Solución Numérica de la ecuación vectorial de Saint-Venant utilizando Métodos Híbridos

Autora
Martha Leticia Ruiz Zavala

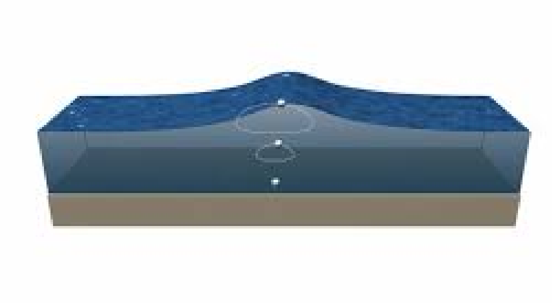
Asesor
Dr. Francisco Javier Domínguez Mota

Características

¿Qué son?

Se dice que un cuerpo de agua es somero si su escala vertical S_v es mucho más pequeña que la horizontal S_h, al menos 20 veces, i.e.

$$\frac{S_v}{S_h} < 0.05.$$



Supuestos de las ecuaciones

Suponemos que..

- Veremos al fluido desde el punto de vista *Euleriano*.
- Se cumple la *Hipótesis del Contínuo*.
- El fluido es *incompresible*.
- Se trata únicamente con *fluidos Newtonianos*.
- Se cumplen las ecuaciones de *conservación de masa y de momento*.

Ecuaciones de Saint-Venant

Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0.$$

Ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Ecuaciones de Saint-Venant

Ecuación vectorial de conservación de momento

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} + \mathbf{F}. \qquad (2)$$

donde ρ es la densidad, $\mathbf{U} = (u, v, w)'$ es el campo de velocidades, τ_{ij} respresenta los esfuerzos generados por la viscocidad y $\mathbf{F} = \rho(fv, -fu, -g)'$ denota las fuerzas volumétricas, con f la fuerza de Coriolis y g la gravedad.

Ecuaciones de Saint-Venant 2D

Ecuaciones conservativas de aguas someras

Integrando las ecuaciones en 3D sobre la profundidad, omitiendo los esfuerzos laterales y asumiendo una expresión más sencilla para los esfuerzos en el fondo en las ecuaciones, obtenemos las **ecuaciones conservativas de aguas someras en 2D**.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(au)+\frac{\partial}{\partial y}(av)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}(au)+\frac{\partial}{\partial x}(au^2)+\frac{\partial}{\partial y}(auv)-fav+ga\frac{\partial h}{\partial x}+c_f u\sqrt{u^2+v^2}&=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}(av)+\frac{\partial}{\partial x}(auv)+\frac{\partial}{\partial y}(av^2)+fau+ga\frac{\partial h}{\partial y}+c_f v\sqrt{u^2+v^2}&=0.\end{aligned} \tag{3}$$

Ecuaciones de Saint-Venant 2D

Ahora bien si hacemos el cambio de variables

$$q_1 = h, \quad q_2 = au, \quad q_3 = av,$$

pasando de las variables clásicas a las conservativas, obtenemos el sistema sobre el cual trabajaremos

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q_x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q_y}}{\partial y} + \mathbf{G} = 0, \tag{4}$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q_x} = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{g}{2} q_1^2 \\ \frac{q_2 q_3}{q_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q_y} = \begin{pmatrix} q_3 \\ \frac{q_2 q_3}{q_1} \\ \frac{q_3^2}{q_1} + \frac{g}{2} q_1^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -fq_3 + c_f \frac{q_2}{(q_1 - Z_b)^2} \sqrt{q_2^2 + q_3^2} \\ fq_2 + c_f \frac{q_3}{(q_1 - Z_b)^2} \sqrt{q_2^2 + q_3^2} \end{pmatrix}.$$

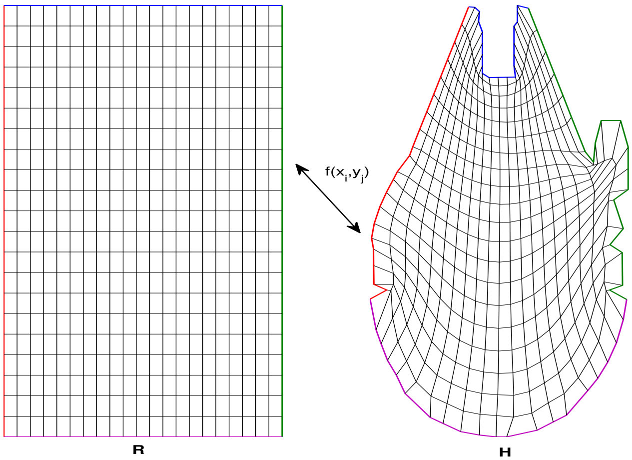
1 Antecedentes
- Aguas someras

2 Métodos Numéricos
- Mallas estructuradas
- Diferencias Finitas
- Volúmenes Finitos
- Esquemas propuestos

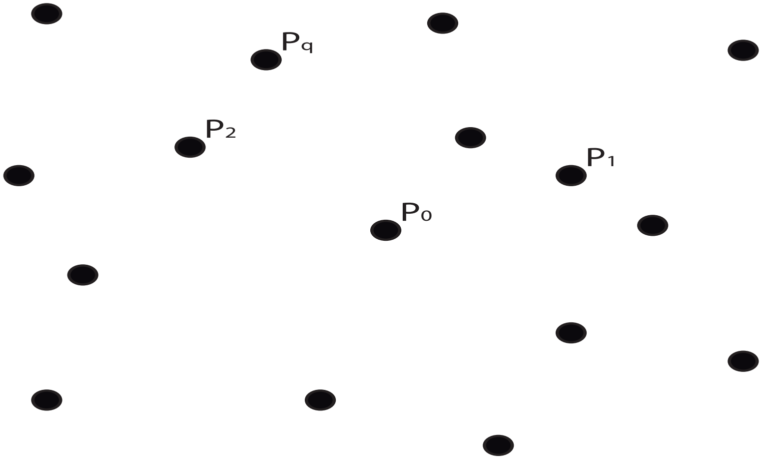
3 Pruebas Numéricas
- Condiciones de frontera
- Cuadrado unitario

4 Conclusiones

¿Qué es una malla estructurada?



Diferencias Finitas Generalizadas



Diferencias Finitas Generalizadas

Operador linela de segundo orden

Para aproximar una EDP de segundo orden, tomamos de manera general el operador lineal

$$Lu = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu,$$

el cual buscamos aproximar en algún punto p_0, utilizando aproximaciones a los valores de la función u en sus q-vecinos. De modo que podemos escribir el esquema como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + ... + \Gamma_q u(p_q),$$

con Γ_i constantes.

Diferencias Finitas Generalizadas

Condición de consistencia

Para que la aproximación dada por este esquema se acerque a la solución, conforme los nodos q_i se acercal al nodo q_0, se debe cumplir la condición

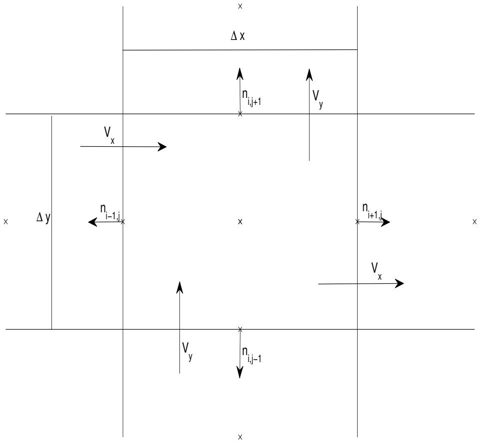
$$Lu|_{p_0} - \sum_{i=0}^{q} \Gamma_i u(p_i) \to 0.$$

Expandiendo en serie de Taylor hasta segundo orden la ecuación anterior, tenemos que esta se cumple sii se satisface el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \cdots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \cdots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \cdots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \cdots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \cdots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Una vez calculados los valores de las $\Gamma' s$ tenemos los pesos de cada unos de los nodos vecinos, los cuales nos dan el esquema en *diferencias finitas generalizadas*.

Celda



Leyes de conservación

Forma diferencial general de un sistema de leyes de conservación

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}(f_j(\mathbf{u})) = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \qquad t > 0.$$

Forma integral de un sistema de leyes de conservación

$$\frac{d}{dt}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{u}(t,x) = f_j(t, u(x_{i-1})) - f_j(t, u(x_i)).$$

Volúmenes Finitos Clásicos

Volúmenes Finitos Clásicos

Tomando la forma integral de la *ley de conservación* e integrando en el intervalo temporal $[t_n, t_{n+1}]$, obtenemos una relación que nos indica cómo cambiará el valor promedio de u en un paso de tiempo posterior

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{\mathcal{C}_i} u(t_{n+1}, x)dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{\mathcal{C}_i} u(t_n, x)dx$$
$$-\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{i-1/2}))dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{i+1/2}))dt\right]. \qquad (5)$$

Si tomamos el valor promedio de la variable conservada u en la celda i-ésima

$$\mathcal{Q}_i^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{\mathcal{C}_i} u(t_n, x)dx,$$

y tomamos $\mathcal{F}$ como una función de flujo numérico

$$\mathcal{F}(\mathcal{Q}_{i-1}^n, \mathcal{Q}_i^n) \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{i-1/2})).$$

Volúmenes Finitos Clásicos

Método de volúmenes finitos clásicos

Si ponemos la relación (5) en términos de el promedio $\mathcal{Q}_\rangle$ y del flujo numérico $\mathcal{F}$, obtenemos el esquema que aproxima el valor de la variable conservada en un tiempo futuro,

$$\mathcal{Q}_i^{n+1} = \mathcal{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathcal{F}(\mathcal{Q}_i^n, \mathcal{Q}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\mathcal{Q}_{i-1}^n, \mathcal{Q}_i^n)]. \tag{6}$$

Dicho esquema dependerá de cómo se tome la función de flujo numérico $\mathcal{F}$.

Esténciles

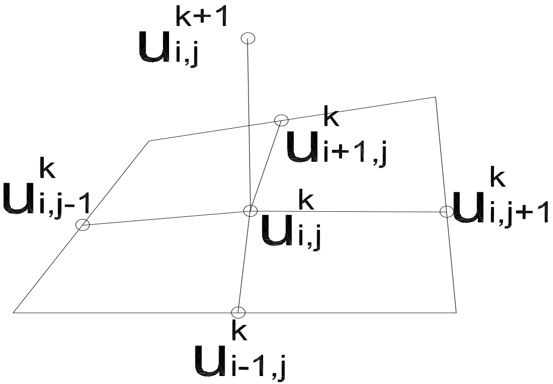


Figura: FTCS

Esténciles

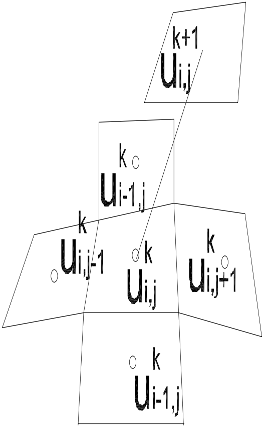
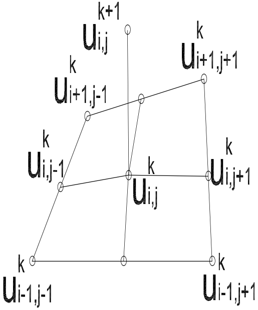
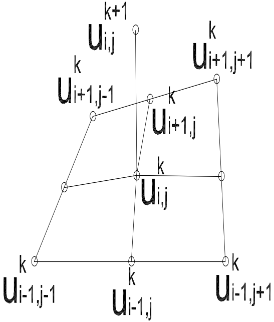


Figura: Volúmenes

Esténciles



(a) Pesos para la parcial en x



(b) Pesos para la parcial en y

Condiciones de frontera

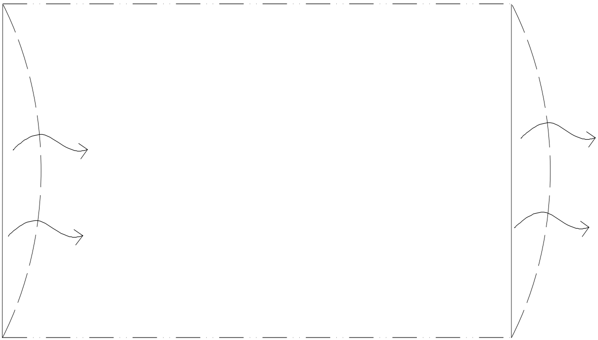


Figura: Condiciones de frontera vistas desde planta

Discretización del cuadrado unitario

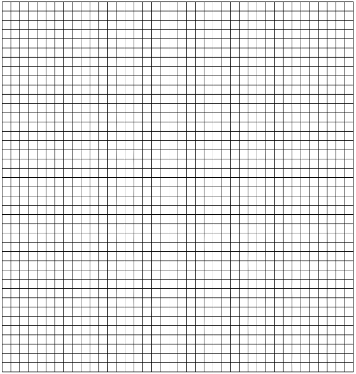


Figura: Malla uniforme con 41 puntos por lado

Condición inicial “Solitón”

Solitón

video vol

Ondas Airy

Ondas Airy

video vol

Fallo promedios tipo Lax

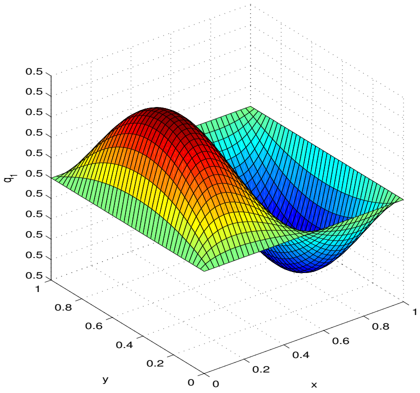


Figura: Aproximación del tirante

Conclusiones

Conclusiones

- Se puede concluir que los esquemas propuestos, a excepción de promedios tipo Lax, reproducen la mecánica real del fenómeno de estudio, a pesar de las limitantes dadas por el poder de cómputo.
- Los esquemas propuestos se pueden aplicar a diversas regiones con geometrías no tan complicadas.
- Para optimizar los procesos se deben implementar los códigos en otros lenguajes de programación.

¡Gracias por no dormirse!

Ecuaciones de Saint-Venant

Ecuaciones de Saint-Venant 3D

Sustituyendo los gradientes de la presión en las ecuaciones restantes de (**??**) y dividiento entre ρ, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) + g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0}(h-z)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_a}{\partial x} + \\
&\qquad -\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz})\right] - fv = 0, \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) + g\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0}(h-z)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_a}{\partial y} + \\
&\qquad -\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yz})\right] + fu = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Al juntar dichas ecuaciones con la *ecuación de continuidad para fluidos incompresibles* (1), obtenemos las *“Ecuaciones de Saint-Venant en 3D”*.