# Sobre el origen de la homología

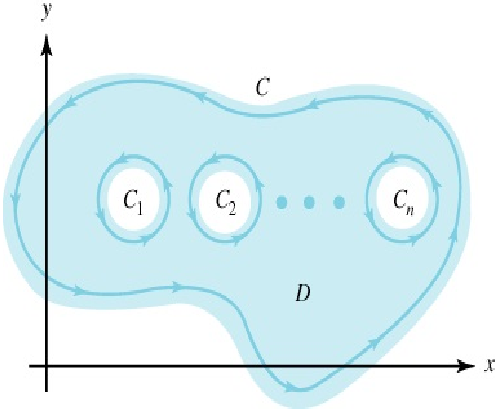
Valente Santiago Vargas
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
.

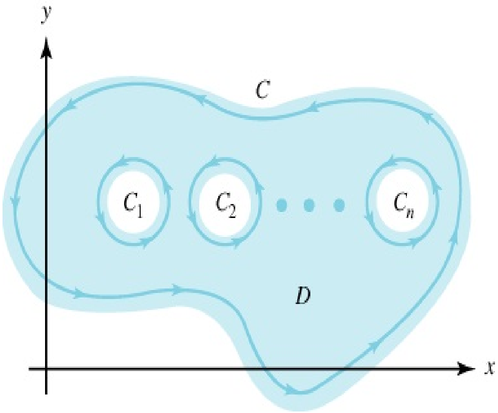
11 de agosto de 2016

### Homología en el siglo XIX

1. género,
2. números de Betti,
3. etc.

Bernhard Riemann (1826-1866)


y
x
C
$C_1$
$C_2$
$C_n$
D




En 1857 Riemann consideró la integral $\int_C (Pdx + Qdy)$

Riemann consideró la integral $\int_C (Pdx + Qdy)$ tal que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Riemann consideró la integral $\int_C (Pdx + Qdy)$ tal que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

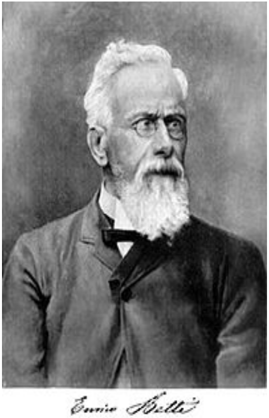
En 1857 Riemann se dió cuenta que $\int_C (Pdx + Qdy) = 0$ si el sistema $C$ era la frontera de una región en $S$.

Riemann consideró la integral $\int_C (Pdx + Qdy)$ tal que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En 1857 Riemann se dió cuenta que $\int_C (Pdx + Qdy) = 0$ si el sistema $C$ era la frontera de una región en $S$.

Riemann definió a $S$ como $n+1$ conexo, si existe una familia $C$ que consta $n$ curvas cerradas $C_j$ tal que que ningún subconjunto de $C$ es la frontera de una parte de $S$ y $C$ es maximal con esta propiedad.



Enrico Betti, matemático Italiano (1823-1892). En su artículo de 1871 de topología se introducen ciertos números que ahora se como los números de Betti.

B. Riemann estudia cuando una variedad $n$-dimensional es la frontera de una variedad $n+1$ dimensional y estudia cortes en dimensiones altas.

B. Riemann estudia cuando una variedad $n$-dimensional es la frontera de una variedad $n+1$ dimensional y estudia cortes en dimensiones altas.

Define $n$-conectividad y prueba que si se tiene una variedad $M$ de dimensión $m$ y se tiene un corte $N$ de dimensión $m-n$ entonces la $n$-conectividad disminuye en 1 o la $n-1$-conectividad aumenta en 1.

Un error fué encontrado por Pol Heegaard en 1898.

E. Betti prueba el resultado anterior de tal forma que no dependa de la base. De nuevo, Heegaard encontró un error en la demostración de Betti (1898).

Henri Poincaré (1854-1912)

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

# ANALYSIS SITUS;

PAR M. H. POINCARÉ.

## INTRODUCTION.

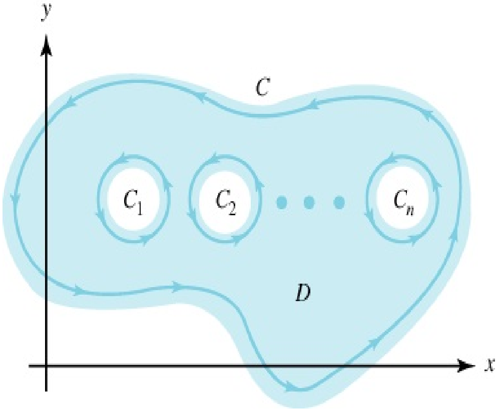
La Géométrie à $n$ dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

### Homología definida en “Analysis Situs”

Poincaré fija una variedad (lineal) $V$ y el considera sumas formales de subvariedades orientadas $n$ dimensionales $V_i$ de $V$ $(\sum k_i V_i)$ e introduce una relación llamada **homología**.
Poincaré dice que $\sum k_i V_i$ es homólogo a cero si existe una subvariedad $W$ de dimension $n+1$ tal que que la frontera de $W$ conste de $k_i$ copias de cada $V_i$ para cada $i$.




$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + c \simeq 0$$

Poincaré llama a una familia de subvariedades $V_i$ de dimensión $n$, linealmente independiente si no hay enteros $n_i$ tal que $\sum n_i V_i$ sea homólogo a cero.

Poincaré llama a una familia de subvariedades $V_i$ de dimensión $n$, linealmente independiente si no hay enteros $n_i$ tal que $\sum n_i V_i$ sea homólogo a cero.

También define el $n$-ésimo numero de Betti, a saber $b_n + 1$, donde $b_n$ es el número maximal de subvariedades linealmente independientes (en honor a Enrico Betti).

En 1900, Poincaré introduce los coeficientes de torsión (esto la hace estudiando ciertas matrices que él construye a partir de la información geométrica obtenida de la variedad).

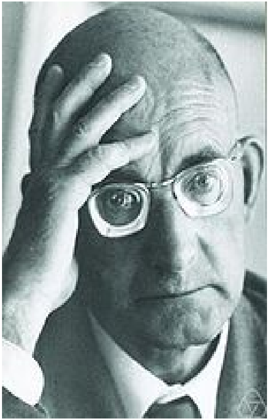
En 1900, Poincaré introduce los coeficientes de torsión (esto la hace estudiando ciertas matrices que él construye a partir de la información geométrica obtenida de la variedad).

Los topólogos estudiaban la homología via matrices de incidencia, las cuales podían manipular para poder determinar los números de Betti y los coeficientes de torsión.

E. Noether (1882-1935)

En 1925, Emmy Noether notó en su reporte *Ableitung der Elementarteliertheorie aus der Gruppentheorie* y en una charla dada en Göttingen, que la homología era un grupo abeliano (y no sólo números).


Heinz Hopf (1894-1971)

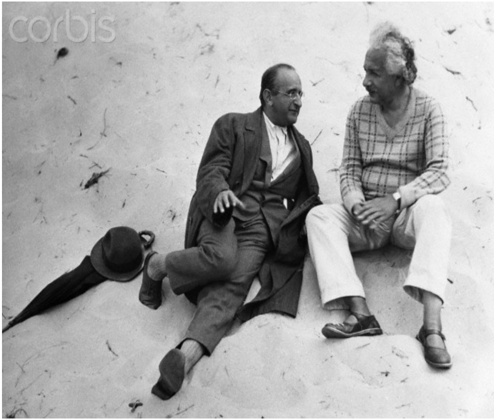


Paul Alexandroff (1896-1982)

Hopf y Alexandroff se dieron cuenta que el punto de vista de Noether era útil.

Hopf y Alexandroff se dieron cuenta que el punto de vista de Noether era útil.

Inspirado por el nuevo punto de vista, Walther Mayer en el año 1929, introdujó las nociones puramente algebraicas de complejos de cadena y **homología** de un complejo (ver, *Über Abstrakte Topologie. I un II, Monatshefte für Math und Physik* (36) (1929) 1-42, 219-258.)




Walther Mayer (1887-1948) a la izquierda de Einstein

Así en los años $1925 - 1935$ se inventaron varias teorías de homología.

**Pregunta**

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $(a, b)$
¿ existe $F$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$?

### Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $(a, b)$. Entonces existe $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $F'(c) = f(c)$ para todo $c \in (a, b)$. De hecho $F$ esta definido para $x \in [a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(x).$$

### Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $(a,b)$. Entonces existe $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $F'(c) = f(c)$ para todo $c \in (a,b)$. De hecho $F$ esta definido para $x \in [a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(x).$$

Denotemos por

$$C^1(a,b) := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable } (a,b)\} \quad \text{y}$$

$$C^0(a,b) := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } (a,b)\}.$$

Sea $D : C^1(a,b) \longrightarrow C^0(a,b)$ definida por $(Df)(x) = f'(x)$.

### Reinterpretación del teorema fundamental

La transformación lineal $D : C^1(a,b) \longrightarrow C^0(a,b)$ es suprayectiva

### Reinterpretación del teorema fundamental

La transformación lineal $D : C^1(a, b) \longrightarrow C^0(a, b)$ es suprayectiva

¿ Cuál es el Kernel de $D$?.

### Reinterpretación del teorema fundamental

La transformación lineal $D : C^1(a,b) \longrightarrow C^0(a,b)$ es suprayectiva

¿ Cuál es el Kernel de $D$?.

Kernel de $D$ son las funciones constantes en $[a,b]$.

Entonces se tiene la suc. de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^1(a,b) \xrightarrow{D} C^0(a,b) \longrightarrow 0$$

En la sucesión

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^1(a,b) \xrightarrow{D} C^0(a,b) \xrightarrow{0} 0$$

tenemos que se cumple la propiedad que $D \circ i = 0$, $0 \circ D = 0$ que se traduce en que $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$.

Como $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$, podemos formar el espacio vectorial cociente

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)}.$$

En la sucesión

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^1(a,b) \xrightarrow{D} C^0(a,b) \xrightarrow{0} 0$$

tenemos que se cumple la propiedad que $D \circ i = 0$, $0 \circ D = 0$ que se traduce en que $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$.

Como $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$, podemos formar el espacio vectorial cociente

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)}.$$

Pero $\mathrm{Ker}(0 : C^0(a,b) \longrightarrow 0) = C^0(a,b)$ y el teorema fundamental del cálculo nos dice que $\mathrm{Im}(D) = C^0(a,b)$. Por lo tanto

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)}$$

En la sucesión

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^1(a,b) \xrightarrow{D} C^0(a,b) \xrightarrow{0} 0$$

tenemos que se cumple la propiedad que $D \circ i = 0$, $0 \circ D = 0$ que se traduce en que $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$.

Como $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$, podemos formar el espacio vectorial cociente

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)}.$$

Pero $\mathrm{Ker}(0 : C^0(a,b) \longrightarrow 0) = C^0(a,b)$ y el teorema fundamental del cálculo nos dice que $\mathrm{Im}(D) = C^0(a,b)$. Por lo tanto

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)} = \frac{C^0(a,b)}{C^0(a,b)}$$

En la sucesión

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{i} C^1(a,b) \xrightarrow{D} C^0(a,b) \xrightarrow{0} 0$$

tenemos que se cumple la propiedad que $D \circ i = 0$, $0 \circ D = 0$ que se traduce en que $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(D)$ y $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$.

Como $\mathrm{Im}(D) \subseteq \ker(0)$, podemos formar el espacio vectorial cociente

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)}.$$

Pero $\mathrm{Ker}(0 : C^0(a,b) \longrightarrow 0) = C^0(a,b)$ y el teorema fundamental del cálculo nos dice que $\mathrm{Im}(D) = C^0(a,b)$. Por lo tanto

$$H^1 = \frac{\ker(0)}{\mathrm{Im}(D)} = \frac{C^0(a,b)}{C^0(a,b)} = 0.$$

Definimos $H^0 := \mathrm{Ker}(D)$.

Definimos $H^0 := \mathrm{Ker}(D)$.

Obtuvimos que si el dominio de $D$ es un intervalo $[a, b]$, entonces $\mathrm{Ker}(D) \simeq \mathbb{R}$.

¿ Que pasa si en lugar de un intervalo $[a, b]$ definiéramos el operador $D$ sobre funciones que tienen dominios más complicados de $\mathbb{R}$ ?

Definimos $H^0 := \mathrm{Ker}(D)$.

Obtuvimos que si el dominio de $D$ es un intervalo $[a, b]$, entonces $\mathrm{Ker}(D) \simeq \mathbb{R}$.

¿ Que pasa si en lugar de un intervalo $[a, b]$ definiéramos el operador $D$ sobre funciones que tienen dominios más complicados de $\mathbb{R}$ ?

Supongamos que tenemos $R = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$ (intervalos disjuntos) y que tenemos una función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que podemos derivar $f$ en cada punto de $U = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$.

Definimos $H^0 := \mathrm{Ker}(D)$.

Obtuvimos que si el dominio de $D$ es un intervalo $[a, b]$, entonces $\mathrm{Ker}(D) \simeq \mathbb{R}$.

¿ Que pasa si en lugar de un intervalo $[a, b]$ definiéramos el operador $D$ sobre funciones que tienen dominios más complicados de $\mathbb{R}$ ?

Supongamos que tenemos $R = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$ (intervalos disjuntos) y que tenemos una función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que podemos derivar $f$ en cada punto de $U = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$.

Si la derivada de $f$ en cada punto de $U$ es cero que ¿ podemos decir de $f$?.

La función será constante en cada intervalo. Así

$$\mathrm{Ker}(D) \simeq \mathbb{R}^n$$

donde $n$ es el número de intervalos de $R$

La función será constante en cada intervalo. Así

$$\mathrm{Ker}(D) \simeq \mathbb{R}^n$$

donde $n$ es el número de intervalos de $R$

Es decir, $\dim_{\mathbb{R}}(H^0) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(D))$ mide el número de componentes conexas del domino de las funciones a cual les aplicamos $D$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

¿ Existirá función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

¿ Existirá función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?

### Teorema

Si $F(x_1, x_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^2$ (es dos veces continuamente diferenciable) entonces las derivadas parciales mixtas son iguales

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

¿ Existirá función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?

### Teorema

Si $F(x_1, x_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^2$ (es dos veces continuamente diferenciable) entonces las derivadas parciales mixtas son iguales

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Por lo tanto, si existiera tal función debería pasar

### Condición necesaria

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

¿La condición anterior es suficiente?. Es decir, si $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ ¿existe función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?.

¿La condición anterior es suficiente?. Es decir, si $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ ¿existe función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?.

El siguiente ejemplo muestra que la condición anterior no es suficiente.

### Ejemplo clásico

Sea $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$\omega = \omega(x_1, x_2) = (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$

¿La condición anterior es suficiente?. Es decir, si $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ ¿existe función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?.

El siguiente ejemplo muestra que la condición anterior no es suficiente.

### Ejemplo clásico

Sea $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$\omega = \omega(x_1, x_2) = (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$

Es fácil ver que $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}$.

¿La condición anterior es suficiente?. Es decir, si $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ ¿existe función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?.

El siguiente ejemplo muestra que la condición anterior no es suficiente.

**Ejemplo clásico**

Sea $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$\omega = \omega(x_1, x_2) = (\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$

Es fácil ver que $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}$.Sin embargo, un ejercicio de cálculo (ver página 86 de cálculo en variedades de Spivak)

No existe función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \omega_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = \omega_2$.

El problema es que $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tiene un hoyo.

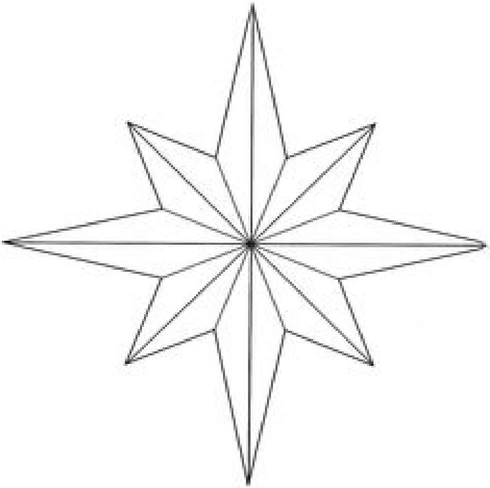
El problema es que $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tiene un hoyo.

Se puede probar que si $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que se cumplen las ecuaciones $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, entonces la función $\omega$ definida anteriormente es la única **obstrucción** para que exista solución a nuestro problema.

El problema es que $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tiene un hoyo.

Se puede probar que si $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que se cumplen las ecuaciones $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, entonces la función $\omega$ definida anteriormente es la única **obstrucción** para que exista solución a nuestro problema.
Es decir, si $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para $g = f - \lambda\omega$ si existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = g_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = g_2$.

# Región estrellada



### Lema de Poincaré

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una región estrellada. Para cualquier función suave $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$.

### Lema de Poincaré

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una región estrellada. Para cualquier función suave $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$.

El teorema anterior nos sugiere que la repuesta a la existencia de una "primitiva" depende del dominio $U$ donde este definida la función.

# Reinterpretación del lema de Poincaré

Introduzcamos para un un abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ lo siguiente:
$C^\infty(U, \mathbb{R}^k) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k\}$ las funciones de clase $C^\infty$, para $k \geq 1$.

# Reinterpretación del lema de Poincaré

Introduzcamos para un un abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ lo siguiente:
$C^\infty(U, \mathbb{R}^k) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k\}$ las funciones de clase $C^\infty$, para $k \geq 1$.
Definimos el operador

$$\operatorname{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Definida para $F = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\operatorname{rot}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

# Reinterpretación del lema de Poincaré

Introduzcamos para un un abierto $U$ de $\mathbb{R}^2$ lo siguiente:
$C^\infty(U, \mathbb{R}^k) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k\}$ las funciones de clase $C^\infty$, para $k \geq 1$.
Definimos el operador

$$\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Definida para $F = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\mathrm{rot}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

**Observación**

$C^\infty(U)$ es un $\mathbb{R}$-e.v y rot es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

# Reinterpretación de la suficiencia

La condición $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, se traduce a la condición que que

$$f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{rot}).$$

También introducimos el operador gradiente (también es $\mathbb{R}$-lineal)

$$\mathrm{grad} : C^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R}^2)$$

para $f = f(x_1, x_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathrm{grad}(f) = F := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2})$$

.

La pregunta original:
Dada $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$. ¿ Existirá función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$?. Se traduce en la pregunta

¿ $f = (f_1, f_2)$ pertenece a la imagen del operador grad.?

Ahora bien, se tiene la siguiente sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \xrightarrow{i} C^{\infty}(U, R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^{\infty}(U, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^{\infty}(U, \mathbb{R})$$

Ahora bien, se tiene la siguiente sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \xrightarrow{i} C^\infty(U, R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U, \mathbb{R})$$

### Observación importante

(a) $\mathrm{grad} \circ i = 0$.
Es decir, $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{grad})$ (de hecho se da la igualdad).

(b) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$.
Es decir $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$.

Ahora bien, se tiene la siguiente sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \xrightarrow{i} C^{\infty}(U,R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^{\infty}(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^{\infty}(U,\mathbb{R})$$

### Observación importante

(a) $\mathrm{grad} \circ i = 0$.
Es decir, $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{grad})$ (de hecho se da la igualdad).

(b) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$.
Es decir $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$.

Definimos el espacio vectorial cociente

$$H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})}$$

Recordemos lo que nos dice el lema de Poincaré

### Lema de Poincaré

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una región estrellada. Para cualquier función suave $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$.

Recordemos lo que nos dice el lema de Poincaré

**Lema de Poincaré**

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una región estrellada. Para cualquier función suave $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$.

Es decir, $\mathrm{Ker}(\mathrm{rot}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$.
Asś podemos interpretar como:

**Lema de Poincaré**

Si $U$ es de forma estrellada, entonces $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0$.

Recordemos lo que nos dice el lema de Poincaré

**Lema de Poincaré**

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ una región estrellada. Para cualquier función suave $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$.

Es decir, $\mathrm{Ker}(\mathrm{rot}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$.
Asś podemos interpretar como:

**Lema de Poincaré**

Si $U$ es de forma estrellada, entonces $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0$.

Es decir, no hay obstrucción para la solución de nuestro problema.

¿ Que pasa para $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

¿ Que pasa para $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

Se sigue teniendo la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \longrightarrow C^\infty(U,R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R})$$

Vimos que existía función $\omega = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$ tal que

1. $\omega \in \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$ pero
2. $\omega \notin \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$.

## ¿ Que pasa para $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

Se sigue teniendo la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \longrightarrow C^\infty(U,R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R})$$

Vimos que existía función $\omega = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$ tal que

1. $\omega \in \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$ pero
2. $\omega \notin \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$.

Es decir, $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subsetneq \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$.

¿ Que pasa para $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

Se sigue teniendo la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker(grad)} \longrightarrow C^\infty(U, R) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Vimos que existía función $\omega = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$ tal que

1. $\omega \in \mathrm{Ker(rot)}$ pero
2. $\omega \notin \mathrm{Im(grad)}$.

Es decir, $\mathrm{Im(grad)} \subsetneq \mathrm{Ker(rot)}$.De esto se sigue que:

¿ Que pasa para $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

Se sigue teniendo la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \longrightarrow C^\infty(U,R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R})$$

Vimos que existía función $\omega = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$ tal que

1. $\omega \in \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$ pero
2. $\omega \notin \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$.

Es decir, $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subsetneq \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$.De esto se sigue que:

$$H^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} \neq 0.$$

# Filosofía

Si $H^1(U) = 0$, quiere decir, que no hay obstrucción para encontrar cierta "solucion" a nuestra problema.

# Filosofía

Si $H^1(U) = 0$, quiere decir, que no hay obstrucción para encontrar cierta "solucion" a nuestra problema.

¿ Que pasa si, $H^1(U) \neq 0$?.

# Filosofía

Si $H^1(U) = 0$, quiere decir, que no hay obstrucción para encontrar cierta “solucion” a nuestra problema.

¿ Que pasa si, $H^1(U) \neq 0$?.
Intuitivamente hablando, $H^1(U)$ nos dá una medida de la obstrucción a nuestra solución.
En nuestro ejemplo previo tenemos que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \neq 0$.

Sin embargo se pude probar que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \simeq \mathbb{R}$

En este caso una base es la función $\omega = \left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$.
Como $H^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \frac{\mathrm{Ker(rot)}}{\mathrm{Im(grad)}} = \mathbb{R}$. Lo anterior, nos dice precisamente que para toda $f$ tal que $\mathrm{rot}(F) = 0$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f - \lambda\omega \in \mathrm{Im(grad)}$.

De manera análoga a como se hizo en el caso de dimensión 1 definimos

$$H^0(U) := \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}).$$

De manera análoga a como se hizo en el caso de dimensión 1 definimos

$$H^0(U) := \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}).$$

**Proposición**

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\dim_{\mathbb{R}}(H^0(U)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\mathrm{grad}))$ coincide con el número de componentes conexas de $U$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto. Se definen 3 operadores

$$\mathrm{grad} : C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$

$$\mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$

$$\mathrm{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R})$$

Para $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

Para $F = (f_1, f_2, f_3) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}(F) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

Para $F = (f_1, f_2, f_3) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Tenemos la sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \xrightarrow{i} C^{\infty}(U, R) \xrightarrow{\mathrm{grad}} C^{\infty}(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{rot}} C^{\infty}(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^{\infty}(U, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde

(a) $\mathrm{grad} \circ i = 0$

(b) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$

(c) $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$

Las relaciones

(a) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$

(b) $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$

se traducen al hecho que

(a) $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$

(b) $\mathrm{Im}(\mathrm{rot}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$.

Entonces podemos formar los espacios vectoriales cocientes

$$H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})}$$

y

$$H^2(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{div})}{\mathrm{Im}(\mathrm{rot})}$$

De forma análoga a los casos anteriores. Se define:

$H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad})$.

De forma análoga a los casos anteriores. Se define:

$H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad})$.

**Proposición**

Se tiene que $\dim_{\mathbb{R}}(H^0(U)) = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Ker}(\mathrm{grad})$ coincide con el número de las componentes conexas de $U$.

Se dice que un campo vectorial $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **conservativo** si existe una función escalar $G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{grad}(G) = F$.

Los campos conservativos tienen aplicaciones en física (por ejemplo campos eléctricos, etc). Una pregunta natural es:

Se dice que un campo vectorial $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **conservativo** si existe una función escalar $G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{grad}(G) = F$.

Los campos conservativos tienen aplicaciones en física (por ejemplo campos eléctricos, etc). Una pregunta natural es:

¿Cuándo un campo vectorial es conservativo?.

### Teorema

Sea $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en un numero finito de puntos. Son equivalentes

(a) Para cualquier curva cerrada simple $\int_\gamma F \cdot ds = 0$

(b) Para cualesquiera dos curvas simples orientadas $\gamma_1$ y $\gamma_2$ que tengan los mismos puntos extremos

$$\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot ds.$$

(c) $F$ es el gradiente de una función $G$, esto es, existe $G$ tal que $\mathrm{grad}(G) = F$ ($F \in \mathrm{Im}(\mathrm{grad})$).

(d) $\mathrm{rot}(F) = 0$ (es decir, $F \in \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$).

$$F \text{ es conservativo} \Leftrightarrow \mathrm{Rot}(F) = 0.$$

$$F \text{ es conservativo} \Leftrightarrow \mathrm{Rot}(F) = 0.$$

Es decir,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{rot}) = \mathrm{Im}(\mathrm{grad}).$$

**Reinterpretación del teorema anterior**

Si $U = \mathbb{R}^3$ entonces $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0$

**Teorema (Ver libro de Marsden, pag. 526)**

Si $F$ es un campo vectorial de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^3$ con $\operatorname{div}(F) = 0$, entonces existe un campo vectorial $G$ tal que $F = \operatorname{rot}(G)$.

**Teorema (Ver libro de Marsden, pag. 526)**

Si $F$ es un campo vectorial de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^3$ con $\operatorname{div}(F) = 0$, entonces existe un campo vectorial $G$ tal que $F = \operatorname{rot}(G)$.

Es decir, $\operatorname{Ker}(\operatorname{div}) \subseteq \operatorname{Im}(\operatorname{rot})$.

**Teorema (Ver libro de Marsden, pag. 526)**

Si $F$ es un campo vectorial de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^3$ con $\mathrm{div}(F) = 0$, entonces existe un campo vectorial $G$ tal que $F = \mathrm{rot}(G)$.

Es decir, $\mathrm{Ker}(\mathrm{div}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{rot})$.
Este resultado se puede enunciar en la forma:

**Teorema**

Sea $U = \mathbb{R}^3$ entonces $H^2(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{div})}{\mathrm{Im}(\mathrm{rot})} = 0$

Consideremos $U = \mathbb{R}^3$.

**Proposición**

Sea $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces existe $G : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{div}(G) = F$.

Es decir, $\mathrm{div} : C^1(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^0(U, \mathbb{R})$ es su suprayectiva.

Consideremos $U = \mathbb{R}^3$.

**Proposición**

Sea $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces existe $G : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{div}(G) = F$.

Es decir, $\operatorname{div} : C^1(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^0(U, \mathbb{R})$ es su suprayectiva.
Consideremos el morfismo $0 : C^0(U, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$.

**Teorema**

Para $U = \mathbb{R}^3$, tenemos que $H^3(U) := \frac{\operatorname{Ker}(0)}{\operatorname{Im}(\operatorname{div})} = 0$.

### Lema de Poincaré para $\mathbb{R}^3$

Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es de forma estrellada, entonces

(a) $H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) =$

### Lema de Poincaré para $\mathbb{R}^3$

Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es de forma estrellada, entonces

(a) $H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \mathbb{R}$

### Lema de Poincaré para $\mathbb{R}^3$

Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es de forma estrellada, entonces

(a) $H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \mathbb{R}$

(b) $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0,$

### Lema de Poincaré para $\mathbb{R}^3$

Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es de forma estrellada, entonces

(a) $H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \mathbb{R}$
(b) $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0$,
(c) $H^2(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{div})}{\mathrm{Im}(\mathrm{rot})} = 0$.

### Lema de Poincaré para $\mathbb{R}^3$

Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es de forma estrellada, entonces

(a) $H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) = \mathbb{R}$

(b) $H^1(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{rot})}{\mathrm{Im}(\mathrm{grad})} = 0,$

(c) $H^2(U) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{div})}{\mathrm{Im}(\mathrm{rot})} = 0.$

En particular (b), nos dice que a todo campo vectorial $F$ definida sobre $U$ que satisfaga que $\mathrm{rot}(F) = 0$, se le puede encontrar su **potencial** $G$ (i.e, $\mathrm{grad}(G) = F$).

# Filosofía

1. Si $H^i(U) = 0$, quiere decir, que no hay obstrucción para encontrar cierta “solucion”.

# Filosofía

1. Si $H^i(U) = 0$, quiere decir, que no hay obstrucción para encontrar cierta "solucion".
2. Si $H^i(U) \neq 0$. El espacio $H^i(U)$ nos dá una medida de la obstrucción a nuestra solución.

Más generalmente para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto se desarrolla una sucesión de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

tal que $d_i d_{i-1} = 0$. Donde

Más generalmente para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto se desarrolla una sucesión de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

tal que $d_i d_{i-1} = 0$. Donde

(a) $\Omega^i(U)$ denota el espacio vectorial de las $i$-formas diferenciales sobre $U$

(b) $d_i$ es la derivada exterior.

Más generalmente para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto se desarrolla una sucesión de espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

tal que $d_i d_{i-1} = 0$. Donde

(a) $\Omega^i(U)$ denota el espacio vectorial de las $i$-formas diferenciales sobre $U$

(b) $d_i$ es la derivada exterior.

También se calculan los espacios vectoriales

$$H^i(U) = \frac{\mathrm{Ker}(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i-1})}.$$

Esto es la cohomología de de Rham.

Goerges de Rham (1903-1990)

En general es difícil calcular la cohomología para $U$ arbitrario. Hay que desarrollar metódos para calcular la cohomología. Se demuestran teoremas como

En general es difícil calcular la cohomología para $U$ arbitrario. Hay que desarrollar metódos para calcular la cohomología. Se demuestran teoremas como

(a) Sucesión de Mayer-Vietoris
(b) Invariancia Homotópica
(c) sucesiones espectrales.

Si se abstrae la construcción anterior tenemos la siguiente definición:

### Complejo de espacios vectoriales

Un complejo de espacios vectoriales es una sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$V^\bullet : \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_i \xrightarrow{d_i} V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} \cdots$$

tales que $d_i d_{i-i} = 0$.

La condición $d_i d_{i-i} = 0$ se traduce en que $\mathrm{Im}(d_{i-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$. Así, podemos definir el $i$-ésimo espacio de cohomología como

La $i$ésima cohomología es $H^i(V^\bullet) := \frac{\ker(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i-1})}$.

Así en los años 1925 – 1935 se inventaron varias teorías de homología.

Así en los años $1925 - 1935$ se inventaron varias teorías de homología.

Dentro de los matemáticos que crearon teorías de homología en ese período están: Alexander, Alexandroff, Čech, Lefschetz, Kolmogoroff, Kurosh, Vietoris, Steenrod.

La "cohomología de de Rham" para una variedad diferenciable fué introducida por G. de Rham en su tesis doctoral (en 1931).

La "cohomología de de Rham" para una variedad diferenciable fué introducida por G. de Rham en su tesis doctoral (en 1931).

Elie Cartan recientemente había introducido el complejo de cocadenas de formas diferenciables sobre una variedad diferenciable en el artículo *Sur les invariants de intégraux de certain espaces homogènes clos et les propiètes topologique de ces espaces*. Ann. Soc. Polon. Math. 8 (1929), 181-225.

Elie Cartan, conjeturó que los números de Betti $b_i$ de $M$ es el máximo número de $i$-formas cerradas $w_j$ tal que ninguna combinación lineal $\sum \lambda_j w_j$ es exacta.

### de Rham utilizó la forma bilineal

$$(C, \omega) \mapsto \int_C \omega.$$

# Surgimiento de las construcciones algebraicas

En 1938, Hassler Whitney descubre el producto tensorial $A \otimes B$ para grupos abelianos arbitrarios $A$ y $B$ y para módulos en general.

La definición moderna de producto tensorial aparece en el libro de Bourbaki (ver N. Bourbaki, Élements de Mathématique. Part. I. Livre II, Algèbre ch. 2, Hermann, 1942).
Whitney tomó el nombre de la geometría diferencial.

# Sucesiones exactas

La noción de *sucesión exacta* aparece en 1941 en un trabajo de Hurewicz. Él discute la sucesión exacta larga de cohomología asociada a un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$.

# Sucesiones exactas

La noción de *sucesión exacta* aparece en 1941 en un trabajo de Hurewicz. Él discute la sucesión exacta larga de cohomología asociada a un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$.

En 1942, aparecen en cohomología las construcciones del Hom y Ext, en los trabajos de Eilenberg y Maclane.

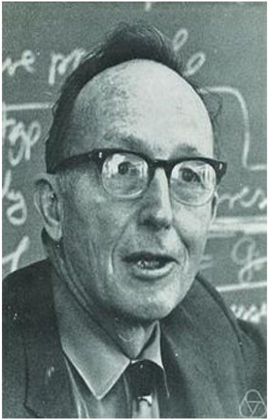
En 1944. S. Eilenberg defininió la homología singular y cohomología.

En 1945, Eilenberg y Stennrood tratan de dar una axiomatización a las teorías de homología. Se enuncian los famosos axiomas de Eilenberg y Steenrod.

En 1945, Eilenberg y Stennrood tratan de dar una axiomatización a las teorías de homología. Se enuncian los famosos axiomas de Eilenberg y Steenrod.

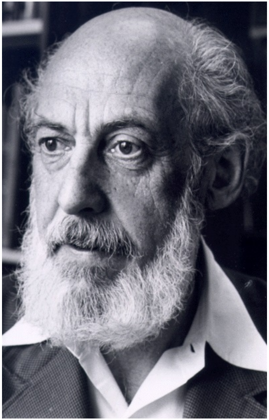
# Aparece el $\mathrm{Ext}(A, B)$

En 1934, Reinhold Baer estudia las extensiones de un grupo $B$ por $A$ y observa que tales extensiones forman un grupo (con una operación definida por Baer).



Saunders MacLane, matemático estadounidense (1909-2005)

Maclane calcula el grupo de extensiones de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

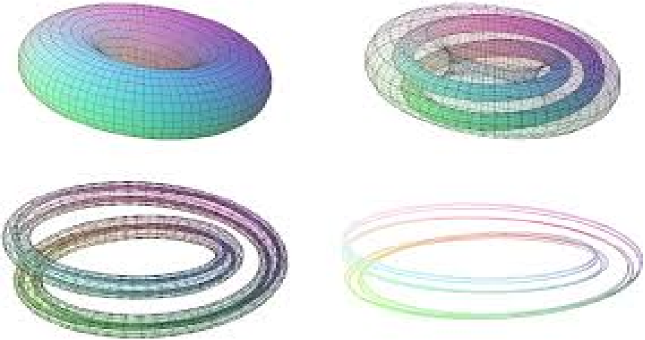


Samuel Eilenberg, matemático polaco (1913-1998)

Eilenberg notó (en 1941) que el grupo $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ era el dual del solenoide $p$-ádico $\Sigma$ que estaba siendo estudiada por Eilenberg y también notó que la respuesta algebraica de Mac Lane $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}$ coincidia con los grupos de homología $H_1(S^3 - \Sigma; \mathbb{Z})$ calculados por Steenrod.

Eilenberg notó (en 1941) que el grupo $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ era el dual del solenoide $p$-ádico $\Sigma$ que estaba siendo estudiada por Eilenberg y también notó que la respuesta algebraica de Mac Lane $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}$ coincidia con los grupos de homología $H_1(S^3 - \Sigma; \mathbb{Z})$ calculados por Steenrod.

El resultado fue el artículo *S. Eilenberg and S. Mac Lane. Group extensions and cohomology*. Annals of Math. (43) (1942) 757-831.



Solenoide p-ádico. Figura tomada del artículo: *G. R. Conner, et all The geometry and fundamental of solenoid complements.*
J. Knot Theory (2015)

Eilenberg y Mac Lane descubren el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Hom}(A, C)).$$

La noción que $\mathrm{Hom}(A, -)$ preserva la dirección de las flechas y $\mathrm{Hom}(-, A)$ invierte la dirección fué un tema central en el artículo *S. Eilenberg and S. Mac Lane. Group extensions and cohomology*. Annals of Math. (43) (1942) 757-831.

# Surgen las categorías

Para tener un **lenguaje** para hablar de ciertas propiedades de homología, cohomología, propiedades del Hom y Ext. S. Eilenberg y Maclane acuñan en 1942, los términos:

1. funtor
2. isomorfismo natural

# Surgen las categorías

Para tener un **lenguaje** para hablar de ciertas propiedades de homología, cohomología, propiedades del Hom y Ext. S. Eilenberg y Maclane acuñan en 1942, los términos:

1. funtor
2. isomorfismo natural

Posteriormente en 1945, ellos expanden su lenguaje a:

1. categoría,
2. transformación natural.

En el artículo *Natural isomorphisms in group theory, Proc. Nat. Acad. Sci* 28, 1942. *General theory of natural equivalences* Trans. AMS 58 (1945)

# Recepción del artículo de 1945

Respecto al artículo de Eilenberg y Mac Lane de 1945, muchos matemáticos se encontraba escépticos.
Por ejemplo: Mientras Steenrod dijo “que ningún artículo lo había influenciado tanto”.
El topólogo algebraico P.A Smith dijo “Que no había leido artículo más trivial en su vida”. (ver, Modern Algebra and the rise of mathematical structures:Second revised edition. Birkhäuser Bassel. pag. 361)

# Recepción del artículo de 1945

Respecto al artículo de Eilenberg y Mac Lane de 1945, muchos matemáticos se encontraba escépticos.
Por ejemplo: Mientras Steenrod dijo “que ningún artículo lo había influenciado tanto”.
El topólogo algebraico P.A Smith dijo “Que no había leido artículo más trivial en su vida”. (ver, Modern Algebra and the rise of mathematical structures:Second revised edition. Birkhäuser Bassel. pag. 361)
Así mismo, Mac Lane escribe en el artículo *Concepts and categories in perspectives* (1988) pag 334: “One of our good friends (an admirer of Eilenberg) read the paper and told us privately that he thought that the paper was without any content”.

# Dato curioso

A Serge Lang, se le atribuye la expresión bien conocida que la teoría de categorías es:

# Dato curioso

A Serge Lang, se le atribuye la expresión bien conocida que la teoría de categorías es:

"general abstract nonsense".

La cual se hizó popular gracias a su libro de texto: Algebra. Sin embargo la frase fué dicha (como chiste) por Steenrod. (ver pag. 65 de R. Kromer. Tool and object: A history and philosophy of category theory. Birkhäuser, 2007)

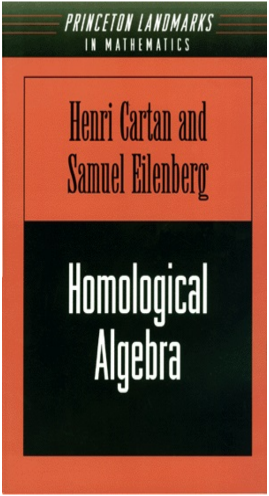
Cartan y Eilenberg participaron en el Seminario de Cartan (dirigido por Henri Cartan) escribiendo los fundamentos de la homología y teorías de cohomología hechas en las décadas previas.

Cartan y Eilenberg participaron en el Seminario de Cartan (dirigido por Henri Cartan) escribiendo los fundamentos de la homología y teorías de cohomología hechas en las décadas previas.

Así acuñaron el término **álgebra homológica** para este nuevo punto de vista unificador.

De esta forma en 1956 se publica el libro “Homological algebra” de Cartan y Eilenberg.

# El libro


PRINCETON LANDMARKS
IN MATHEMATICS
Henri Cartan and
Samuel Eilenberg
Homological
Algebra

$\Lambda = K\{x_1, \ldots, x_n\}$, the ring of convergent power series in the letters $x_1, \ldots, x_n$ with coefficients in the commutative field $K$ with a complete non-discrete valuation. This is also a local ring.

In all three cases the augmentation ideal $I$ is the two-sided ideal $I$ generated by $x_1, \ldots, x_n$ and $\Lambda/I = K$. Condition (i) of 4.2 is verified. Therefore, by 4.2, $\text{l.dim}_\Lambda K = n$. (For the case of $\Lambda = K[[x_1, \ldots, x_n]]$, the fact that the dimension of $K$ is finite has been proved by F. Recillas (unpublished).)

Fragmento tomado le libro de Cartan-Eilenberg, pag. 151

En el libro de Cartan y Eilenberg: se introducen varios conceptos que le dán forma al álgebra homológica:

1. resoluciones proyectivas,
2. funtor Hom,
3. producto tensorial,
4. funtores derivados, etc.
5. aparece por primera vez el “lema de la serpiente”.

En este libro básicamente se trabaja en la categoría de módulos sobre una anillo.

FIN DEL PRIMER PERÍODO

### Segundo período

El segundo periodo que inicia con la publicación del artículo largo de Grothendieck “Sur quelques points d’ algèbre homologique” publicado en 1957 (se retrazó 3 años su publicación). En este artículo se desarrolla el álgebra homológica en el contexto de las categorías abelianas. Este periodo fué dominado por A. Grothendieck y su escuela de geometría algebraica.

### Tercer período

El tercer período inicia con la tesis doctoral de J. L. Verdier (alumno de Grothendieck). Este periodo que se extiende hasta nuestros días se caracteriza por el uso de las categorías derivadas y trianguladas.

**Gracias**

- H. Cartan, S. Eilenberg. Homological algebra, Princeton U. Press, 1956
- H. Madsen. From Calculus to cohomology: De Rham cohomology and characterist classes. First edition. Cambridge University Press (1997).
- R. Bott, L.W. Tu. Differential forms in algebraic topology. Graduate texts in mathematics.
- C. Weibel. A history of homological algebra (escrito en internet)
- R. Kromer. Tool and object: A history and philosophy of category theory. Birkhäuser, 2007.
- S. Mac Lane. Concepts and categories in Perspective. In [Duren and Merzbach 1988]

- J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra. Second edition. 2008.
- Corry, Leo. Modern algebra and the rise of mathematical structures. Second revised edition. Birkhäuser Bassel.
- P. Hilton. A brief history subjective history of homology and homotopy theory in this century. Mathematics Magazine, Vol. 61 No. 5. pp 282-291.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba. Cálculo Vectorial. Addison Wesley Iberoamericana (1991).
- A. Grothendieck, The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Proc. Internat. Congress Math (Edinburgh, 1958), Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 103-118.

J. L. Verdier. Des catégories dérivées des catégories abeliennes. Asterisque, vol. 239. Société Mathématique de France, 1996 (French).