Aplicaciones del análisis combinatorio

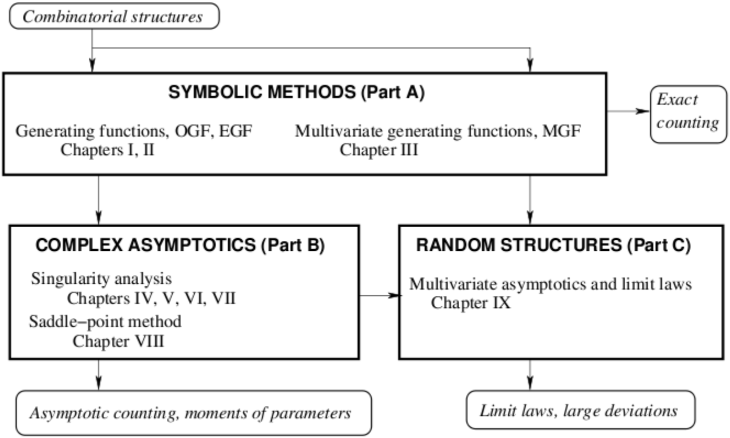
Laura Eslava

UNAM

25 de noviembre de 2010

Plan de la plática

- Plantear problemas
- Especificación de clases combinatorias
- Traducción a funciones generadoras
- Comportamiento asintótico


Combinatorial structures
SYMBOLIC METHODS (Part A)
Generating functions, OGF, EGF
Chapters I, II
Multivariate generating functions, MGF
Chapter III
Exact counting
COMPLEX ASYMPTOTICS (Part B)
Singularity analysis
Chapters IV, V, VI, VII
Saddle–point method
Chapter VIII
RANDOM STRUCTURES (Part C)
Multivariate asymptotics and limit laws
Chapter IX
Asymptotic counting, moments of parameters
Limit laws, large deviations

1. El número de palabras binarias que no tienen más de 4 ceros consecutivos, ni 2 unos seguidos.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el texto de Hamlet tenga un mensaje escondido?
3. ¿Cuántos mapeos de [1...n] a [1...n] no tienen puntos fijos?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que éstos tengan r órbitas?

Definición

Una clase combinatoria $\mathcal{A}$ es un conjunto a lo más numerable en donde se define una función Tamaño que cumple

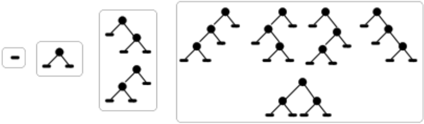
- *El tamaño de todos los elementos es un entero no negativo.*
- *El conjunto $\mathcal{A}_n$ de todos los elementos de tamaño n de la clase es finito.*

Definición

Una clase combinatoria $\mathcal{A}$ es un conjunto a lo más numerable en donde se define una función Tamaño que cumple

- *El tamaño de todos los elementos es un entero no negativo.*
- *El conjunto $\mathcal{A}_n$ de todos los elementos de tamaño n de la clase es finito.*

Ejemplo:



Clase:Árboles binarios planos
Tamaño: Nodos con grado 2.

Definición

Una clase combinatoria $\mathcal{A}$ es un conjunto a lo más numerable en donde se define una función Tamaño que cumple

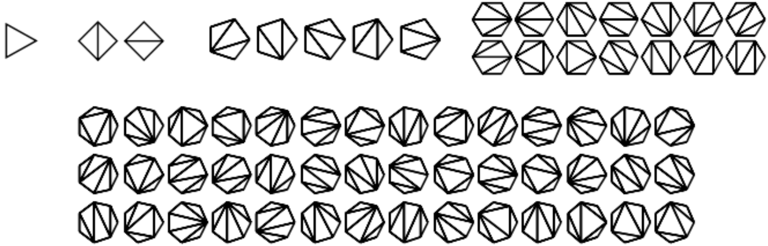
- *El tamaño de todos los elementos es un entero no negativo.*
- *El conjunto $\mathcal{A}_n$ de todos los elementos de tamaño n de la clase es finito.*

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \{&\mathcal{E}, \quad a, b, \quad aa, ab, ba, bb,\\ &aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb,\\ &aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, \ldots\}\end{aligned}$$

Clase: Palabras binarias
Tamaño: Longitud de la palabra.

Ejemplo:



Clase: Triangulaciones
Tamaño: Número de triángulos.

- La sucesión $|\mathcal{A}_n| = a_n,\ n \in \mathbb{N}$ forma la cuenta sucesiva o sucesión de conteo de la clase combinatoria.
- Se codifica en una serie de potencias formales, que puede ser

FGO-Ordinaria:

$$A(z) = \sum_{i \geq 1} a_n z^n$$

FGE-Exponencial:

$$A(z) = \sum_{i \geq 1} a_n \frac{z^n}{n!}$$

- Esta elección depende del modelo de la clase combinatoria.

Para especificar cualquier clase combinatoria tenemos:

- *Clase Neutra* $\mathcal{E}$: tiene un sólo elemento de tamaño cero,

$$E(z) = 1.$$

- *Clase Atómica* $\mathcal{Z}$: tiene un sólo elemento de tamaño 1,

$$Z(z) = z.$$

Para especificar cualquier clase combinatoria tenemos:

- *Clase Neutra* $\mathcal{E}$: tiene un sólo elemento de tamaño cero,
$$E(z) = 1.$$
- *Clase Atómica* $\mathcal{Z}$: tiene un sólo elemento de tamaño 1,
$$Z(z) = z.$$

Utilizaremos que operaciones entre clases se traducen a operaciones entre sus FG's.

- *Operaciones:* Uniones, producto, secuencias, ciclos, conjuntos.

Operaciones básicas

- *Suma:* Se considera que las clases son ajenas,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =&\mathcal{B} \cup \mathcal{C}\\ A(z) =&B(z) + C(z)\end{aligned}$$

- *Suma:* Se considera que las clases son ajenas,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =& \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \\ A(z) =& B(z) + C(z)\end{aligned}$$

- *Producto:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =& \mathcal{B} \times \mathcal{C} \\ A(z) =& B(z) \cdot C(z)\end{aligned}$$

Operaciones básicas

- *Suma:* Se considera que las clases son ajenas,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} =& \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \\ A(z) =& B(z) + C(z) \end{aligned}$$

- *Producto:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} =& \mathcal{B} \times \mathcal{C} \\ A(z) =& B(z) \cdot C(z) \end{aligned}$$

- *Secuencia:* Es necesario que $\mathcal{B}_0 = \emptyset$,

$$\mathcal{A} = \textsc{Seq}(\mathcal{B}) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{B}^k$$

$$A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Teniendo un alfabeto $\mathcal{A}$ con m letras:

- Especificación:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A}),$$

- FGO:

$$L(z) = \frac{1}{1 - mz},$$

Teniendo un alfabeto $\mathcal{A}$ con m letras:

- Especificación:
$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A}),$$
- FGO:
$$L(z) = \frac{1}{1 - mz},$$
- Cuenta sucesiva:
$$L_n = m^n.$$

Teniendo un alfabeto $\mathcal{A}$ con m letras:

- Especificación:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A}),$$

- FGO:

$$L(z) = \frac{1}{1 - mz},$$

- Cuenta sucesiva:

$$L_n = m^n.$$

Para $m = 2$ tenemos otra especificación de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(a)\textsc{Seq}(b\textsc{Seq}(a)),$$

Ésta nos permite encontrar la clase de palabras en donde b aparece sólo k veces:

- Especificación:

$$\mathcal{L}^{(k)} = \textsc{Seq}(a)(b\textsc{Seq}(a))^k$$

- FGO:

$$L^{(k)}(z) = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}},$$

Ésta nos permite encontrar la clase de palabras en donde b aparece sólo k veces:

- Especificación:

$$\mathcal{L}^{(k)} = \textsc{Seq}(a)(b\textsc{Seq}(a))^k$$

- FGO:

$$L^{(k)}(z) = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}},$$

- Cuenta sucesiva:

$$L_n^{(k)} = \binom{n}{k}.$$

Patrones escondidos en texto

Patrones

Un patrón escondido p es una sucesión de letras que aparecen en una palabra:

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

en el orden correcto pero no necesariamente contiguas.

Dared to the comb at; in which our valiant Hamlet–
For so this side of our known world esteem'd him–
Did slay this Fortinbras; who by a seal'd compact,

El patrón *combinatoric* en el texto de Hamlet.

Patrones

Un patrón escondido p es una sucesión de letras que aparecen en una palabra:

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

en el orden correcto pero no necesariamente contiguas.

- La clase de palabras que contienen al patrón escondido:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_1) p_1 \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_2) p_2 \cdots \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_k) p_k \textsc{Seq}(\mathcal{A}).$$

Patrones

Un patrón escondido p es una sucesión de letras que aparecen en una palabra:

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

en el orden correcto pero no necesariamente contiguas.

- La clase de palabras que contienen al patrón escondido:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_1) p_1 \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_2) p_2 \cdots \textsc{Seq}(\mathcal{A} \setminus p_k) p_k \textsc{Seq}(\mathcal{A}).$$

- La clase que distingue cada uno de los patrones escondidos:

$$\mathcal{L} = \textsc{Seq}(\mathcal{A}) p_1 \textsc{Seq}(\mathcal{A}) p_2 \cdots \textsc{Seq}(\mathcal{A}) p_k \textsc{Seq}(\mathcal{A}).$$

Para saber si en Hamlet hay un mensaje subliminal para estudiar *combinatorics*:

Para saber si en Hamlet hay un mensaje subliminal para estudiar *combinatorics*:

- Buscamos la probabilidad de que un texto de longitud $n = 120057$, con alfabeto de 26 letras...

Para saber si en Hamlet hay un mensaje subliminal para estudiar *combinatorics*:

- Buscamos la probabilidad de que un texto de longitud $n = 120057$, con alfabeto de 26 letras...

  tenga en total $1{,}63 \times 10^{39}$ patrones escondidos de longitud $k = 13$...

Para saber si en Hamlet hay un mensaje subliminal para estudiar *combinatorics*:

- Buscamos la probabilidad de que un texto de longitud $n = 120057$, con alfabeto de 26 letras...

  tenga en total $1{,}63 \times 10^{39}$ patrones escondidos de longitud $k = 13$...
- Finalmente, el texto de Hamlet tiene 23 veces más patrones de lo esperado!!!

Para saber si en Hamlet hay un mensaje subliminal para estudiar *combinatorics*:

- Buscamos la probabilidad de que un texto de longitud $n = 120057$, con alfabeto de 26 letras...

  tenga en total $1{,}63 \times 10^{39}$ patrones escondidos de longitud $k = 13$...
- Finalmente, el texto de Hamlet tiene 23 veces más patrones de lo esperado!!!

Haciendo un análisis más refinado de la distribución de la letras, el error se reduce al 5 %.

Un factor p es una sucesión de letras que aparecen en una palabra:

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k,$$

en el orden correcto y necesariamente contiguas.

Teorema (de Borges)

Toma cualquier conjunto finito de patrones y un texto aleatorio de longitud n.
La probabilidad de que el texto contenga todos los patrones tiende exponencialmente rápido a 1, conforme $n \to \infty$.

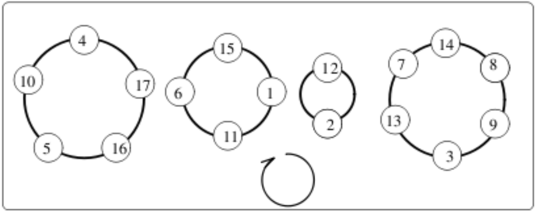
La biblioteca era tan grande que contenía...

Todo: la historia minuciosa del porvenir, las autobiografías de los arcángeles, el catálogo fiel de la Biblioteca, miles y miles de catálogos falsos, la demostración de la falacia de esos catálogos, la demostración de la falacia del catálogo verdadero, el evangelio gnóstico de Basilides, el comentario de ese evangelio, el comentario del comentario de ese evangelio, la relación verídica de tu muerte, la versión de cada libro a todas las lenguas, las interpolaciones de cada libro en todos los libros,...

La biblioteca de Babel, (*fragmento.*)

Permutaciones

Esta clase se define en el universo etiquetado



Las permutaciones están completamente determinadas por su ciclos.

$$\mathcal{P} = \textsc{Seq}(\mathcal{Z}) = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}(\mathcal{Z}))$$
$$P(z) = \frac{1}{1-z}$$

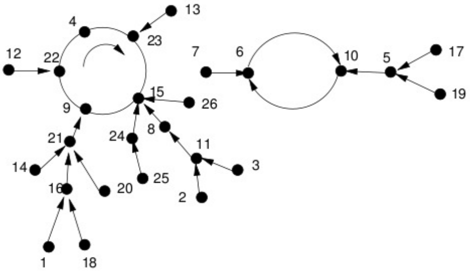
Mapeos de $[1 \ldots n] \to [1 \ldots n]$

Dado un mapeo f, se construye una gráfica donde

$$i \to j \text{si y sólo si} f(i) = j$$

$\mathcal{G}$ es la clase de árboles no planos.

$\mathcal{F} = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}(\mathcal{G}))$.

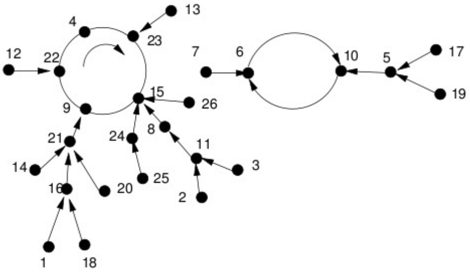


Dado un mapeo f, se construye una gráfica donde

$$i \to j \text{si y sólo si} f(i) = j$$

$\mathcal{G}$ es la clase de árboles no planos.

$$\mathcal{F} = \textsc{Set}(\textsc{Cyc}(\mathcal{G})).$$



Un marcador μ se usa para contar nuevos parámetros, como el número de órbitas,

$$\mathcal{F} = \textsc{Set}(\mu\textsc{Cyc}(\mathcal{G})).$$

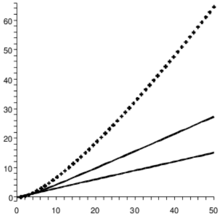


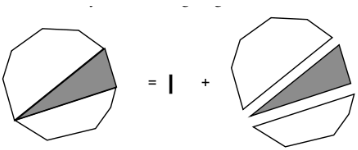
Figure I.5. The growth regimes of three sequences $f(n) = 2^n, T_n, n!$ (from bottom to top) rendered by a plot of $\log_{10} f(n)$ versus n.

La singularidad dominante z_0 de una función es la de menor norma.

El creciemiento asintótico de una cuenta sucesiva se expresa con

- un factor exponencial A^n,
  determinado por la posición de la singularidad dominante.
- un factor subexponencial $\Theta(n)$,
  determinado por la naturaleza de la singularidad.

- Especificación Recursiva



- $T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$,

- Factor Exponencial

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)^n,$$

- Factor Subexponencial

$$O(n^{3/2}).$$

$$T_n \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n^3}}$$

El método simbólico:

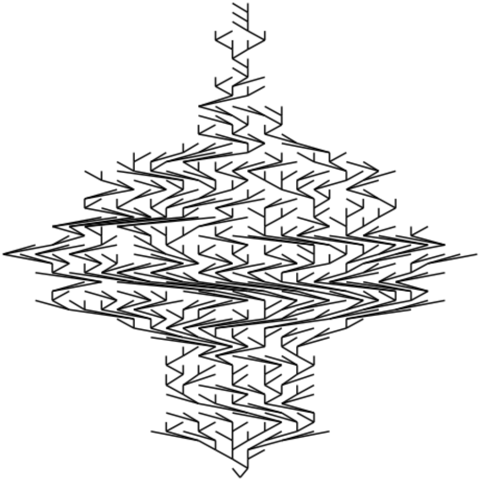
- Ofrece un lenguaje universal para modelar clases combinatorias,
- Distintos modelos de una clase permiten estudiar distintas características de ella.

El método simbólico:

- Ofrece un lenguaje universal para modelar clases combinatorias,
- Distintos modelos de una clase permiten estudiar distintas características de ella.

Las funciones generadoras:

- guardan la información de la cuenta sucesiva y
  simplifican el cálculo de probabilidades en modelos discretos.
- Se puede utilizar herramienta de análisis complejo,
  para estudiar el comportamiento asintótico de la cuenta sucesiva.



GRACIAS!