2 Métodos Iterativos**
- 3 Métodos Multigrid

- Consideramos el sistema  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y sea  $\mathbf{v}$  una aproximación de  $\mathbf{u}$
- Dos medidas importantes dentro del contexto multigrad son
  - El error:  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$
  - El residual:  $\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}$
- Ya que  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}$ , se puede escribir el sistema  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  como:

$$A\mathbf{e} = \mathbf{f} - \mathbf{v}$$

- Así, resolviendo la ecuación residual, se puede obtener una corrección de la solución aproximada, que es conocida como corrección residual y esta dada por

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{e}$$

- Consideramos nuevamente el problema modelo de una dimensión

$$\begin{cases} -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} = h^2 f_j, & 1 \leq j \leq n-1 \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

- El método de Jacobi, resuelve la  $j$ -ésima ecuación para  $v_j$  conservando las otras variables fijas

$$v_j^{(1)} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^{(0)} + v_{j+1}^{(0)} + h^2 f_j), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

- Sea  $A = D - L - U$ , donde  $D$  es diagonal y  $L$  y  $U$  son estrictamente las partes inferior y superior de  $A$ .
- Entonces el sistema original  $Au = f$  se convierte

$$(D - L - U)\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$D\mathbf{u} = (L + U)\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{u} = D^{-1}(L + U)\mathbf{u} + D^{-1}\mathbf{f}$$

- Si se define la matriz iteración de Jacobi por  $M_J = D^{-1}(L + U)$ , entonces el método de Jacobi aparece en forma matricial como:

$$\mathbf{v}^{(1)} = M_J\mathbf{v}^{(0)} + D^{-1}\mathbf{f}.$$

- Considere la iteración.

$$v_j^{(1)} = v_j^{(0)} - \frac{\omega}{2}(v_{j-1}^{(0)} - 2v_j^{(0)} + v_{j+1}^{(0)}) + \frac{\omega}{2}h^2 f_j, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

- Sea  $A = D - L - U$ , la forma matricial es:

$$\mathbf{v}^{(1)} = (I - \omega D^{-1}A)\mathbf{v}^{(0)} + \omega D^{-1}\mathbf{f},$$

o equivalentemente, haciendo  $M_J(\omega) = I - \omega D^{-1}A$ , como

$$\mathbf{v}^{(1)} = M_J(\omega)\mathbf{v}^{(0)} + \omega D^{-1}\mathbf{f}.$$

- Consideramos la iteración

$$v_j \leftarrow \frac{1}{2}(v_{j-1} + v_{j+1} + h^2 f_j), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

- Considerando nuevamente la descomposición  $A = D - L - U$ , el sistema queda como:

$$\begin{aligned}(D - L)\mathbf{u} &= U\mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \mathbf{u} &= (D - L)^{-1}U\mathbf{u} + (D - L)^{-1}\mathbf{f}.\end{aligned}$$

Definiendo la matrix iteración de Gauss-Seidel como  $M_G = (D - L)^{-1}U$ , se puede expresar el método como

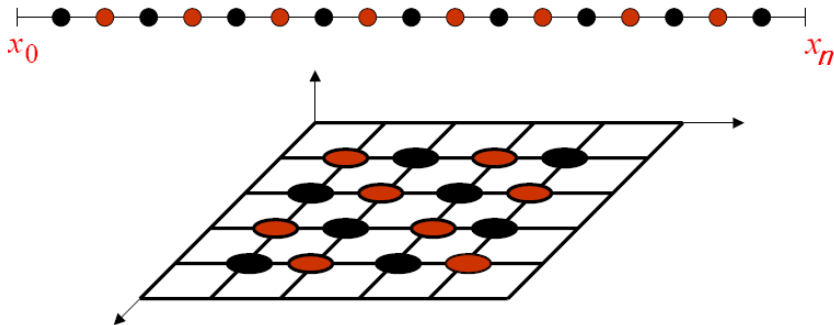
$$\mathbf{v}^{(1)} \leftarrow M_G \mathbf{v}^{(0)} + (D - L)^{-1}\mathbf{f}$$

- Actualización de los puntos pares (rojos)

$$v_{2j} \leftarrow \frac{1}{2}(v_{2j-1} + v_{2j+1} + h^2 f_{2j}).$$

- Actualización de los puntos impares (negros)

$$v_{2j+1} \leftarrow \frac{1}{2}(v_{2j} + v_{2j+2} + h^2 f_{2j+1}).$$





- Cada uno de los métodos puede ser representado en forma general como

$$\mathbf{v}^{(1)} = M\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{g}$$

- Estos métodos están diseñados para que la solución exacta,  $\mathbf{u}$ , sea un punto fijo de la iteración, esto es

$$\mathbf{u} = M\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

- Restando estas ecuaciones, se tiene que

$$\mathbf{e}^{(1)} = M\mathbf{e}^{(0)}$$

- Luego, suponiendo que se tiene un error inicial  $\mathbf{e}^{(0)}$  y  $\mathbf{e}^{(k)}$  denota el error en la  $k$ -ésima iteración, entonces se tiene que después de  $m$  iteraciones

$$\mathbf{e}^{(m)} = M^m\mathbf{e}^{(0)}$$

- Si se elige una norma vectorial y norma matricial asociada, entonces se puede acotar el error después de  $m$  iteraciones por

$$\|e^{(m)}\| \leq \|M\|^m \|e^{(0)}\|$$

- Se puede mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M^m = 0 \text{ si y sólo si } \rho(M) < 1$$

- Por lo tanto, se concluye.

**El método converge si y sólo si  $\rho(M) < 1$ .**

- Consideremos el método de Jacobi amortiguado aplicado al problema modelo de una dimensión para hacer el análisis de las propiedades de suaviazamiento.
- Recordando que  $M_J(\omega) = I - \omega D^{-1}A$ , entonces se sigue que los eigenvalores de  $M_J(\omega)$  y  $A$  están relacionados por

$$\lambda(M_J(\omega)) = 1 - \frac{\omega}{2}\lambda(A).$$

- Luego, el problema se convierte en encontrar los eigenvalores de la matriz original  $A$ .

- Los eigenvalores de  $A$  están dados por:

$$\lambda_k(A) = 4 \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2n} \right) \quad 1 \leq k \leq n-1$$

- Los correspondientes eigenvectores de  $A$ , están dados por

$$w_{k,j} = \sin \left( \frac{jk\pi}{n} \right), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq n.$$

- Con estos resultados, se tiene que los eigenvalores de  $M_J(\omega)$  son

$$\lambda_k(M_J(\omega)) = 1 - 2\omega \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2n} \right) \quad 1 \leq k \leq n-1$$

mientras que los eigenvectores de  $M_J(\omega)$  son los mismos que los de  $A$ .

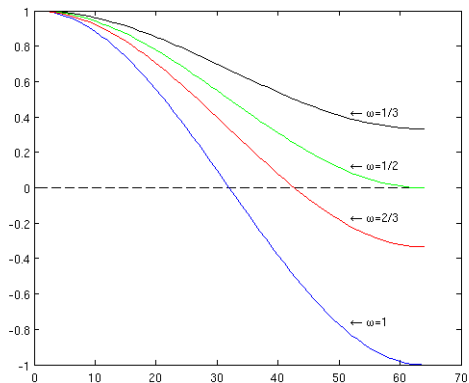
- Es importante notar que si  $0 < \omega \leq 1$ , entonces  $|\lambda_k(M_J(\omega))| < 1$  y así la iteración de Jacobi amortiguada converge.
- Antes de continuar con el análisis de las propiedades de este método, se necesita distinguir entre los eigenvectores de alta y baja frecuencia. Luego definimos
  - Eigenvectores  $w_{k,j}$  de baja frecuencia para  $1 \leq k < \frac{1}{2}n$
  - Eigenvectores  $w_{k,j}$  de alta frecuencia para  $\frac{1}{2}n \leq k \leq n$

- Luego se quiere encontrar el valor de  $\omega$  que haga  $|\lambda_k(M_J(\omega))|$  lo más pequeño posible para todo  $1 \leq k \leq n - 1$ .
- Notesé que para todos los valores de  $\omega$  satisfaciendo  $0 < \omega \leq 1$ ,

$$\lambda_1 = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \approx 1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2}$$

- Este hecho implica que  $\lambda_1$ , el eigenvalor asociado con el modo más suave, va a estar cercano a 1. De esta manera, ningún valor de  $\omega$  va a reducir las componentes suaves del error eficientemente.

- Así del hecho de que ningún valor de  $\omega$  amortigua las componentes suaves satisfactoriamente, entonces se busca un valor de  $\omega$  que proporcione el mejor amortiguamiento de las componentes de alta frecuencia.



Elegimos  $\omega$  tal que

$$\lambda_{\frac{n}{2}}(M_J(\omega)) = -\lambda_n(M_J(\omega))$$

de lo cual se obtiene que

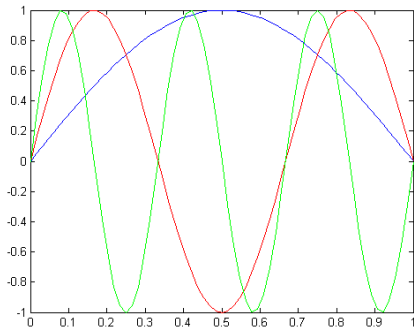
$$\omega = \frac{2}{3}$$

- Consideramos el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , luego nuestro problema modelo de una dimensión queda como

$$\begin{cases} -u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} = 0, & 1 \leq j \leq n-1; \\ u_0 = u_n = 0. \end{cases}$$

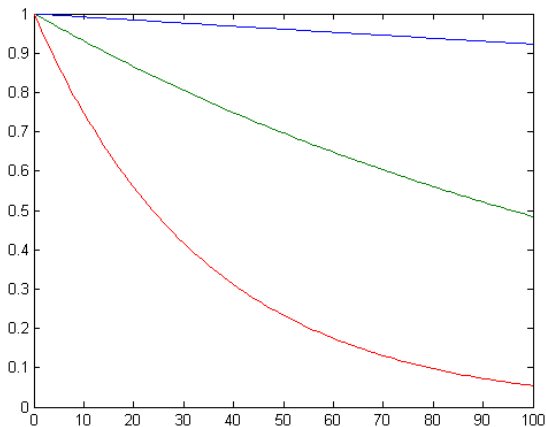
- Usando los modos de Fourier como iteración inicial, con  $n = 64$

$$\mathbf{v}_k = (v_j)_k = \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq k \leq n-1$$





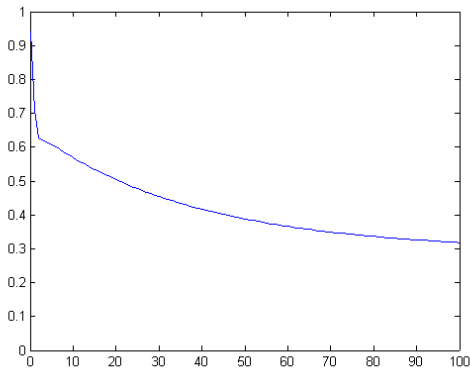
- El error, en el método de Jacobi amortiguado sobre  $Au = 0$ , con 100 iteraciones usando las aproximaciones iniciales  $\mathbf{v}_1$  (azul),  $\mathbf{v}_3$  (verde) y  $\mathbf{v}_6$  (rojo)



- Utilizamos el método de Jacobi amortiguado sobre el problema de una dimensión con  $\omega = 2/3$ , con la aproximación inicial

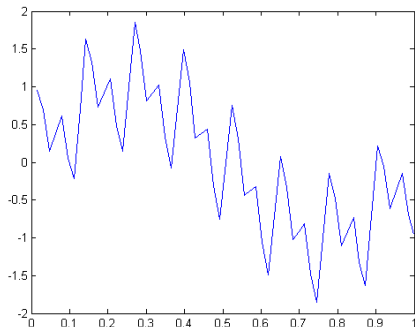
$$v_0 = (v_j)_k = \frac{1}{3} \left( \sin \left( \frac{j\pi}{n} \right) + \sin \left( \frac{6j\pi}{n} \right) + \sin \left( \frac{32j\pi}{n} \right) \right),$$

- El error,  $\|e\|_\infty$ , graficado contra el número de iteraciones.

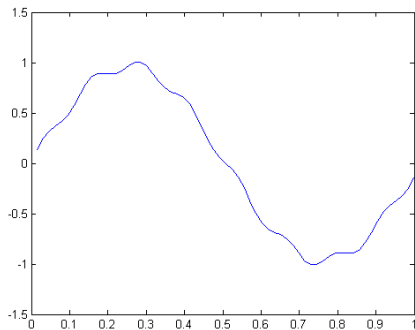


- Error inicial

$$v_{kj} = \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{16j\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{32j\pi}{n}\right),$$



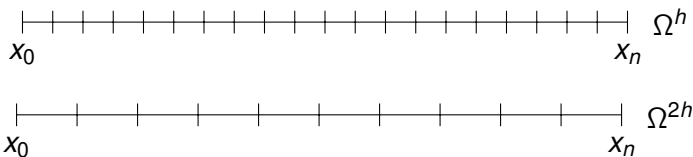
Error inicial



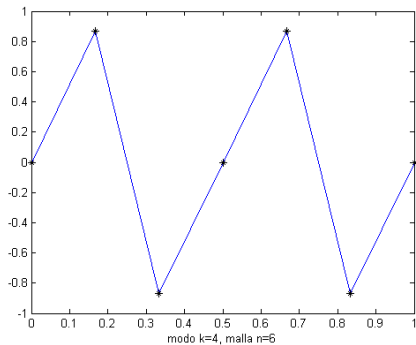
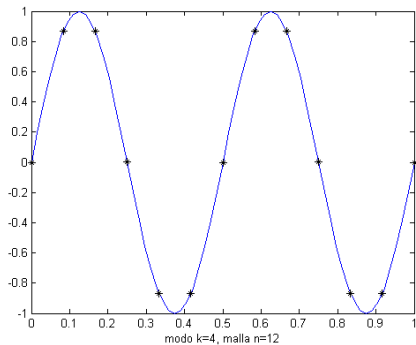
Error después de 10 iteraciones.

- 1 Problemas Modelo
- 2 Métodos Iterativos
- 3 Métodos Multigrid**

- Los métodos iterativos tienen la propiedad de suavizamiento, donde las componentes de alta frecuencia del error son eliminadas eficientemente, pero las componentes de baja frecuencia son amortiguadas muy lentamente.
- Esto podría parecer una limitación, pero usando mallas más gruesas, entonces podemos utilizar la propiedad de suavizamiento con mayor ventaja.

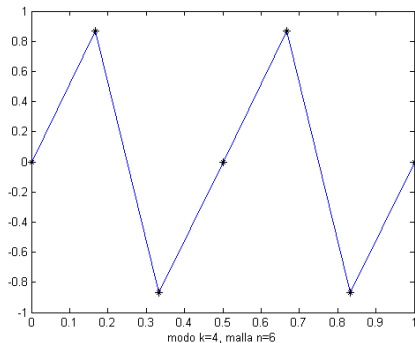
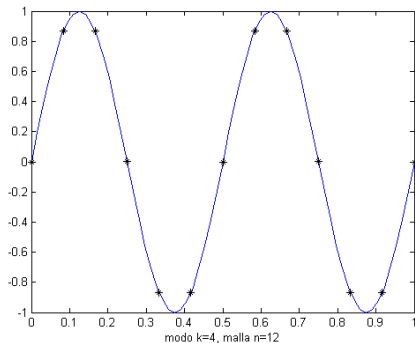


- Mallas más gruesas pueden ser usadas para calcular una mejor aproximación inicial para el suavizamiento en la malla fina.
- El error suave en la malla fina es relativamente más oscilatorio en la malla gruesa.



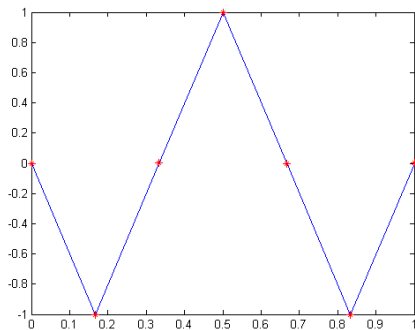
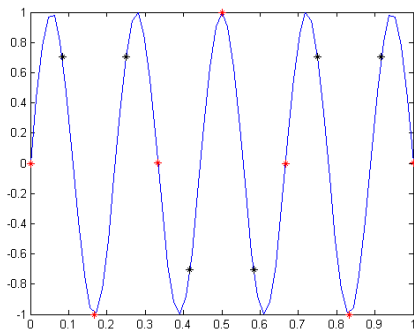
- Para  $k = 1, 2, \dots, n/2$ , el  $k$ -ésimo modo de Fourier es preservado en la malla gruesa, esto es,

$$w_{k,2j}^h = \sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{jk\pi}{n/2}\right) = w_{k,j}^{2h}$$



- Para  $k > n/2$ , el  $k$ -ésimo modo sobre la malla fina sufre un fenómeno de aliasing y aparece como el  $(n - k)$ -ésimo modo sobre la malla gruesa:

$$(w_k^h)_{2j} = \sin\left(\frac{2j\pi k}{n}\right) = -\sin\left(\frac{j\pi(n-k)}{n/2}\right) = -(w_{n-k}^{2h})_j$$





# Idea sobre la Corrección de Malla Gruesa (CGC)

- Suavizamos sobre  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  en  $\Omega^h$  para obtener una aproximación  $\mathbf{v}^h$ .
- Calculamos  $\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}^h$ .
- Suavizamos sobre  $A\mathbf{e} = \mathbf{r}$  en  $\Omega^{2h}$ , para obtener una aproximación del error,  $\mathbf{e}^{2h}$
- Corregimos la aproximación:  $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \mathbf{e}^{2h}$

# Operador de Prolongación

- Necesitamos mapear de la malla gruesa a la malla fina

$$I_{2h}^h : \Omega^{2h} \longrightarrow \Omega^h$$

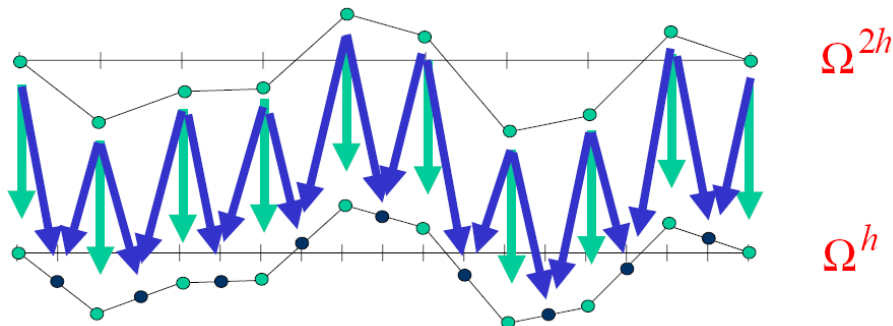
- Sean  $\mathbf{v}^h$ ,  $\mathbf{v}^{2h}$  definidos sobre  $\Omega^h$  y  $\Omega^{2h}$ , respectivamente. Entonces

$$I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$$

donde

$$\left. \begin{aligned} v_{2j}^h &= v_j^{2h}, \\ v_{2j+1}^h &= \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}); \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$$

- Los valores en los puntos sobre la malla gruesa pasan sin cambio a la malla fina.
- Los valores en la malla fina que no están sobre la malla gruesa son los promedios de sus vecinos en la malla gruesa.



# Operador Restricción (Inyección)

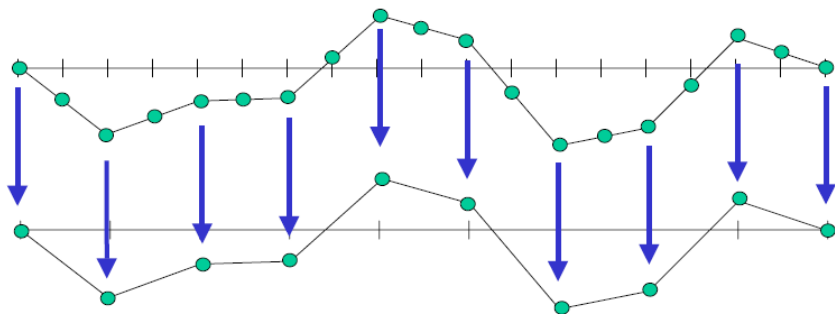
- Necesitamos mapear de la malla fina a la malla gruesa

$$I_h^{2h} : \Omega^h \longrightarrow \Omega^{2h}$$

- Sean  $\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^{2h}$  definidos sobre  $\Omega^h$  y  $\Omega^{2h}$ , respectivamente. Entonces

$$I_h^{2h} \mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$$

donde  $v_{2i}^h = v_i^{2h}$ .



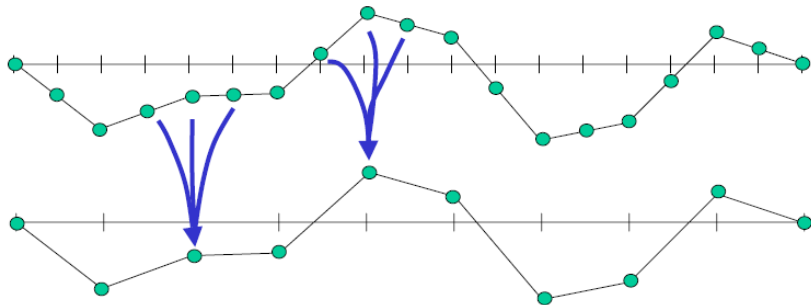
# Operador Restricción (Ponderado)

- Sean  $\mathbf{v}^h$ ,  $\mathbf{v}^{2h}$  definidos sobre  $\Omega^h$  y  $\Omega^{2h}$ , respectivamente. Entonces

$$I_h^{2h} \mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$$

donde

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h)$$



- El esquema de corrección Twogrid

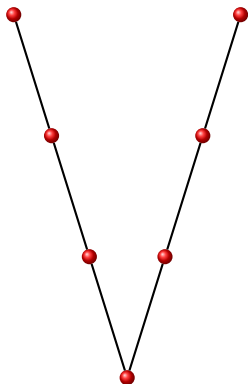
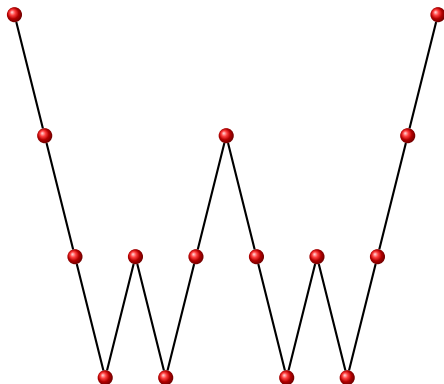
$$\mathbf{v}^h \leftarrow TG(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h)$$

- 1 Suavizamos  $\nu_1$  veces sobre  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  con la aproximación inicial  $\mathbf{v}^h$ ;
- 2 Calculamos el residual en la malla fina:  $\mathbf{r}^h = \mathbf{f}^h - A^h \mathbf{v}^h$  y se restringe a la malla gruesa por  $\mathbf{r}^{2h} = I_h^{2h} \mathbf{r}^h$ ;
- 3 Resolvemos  $A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$  sobre  $\Omega^{2h}$ ;
- 4 Interpolamos el error de la malla gruesa a la malla fina por  $\mathbf{e}^h = I_{2h}^h \mathbf{e}^{2h}$  y corregimos la aproximación de la malla fina por  $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \hat{\mathbf{e}}^h$ ;
- 5 Suavizamos  $\nu_2$  veces sobre  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  con aproximación inicial  $\mathbf{v}^h$ ;

- El esquema Multigrad

$$\mathbf{v}^h \leftarrow MG\gamma^h(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$$

- 1 Suavizamos  $\nu_1$  veces sobre  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  con la aproximación inicial  $\mathbf{v}^h$ ;
- 2 Si  $\Omega^h$  es la malla más gruesa, entonces ir al paso 4  
De lo contrario
  - $\mathbf{f}^{2h} = I_h^{2h} \mathbf{u}^h$
  - $\mathbf{v}^{2h} \leftarrow \mathbf{0}$
  - $\mathbf{v}^h \leftarrow MG\gamma^{2h}(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^{2h})$   $\gamma$  veces
- 3 Corregimos  $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h}$ ;
- 4 Suavizamos  $\nu_2$  veces sobre  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  con aproximación inicial  $\mathbf{v}^h$ ;

 $\gamma = 1$ , V-ciclo $\gamma = 2$ , W-ciclo

- En la práctica solo los valores de  $\gamma = 1$  (que dan lugar a los V-ciclos) y  $\gamma = 2$  (que dan lugar a los W-ciclos), son utilizados.