

Un acercamiento a la restauración de imágenes difuminadas usando el método de la región de confianza para problemas de gran escala

presenta

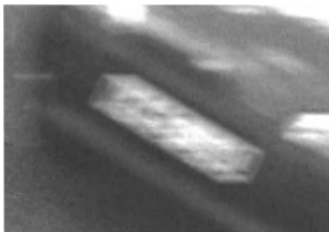
Iván Méndez Cruz

Laboratorio de Cómputo Científico



31 de Agosto del 2017

Planteamiento del problema



difuminada

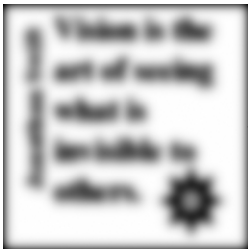


restaurada

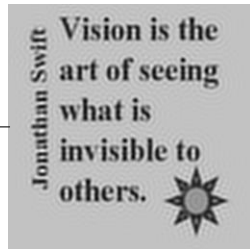
restauración: obtener imagen + fiel con - degradación

Problemas en restauración de imágenes

Deblurring: Dada una imagen **difuminada**, obtener otra de la misma escena con menos degradación.



difuminada



restaurada

Problemas en restauración de imágenes

Super-resolución: A partir de imágenes difuminadas de la misma escena, obtener una imagen de alta resolución con menos degradación.



?



baja resolución
difuminadas



alta resolución
- degradación

1º Ejemplo de Restauración

imagen difuminada



- ▶ en blanco y negro de 50×50 píxeles
matriz G de tamaño 50×50
elementos de $G \rightarrow$ tonos de gris
- ▶ tipo de difuminación conocido

¿cómo restaurarla?

Deblurring. Un Problema de cuadrados mínimos

Dados $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{2500}$ y $A \in \mathbb{R}^{2500 \times 2500}$, hallar $\mathbf{f}_{LS} \in \mathbb{R}^{2500}$ tal que

$$\|\mathbf{g} - A\mathbf{f}_{LS}\|_2 = \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2500}} \|\mathbf{g} - A\mathbf{f}\|_2$$

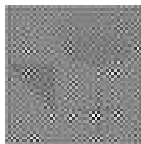


Imagen obtenida al resolver el problema

+ degradación

Deblurring. Un Problema de cuadrados mínimos

Dados $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{2500}$ y $A \in \mathbb{R}^{2500 \times 2500}$, hallar $\mathbf{f}_{LS} \in \mathbb{R}^{2500}$ tal que

$$\|\mathbf{g} - A\mathbf{f}_{LS}\|_2 = \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2500}} \|\mathbf{g} - A\mathbf{f}\|_2$$

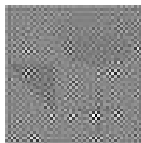


Imagen obtenida al resolver el problema

El Deblurring está mal planteado

2º Ejemplo de Restauración



Imagen difuminada g de Biblioteca Central

2º Ejemplo de Restauración

Problema de gran escala

calcular 1.4265×10^6 componentes
del vector \mathbf{f}

matriz A de orden 1.4265×10^6

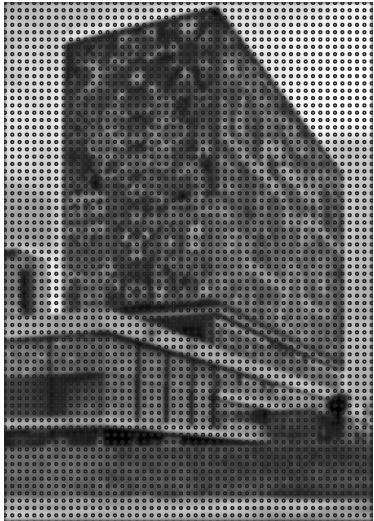
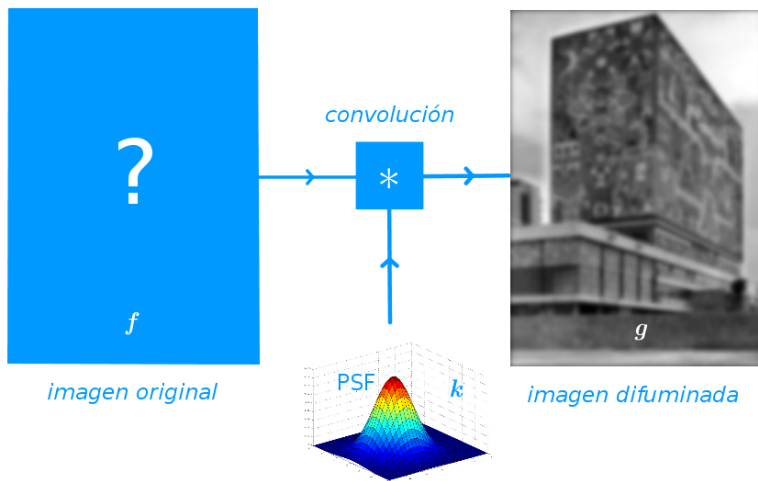


Imagen de 1006×1418 píxeles

Restauración como Deconvolución



$$K_{i,j} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{2 \cdot 5^2}\right)$$

Problema de Gran Escala

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{g} = \mathbf{K} * \mathbf{f} & \longrightarrow & \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} \\
 \text{Convolución Discreta} & \longrightarrow & \text{producto matriz-vector}
 \end{array}$$

Caso $n = m = 5$ y \mathbf{K} de tamaño 5×5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{A}^{(0)} & \mathbf{A}^{(-1)} & \mathbf{A}^{(-2)} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\
 \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(0)} & \mathbf{A}^{(-1)} & \mathbf{A}^{(-2)} & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\
 \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(0)} & \mathbf{A}^{(-1)} & \mathbf{A}^{(-2)} \\
 \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(0)} & \mathbf{A}^{(-1)} \\
 \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(0)}
 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A}^{(q)} = \begin{bmatrix}
 k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} & 0 & 0 \\
 k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} & 0 \\
 k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} \\
 0 & k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} \\
 0 & 0 & k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q}
 \end{bmatrix}.$$

3º Ejemplo de Restauración



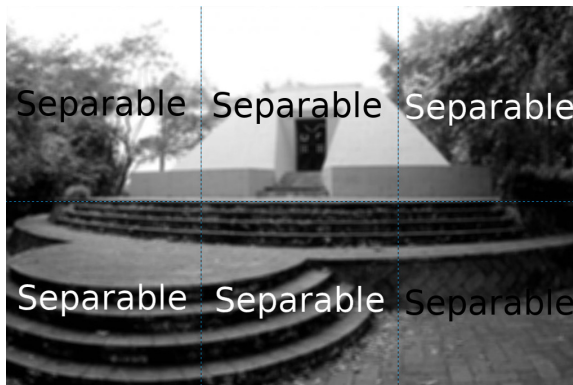
Imagen del Mausoleo de Xalapeños Ilustres de 1024×682 píxeles difuminada por convolución con PSF gaussiana de $s.d = 2.3$ y tamaño 11×11

Problema de Gran Escala

A de orden 6.98368×10^6

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

Aproximación por PSF separables $K_{i,j} = k_i \cdot k_j$



Problema de Gran Escala

A de orden 6.98368×10^6

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

PSF separable \longrightarrow

Producto de Kronecker

$$A_{nm \times nm} = R_{n \times n} \otimes C_{m \times m}$$

2	4	1	2	0	0
6	8	3	4	0	0
1	2	3	4	1	2
3	4	6	8	3	4
0	0	1	2	2	4
0	0	3	4	6	8

A

=

2	1	0
1	2	1
0	1	2

R

\otimes

1	2
3	4

C

Problema de Gran Escala

A de orden 6.98368×10^6

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

PSF separable \longrightarrow

Producto de Kronecker

$$A_{nm \times nm} = R_{n \times n} \otimes C_{m \times m}$$

Dadas matrices R, C y vector \mathbf{g} , hallar el mínimo \mathbf{f}_{LS} de

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{nm}} \|\mathbf{g} - (R \otimes C)\mathbf{f}\|_2$$

Problema Mal Planteado

Regularización: reemplazar el problema por otro bien planteado

Familia de problemas

- ▶ parámetro
- ▶ cada uno con solución

Problema Mal Planteado

Regularización: reemplazar el problema por otro bien planteado

Familia de problemas

- ▶ parámetro
- ▶ cada uno con solución

Regularización de Tikhonov

Dados \mathbf{g} y A , escoger valor de $\lambda > 0$ y hallar el mínimo \mathbf{f}_λ de

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{nm}} \left(\|\mathbf{g} - A\mathbf{f}\|_2 + \lambda^2 \|\mathbf{f}\|_2 \right)$$

Restauración por regularización



Imagen restaurada por regularización de Tikhonov con $\lambda = 10^{-3}$

Restauración por regularización



Imagen restaurada por regularización de Tikhonov con $\lambda = 10^{-2}$

Restauración por regularización



Imagen restaurada por regularización de Tikhonov con $\lambda = 0.1$

Restauración por regularización



Imagen restaurada por regularización de Tikhonov con $\lambda = 1$

Método de la Región de Confianza

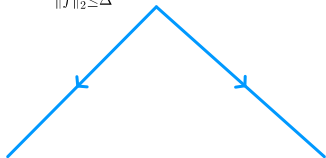
Problema de Cuadrados Mínimos

$$\min_{f \in \mathbb{R}^N} \|g - Af\|_2^2$$



Restricción

$$\min_{\substack{f \in \mathbb{R}^N \\ \|f\|_2^2 \leq \Delta^2}} \|g - Af\|_2^2$$



Regularización

$$\min_{f \in \mathbb{R}^N} (\|g - Af\|_2^2 + \lambda^2 \|f\|_2^2)$$

Optimización

$$\min_{\substack{f \in \mathbb{R}^N \\ \|f\|_2^2 \leq \Delta^2}} (f^T A^T A f - 2f^T A^T g)$$

Subproblema de la región de Confianza (TRS)

Dada la matriz simétrica $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y el vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$,

$$q(\mathbf{f}) := \mathbf{f}^T H \mathbf{f} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{f}.$$

Para un valor de $\Delta > 0$, resolver

$$\min_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \\ \|\mathbf{f}\|_2 \leq \Delta}} q(\mathbf{f})$$

$$H = A^T A, \quad \mathbf{d} = A^T \mathbf{g}$$

Subproblema de la región de Confianza (TRS)

Dada la matriz simétrica $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y el vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$,

$$q(\mathbf{f}) := \mathbf{f}^T H \mathbf{f} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{f}.$$

Para un valor de $\Delta > 0$, resolver

$$\min_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \\ \|\mathbf{f}\|_2 \leq \Delta}} q(\mathbf{f})$$

$$H = A^T A, \quad \mathbf{d} = A^T \mathbf{g}$$

Teorema [?]. \mathbf{f}_Δ es solución del TRS ssi cumple ecuación

$$(H - \mu_\Delta I) \mathbf{f}_\Delta = \mathbf{d},$$

con $H - \mu_\Delta I$ positiva semidefinida, $\mu_\Delta \leq 0$, y

$$\mu_\Delta (\Delta - \|\mathbf{f}_\Delta\|_2) = 0.$$

Métodos para TRS

- ▶ Moré [16] usa factorización de Cholesky

$$R_\mu^T R_\mu = H - \mu I$$

para resolver

$$(H - \mu I)\mathbf{f}_\mu = \mathbf{d},$$

y calcular un cero de

$$\zeta(\mu) = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\|\mathbf{f}_\mu\|_2}$$

para obtener el valor de μ_Δ ,

Desventaja en problemas de gran escala: Factorización de Cholesky \$\$

Métodos para TRS de gran escala

Reformulación del TRS: Problema de valores propios de gran escala

$$By = \lambda y$$

tamaño de B es $10^6 \times 10^6$ o mayor

Métodos

- ▶ iterativos
- ▶ **X** operar con matrices ✓ rutinas para producto matriz-vector
- ▶ calcular pocos valores propios

Idea: Dado r_0 , generar bases para *subespacios de Krylov*

$$\text{gen}\{r_0, Br_0, B^2r_0, \dots, B^{j-1}r_0\}$$

Problemas de Valores Propios de gran escala

Cuando las bases son ortonormales

Método de Arnoldi

¿qué hace?

matriz V_j con columnas ortonormales tal que

$$BV_j \approx V_j \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,j} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & \vdots \\ 0 & h_{3,2} & \cdots & \cdots & h_{j-2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & h_{j-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{j,j-1} & h_{j,j} \end{pmatrix}$$

¿qué obtenemos?

par propio (λ_j, z_j) de $H_j \longrightarrow \lambda_j \approx$ valor propio de B
 $V_j z_j \approx$ vector propio de B

Problemas de Valores Propios de gran escala

Método de Arnoldi

Lehoucq, Sorensen [15] implementan el método implícito de Arnoldi con reinicio en la biblioteca ARPACK de Fortran

- ▶ Interfaz para comunicación reversible
- ▶ adaptado a Matlab en la rutina `eigs`

LSTRS. Algoritmo para TRS de gran escala

Rojas, Sorensen [19] reformulan el TRS como el Problema de valores propios parametrizado

$$B(t) \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$B(t) = \begin{pmatrix} t & -\mathbf{d}^T \\ -\mathbf{d} & H \end{pmatrix}.$$

Aproximar los 2 valores propios más pequeños de $B(t)$

LSTRS. Algoritmo para TRS de gran escala

Rojas, Sorensen [19] reformulan el TRS como el Problema de valores propios parametrizado

$$B(t) \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$B(t) = \begin{pmatrix} t & -\mathbf{d}^T \\ -\mathbf{d} & H \end{pmatrix}.$$

Aproximar los 2 valores propios más pequeños de $B(t)$

$\lambda_1(H)$ menor valor propio de H

$$\text{Casos} \begin{cases} \text{Fácil} & \mathbf{d} \perp \ker(H - \lambda_1(H)I) \\ \text{Duro} & \mathbf{d} \perp \ker(H - \lambda_1(H)I) \end{cases}$$

TRS. Un Problema de Valores Propios Parametrizado

Caso Fácil

$\lambda_1(B(t))$ menor valor propio de $B(t)$

Proposición. Sea $t \in \mathbb{R}$ y sea $(y_0(t) \mathbf{y}(t)^T)^T$ vector propio normalizado asociado a $\lambda_1(B(t))$. Entonces $y_0 \neq 0$ y

$$\mathbf{f} = (1/y_0(t))\mathbf{y}(t)$$

es la única solución óptima de

$$\min \left\{ \mathbf{f}^T H \mathbf{f} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{f} : \mathbf{f}^T \mathbf{f} = (1 - y_0(t)^2)/y_0(t)^2 \right\}.$$

Recíprocamente, si $H - \mu I$ es positiva definida, y \mathbf{f} cumple

$$(H - \mu I)\mathbf{f} = \mathbf{d} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}^T \mathbf{f} = (1 - y_0(t)^2)/y_0(t)^2,$$

entonces $\mu = \lambda_1(B(t))$ e $y_0 (1 \ \mathbf{f}^T)^T$ es un vector propio de $\lambda_1(B(t))$ para $t = \mathbf{d}^T \mathbf{f} + \mu$.

Regularización por TRS parametrizado

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{g} - A\mathbf{f}\|_2^2 \longrightarrow \min_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \\ \|\mathbf{f}\|_2^2 \leq \Delta^2}} q(\mathbf{f})$$

Familia de TRS

- ▶ **parámetro:** radio Δ
- ▶ **solución:** \mathbf{f}_Δ dada por $(H - \mu_\Delta I)\mathbf{f} = \mathbf{d}$

Desventaja del LSTRS: la elección del radio Δ

Enfoque de Programación Semidefinida

idea: Reformulación del TRS

Minimizar funciones convexas sobre el cono de matrices simétricas positivas semidefinidas.

$$\begin{array}{ll}
 \underset{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \\ \|\mathbf{f}\|_2 \leq \Delta}}{\text{mín}} q(\mathbf{f}) & = \text{maximiza} \quad -t \\
 & \text{sujeto a} \quad D(t) + \tau \begin{bmatrix} -\Delta^2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \succeq 0 \\
 & \tau \geq 0
 \end{array}$$

parámetro de control t

Enfoque de Programación Semidefinida [17]

TRS reformulado como problema unidimensional

$$\min_{\substack{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \\ \|\mathbf{f}\|_2 \leq \Delta}} q(\mathbf{f}) = \max_{t \in \mathbb{R}} h(t)$$

Programa convexo

$$h(t) = (1 + \Delta^2)\lambda_1(B(t)) - t$$

Problema de Valores Propios Parametrizado

calcular $\lambda_1(B(t))$

Relación entre parámetros

Proposición [6],[17]

(i) Dado el parámetro $\mu_\Delta < 0$,

$$\begin{aligned} t &= \mu_\Delta + \mathbf{g}^T A(A^T A - \mu_\Delta I)^{-1} A^T \mathbf{g} \\ \lambda_1(D(t)) &= \mu_\Delta \\ \Delta^2 &= \mathbf{g}^T A(A^T A - \mu_\Delta I)^{-2} A^T \mathbf{g} \end{aligned}$$

(ii) Dado el parámetro $t < \mathbf{g}^T \mathbf{g}$,

$$\mu_\Delta = \lambda_1(D(t)) \quad \text{y} \quad \Delta^2 = (1 - y_0(t)^2)/y_0(t)^2,$$

donde $y_0(t)$ es la primera componente del vector propio asociado a $\lambda_1(D(t))$.

(iii) Dado el parámetro $\Delta < \|A^{-1} \mathbf{g}\|_2$, los óptimos τ^* y μ^* del problema dual

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & ((\Delta^2 + 1)\mu - \tau) \\ \text{s.t.} \quad & \tau > 0 \\ & D(t) - \mu I \geq 0 \end{aligned}$$

determinan t y μ_Δ , respectivamente.

Conexión con Regularización

$$\begin{array}{ccc} (H - \mu_{\Delta} I) \mathbf{f} = \mathbf{d} & \iff & (A^T A - \mu_{\Delta} I) \mathbf{f} = A^T \mathbf{g} \\ \text{Ecuación para TRS} & & \text{Ecuaciones Normales Regularizadas} \end{array}$$

Relación entre parámetros

$$\mu_{\Delta} = -\lambda^2$$

misma solución, diferente parametrización

$$\mathbf{f}_{\lambda} = \mathbf{f}_{\mu_{\Delta}} = \mathbf{f}_{\Delta} = \mathbf{f}_t$$

Elección del radio

¿qué radio Δ escoger?

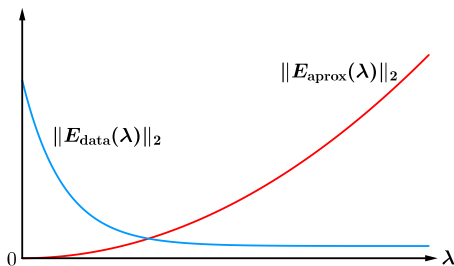


¿cómo elegir el parámetro de regularización λ ?

Elección del parámetro de regularización

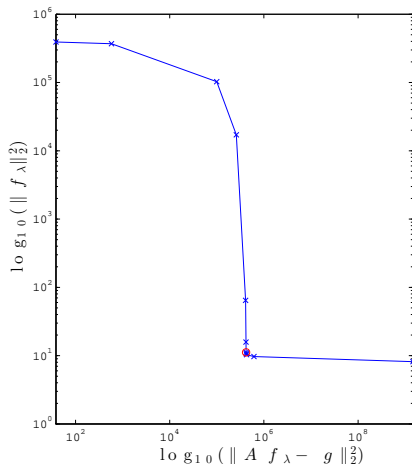
$$\text{error de la solución regularizadora} = \text{error de aproximación} + \text{error de los datos}$$

Regularización de Tikhonov



Tamaños de E_{data} y E_{aprox} en función del parámetro de regularización λ .

Criterio de L-curva



Para la regularización de Tikhonov graficamos la curva $(\|A f_\lambda - g\|_2^2, \|f_\lambda\|_2^2)$ con forma de L en escala logarítmica. El punto de mayor curvatura está en la esquina de la L.

Restauración por regularización con criterio L-curva



imagen restaurada de Biblioteca por regularización de Tikhonov, $\lambda = 0.02$

L-curva para radio de la región de confianza [6]

- ▶ intercambio coordenadas en L-curva \longrightarrow parte horizontal y vertical
- ▶ punto (η, ρ) sobre curva $(\|\mathbf{f}_\lambda\|_2^2, \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}_\lambda\|_2^2)$ dado por el TRS

$$\rho = \min_{\|\mathbf{f}\|_2^2 \leq \eta} \|\mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2^2$$

$$\eta = \Delta^2$$

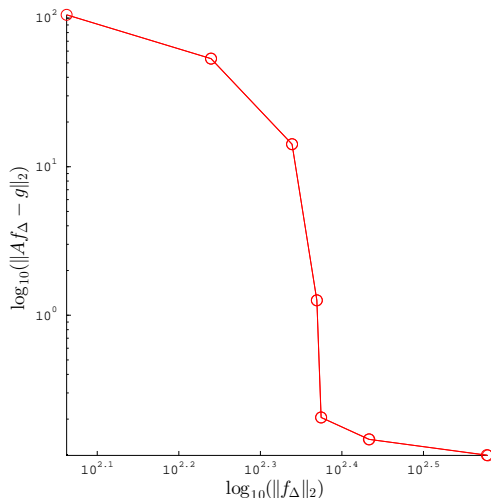
$$\rho = \min_{t \in \mathbb{R}} h(t) + \mathbf{g}^T \mathbf{g}$$

Reparametrización:

Curva

$$\left(\frac{1}{2} \log_{10}(\Delta^2), \frac{1}{2} \log_{10} \left(\min_{t \in \mathbb{R}} h(t) + \mathbf{f}^T \mathbf{f} \right) \right)$$

L-curva para radio de la región de confianza



Gráfica de L-curva $\gamma(\Delta)$ en escala logarítmica. Los puntos sobre $\gamma(\Delta)$ denotados por \circ son generados por el algoritmo para TRS parametrizado

Algoritmo para Regularización por TRS parametrizado

Entrada: $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nm}$, matriz $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$

Salida: radio Δ y solución en frontera \mathbf{f}_Δ

▶ Inicialización

$$\mu_\Delta = -\sigma_1(A) \quad (\text{mayor valor singular de } A)$$

$$\text{resuelve } (A^T A - \mu_\Delta I) \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad (\text{ecuación para TRS})$$

▶ Ciclo

Problema de valores Propios

buscar valor propio λ_+ de $B(t)$ cercano a λ_c

$\mathbf{f}_t \leftarrow$ vector propio de $B(t)$

radio

$$\Delta^2 \leftarrow \mathbf{f}_t^T \mathbf{f}_t$$

Algoritmo para Regularización por TRS parametrizado

Entrada: $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nm}$, matriz $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$

Salida: radio Δ y solución en frontera \mathbf{f}_Δ

- ▶ **Inicialización**

$$\mu_\Delta = -\sigma_1(A) \quad (\text{mayor valor singular de } A)$$

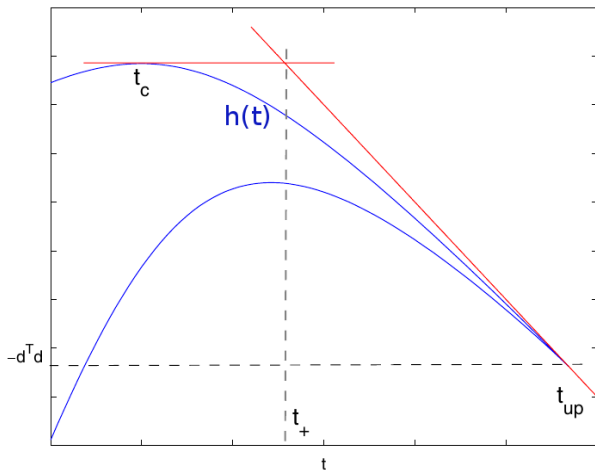
$$\text{resuelve } (A^T A - \mu_\Delta I) \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad (\text{ecuación para TRS})$$

- ▶ **Ciclo**

Actualización de t

$$t_+ = t_c - (\Delta_c^2 + 1)\lambda_1(B(t_c))$$

Actualización del parámetro de control



t_+ es la abscisa de la intersección de las tangentes de $h(t)$ en paso actual $t = t_c$ y la cota t_{up}

Algoritmo para Regularización por TRS parametrizado

Entrada: $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nm}$, matriz $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$

Salida: radio Δ y solución en frontera \mathbf{f}_Δ

► Inicialización

$$\mu_\Delta = -\sigma_1(A) \quad (\text{mayor valor singular de } A)$$

$$\text{resuelve } (A^T A - \mu_\Delta I) \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad (\text{ecuación para TRS})$$

► Ciclo

Actualización de la Curvatura de la L-curva

$$\text{La curvatura depende de } \Delta, \mu_\Delta, \mu'_\Delta = \frac{\Delta}{\mathbf{g}^T A (A^T A - \mu_\Delta I)^{-3} A^T \mathbf{g}}$$

$$\mathbf{g}^T A (A^T A - \mu_\Delta I)^{-3} A^T \mathbf{g} = \int_a^b (x - \mu_\Delta)^{-3} d\omega(x)$$

Cuadratura Gaussiana + Bidiagonalización de Lanczos

Algoritmo para Regularización por TRS parametrizado

Entrada: $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nm}$, matriz $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$

Salida: radio Δ y solución en frontera \mathbf{f}_Δ

▶ **Inicialización**

$\mu_\Delta = -\sigma_1(A)$ (mayor valor singular de A)

resuelve $(A^T A - \mu_\Delta I)\mathbf{f} = \mathbf{d}$ (ecuación para TRS)

▶ **Ciclo**

Criterio de paro basado en curvatura

↪ 3 puntos sobre de L-curva (parte vertical → horizontal)

▶ **Bisección con valores de μ_Δ en los 3 puntos para hallar esquina**

Algoritmo para Regularización por TRS parametrizado

Entrada: $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{nm}$, matriz $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$

Salida: radio Δ y solución en frontera \mathbf{f}_Δ

- ▶ **Inicialización**

$$\mu_\Delta = -\sigma_1(A) \quad (\text{mayor valor singular de } A)$$

$$\text{resuelve } (A^T A - \mu_\Delta I) \mathbf{f} = \mathbf{d} \quad (\text{ecuación para TRS})$$

- ▶ **Ciclo**

Criterio de paro basado en curvatura

↪ 3 puntos sobre de L-curva (parte vertical → horizontal)

- ▶ **Bisección con valores de μ_Δ en los 3 puntos para hallar esquina**

Implementación en rutina RPTRS de Matlab por Grodzevich y Wolkowicz

Restauración de imágenes por TRS

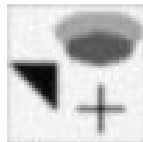


imagen difuminada de 50×50 del Ejemplo 1

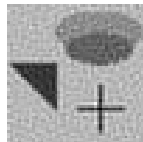


imagen restaurada por algoritmo RPTRS, el radio obtenido fue $\Delta = 52.931$

Restauración de imágenes por TRS



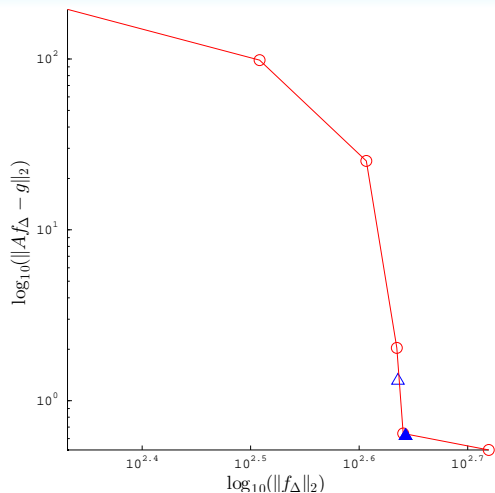
Imagen difuminada del mausoleo por matriz de PSF gaussiana con s.d = 2.3 y tamaño 11×11 . Se agrego ruido $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, 10^{-3}I)$

Restauración de imágenes por TRS



Imagen restaurada del mausoleo por por algoritmo RPTRS modificado, el radio obtenido fue $\Delta = 439.27$. El algoritmo tardó 11 min.

L-curva para radio de la región de confianza



L-curva para regularización por TRS del deblurring de imagen del mausoleo. El RPTRS modificado genera los puntos \bigcirc en el ciclo, un refinamiento produce los puntos \triangle . La esquina calculada es \blacktriangle , donde el radio es 439.272

Regularización por TRS para gran escala

¿Cómo adaptar el algoritmo RPTRS para problemas de gran escala?

Aprovecha estructura del problema

En la restauración de imágenes con PSF separable

Producto de Kronecker

$$A_{nm \times nm} = R_{n \times n} \otimes C_{m \times m}$$

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ de rango r tiene factorización matricial

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \cdots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_U \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} & \end{array} \right]}_{\Sigma}^{M \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{r+1} & \cdots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix}^T}_{V^T},$$

donde

- ▶ $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son los **valores singulares** de A .
- ▶ $U^T U = I_{M \times M}$ y $V^T V = I_{N \times N}$, sus columnas son **vectores singulares**

Teorema (SVD de producto de Kronecker)

Sean

$$R = U_r \Sigma_r V_r^T \quad \text{y} \quad C = U_c \Sigma_c V_c^T$$

SVD's de R y C . Entonces

$$R \otimes C = \underbrace{(U_r \otimes U_c)}_U \underbrace{(\Sigma_r \otimes \Sigma_c)}_{\Sigma} \underbrace{(V_c \otimes V_r)^T}_{V^T}$$

Conclusiones

- ▶ La deconvolución es central en problemas asociados con la restauración de imágenes. Nos interesa tratarla más adelante en el dominio de las frecuencias.
- ▶ Cuando reformulamos la regularización de nuestro problema como un TRS parametrizado, las claves son las relaciones encontradas entre los parámetros y las soluciones que nos permiten construir algoritmos simples y eficientes.
- ▶ Explotamos la estructura del deblurring para reducir sus dimensiones
- ▶ Modificamos el Algoritmo RPTRS para nuestro problema de gran escala
- ▶ Queremos usar el enfoque de la región de confianza a gran escala para super-resolución

Referencias I

-  M. Bertero, P. Boccacci.
Introduction to Inverse Problems in Imaging.
Institute of Physics, London, 1998.
-  A. R. Conn, N. I. M Gould, P. L. Toint.
Trust-Region Methods.
MPS-SIAM, 2000.
-  K. Frisenfeldt, I. Kraglund.
Deblurring of Digital Color Images.
Technical University of Denmark, 2003.
-  G. H. Golub, C. F. Van Loan.
Matrix Computations.
The Johns Hopkins University Press, Fourth Edition, 2013.
-  O. Grodzevich.
Regularization Using a Parameterized Trust Region Subproblem.
Master thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2004.
-  O. Grodzevich, H. Wolkowicz
Regularization Using a Parameterized Trust Region Subproblem.
Math. Program., Ser. B (2009), No. 116, pp. 193-220.

Referencias II



V. Guerra, V. Hernández.

Numerical aspects in locating the corner of the L-curve.

Approximation, Optimization and Mathematical Economics, Physica-Verlag, Heidelberg, 2001, pp. 121-131.



P. C. Hansen.

REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems.

Numerical Algorithms 6 (1994), pp. 1-35.



P. C. Hansen.

Rank-Deficient and discrete ill-posed problems.

SIAM, 1998.



P. C. Hansen

The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems.

Invited chapter in Computational Inverse Problems in Electrocardiology. WIT Press (2001), pp. 119-142.









P. C. Hansen, T. K. Jensen.






Large-Scale Methods in Image Deblurring.

, Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing: 8th International Workshop, PARA 2006 (2007) pp. 24-35.

Referencias III

-  **P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary.**
Deblurring images: Matrices, spectra and filtering.
SIAM, 2006.
-  **J. Kamm.**
Singular value decomposition based methods for signal and image restoration.
PhD thesis, Southern Methodist University, Dallas, TX, 1998.
-  **A. J. Laub.**
Matrix Analysis for Scientists and Engineers.
SIAM, 2005.
-  **R. B. Lehoucq., D.C. Sorensen, C. Yang**
ARPACK User's Guide. Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods.
SIAM, 1998.
-  **J. J. Moré, D. C. Sorensen.**
Computing a trust region step.
SIAM, J. Sci. Stat. Comput. Vol. 4, No. 3 (1983), pp. 553-572.
-  **F. Rendl, H. Wolkowicz**
A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization.
Mathematical Programming 77 (1997), pp 273-299.

Referencias IV

-  M. Rojas.
Regularization of large scale ill-conditioned least squares problems. 1996.
-  M. Rojas, S. A. Santos, D. C. Sorensen.
A new matrix-free algorithm for the large scale trust region subproblem.
SIAM J. Optim. Vol. 11, No. 3 (2000), pp. 611-646.
-  M. Rojas, S. A. Santos, D. C. Sorensen.
LSTRS:Matlab Software for Large Scale Trust Region Subproblems and Regularization
ACM Transactons on Mathematical Software, Vol. 34, No. 2, 2008.
-  J. Romberg.
The SVD of a ciculant matrix, 2011.
-  L. Vandenberghe, S. Boyd.
Semidefinite Programming.
SIAM Review, Vol. 38, No. 1 (1996), pp 49-95.