Propagación numérica de ondas de choque acústicas

Informe semestral

Roberto Velasco Segura[1]
Director: Dr. Pablo Luis Rendón Garrido[1]

[1]Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico
Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas, 2012

Objetivo

- Modelar numéricamente propagación de ondas de choque en la atmósfera terrestre.
- Particularmente: cáusticas de ondas de choque generadas por un avión.

Contenido

Marco teórico

Hamilton, Blackstock (ed.), *Nonlinear acoustics*, 1998, Academic Press.

¿Qué ecuación vamos a modelar numéricamente?

- gas heterogéneo
- no lineal
- disipativa
- dos o tres dimensiones
- (conveniente para tratamiento numérico)

Conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

(no tiene aproximaciones)

Conservación de momento

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{B} + \nabla \cdot \sigma$$

- Hipótesis de fluido newtoniano: la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad relativa.
- La dependencia de μ y μ_B, con respecto a las coordenadas espaciales es baja.
- $\vec{B} = 0$.

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \left(\mu_B + \frac{1}{3}\mu\right) \nabla \left(\nabla \cdot \vec{u}\right)$$

Conservación de energía

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho E\right) + \nabla \cdot \vec{u}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho E\right) = \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u} - \vec{q})$$

- Heredamos la hipótesis de fluido newtoniano.
- El cambio de κ con respecto a las coordenadas espaciales es bajo.
- Ley de Fourier para conducción térmica.

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + \mu_B (\nabla \cdot \vec{u})^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2$$

Ecuaciones de estado

$$p = p(\rho, s)$$
$$T = T(\rho, s)$$

- Los tiempos de relajación son más cortos que los cambios involucrados en nuestras soluciones.

Paso de mecánica de fluidos a acústica

Se asume un valor de equilibrio y una perturbación, para cada una de las variables.

- $\rho = \rho_0 + \rho'$
- $p = p_0 + p'$
- $T = T_0 + T'$
- $s = s_0 + s'$

$\exists\ \epsilon \ll 1$ tal que $\epsilon \sim \dfrac{\rho'}{\rho_0} \sim \dfrac{p'}{p_0} \sim \dfrac{T'}{T_0}$

Las variables $\vec{u}$ y s se manejan diferente

$$\epsilon \sim \frac{u}{c_0}$$

Primer orden

Ecuación de onda lineal

$$\Box^2 p' = 0$$

Hipótesis principales:

- Se cumplen leyes de conservación y ecuación de estado a orden ϵ.
- $s' = 0$.

(involucra una sola variable)

Segundo orden

Ecuación de Westervelt

$$\Box^2 p' + \frac{\delta}{c_0^4}\frac{\partial^3 p'}{\partial t^3} = \frac{-\beta}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p')^2}{\partial t^2}$$

Hipótesis:

- Fluido newtoniano
- No hay fuerzas externas
- Ley de Fourier
- Tiempos de relajación cortos
- $\frac{X'}{X_0}$ es del orden de ϵ
- Se cumplen leyes de conservación y ecuación de estado a orden ϵ^2 y s'
- μ, μ_B y κ son constantes
- Nos encontramos lejos de las paredes, y esto implica $\nabla \times \vec{u} = 0$
- La no linealidad acumulada domina a la local

Adimensionalización

$$\tilde{\Box}^2 \tilde{p} = -\Theta \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial \tilde{t}^3} - \frac{\partial^2 \tilde{p}^2}{\partial \tilde{t}^2}$$

Nuevas variables

$$\tilde{p} = \frac{\beta p'}{c_0^2 \rho_0} \qquad \tilde{x} = \frac{x}{\lambda} \qquad \tilde{y} = \frac{y}{\lambda} \qquad \tilde{z} = \frac{z}{\lambda} \qquad \tilde{t} = t\frac{c_0}{\lambda}$$

Parámetro adimensional

$$\Theta = \frac{\delta}{c_0 \lambda}$$

Comparación

Una dimensión

- lineal

$$u_t + c_0 u_x = 0$$

- no lineal (Burgers)

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}$$

Dos o más dimensiones

- lineal

$$\Box^2 p = 0$$

- no lineal (Westervelt)

$$\Box^2 p = -\Theta \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$$

Esquema numérico

Aproximaciones de diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \simeq \frac{P^n_{i-1,j} - 2P^n_{i,j} + P^n_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O((\Delta x)^2)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \simeq \frac{P^n_{i,j-1} - 2P^n_{i,j} + P^n_{i,j+1}}{\Delta y^2} + O((\Delta y)^2)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \simeq \frac{P^{n-1}_{i,j} - 2P^n_{i,j} + P^{n+1}_{i,j}}{\Delta t^2} + O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} \simeq \frac{-P^{n-2}_{i,j} + 3P^{n-1}_{i,j} - 3P^n_{i,j} + P^{n+1}_{i,j}}{\Delta t^3} + O(\Delta t)$$

Esquema numérico

$$P_{i,j}^{n+1} = \frac{-K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - 4K_0}}{2}$$

- Explícito
- 2D
- Segundo orden espacial
- Primer orden temporal
- Malla cartesiana $\Delta x = \Delta y$
- Implementado en paralelo sobre un GPU

Karamalis et al., *Fast ultrasound image simulation using the westervelt equation*, 2010, Springer.

Resultados preliminares

Observaciones

- Para amplitudes bajas 10^{-6} los resultados numéricos reproducen cualitativamente el caso lineal.
- Para amplitudes grandes 10^{-1} se observa formación de ondas de choque en distancias muy cortas.
- Se observa interacción de ondas de choque provenientes de direcciones no paralelas.

Administración de información

http://dondecae.net/t2

- Referencias
- Fichas
- Conceptos
- Ideas sueltas
- Resultados

Perspectivas

Marco teórico

- Introducir heterogeneidades buscando modelar condiciones atmosféricas
- Alternativas a la ecuación de Westervelt
  - Partiendo directamente de las ecuaciones de conservación

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F = 0$$

Christov et al., *Modeling Weakly Nonlinear Acoustic Wave Propagation*, Q. Jl Mech. Appl. Math, Vol. 60. No. 4, 2007.

Método numérico

Esquema tipo Godunov (volumen finito)

- Aprovechar herramienta CLAWPACK (LeVeque)
  - Adaptativo
  - Implementado en GPU
  - Lenguaje estandarizado
- Condiciones de frontera absorbentes

Otras aplicaciones

Aplicaciones médicas: ultrasonido

- diagnóstico
- tratamiento

Muchas gracias

- Hamilton, Blackstock (ed.), *Nonlinear acoustics*, 1998, Academic Press.
- Pierce, *Acoustics*, 1989, ASA.
- Rudenko, *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, 1977, Consultants Bureau.
- Naugholnykh, *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*, 1998, Cambridge University Press.
- LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, 2002, Cambridge University Press.
- Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2009, Springer.

Ecuaciones de estado

$$p = p(\rho, s)$$
$$T = T(\rho, s)$$

- Series de Taylor

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{B}{2A} (\rho')^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho,0} s'$$
$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_{s,0} \rho'$$

Parámetros de disipación

- viscosidad dinámica μ.
- viscosidad de bulto μ_B.
- coeficiente de conductividad térmica κ.
- difusividad acústica

$$\delta = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \mu_B\right) + \frac{\kappa}{\rho_0}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)$$

Para aire

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mu'}{\mu_0} \simeq -\frac{3}{2}\frac{T'}{T_0}$$

[Pierce], donde $T_S = 110{,}4K$.