Restauración de imágenes como un problema mal planteado de gran escala

Iván Méndez Cruz

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

1 de Septiembre del 2016

Guión

Procesamiento de imágenes

Sistemas de Vigilancia

Fotografía aérea

Tomografía computarizada

imágenes espaciales

El problema

Dada una imagen difuminada $\mathcal{G}$, obtener una imagen $\mathcal{F}$ de la misma escena con menos degradaciones.

Imagen difuminada $\mathcal{G}$

Modelo: Difuminación

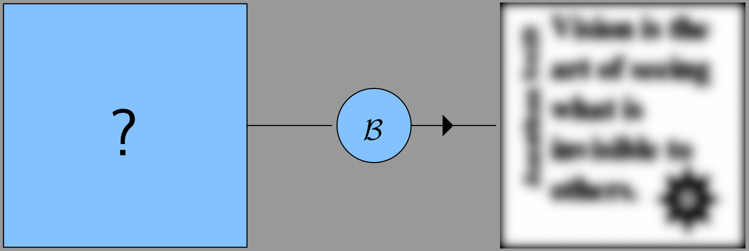


Imagen original $\mathcal{F}$

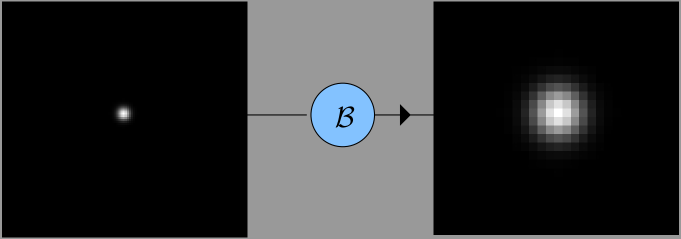
Imagen difuminada $\mathcal{G}$

Operador $\mathcal{B}$ de difuminación

- $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$: distribuciones continuas de tono de gris en el plano

Modelo: Difuminación

- $\mathcal{B}$: dispersa el brillo de cada punto de la imagen



Impulso Respuesta

El problema

- funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ a imágenes $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$
- $\mathcal{B} : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$

Deblurring

Dada la función g y el operador de difuminación $\mathcal{B}$, hallar la función f tal que

$$\mathcal{B}[f] = g.$$

Hipótesis del modelo

- $\mathcal{B}$ lineal

$$\text{impulso } \delta(x-s, y-t) \xrightarrow{\quad\quad\mathcal{B}\quad\quad} \text{PSF } K((x,y),(s,t))$$

$$f(x,y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x-s, y-t) f(x,y)\, dsdt \qquad B[f](x,y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} K((x,y),(s,t)) f(s,t)\, dsdt$$

Hipótesis del modelo

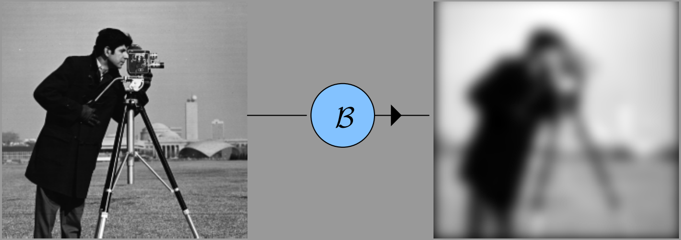
- $\mathcal{B}$ espacialmente invariante

$$f(x+s, y+t) \xrightarrow{\mathcal{B}} g(x+s, y+t)$$

función $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- $K((x, y), (s, t)) = k(x - s, y - t)$
- $k(x, y) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} k(x, y) dxdy = 1$

Hipótesis del modelo

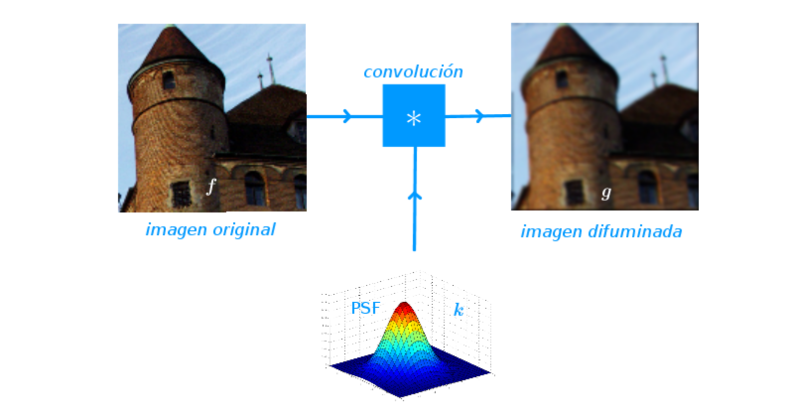


$$k(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{((x-s)^2 + (y-t)^2)}{2\sigma^2} \right)$$

- $\mathcal{B}$ separable
  funciones $k_1, k_2 : \mathbb{R} \to R$ tales que $k(x,y) = k_1(x)k_2(y)$

Modelo: Convolución

$$\mathcal{B}[f](x,y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} k(x-s, y-t) f(s,t) = k * f$$



Deconvolución

Modelo para difuminar imágenes

Problema Directo (Convolución)

Dada la función f y la PSF k, calcular $g = f * k$.

Restauración de imágenes

Problema Inverso (Deconvolución)

Dada la función g y la PSF k, hallar función f tal que $g = f * k$.

Deconvolución

Ejemplo: La forma del vertedero

La función c que nos da el caudal del agua que pasa por una placa se relaciona con la función de forma f que tiene la abertura de la placa mediante la ecuación integral

$$c(z) = 2\int_0^z \sqrt{2g_0(z-y)}f(y)dy, \quad 0 \leq z \leq 1$$

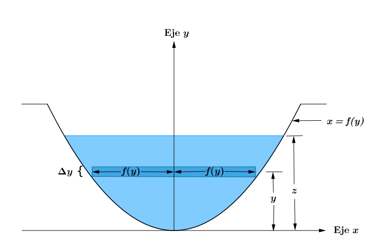
donde g_0 es constante de aceleración en caída libre en ft/s^2.

Problema: Dados

$c(z) = z^2 \quad$ y $\quad k(z,y) = 2\sqrt{2g_0(z-y)}$

con $g_0 = 32$, hallar f tal que

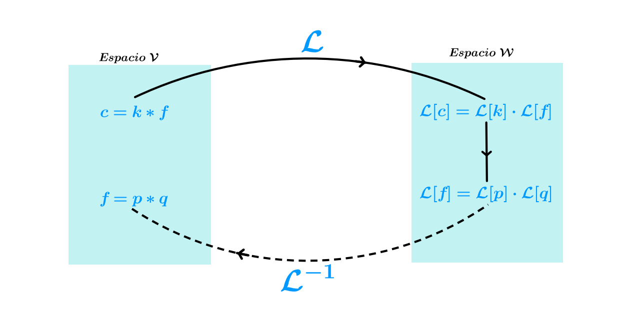
$$c = k * f$$



Deconvolución

solución analítica $f(y) = \sqrt{y}/(2\pi)$ por transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy$$



$$\mathcal{B}[f](z) = 2\int_0^z \sqrt{2g_0(z-y)} f(y) dy \qquad \mathcal{B}^{-1}[c](y) = \frac{4}{g_0\pi}\int_0^y \frac{c''(z)}{\sqrt{z-y}} dz$$

Deconvolución

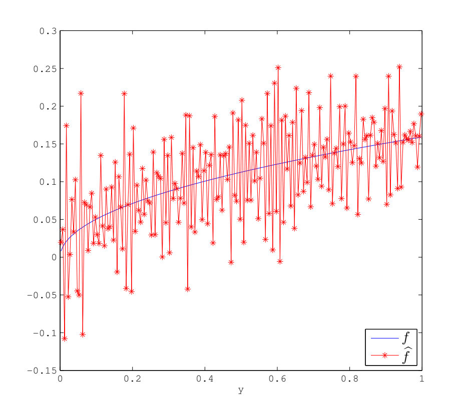
Resolver $c = k * f$ con $c(z) = z^2 + \epsilon$ con $\epsilon \sim N(0,1)$.

Discretización por colocación en 200 puntos z_i de $[0,1]$:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \epsilon$$

$$b_i = z_i^2, \quad x_i = f(z_i/2)$$
$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{16}{200^{3/2}}\sqrt{i - j + \frac{1}{2}}, & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
$$i, j = 1, \ldots, 200.$$

solución númerica $\widehat{f}$



Problemas mal planteados

Problema: Dado operador $\mathcal{B} : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ y función $g \in L^2[0,1]$, hallar función $f \in L^2[0,1]$ tal que $\mathcal{B}[f] = g$.

Problema bien planteado

- tiene solución
- la solución es única
- la solución depende continuamente de los datos

De otro modo, problema mal planteado

Hadamard

bien planteado si $\mathcal{B}$ biyección con $\mathcal{B}^{-1}$ continua.

Deconvolución: un problema mal planteado

Teorema

$B[f] = k * f$ sobre $L^2[0,1]$ con $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ compacto y acotado sobre $L^2[0,1]$ de dimensión infinita

Teorema

$\mathcal{B}$ lineal, compacto y acotado sobre $L^2[0,1]$ de dimensión infinita $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}^{-1}$ no continua

Modelo Discreto

La imagen observada es imagen digital.

$$\begin{array}{c} \text{función } g \\ \text{variables y valores} \\ \text{continuos} \end{array} \xrightarrow{\text{muestreo + cuantificación}} \begin{array}{c} \text{matriz } G \\ \text{variabe y valores} \\ \text{discretos} \end{array}$$

Convolución Discreta

discretización por colocación

- muestras de g en $\mathbb{Z}^2$
- soporte de g en $[1, m] \times [1, n]$
- soporte de k en $[-l, l] \times [-r, r]$

caso 1D

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-s) f(s), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$g_i = \sum_{p=-l}^{l} k_{i-p} f_p, \quad i = 1, \ldots, m$$

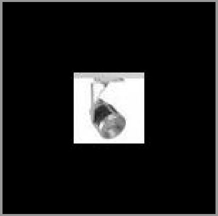
$$\downarrow$$

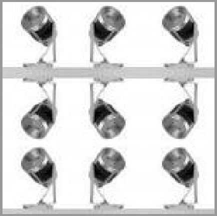
$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cccccc|cc}
k_r & \cdots & k_0 & \cdots & k_{-r} & & & 0 & & 0 \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & & \\
 & & k_r & \cdots & k_0 & \cdots & k_{-r} & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
0 & & 0 & & & k_r & \cdots & k_0 & \cdots & k_{-r}
\end{array}\right]}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} f_{-r+1} \\ \vdots \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{n+r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}
\underbrace{=}_{=}
\underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

sistema indeterminado con A de tamaño $n \times (n + 2r)$

Condiciones de frontera

f fuera de $[1, m] \times [1, n]$ $\longrightarrow$ reordena matriz A





cero	periódica	reflexiva
$\downarrow$ 1D	$\downarrow$ 1D	$\downarrow$ 1D
A matriz de Toeplitz	A matriz circular	$A =$ Toeplitz $+$ Hankel

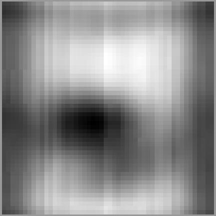
Condiciones de frontera

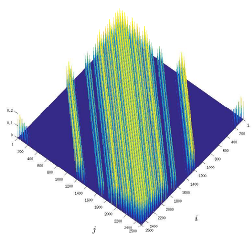
En 2D, A de $n \times n$ bloques, cada bloque de $m \times m$.

condición de frontera	estructura por bloques	bloque
cero	Toeplitz	Toeplitz
periódica	Circular	Circular
reflexiva	Toeplitz +Hankel	Toeplitz+Hankel

Ejemplo

imagen de 50×50 píxeles
k gaussiana con s. d. $= 2$
condiciones periódicas
A de 2500×2500





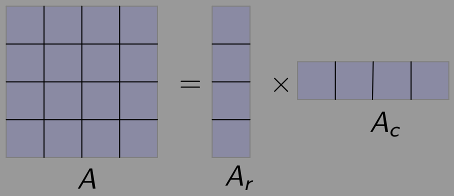
Deblurring: Problema de gran escala

imágenes $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ 1600×1200 píxeles	$\longrightarrow$	matrices F y G tamaño 1280×1024
operador $\mathcal{B}$	$\longrightarrow$	matriz A de orden $(1600)(1200)=1920000$

Problema: Dadas matrices A y G, hallar matriz F tal que

$$A\text{vec}(F) = \text{vec}(G)$$

¿podemos reducir las dimensiones del problema?



Reducción de Dimensión

hipótesis del modelo: $\mathcal{B}$ es separable.

$\hookrightarrow$

Producto de Kronecker

$$A = A_r \otimes A_c$$

A_r de 1200×1200
A_c de 1600×1600

condiciones cero	$\longrightarrow$	A = Toeplitz $\otimes$Toeplitz
condiciones periódicas	$\longrightarrow$	A = Circular $\otimes$Circular
condiciones reflexivas	$\longrightarrow$	A = (Toeplitz + Hankel) $\otimes$(Toeplitz+Hankel)

Deblurring

Problema: Dadas matrices A_r, A_c y G, hallar matriz F tal que

$$(A_r \otimes A_c)\text{vec}(F) = \text{vec}(G)$$

Propiedades del Producto de Kronecker

- $(A_r \otimes A_c)^{-1} = A_r^{-1} \otimes A_c^{-1}$
- $(A_r \otimes A_c)\text{vec}(F) = \text{vec}(A_c F A_r^T)$

Matriz de imagen restaurada $\quad F = A_c^{-1} G A_r^{-T}$

NOTA: $\mathcal{B}$ no separable $\longrightarrow A \approx \sum_i R_i \otimes C_i$

Deblurring

Ejemplo: restauración del Alma Mater

imagen $\mathcal{G}$ de 1600×1200 píxeles

PSF $k_{i,j} = \begin{cases} 1/(7^2\pi) & \text{si } i^2 + j^2 \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$\text{supp}(k) = [-799, 799] \times [-599, 599]$

condiciones de frontera periódicas

$G + E$ con $E \sim N(0, 0{,}1)$ vector aleatorio de $\mathbb{R}^{1600 \cdot 1200}$

Deblurring

A de orden (1600)(1200) circular por bloques

bloques: matrices circulares de 1600×1600

PSF no separable: aproximación de A por SVD

$$\begin{bmatrix} k_{-799,-599} & \cdots & k_{-799,599} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{799,-599} & \cdots & k_{799,599} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{1599} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{1199} \\ & \text{\huge 0} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{1199}^T \end{bmatrix}$$

$\sigma_1 = 7.49992 \times 10^{-2} \geq \cdots \geq \sigma_{1199}$

A_c circular con 1er renglón $[\sqrt{\sigma_1}\boldsymbol{u}_1^T \;\; 0]$

A_r circular con 1er renglón $[\sqrt{\sigma_1}\boldsymbol{v}_1^T \;\; 0]$

resolver $(A_r \otimes A_c)\text{vec}(F) = \text{vec}(G)$

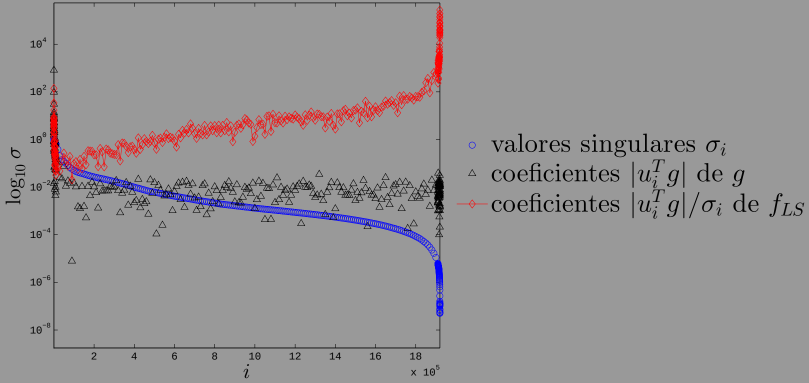
Deblurring: un problema mal condicionado

matriz $A_r \otimes A_c$ mal condicionada $\mathrm{cond}(A_r \otimes A_c) = 1.9301 \times 10^7$

expande $\boldsymbol{g} = \mathrm{vec}(G)$ y $\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS}} = \mathrm{vec}(F)$ en base de vectores singulares

✗ Condición de Picard:

En promedio, $|\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}|/\sigma_i \downarrow 0$ $\longrightarrow$ Problema mal planteado



Métodos de Regularización

idea: problema P mal condicionado $\longrightarrow$ problemas P_λ con $\mathrm{cond}(P_\lambda) \ll \mathrm{cond}(P)$

Problema de cuadrados mínimos:

$$\min_{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^{mn}} \|A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_2$$

Restricción sobre tamaño de solución:

$$\min_{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^{mn}} \|A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_2 + \lambda\|\boldsymbol{f}\|_2$$

Métodos de Regularización

Restricción sobre suavizamiento:

$$\min_{f \in \mathbb{R}^{mn}} \|Hf - g\|_2 + \lambda \|Lf\|_2$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Lf} &= \text{ convolución discreta de } F \text{ con filtro Laplaciano} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Métodos de regularización numérica

- Regularización de Tikhonov

$$\min_{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^{mn}} \|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2+\lambda\|\boldsymbol{f}\|_2^2$$

- Problema de región de confianza

$$\min_{\|\boldsymbol{f}\|_2\leq\delta} \|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2$$

- SVD truncada

Métodos de regularización numérica

SVD $\rightarrow$ Soluciones regularizadas

- Regularización de Tikhonov

$$f^{\lambda} = \sum_{i=1}^{mn} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2+\lambda}(u_i^T g) v_k, \qquad \lambda>0$$

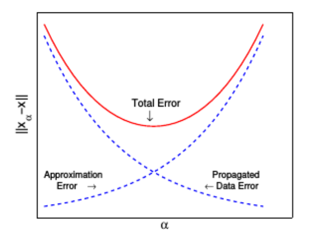
- SVD truncada

$$f^{k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T g}{\sigma_k} v_k, \qquad k\in\{1,\ldots,r\}$$

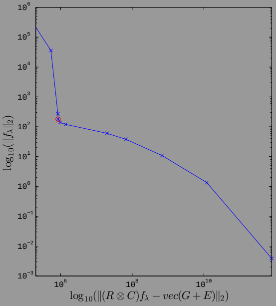
SVD de $A = A_r \otimes A_c$

$$\begin{aligned} A_r &= U_r \Sigma_r V_r^T \\ A_c &= U_c \Sigma_c V_c^T \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad A = \underbrace{(U_r \otimes U_c)}_{U}\underbrace{(\Sigma_r \otimes \Sigma_c)}_{\Sigma}\underbrace{(V_r \otimes V_c)}_{V}{}^T$$

Elección del parámetro de regularización



- Principio de discrepancia
- GCV
- Criterio de la L-Curva



esquina de $(\log \|b - Ax_\alpha\|, \log \|x_\alpha\|)$
punto de mayor curvatura

Regularización en Deblurring

Ejemplo del Alma Mater

Resolver $(A_r \otimes A_C)\text{vec}(F) = \text{vec}(G + E)$

A_r de 1200×1200 y A_c de 1600×1600 circulares

G de 1600×1200 y $E \sim N(0, 0{,}01)$

Regularización de Tikhonov

solución regularizada $F_\lambda \longrightarrow$ imagen restaurada

$\lambda = 10^{-2}$

$\lambda = 0.499$

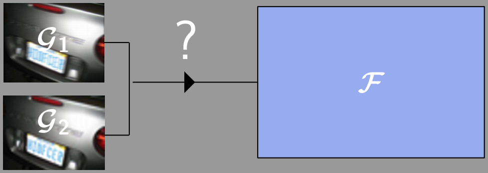
Regularización en Deblurring

con criterio de L-curva

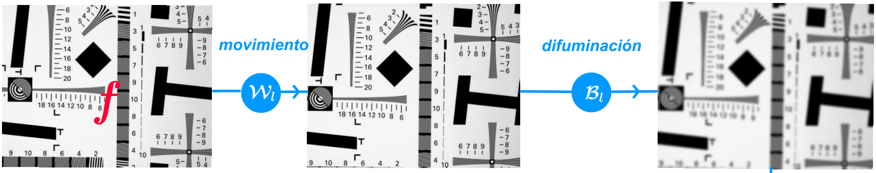
$$\lambda = 0.0499$$

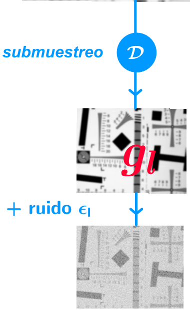
Super-resolución

Problema: Dadas imágenes $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ de la misma escena de 250×200 píxeles, obtener imagen $\mathcal{F}$ de la escena de 500×400 píxeles con menos degradaciones



Modelo para generar imágenes LR





$$\mathcal{H}_l(f) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_l(f \circ \mathcal{W}_l))$$

$$g_l + \epsilon_l = \mathcal{H}_l(f)$$

Hipótesis del Modelo

- $\mathcal{W}$ traslación
- $\mathcal{B}$ lineal, espacialmente invariante, separable
- $\mathcal{D}$ reescala
- condiciones de frontera períodicas

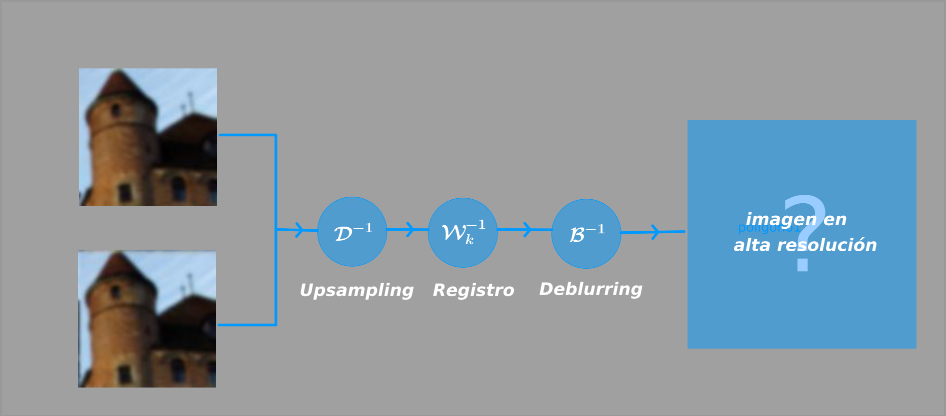
$$\xrightarrow{\boldsymbol{f}=\mathrm{vec}(F)} \begin{array}{r} W_k : \mathbb{R}^{500\cdot 400} \rightarrow \mathbb{R}^{500\cdot 400} \\ B : \mathbb{R}^{500\cdot 400} \rightarrow \mathbb{R}^{500\cdot 400} \\ D : \mathbb{R}^{500\cdot 400} \rightarrow \mathbb{R}^{250\cdot 200} \end{array} \xrightarrow{\boldsymbol{g}_k = DBW_k\boldsymbol{f}}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DBW_1 \\ DBW_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{f}$$

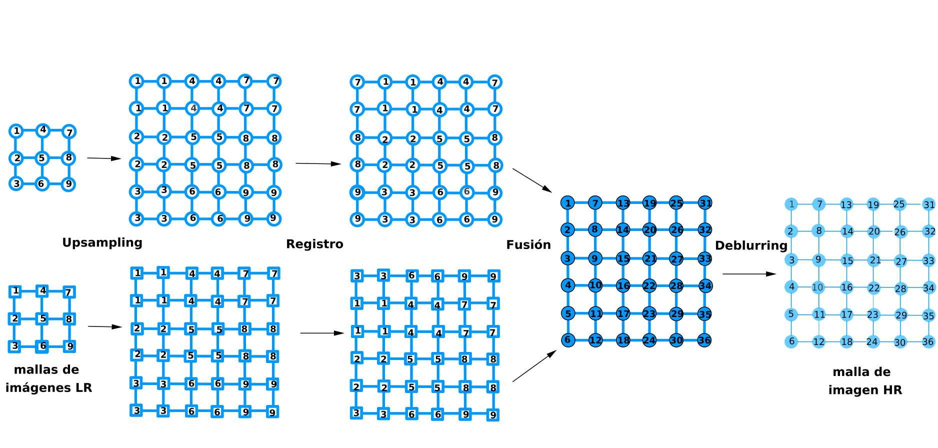
Tareas de Super-resolución

hipótesis $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} W_k = P_k \otimes Q_k \\ B = R \otimes C \end{array}$ $\begin{array}{l} P_k, R \text{ circulares de } 400 \times 400 \\ Q_k, C \text{ circulares de } 500 \times 500 \end{array}$ $\Rightarrow DBW_k = DW_kB$

$$(DW_kB)^{-1} = B^{-1}W_k^{-1}D^{-1}$$



Tareas de Super-resolución



Fusión

Entrada: matrices Z_1 y Z_2 de 500×400
Salida: matriz Z de 500×400

$$\text{SVD's} \quad \begin{array}{l} Z_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad \longrightarrow \\ Z_2 = U_2 \Sigma_2 V_2^T \quad \longrightarrow \end{array} Z = U_2 \Sigma V_2^T$$

$$\Sigma = \begin{cases} \Sigma_1, & \text{si } \sigma^1_{\text{máx}} \geq \sigma^2_{\text{máx}} \\ \Sigma_2, & \text{si } \sigma^2_{\text{máx}} > \sigma^1_{\text{máx}} \end{cases}$$

Super-resolución

Ejemplo

imágenes $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ de 250×250 píxeles

$\mathcal{G}_1$ referencia

$\mathcal{G}_2$ 5 píxeles $\downarrow$ 5 píxeles $\rightarrow$

condiciones de frontera periódicas

$$\text{PSF } k_{i,j} = \begin{cases} 1/(2{,}5^2\pi) & \text{si } i^2 + j^2 \leq 2{,}5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{supp}(k) = [-249, 249] \times [-199, 199]$$

obtener imagen $\mathcal{F}$ de 500×400

$\mathcal{G}_1$

$\mathcal{G}_2$

Super-resolución: Un problema mal planteado

upsampling

$$S_k = G_l \otimes I_{2\times 2}$$

registro

$$\begin{aligned} Z_1 &= S_1 \\ Z_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5\times 495} & I_{5\times 5} \\ I_{495\times 495} & \mathbf{0}_{495\times 5} \end{bmatrix}^T S_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5\times 395} & I_{5\times 5} \\ I_{395\times 395} & \mathbf{0}_{395\times 5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

fusión

$$Z = U_2 \Sigma V_2^T$$

deblurring

$$(R \otimes C)\mathrm{vec}(F) = \mathrm{vec}(Z)$$

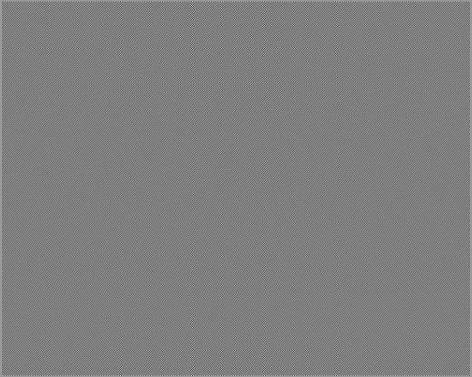


imagen restaurada $\mathcal{F}$

$$\mathrm{cond}(R \otimes C) = 1.18912 \times 10^7$$

Regularización en Super-resolución

Regularización en Deblurring: SVD truncada

nivel truncamiento $\rho \leq 500 \cdot 400$

imagen restaurada $\mathcal{F}_\lambda$

$\lambda = 2000$

Regularización en Super-resolución

$\lambda = 25000$

Regularización en Super-resolución

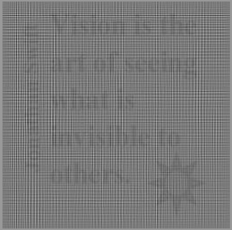
$\lambda = 75000$

Fin

Deblurring $(A_r \otimes A_c)\text{vec}(F) = \text{vec}(G)$

256x256 píxeles
PSF k gaussiana s.d. $= 5$
$\text{supp}(k) = [-127, 127] \times [127\times, 127]$
condiciones de frontera cero

A_r, A_c, G de 256×256
A_r, A_c, G de Toeplitz
$\text{cond}(A_r) = \text{cond}(A_c) = 4.6521 \times 10^{18}$

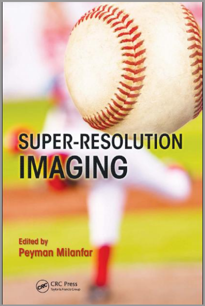


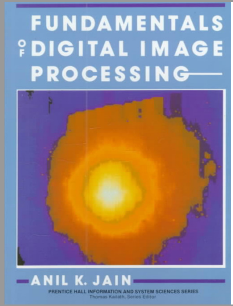
$\lambda = 10^{-16}$

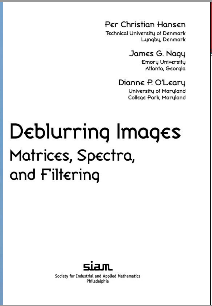
$\lambda = 10^{-15}$

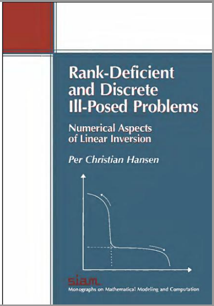
regularización de Tikhonov
parámetro regularización λ

Referencias I









Referencias II

C.W. Groetsch.
Inverse Problems: Activities for Undergraduates.
The Mathematical Association of America, 1999.

P. C. Hansen
Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms.
SIAM, 2010.

P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary.
Deblurring Images: matrices, spectra and filtering.
SIAM, 2006.

A. K. Jain.
Fundamentals of Digital Image Processing.
Pretince Hall, 1989.

P. Milanfar.
Super-Resolution Imaging.
Taylor & Francis Group, LLC., 2011.

D. P. O'Leary.
Scientific Computing with Case Studies.
SIAM, 2008.

Referencias III

G.M. Wing, J.D. Zahrt.
A Primer on Integral Equations of the First Kind: The Problem of Deconvolution and Unfolding.
SIAM, 1991.

M. Elad, Y. Hel-Or.
A Fast Super-Resolution Reconstruction Algorithm for Pure Translational Motion and Common Space-Invariant Blur.
IEEE Transaction on Image Processing Vol. 10, No. 8 (2001), pp. 1187-1193.

J. Kamm, J.G. Nagy
Kronecker products and SVD approximations for separable spatially variant blurs, 1998.

H. Nasir, V. Stankovic, S. Marshall.
Singular value decomposition based fusion for super-resolution image reconstruction.
IEEE International Conference on Signal and Image Processing Applications (2011), pp. 393-398.

S. C. Park, M. Y. Park, M. G. Kang.
Super-Resolution Image Reconstruction: A Technical Overview.
IEEE Signal Processing Magazine, 2003, pp. 21-36.