Problemas Lineales Discretos Mal Planteados y sus Aplicaciones en Restauración de Imágenes Digitales

TESIS DE MAESTRÍA

que presenta

Iván Méndez Cruz

Director: Pablo Barrera Sánchez

16 de Marzo del 2017

Planteamiento del problema

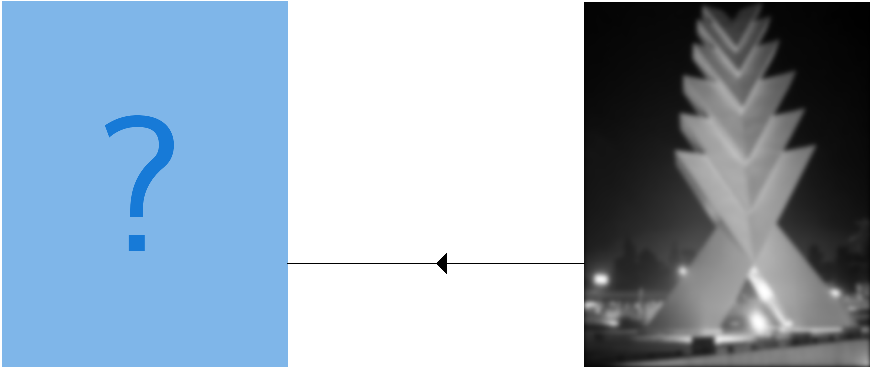
Escena: Araucaria en Xalapa, Ver.

dispositivo

imagen con degradación

- interpretación
- útil

Planteamiento del problema



- degradación

imagen con degradación

restauración: obtener imagen + fiel con - degradación

Planteamiento del problema

- degradación

imagen con degradación

restauración: obtener imagen + fiel con - degradación

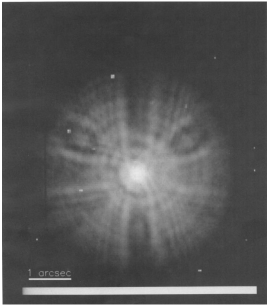
Aplicación

Visión Artificial [13]

Astronomía [17]

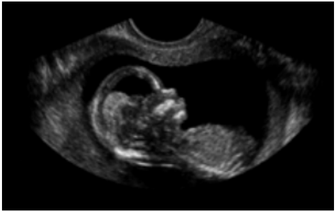
Telescopio Hubble

21 de Junio, 1990

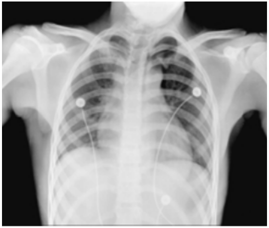


Procesamiento de Imágenes

imagen en espectro infrarrojo



ultrasonido de un feto



radiografía

imagen en espectro visible

Imágenes digitales obtenidas por fuentes distintas

Metodologías en Procesamiento de Imágenes

- Compresión: - almacenamiento, + transmisión

TIF, tamaño 2 MB

JPG, calidad 30 %, tamaño 67.7 kB

Imagen del Mausoleo de los Veracruzanos Ilustres

Metodologías en Procesamiento de Imágenes

- Compresión: - almacenamiento, + transmisión

TIF, tamaño 2 MiB

JPG, calidad 5 %, tamaño 14.4 kB

Imagen del Mausoleo de los Veracruzanos Ilustres

Metodologías en Procesamiento de Imágenes

- Compresión: - almacenamiento, + transmisión

TIF, tamaño 2 MiB

JPG, calidad 1 %, tamaño 8 kB

Imagen del Mausoleo de los Veracruzanos Ilustres

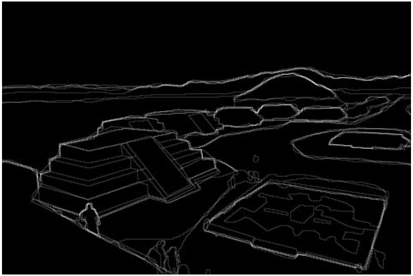
Metodologías en Procesamiento de Imágenes

- Realce: **resalta características**

Aumento del contraste para la imagen del Mausoleo

Metodologías en Procesamiento de Imágenes

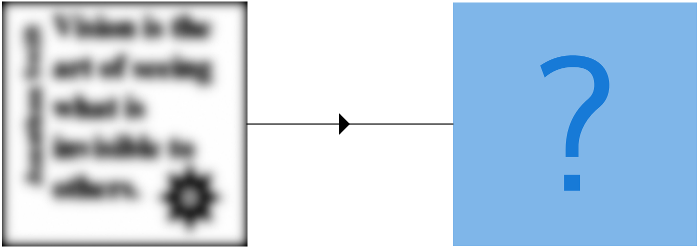
- Segmentación: s e p a r a   e n   r e g i o n e s



Identificación de bordes en la Imagen de Teotihuacán

Problemas en restauración de imágenes

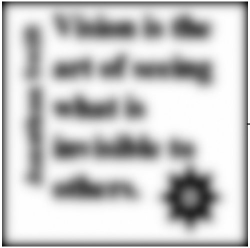
Deblurring [14]: Dada una imagen difuminada, obtener otra de la misma escena con menos degradación.



difuminada restaurada

Problemas en restauración de imágenes

Deblurring [14]: Dada una imagen difuminada, obtener otra de la misma escena con menos degradación.



difuminada

restaurada

Problemas en restauración de imágenes

Super-resolución [12]: A partir de imágenes difuminadas de la misma escena, obtener una imagen de alta resolución con menos degradación.

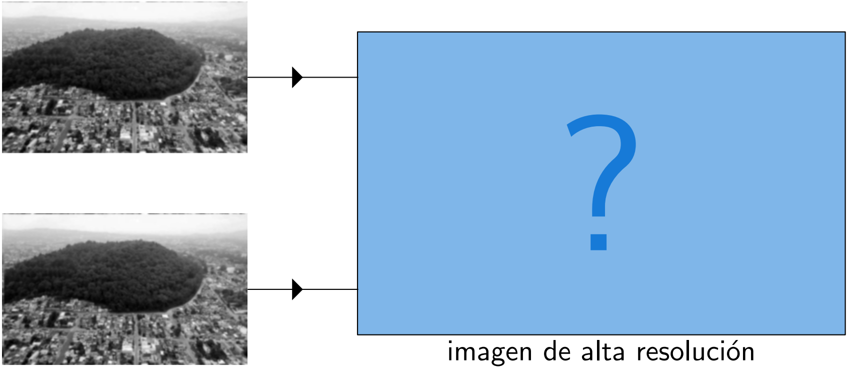
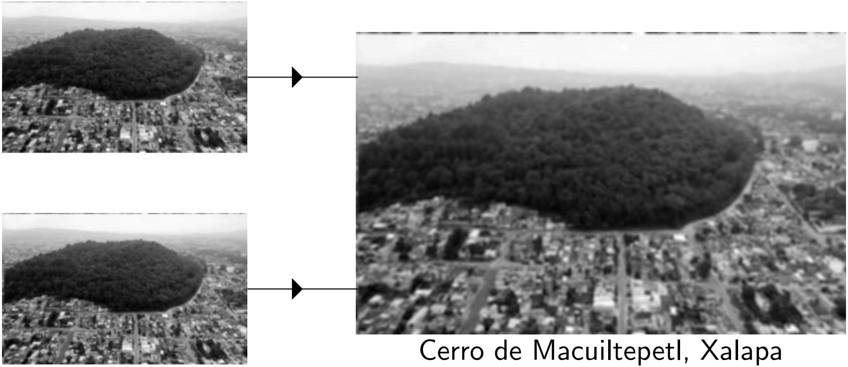


imagen de alta resolución

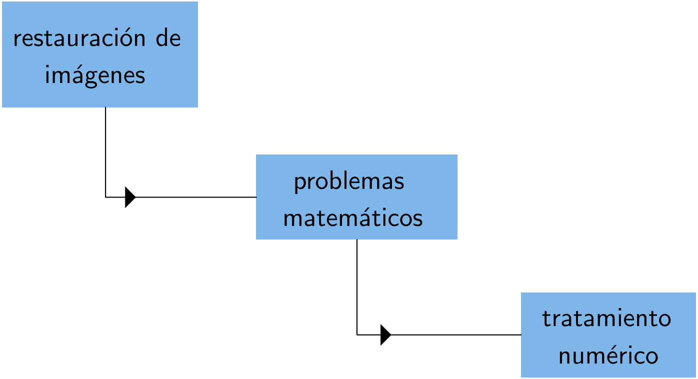
Problemas en restauración de imágenes

Super-resolución [12]: A partir de imágenes difuminadas de la misma escena, obtener una imagen de alta resolución con menos degradación.



Cerro de Macuiltepetl, Xalapa

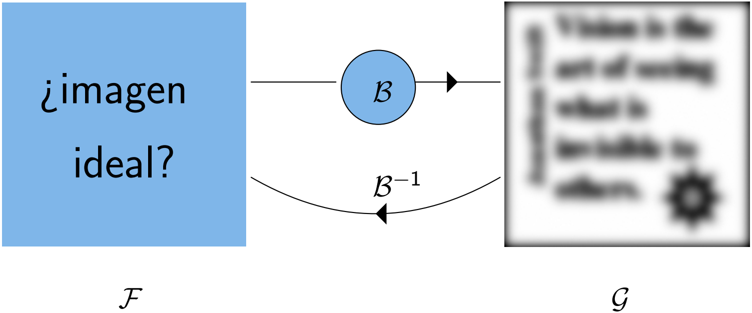
Objetivo



Limitaciones:

- ☞ imágenes del espectro visible en escala de grises
- ☞ tipo de difuminación conocido

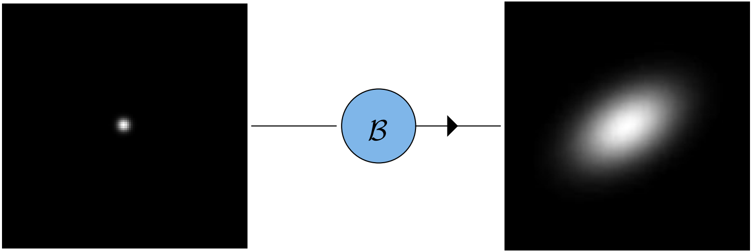
Deblurring: Problema Inverso de Difuminación



- funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$
- espacios vectoriales U, V y operador $\mathcal{B} : U \to V$

Problema: Dada $g \in V$, hallar $f \in U$ tal que $\mathcal{B}(f) = g$.

Modelo de Difuminación



$\delta(x-s, y-t)$
impulso unitario

$k((x,y),(s,t))$
función de dispersión (PSF)

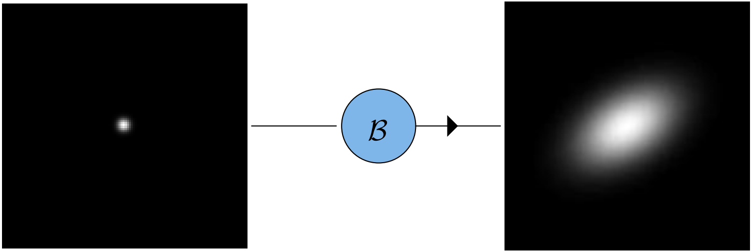
HIPÓTESIS

- $\mathcal{B}$ lineal

  $f(x,y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x-s, y-t) f(s,t) dsdt \longrightarrow \mathcal{B}[f](x,y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} k((x,y),(s,t)) f(s,t) dsdt$

- PSF cuadrado integrable

Modelo de Difuminación



$\delta(x-s, y-t)$

impulso unitario

$k((x,y),(s,t))$

función de dispersión (PSF)

HIPÓTESIS

- $\mathcal{B}$ espacialmente invariante

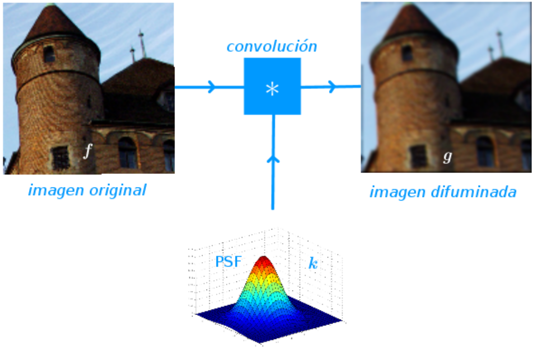
  $\mathcal{B}[f](x+s, y+t) = g(x+s, y+t)$

- PSF separable $\quad k(x,y) = k_1(x)k_2(y)$

$$\text{Dom}(k) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Dom}(k) = \mathbb{R}^2$$
$$k((x,y),(s,t)) = k(x-s, y-t)$$

Convolución: Modelo para difuminación

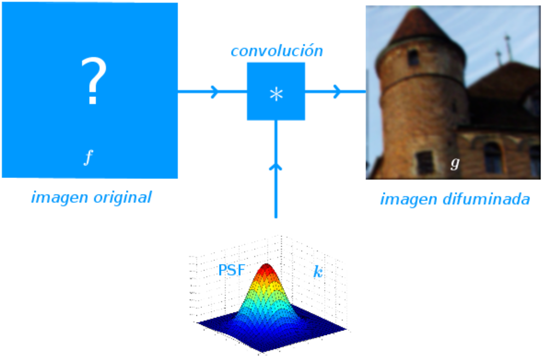
$$\mathcal{B}[f](s) = \int\int_{\mathbb{R}^2} k(x-s, y-t) f(s,t) dsdt = k * f$$



$$f \in L^2(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathcal{B}} k * f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

Deconvolución

Problema: Dada $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ y PSF k, hallar $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $g = k * f$.



Deblurring como deconvolución

Dificultades

PSF

$$k(x,y) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\cdot 5^2}\right)$$

Imagen restaurada

función f tal que $k * f = g$

Imagen difuminada de Bilblioteca Central
función g

Dificultades

- Problema mal planteado

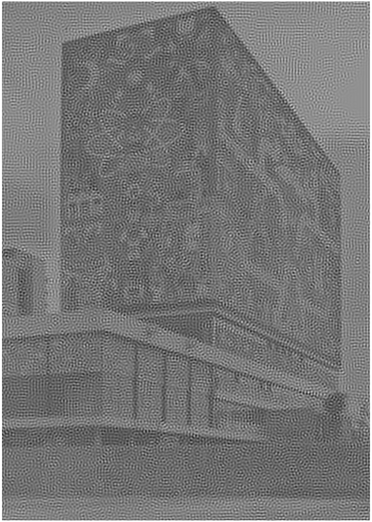


Imagen restaurada + degradación
Aproximación de función f

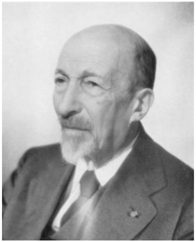
Deblurring: Problema Mal planteado

Problema: Dada $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, hallar $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathcal{B}[f] = g$.

Problema bien planteado

- tiene solución
- la solución es única
- la solución depende continuamente de los datos

De otro modo, problema mal planteado



J. S. Hadamard

¿$\mathcal{B}^{-1}$ es continuo sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$?

Deblurring: Problema Mal planteado

Problema: Dada $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, hallar $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathcal{B}[f] = g$.

HIPÓTESIS MODELO
PSF cuadrado integrable $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ compacto, continuo sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$

Teorema [3]

Sean U, V espacios normados con U de dimensión infinita.
Sea $T : U \to V$ un operador continuo y compacto. Entonces T^{-1} no es acotado.

- Operador lineal: acotado $\iff$ continuo

Resolver $\mathcal{B}[f] = g$ es un problema mal planteado

Dificultades

- Problema de gran escala
  matriz de 1418×1006
  1.4265×10^6 incógnitas

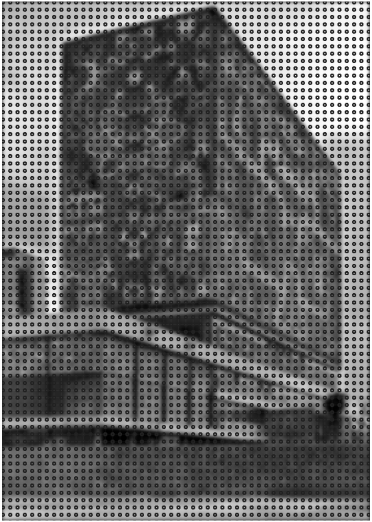


Imagen de 1006×1418 píxeles

Discretización

Imágenes digitales

función g
variables y valores
continuos

$\xrightarrow{\text{muestreo y cuantificación}}$

matriz G
variables y valores
discretos

Discretización

Imágenes digitales

$$\begin{array}{c}\text{función } g\\ \text{variables y valores}\\ \text{continuos}\end{array} \xrightarrow{\text{muestreo y cuantificación}} \begin{array}{c}\text{matriz } G\\ \text{variables y valores}\\ \text{discretos}\end{array}$$

Convolución Discreta

- muestras de g en $\mathbb{Z}^2$
- soporte de g en $[1, m] \times [1, n]$
- soporte de k en $[-l, l] \times [-r, r]$
- $m > 2l, n > 2r$

$$g(x, y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} k(x - s, y - t) f(s, t) ds dt, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$g_{i,j} = \sum_{p=-l}^{l} \sum_{q=-r}^{r} k_{i-p,j-q} f_{p,q}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{nm}$$

Convolución Discreta en 1 Dimensión

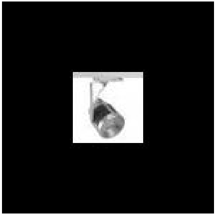
$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} k(y-t) f(t) dt, \quad y \in \mathbb{R} \longrightarrow g_j = \sum_{q=-r}^{r} k_{j-q} f_q, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccccccc|ccc}
k_r & \cdots & k_1 & k_0 & \cdots & \cdots & k_{-r} & & & & & & \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & & & & \\
 & & k_r & \vdots & & \ddots & & & \ddots & & & & \\
 & & & k_r & & & \ddots & & & k_{-r} & & & \\
 & & & & \ddots & & & \ddots & & \vdots & k_{-r} & & \\
 & & & & & \ddots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & k_r & \cdots & \cdots & k_0 & k_{-1} & \cdots & k_{-r}
\end{array}\right]}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} f_{-r+1} \\ \vdots \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{n+r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}
\underbrace{=}_{=}
\underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}}$$

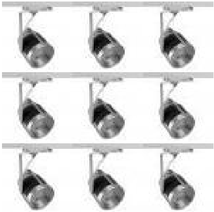
sistema indeterminado $n \times (n + 2r)$

Condiciones de frontera

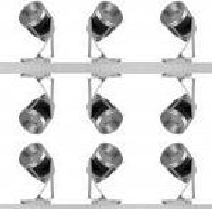
¿ valores de f fuera de $[1, m] \times [1, n]$?



cero



periódica



reflexiva

Una dimensión

$\downarrow$ A de Toeplitz

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_{-1} & k_{-2} & 0 & 0 \\ k_1 & k_0 & k_{-1} & k_{-2} & 0 \\ k_2 & k_1 & k_0 & k_{-1} & k_{-2} \\ 0 & k_2 & k_1 & k_0 & k_{-1} \\ 0 & 0 & k_2 & k_1 & k_0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ A circular

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_{-1} & k_{-2} & k_2 & k_1 \\ k_1 & k_0 & k_{-1} & k_{-2} & k_2 \\ k_2 & k_1 & k_0 & k_{-1} & k_{-2} \\ k_{-2} & k_2 & k_1 & k_0 & k_{-1} \\ k_{-1} & k_{-2} & k_2 & k_1 & k_0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ A es Toeplitz+Hankel

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{-2} \\ 0 & 0 & 0 & k_{-2} & k_{-1} \end{bmatrix}$$

Condiciones de frontera

Dos dimensiones: A de $n \times n$ bloques, cada uno de $m \times m$

Condición cero $n = m = 5$ y $l = r = 2$

$$A = \begin{bmatrix} A^{(0)} & A^{(-1)} & A^{(-2)} & 0_{5\times5} & 0_{5\times5} \\ A^{(1)} & A^{(0)} & A^{(-1)} & A^{(-2)} & 0_{5\times5} \\ A^{(2)} & A^{(1)} & A^{(0)} & A^{(-1)} & A^{(-2)} \\ 0_{5\times5} & A^{(2)} & A^{(1)} & A^{(0)} & A^{(-1)} \\ 0_{5\times5} & 0_{5\times5} & A^{(2)} & A^{(1)} & A^{(0)} \end{bmatrix},$$

donde

$$A^{(q)} = \begin{bmatrix} k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} & 0 & 0 \\ k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} & 0 \\ k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} & k_{-2,q} \\ 0 & k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q} & k_{-1,q} \\ 0 & 0 & k_{2,q} & k_{1,q} & k_{0,q} \end{bmatrix}.$$

condición	estructura por bloques	bloque
cero	Toeplitz	Toeplitz
periódica	Circular	Circular
reflexiva	Toeplitz + Hankel	Toeplitz + Hankel

Problema Discreto de Gran Escala

Dadas $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hallar $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$$

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & G_n \end{bmatrix}}_{\text{columnas}} \longrightarrow \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}$$

Problema Discreto de Gran Escala

Dadas $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hallar $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$$

G tamaño $1418 \times 1006 \longrightarrow A$ orden 1.4265×10^6

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

Problema Discreto de Gran Escala

Dadas $A \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$ y $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hallar $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$$

G tamaño $1418 \times 1006 \longrightarrow A$ orden 1.4265×10^6

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{R} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{C}$$

Hipótesis: PSF separable

Producto de Kronecker

$$A_{nm\times nm} = R_{n\times n} \otimes C_{m\times m}$$

condiciones cero $\longrightarrow$ $A =$ Toeplitz $\otimes$ Toeplitz

condiciones periódicas $\longrightarrow$ $A =$ Circular $\otimes$ Circular

condiciones reflexivas $\longrightarrow$ $A =$ (Toeplitz + Hankel) $\otimes$ (Toeplitz + Hankel)

Problema Discreto de Gran Escala

Dadas $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hallar $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$$

¿podemos reducir las dimensiones del problema?

$$\underset{A}{\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 & 8 \end{matrix}} = \underset{R}{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} \otimes \underset{C}{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}}$$

Hipótesis: PSF separable

Producto de Kronecker

$$A_{nm \times nm} = R_{n \times n} \otimes C_{m \times m}$$

Dadas matrices R, C y G, hallar matriz F tal que

$$(R \otimes C)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}.$$

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ de rango r tiene factorización matricial

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]_{M\times N}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r & \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix}^T}_{\boldsymbol{V}^T},$$

donde

- $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son los valores singulares de A.
- $U^T U = I_{M\times M}$ y $V^T V = I_{N\times N}$, sus columnas son vectores singulares

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ de rango r tiene factorización matricial

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]_{M\times N}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r & \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix}^T}_{\boldsymbol{V}^T},$$

donde

- $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son los valores singulares de A.
- $U^T U = I_{M\times M}$ y $V^T V = I_{N\times N}$, sus columnas son vectores singulares

Teorema (SVD de producto de Kronecker)

Sean

$$R = U_r \Sigma_r V_r^T \quad \text{y} \quad C = U_c \Sigma_c V_c^T$$

SVD's de R y C. Entonces

$$R \otimes C = \underbrace{(U_r \otimes U_c)}_{U} \underbrace{(\Sigma_r \otimes \Sigma_c)}_{\Sigma} \underbrace{(V_c \otimes V_r)}_{V^T}{}^T$$

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ de rango r tiene factorización matricial

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]_{M\times N}}_{\boldsymbol{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r & \boldsymbol{v}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix}^T}_{\boldsymbol{V}^T},$$

donde

- $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ son los valores singulares de A.
- $U^T U = I_{M\times M}$ y $V^T V = I_{N\times N}$, sus columnas son vectores singulares de A.

solución de cuadrados mínimos
de norma mínima de $A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}}{\sigma_i} \boldsymbol{v}_i.$$

Condicionamiento

¿ solución sensible a errores pequeños en A y $\boldsymbol{g}$?

número de condición $\kappa(A)$

$\kappa(A) \approx 10^{16}, 10^{30}$ $\longrightarrow$ cambios drásticos solución

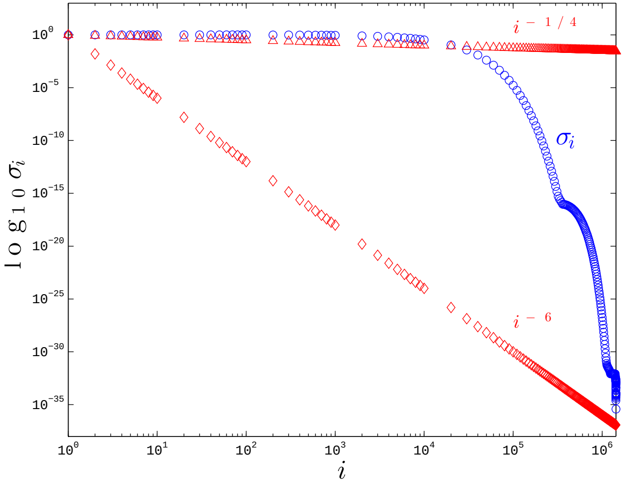
$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

Matriz A mal condicionada si $\sigma_r \ll \sigma_1$

Resolver $A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ es **problema discreto mal planteado** si $\{\sigma_i\}_{i=1}^r$ decae a cero sin saltos

- **Ligero**: $\sigma_j = \mathcal{O}(j^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1$
- **Moderado**: $\sigma_j = \mathcal{O}(j^{-\alpha}), \quad \alpha > 1$
- **Severo**: $\sigma_j = \mathcal{O}(e^{-j\alpha}), \quad \alpha > 0$

Condicionamiento



valores singulares σ_i en escala logarítmica de $A = R \otimes C$ con $\kappa(A) = 2.63237 \times 10^{35}$ en el deblurring de la imagen de la Biblioteca Central

Regularización

Resolver problema mal planteado

idea: reemplazarlo por otro bien planteado
(discretización no tan mal condicionada)

Tikhonov (1963) [34], Phillips (1962) [31]

Familia de problemas

- parámetro ¿qué valor elegir?
- cada uno con solución ¿cómo calcularla?

Métodos de regularización

- SVD truncada

solución de cuadrados mínimos de norma mínima de $A\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}}{\sigma_i} \boldsymbol{v}_i.$$

$\longrightarrow$

✄ valores singulares más pequeños

$$\boldsymbol{f}_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}}{\sigma_i} \boldsymbol{v}_i, \quad k = 1, \dots, r$$

Métodos de regularización

- SVD truncada

Ejemplo: Imagen difuminada de la Araucaria

- imagen 600×765 píxeles
- PSF $k(x,y) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2 \cdot 5^2}\right)$
- soporte $[-382, 382] \times [-299, 299]$
- condiciones de frontera cero

Métodos de regularización

- SVD truncada

Métodos de regularización

- Factores filtro

Modelo Lineal: $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \eta^2 I)$

Idea: regularización $\longrightarrow$ estimador sesgado $\boldsymbol{f}_{\text{reg}}$ para $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\varphi_i}{\sigma_i} (\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}) \boldsymbol{v}_i, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \leq k, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(SVD truncada)

Métodos de regularización

- Factores filtro

  Modelo Lineal: $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \eta^2 I)$

  Idea: regularización $\longrightarrow$ estimador sesgado $\boldsymbol{f}_{\text{reg}}$ para $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\varphi_i}{\sigma_i} (\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}) \boldsymbol{v}_i, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1$$

$$\varphi_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda}, \qquad \lambda > 0$$

Métodos de regularización

- ## Factores filtro

Modelo Lineal: $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \eta^2 I)$

Idea: regularización $\longrightarrow$ estimador sesgado $\boldsymbol{f}_{\text{reg}}$ para $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\varphi_i}{\sigma_i}(\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g})\boldsymbol{v}_i, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1$$

Ejemplo: Texto difuminado

- imagen 256×256 píxeles
- PSF $k(x, y) = \dfrac{1}{3.5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2 + y^2}{2 \cdot 3.5^2}\right)$
- soporte $[-127, 127] \times [-127, 127]$
- condiciones de frontera períodicas
- $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, 10^{-4} I)$

Métodos de regularización

- Factores filtro

  Modelo Lineal: $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \eta^2 I)$

  Idea: regularización $\longrightarrow$ estimador sesgado $\boldsymbol{f}_{\text{reg}}$ para $\boldsymbol{f}$

Métodos de regularización

- Problema de cuadrados mínimos con restricción cuadrática

$$\min_{\substack{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^N \\ \|\boldsymbol{f}\|_2^2\leq\Delta^2}} \|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2$$

residuo $\longrightarrow$ modelo cuadrático de una función

$$\|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2 = \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T H\boldsymbol{f}$$

$H = 2A^TA$ hessiano, $\boldsymbol{d} = -2A^T\boldsymbol{g}$ gradiente

Subproblema de región de confianza (TRS)

$$\min_{\substack{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^N \\ \|\boldsymbol{f}\|_2^2\leq\Delta^2}} \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T H\boldsymbol{f}$$

parámetro de regularización: radio Δ

Métodos de regularización

- Problema de cuadrados mínimos con restricción cuadrática

$$\min_{\substack{\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^N \\ \|\boldsymbol{f}\|_2^2\leq\Delta^2}} \|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2$$

residuo $\longrightarrow$ modelo cuadrático de una función

$$\|A\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_2^2 = \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T H\boldsymbol{f}$$

$H = 2A^TA$ hessiano, $\boldsymbol{d} = -2A^T\boldsymbol{g}$ gradiente

Teorema [4]

$\boldsymbol{f}$ es solución de TRS si $\exists\ \mu_\Delta \geq 0$ tal que

- $\mu_\Delta(\|\boldsymbol{f}\|_2 - \Delta) = 0$,
- $(H + \mu_\Delta I)\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{d}$,

donde H semidefinida positiva.

☞ Métodos para TRS de gran escala y H mal condicionada [29],[33]

Métodos de regularización

- Regularización de Tikhonov

$$\min_{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N} \|A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_2^2 + \lambda^2 \|\boldsymbol{f}\|_2^2$$

ecuaciones normales regularizadas $(A^T A + \lambda^2 I)\boldsymbol{f} = A^T \boldsymbol{g}$

solución regularizadora $\boldsymbol{f}_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} (\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{g}) \boldsymbol{v}_i, \quad \lambda > 0$

Métodos de regularización

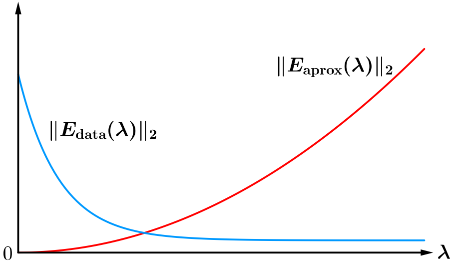
- Regularización de Tikhonov

$$\min_{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N} \|A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_2^2 + \lambda^2 \|\boldsymbol{f}\|_2^2$$

Elección del parámetro de regularización

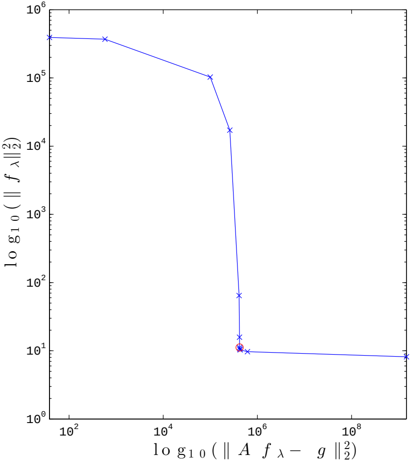
error de la solución regularizadora	=	error de aproximación	+	error de los datos

Regularización de Tikhonov



Tamaños de E_{data} y E_{aprox} en función del parámetro de regularización λ.

Criterio de L-curva



Para la regularización de Tikhonov graficamos la curva $(\|A\boldsymbol{f}_\lambda - \boldsymbol{g}\|_2^2, \|\boldsymbol{f}_\lambda\|_2^2)$ con forma de L en escala logarítmica. El punto de mayor curvatura está en la esquina de la L.

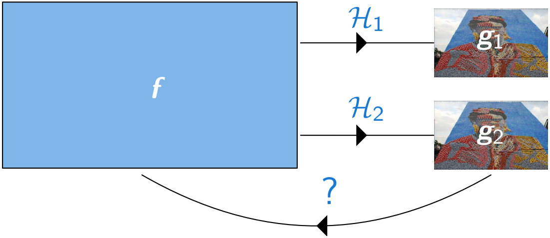
Criterio de L-curva

$\lambda = 0.02$

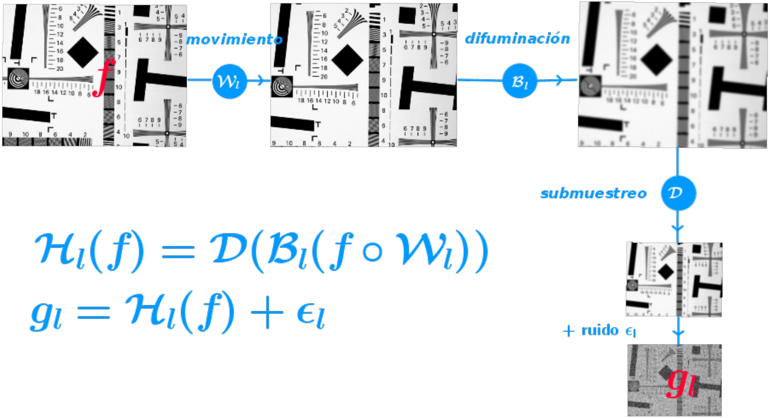
Super-resolución: Problema inverso de generar imágenes LR

Dadas funciones $g_l : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ asociadas a imágenes de baja resolución (LR) y operadores $H_l : U \to V$ entre espacios vectoriales U, V, hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ tal que

$$g_l = H_l(f), \quad l = 1, \ldots, L.$$



Modelo para generar imágenes LR



$$\mathcal{H}_l(f) = \mathcal{D}(\mathcal{B}_l(f \circ \mathcal{W}_l))$$

$$g_l = \mathcal{H}_l(f) + \epsilon_l$$

Modelo para generar imágenes LR

HIPÓTESIS:

- $\mathcal{W}_l$ traslación
- $\mathcal{B}_l = \mathcal{B}$ lineal, espacialmente invariante, separable
- $\mathcal{D}$ reescala en factor $\rho \in \mathbb{N}$

DISCRETIZACIÓN:

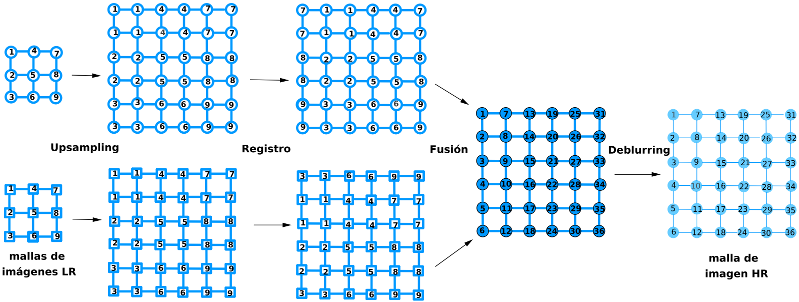
alta resolución $F \in \mathbb{R}^{\rho m \times \rho n}$

baja resolución $G_l \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\rho^2 nm}} \quad \begin{array}{ll} W_l : & \mathbb{R}^{\rho^2 nm} \to \mathbb{R}^{\rho^2 nm} \\ B : & \mathbb{R}^{\rho^2 nm} \to \mathbb{R}^{\rho^2 nm} \\ D : & \mathbb{R}^{\rho^2 nm} \to \mathbb{R}^{nm} \end{array} \quad \xrightarrow{\boldsymbol{g}_l = DBW_l\boldsymbol{f}}$$

Método para Super-resolución

- Caso para 2 imágenes de baja resolución



$$\xrightarrow{\text{Registro}} \text{SVD's} \quad \begin{matrix} Z_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T \\ Z_2 = U_2 \Sigma_2 V_2^T \end{matrix} \xrightarrow{\text{Fusión [19]}} Z = U_2 \Sigma V_2^T, \quad \Sigma = \begin{cases} \Sigma_1, & \sigma^1_{\text{máx}} \geq \sigma^2_{\text{máx}} \\ \Sigma_2, & \sigma^2_{\text{máx}} > \sigma^1_{\text{máx}} \end{cases}$$

Ejemplo de Super-resolución

- imágenes $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ de 250×200 píxeles
- $\mathcal{G}_1$ referencia
- $\mathcal{G}_2$ 5 píxeles $\downarrow$ 5 píxeles $\rightarrow$
- condiciones de frontera periódicas

- PSF $k_{i,j} = \begin{cases} 1/(2.5^2\pi) & i^2 + j^2 \leq 2.5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

  soporte $[-124, 124] \times [-99, 99]$

obtener imagen $\mathcal{F}$ de 500×400 píxeles

$\mathcal{G}_1$

$\mathcal{G}_2$

Ejemplo

- Upsampling

$$S_l = G_l \otimes I_{2\times 2}, \quad l = 1, 2$$

- Registro

$$\begin{aligned} Z_1 &= S_1 \\ Z_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5\times 495} & I_{5\times 5} \\ I_{495\times 495} & \mathbf{0}_{495\times 5} \end{bmatrix}^T S_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5\times 395} & I_{5\times 5} \\ I_{395\times 495} & \mathbf{0}_{395\times 5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Fusión

$$Z = U_2 \Sigma_1 V_2^T$$

- Deblurring

$$(R \otimes C)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{z}$$

regularización por
SVD truncada de $R \otimes C$

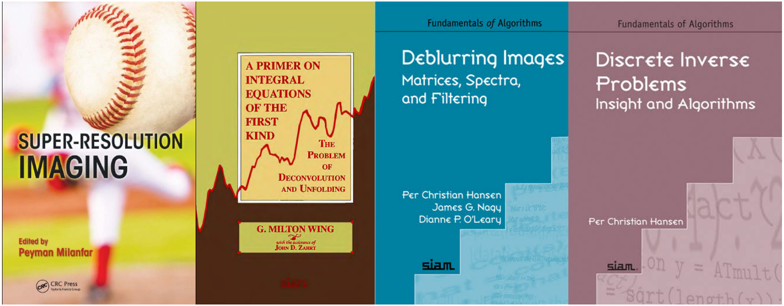
Regularización en Super-Resolución

Conclusiones

- La SVD juega un papel importante en el diseño de métodos de regularización
- La deconvolución es central en problemas asociados con la restauración de imágenes.
- Cuando la PSF es separable en el deblurring, aprovechamos la estructura de las matrices para reducir las dimensiones del problema.
- Usamos las bibliotecas `REGUTOOLS` y `HNO` en deblurring. Para los ejemplos de super-resolución, programamos en `Matlab`.
- Deseamos tratar con más casos de super-resolución
- Queremos abordar el deblurring mediante el subproblema de región de confianza.

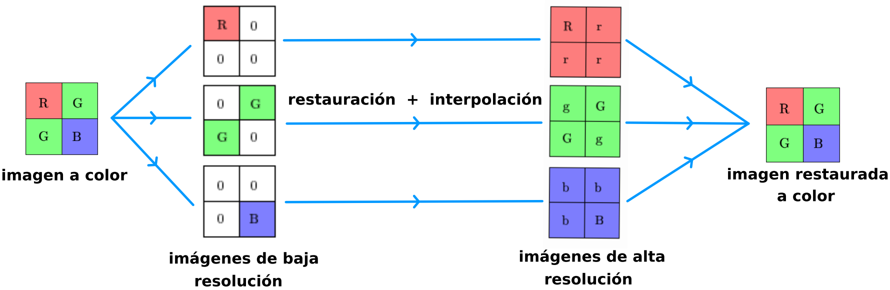
G R A C I A S

Referencias



Restauración de Imágenes a Color

- Modelo de color RGB[20]



Referencias I

- R. C. Aster, B. Borchers, C. H. Thurber.
  Parameter Estimation and Inverse Problems.
  Elsevier Inc., 2005
- D. Capel.
  Image Mosaicing and Super-Resolution.
  Springer, 2004.
- D. Colton, R. Kress.
  Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory.
  Springer, 2013.
- A. R. Conn, N. I. M Gould, P. L. Toint.
  Trust-Region Methods.
  MPS-SIAM, 2000.
- P.C. Hansen.
  Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems.
  SIAM, 1988.
- P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary.
  Deblurring Images: matrices, spectra and filtering.
  SIAM, 2006.

Referencias II

P. C. Hansen
Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms.
SIAM, 2010.

G. H. Golub, C. F. Van Loan.
Matrix Computations.
The Johns Hopkins Univerity Press, Fourth Edition, 2013.

R. C. Gonzalez, R. E. Woods.
Digital Image Processing.
Prentice Hall, Second Edition, 2002.

C.W. Groetsch.
Inverse Problems: Activities for Undergraduates.
The Mathematical Association of America, 1999.

J. Kamm.
Singular value descomposition based methods for signal and image restoration.
PhD thesis, Southern Mehodist University, Dallas, TX, 1998.

P. Milanfar.
Super-Resolution Imaging.
Taylor & Francis Group, LLC., 2011.

Referencias III

A. Mohammand.
Inverse Problems in Vision and 3D Tomography.
ISTE Ltd, John Wiley & Sons, Inc. 2010.

D. P. O'Leary.
Scientific Computing with Case Studies.
SIAM, 2008.

R. J. Schwarz, B. Friedland.
Linear Systems.
McGraw Hill, Inc, 1965

G.M. Wing, J.D. Zahrt.
A Primer on Integral Equations of the First Kind: The Problem of Deconvolution and Unfolding.
SIAM, 1991.

L. Allen, R. Angel, J. D. Mangus, G. A Rodney, R. R. Shannon, C. P. Spoelhof.
The Hubble Space Telescopy Optical System Failure Report.
NASA-TM-103443, November 1990.

J. Barsley, S. Jefferies, J. Nagy, R. Plemmons.
Restoration of Images with an Unknown, Spatially-Varying Blur.
Optical Society of America, 2005.

Referencias IV

A. G. Devi, T. Madhu, K. Lal Kishore.
An Improved Super Resolution Image Reconstruction using SVD based Fusion and Blind Deconvolution techniques.
International Journal of Signal Processing, Image Procesing and Pattern Recognition Vol. 7, No. 1 (2014), pp. 239-298.

K. Frisenfeldt, I. Kraglund.
Deblurring of Digital Color Images.
Technical University of Denmark, 2003.

G. H. Golub, M. Heath, G. Wahba
Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter.
Technometrics, Vol. 21, No. 2 (1979), pp. 215-223.

P. C. Hansen.
`REGULARIZATION TOOLS`*: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems.*
Numerical Algorithms 6 (1994), pp. 1-35.

M. Hanke, P. C. Hansen.
Regularization methods for large-scale problems.
Surv. of Math. Ind. 3 (1993), pp. 253-315.

Referencias V

M. Hanke.
Conjugate gradient type methods for ill.posed problems.
Longman Scientific & Technical, 1995.

A. Hoerl, R. Kennard.
Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems.
Technometrics, Vol. 12, No. 1 (1970), pp. 55-67.

J. Kamm, J.G. Nagy
Kronecker products and SVD approximations for separable spatially variant blurs, 1998.

D. Keren, S. Pegel, R. Brada.
Image Sequence Enhancement using Sub-Píxel Displacements.
Computer Vision and Pattern Recognition, 1998.

M. K. Ng, R. H. Chan, W. Tang.
A Fast Algorithm for Deblurring Models with Neumann Boundary Conditions.
SIAM, J. Sci. Comput. Vol. 21, No. 3 (1999), pp. 851-866.

N. Nguyen, P. Milanfar, G. Golub.
A Computationally Efficient Superresolution Image Reconstruction Algorithm .
IEEE Transaction on Image Processing, Vol. 10, No. 4 (2001), pp. 573-583.

Referencias VI

S. C. Park, M. Y. Park, M. G. Kang.
Super-Resolution Image Reconstruction: A Technical Overview.
IEEE Signal Processing Magazine, 2003, pp. 21-36.

D. L. Phillips.
A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind.
J. Assoc. Comput. Mach., 9 (1962), pp 84-97.

M. Rojas.
Regularization of large scale ill-conditioned least squares problems. 1996.

S. A. Santos, D. C. Sorensen.
A new matrix-free algorithm for the large-scale trust region subproblem.
Technical Report 95-20, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice univeristy, 1995.

A. N. Tikhonov.
The solution of ill-posed problems.
Doklady Akad. Nauk SSSR Vol. 151, No. 3 (1963).