Principio de Incertidumbre de Heisenberg, para matemáticos

Luis Gottdiener
Depto. de Física, FC-UNAM

Seminario del Laboratorio de Cómputo Científico
C.U., 30-III-2017

I. Resultados Generales

Para un número complejo

$$z = x + iy \qquad (1.1)$$

el conjugado es

$$\overline{z} = x - iy \qquad (1.2)$$

y

$$|z|^2 = \overline{z} \cdot z \qquad (1.3)$$

De (1.1) y (1.2), *y* se puede escribir:

$$y = \frac{1}{2i} \;\; z - \overline{z} \qquad (1.4)$$

Se cumple la desigualdad

$$|z|^2 \geq y^2 \qquad (1.5)$$

Se sustituye (1.4) en el lado derecho de (1.5):

$$|z|^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \;\; z - \overline{z} \;\; \right]^2 . \qquad (1.6)$$

El producto escalar de dos funciones complejas (toman valores complejos) ψ, φ con dominio común, se define como

$$\langle \psi , \varphi \rangle \equiv \int \overline{\psi} \varphi dV . \qquad (1.7)$$

Algunas propiedades del producto escalar son:

$$\langle \psi , \psi \rangle \geq 0 \qquad (1.8)$$

$$\langle \psi , \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi , \psi \rangle} \qquad (1.9)$$

y, si χ es otra función compleja, y *c*, *d* son números complejos:

$$\langle \psi , \varphi + \chi \rangle = \langle \psi , \varphi \rangle + \langle \psi , \chi \rangle \;, \quad \langle \psi + \chi , \varphi \rangle = \langle \psi , \varphi \rangle + \langle \chi , \varphi \rangle \qquad (1.10)$$

$$\langle c\psi, d\varphi \rangle = \bar{c}d\langle \psi, \varphi \rangle. \qquad (1.11)$$

También se cumple la desigualdad (Cauchy-Schwarz):

$$\langle \psi, \psi \rangle \langle \varphi, \varphi \rangle \geq \left| \langle \psi, \varphi \rangle \right|^2. \qquad (1.12)$$

Se dice que *Ψ* está normalizada si

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1. \qquad (1.13)$$

Si *X* es un operador que actúa sobre las funciones *ψ*, *φ*, etc. y *ψ* está normalizada, el símbolo <*X*>, o promedio de *X* en el estado *ψ*, se define por

$$\langle X \rangle \equiv \langle \psi, X\psi \rangle. \qquad (1.14)$$

Se puede ver de (1.11) que el promedio tiene la propiedad, donde *a* es un número complejo

$$\langle aX \rangle = a\langle X \rangle. \qquad (1.15)$$

Si un operador *A* es hermitiano, cumple

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle. \qquad (1.16)$$

Se deduce de (1.16) que

$$\overline{\langle A \rangle} = \langle A \rangle. \qquad (1.17)$$

El operador de la desviación con respecto al promedio se define como

$$\Delta_X \equiv X - \langle X \rangle. \qquad (1.18)$$

Lema: Si *A* es hermitiano, Δ_A también es hermitiano.

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \Delta_X \varphi \rangle &= \langle \psi, (X - \langle X \rangle)\varphi \rangle = \langle \psi, X\varphi \rangle - \langle \psi, \langle X \rangle \varphi \rangle \\ &= \langle X\psi, \varphi \rangle - \langle \langle X \rangle \psi, \varphi \rangle = \langle \Delta_X \psi, \varphi \rangle. \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

Se define el conmutador de *X* y *Y* como

$$X, Y \equiv XY - YX \qquad (1.19)$$

Lema:

$$\Delta_X,\Delta_Y \;=\; X,Y \qquad (1.20)$$

Demostración:

$$\Delta_X,\Delta_Y \;=\left[X-\langle X\rangle, Y-\langle Y\rangle\right]=\left[X,Y-\langle Y\rangle\right]-\left[\langle X\rangle, Y-\langle Y\rangle\right]$$
$$=\; X,Y \;-\left[X,\langle Y\rangle\right]-\left[\langle X\rangle,Y\right]+\left[\langle X\rangle,\langle Y\rangle\right]=\; X,Y \qquad \text{QED}$$

Lema: Si dos operadores *A*, *B* son hermitianos, se cumple:

$$\overline{\langle AB\rangle}=\langle BA\rangle \qquad (1.21)$$

Demostración:

$$\langle\psi,AB\psi\rangle=\langle A\psi,B\psi\rangle=\langle BA\psi,\psi\rangle=\overline{\langle\psi,BA\psi\rangle}=\overline{\langle BA\rangle} \quad \text{QED.}$$

Lema: El conmutador de *A*, *B* puede escribirse como

$$A,B \;=iC \qquad (1.22)$$

donde *C* es un operador hermitiano.

Demostración:

$$C\equiv -i\;\; A,B \;, \quad \therefore \quad A,B \;=iC$$

Falta demostrar que *C* es hermitiano.

$$\langle\psi,C\varphi\rangle=\langle\psi,-i\;\; A,B\;\;\varphi\rangle=-i\langle\psi,(AB-BA)\varphi\rangle=-i\langle\psi,AB\varphi\rangle+i\langle\psi,BA\varphi\rangle=$$
$$i\langle AB\psi,\varphi\rangle-i\langle BA\psi,\varphi\rangle=i\langle(AB-BA)\psi,\varphi\rangle=i\langle\;\; AB-BA\;\;\psi,\varphi\rangle=$$
$$=\langle -i\;\; AB-BA\;\;\psi,\varphi\rangle=\langle C\psi,\varphi\rangle \qquad \text{QED}$$

En consecuencia, de (1.22) y (1.15)

$$\left|\langle\;\; A,B\;\;\rangle\right|^2=\left|\langle iC\rangle\right|^2=\langle C\rangle^2. \qquad (1.23)$$

La varianza de *A* es un escalar y se define como

$$\sigma_A^2\equiv\langle\psi,\;\;\Delta_A\;\;{}^2\psi\rangle. \qquad (1.24)$$

Se puede escribir como

$$\sigma_A^2 = \langle \Delta_A \psi, \Delta_A \psi \rangle . \qquad (1.25)$$

Si las funciones *f* y *g* se definen por

$$f \equiv \Delta_A \psi, \qquad g \equiv \Delta_B \psi \qquad (1.26)$$

Entonces (1.12b, 1.25) lo escribimos como:

$$\langle f, f \rangle = \sigma_A^2 \;, \qquad \langle g, g \rangle = \sigma_B^2 \qquad (1.27)$$

por lo que

$$\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle = \sigma_A^2 \sigma_B^2 \qquad (1.28)$$

Lema:

$$\langle f, g \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle, \qquad \langle g, f \rangle = \langle BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \qquad (1.29)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \langle \Delta_A \psi, \Delta_B \psi \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)\psi, (B - \langle B \rangle)\psi \rangle \\
&= \langle A\psi, (B - \langle B \rangle)\psi \rangle - \langle \langle A \rangle \psi, (B - \langle B \rangle)\psi \rangle \\
&= \langle A\psi, B\psi \rangle - \langle A\psi, \langle B \rangle \psi \rangle - \langle \langle A \rangle \psi, B\psi \rangle + \langle \langle A \rangle \psi, \langle B \rangle)\psi \rangle \\
&= \langle \psi, AB\psi \rangle - \langle B \rangle \langle \psi, A\psi \rangle - \langle A \rangle \langle \psi, B\psi \rangle + \langle \langle A \rangle \psi, \langle B \rangle)\psi \rangle \\
&= \langle AB \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \qquad \text{QED}
\end{aligned}$$

Restando las expresiones (1.29) se obtiene

$$\langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle = \langle \; A, B \; \rangle = i \langle C \rangle \qquad (1.30)$$

Reescribimos (1.12), para *f*, *g*

$$\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \geq \left| \langle f, g \rangle \right|^2$$

que se puede expresar, usando (1.27)

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left| \langle f, g \rangle \right|^2 \qquad (1.31)$$

II. Demostración

Haciendo <*f*, *g*>= *z*, la ec. (1.6) queda:

$$\left|\langle f,g\rangle\right|^2 \geq \left[\frac{1}{2i}\ \ \langle f,g\rangle - \overline{\langle f,g\rangle}\ \ \right]^2 = \left[\frac{1}{2i}\ \ \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle\ \ \right]^2 \qquad (2.1)$$

donde se usó (1.21).

Sustituyendo (1.30) en el lado der. de (2.1)

$$\left|\langle f,g\rangle\right|^2 \geq \left[\frac{1}{2}\langle C\rangle\right]^2 \qquad (2.2)$$

De (1.15) y (2.2)

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left|\langle f,g\rangle\right|^2 \geq \left[\frac{1}{2}\langle C\rangle\right]^2 \qquad (2.3)$$

por lo que

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}\langle C\rangle^2. \qquad (2.4)$$

Si *A*, *B* conmutan, *C* = 0. De (2.4)

$$\sigma_A\sigma_B \geq 0. \qquad (2.5)$$

Para el caso famoso de los operadores *X*, *P*:

$$X,P\ \ = i\hbar \qquad (2.6)$$

O sea, no conmutan y de (1.22)

$$C = \hbar$$

y de (2.4)

$$\sigma_X^2\sigma_P^2 \geq \frac{1}{4}\hbar^2. \qquad (2.7)$$

$$\sigma_X \sigma_P \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (2.8)$$

(2.6) se puede obtener de

$$X = x, \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$X, P \ \psi = XP\psi - PX\psi = x(-i\hbar \frac{d\psi}{dx}) - (-i\hbar \frac{d}{dx} x\psi)$$

$$= -i\hbar x \frac{d\psi}{dx} + i\hbar(x \frac{d\psi}{dx} + \psi) = i\hbar\psi$$

$$X, P \ = i\hbar$$