50º CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Un modelo para el cálculo del déficit de presión en un pozo petrolero usando derivadas Caputo de orden fraccionario

Benito Fernando Martínez-Salgado   Fernando Brambila-Paz   Rolando Rosas-Sampayo   Carlos Fuentes

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

25 de octubre de 2017

Contenido

Motivación

En 2010 la compañía petrolera *British Petroleum (BP)*, ocasionó un enorme accidente durante perforaciones en una plataforma de exploración de aguas profundas provocando uno de los mayores desastres ecológicos del mundo.

Motivación

En 2010 la compañía petrolera *British Petroleum (BP)*, ocasionó un enorme accidente durante perforaciones en una plataforma de exploración de aguas profundas provocando uno de los mayores desastres ecológicos del mundo.

Motivación

En 2010 la compañía petrolera *British Petroleum (BP)*, ocasionó un enorme accidente durante perforaciones en una plataforma de exploración de aguas profundas provocando uno de los mayores desastres ecológicos del mundo.

Solicitud de investigación

PEMEX plantea revisar el modelo actual y estudiar la posibilidad de considerar propiedades adicionales del medio.

Solicitud de investigación

PEMEX plantea revisar el modelo actual y estudiar la posibilidad de considerar propiedades adicionales del medio.

- Porosidad ~ Dimensión Fractal

Solicitud de investigación

PEMEX plantea revisar el modelo actual y estudiar la posibilidad de considerar propiedades adicionales del medio.

- Porosidad $\sim$ Dimensión Fractal
- Derivadas fraccionarias

PEMEX

Solicitud de investigación

PEMEX plantea revisar el modelo actual y estudiar la posibilidad de considerar propiedades adicionales del medio.

- Porosidad $\sim$ Dimensión Fractal
- Derivadas fraccionarias
- Geometría Fractal versus Calculo Fraccionario

PEMEX

Solicitud de investigación

PEMEX plantea revisar el modelo actual y estudiar la posibilidad de considerar propiedades adicionales del medio.

- Porosidad $\sim$ Dimensión Fractal
- Derivadas fraccionarias
- Geometría Fractal versus Calculo Fraccionario
- Ecuaciones Diferenciales Parciales Fraccionarias

Se estudia la relación entre características de los yacimientos y el análisis fractal

- Con estadística a través del Ruido Fraccional Gaussiano usando registros sísmicos, de permeabilidad y de porosidad de varios yacimientos [Hardy and Beier, 1994].

Se estudia la relación entre características de los yacimientos y el análisis fractal

- Con estadística a través del Ruido Fraccional Gaussiano usando registros sísmicos, de permeabilidad y de porosidad de varios yacimientos [Hardy and Beier, 1994].
- Con teoría de dispersión es posible relacionar la dimensión fractal de la gráfica de diferentes tipos de ondas con propiedades físicas del medio Miranda-Martínez et al. [2006].

Se estudia la relación entre características de los yacimientos y el análisis fractal

- Con estadística a través del Ruido Fraccional Gaussiano usando registros sísmicos, de permeabilidad y de porosidad de varios yacimientos [Hardy and Beier, 1994].
- Con teoría de dispersión es posible relacionar la dimensión fractal de la gráfica de diferentes tipos de ondas con propiedades físicas del medio Miranda-Martínez et al. [2006].
- No todos los yacimientos son necesariamente considerados como fractales [Hardy and Beier, 1994].

Modelación del fenómeno físico

En el yacimiento se presenta de manera simultánea el movimiento de agua, gas y aceite (o petróleo), en un medio poroso compuesto de una matriz, un medio fracturado y un medio vugular [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014, Peaceman, 1977]. Para el modelo se hace uso de:

Modelación del fenómeno físico

En el yacimiento se presenta de manera simultánea el movimiento de agua, gas y aceite (o petróleo), en un medio poroso compuesto de una matriz, un medio fracturado y un medio vugular [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014, Peaceman, 1977]. Para el modelo se hace uso de:

- Ecuación de continuidad

Modelación del fenómeno físico

En el yacimiento se presenta de manera simultánea el movimiento de agua, gas y aceite (o petróleo), en un medio poroso compuesto de una matriz, un medio fracturado y un medio vugular [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014, Peaceman, 1977]. Para el modelo se hace uso de:

- Ecuación de continuidad
- Ley de Darcy

Modelación del fenómeno físico

En el yacimiento se presenta de manera simultánea el movimiento de agua, gas y aceite (o petróleo), en un medio poroso compuesto de una matriz, un medio fracturado y un medio vugular [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014, Peaceman, 1977]. Para el modelo se hace uso de:

- Ecuación de continuidad
- Ley de Darcy
- Ecuaciones de Navier-Stokes

Modelación del fenómeno físico

En el yacimiento se presenta de manera simultánea el movimiento de agua, gas y aceite (o petróleo), en un medio poroso compuesto de una matriz, un medio fracturado y un medio vugular [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014, Peaceman, 1977]. Para el modelo se hace uso de:

- Ecuación de continuidad
- Ley de Darcy
- Ecuaciones de Navier-Stokes
- Geometría del medio fractal

Modelo en derivadas enteras

Basado en el modelo presentado en los trabajos Gómez et al. [2013], Camacho-Velazquez et al. [2005] se presenta como en Fuentes-Ruíz (Responsable) [2014] el planteamiento del modelo de flujo saturado en medios porosos partiendo de la Ley de Darcy

$$q = -\frac{1}{\mu}k(p)(\nabla p - \rho g \nabla D)$$

Modelo en derivadas enteras

Basado en el modelo presentado en los trabajos Gómez et al. [2013], Camacho-Velazquez et al. [2005] se presenta como en Fuentes-Ruíz (Responsable) [2014] el planteamiento del modelo de flujo saturado en medios porosos partiendo de la Ley de Darcy

$$q = -\frac{1}{\mu} k(p)(\nabla p - \rho g \nabla D)$$

la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho \Upsilon$$

Modelo en derivadas enteras

Basado en el modelo presentado en los trabajos Gómez et al. [2013], Camacho-Velazquez et al. [2005] se presenta como en Fuentes-Ruíz (Responsable) [2014] el planteamiento del modelo de flujo saturado en medios porosos partiendo de la Ley de Darcy

$$q = -\frac{1}{\mu} k(p)(\nabla p - \rho g \nabla D)$$

la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho \Upsilon$$

obteniendo la ecuación general de flujo

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\rho}{\mu} k(p)(\nabla p - \rho g \nabla D)\right] + \rho \Upsilon$$

Modelo en derivadas enteras

Donde:

- q es el flujo de Darcy
- μ viscosidad dinámica del fluido
- p la presión
- ρ es la densidad del fluido
- k es el tensor de permeabilidad del medio poroso saturado
- g es la aceleración de la gravedad
- D es la profundidad como una función de las coordenadas espaciales
- t es el tiempo
- Υ es un término fuente

Sistema de ecuaciones

Considerando cada medio se obtiene un sistema de ecuaciones donde cada ecuación representa la transferencia para cada medio poroso (ver [Martínez-Salgado et al., 2017])

Sistema de ecuaciones

Considerando cada medio se obtiene un sistema de ecuaciones donde cada ecuación representa la transferencia para cada medio poroso (ver [Martínez-Salgado et al., 2017])

$$\frac{\partial(\rho\phi_m)}{\partial t} = \nabla\cdot\left[\frac{\rho}{\mu}k_m(\nabla p_m - \rho g\nabla D)\right] + \frac{\rho}{\nu_m}(\Upsilon_{mf} + \Upsilon_{mv}),$$

$$\frac{\partial(\rho\phi_f)}{\partial t} = \nabla\cdot\left[\frac{\rho}{\mu}k_f(\nabla p_f - \rho g\nabla D)\right] - \frac{\rho}{\nu_f}(\Upsilon_{mf} - \Upsilon_{fv}),$$

$$\frac{\partial(\rho\phi_v)}{\partial t} = \nabla\cdot\left[\frac{\rho}{\mu}k_v(\nabla p_v - \rho g\nabla D)\right] - \frac{\rho}{\nu_v}(\Upsilon_{mv} + \Upsilon_{fv})$$

donde $\nu_m + \nu_f + \nu_v = 1$ y $\nu_m = \frac{V_m}{V_T}, \nu_f = \frac{V_f}{V_T}, \nu_v = \frac{V_v}{V_T}$.

Suponiendo densidad y viscosidad del fluido constantes y haciendo $z = D$ el sistema se simplifica

Suponiendo densidad y viscosidad del fluido constantes y haciendo $z = D$ el sistema se simplifica

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\mu} \Delta p_m + a_{mf}(p_f - p_m) + a_{mg}(p_v - p_m)$$

$$\phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{k_f}{\mu} \Delta p_f - a_{mf}(p_f - p_m) + a_{fv}(p_v - p_f)$$

$$\phi_v c_v \frac{\partial p_v}{\partial t} = \frac{k_v}{\mu} \Delta p_v - a_{mv}(p_v - p_m) - a_{fv}(p_v - p_f)$$

$$c_i = \frac{1}{\phi_v} \frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}$$

Modelo de flujo monofásico con triple porosidad y triple permeabilidad

En el sistema anterior

$$\Upsilon_{mf} = a_{mf}(p_f - p_m), \qquad \Upsilon_{mv} = a_{mv}(p_v - p_m), \qquad \Upsilon_{fv} = a_{fv}(p_v - p_f) \qquad .$$

Donde a_{mf}, a_{mv} y a_{fv} son coeficientes de transferencia en cada medio.

Modelo de flujo monofásico con triple porosidad y triple permeabilidad

En el sistema anterior

$$\Upsilon_{mf} = a_{mf}(p_f - p_m), \qquad \Upsilon_{mv} = a_{mv}(p_v - p_m), \qquad \Upsilon_{fv} = a_{fv}(p_v - p_f) \qquad .$$

Donde a_{mf}, a_{mv} y a_{fv} son coeficientes de transferencia en cada medio.
El sistema es el modelo monofásico de triple porosidad y triple permeabilidad, en coordenadas polares se expresa como [Fuentes-Ruíz (Responsable), 2014]:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_m}{\partial r}\right) + \frac{k_m}{\mu}\frac{\partial^2 p_m}{\partial z^2} + a_{mf}(p_f - p_m) + a_{mg}(p_v - p_m)$$

$$\phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{k_f}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_f}{\partial r}\right) + \frac{k_f}{\mu}\frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2} - a_{mf}(p_f - p_m) + a_{fv}(p_v - p_f)$$

$$\phi_v c_v \frac{\partial p_v}{\partial t} = \frac{k_v}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_v}{\partial r}\right) + \frac{k_v}{\mu}\frac{\partial^2 p_v}{\partial z^2} - a_{mv}(p_v - p_m) - a_{fv}(p_v - p_f).$$

Modelo del flujo monofásico de triple porosidad y triple permeabilidad

El sistema que se estudia es en variables adimensionales dado por

$$(1-\omega_f-\omega_v)\frac{\partial p_m}{\partial t} = (1-\kappa_f-\kappa_v)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_m}{\partial r}\right) + \lambda_{mf}(p_f-p_m) + \lambda_{mv}(p_v-p_m) \quad (1)$$

$$\omega_f\frac{\partial p_f}{\partial t} = \kappa_f\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_f}{\partial r}\right) - \lambda_{mf}(p_f-p_m) + \lambda_{fv}(p_v-p_f) \quad (2)$$

$$\omega_v\frac{\partial p_v}{\partial t} = \kappa_v\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_v}{\partial r}\right) - \lambda_{mv}(p_v-p_m) - \lambda_{fv}(p_v-p_f). \quad (3)$$

Modelo del flujo monofásico de triple porosidad y triple permeabilidad

El sistema que se estudia es en variables adimensionales dado por

$$(1-\omega_f-\omega_v)\frac{\partial p_m}{\partial t} = (1-\kappa_f-\kappa_v)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_m}{\partial r}\right) + \lambda_{mf}(p_f-p_m) + \lambda_{mv}(p_v-p_m) \quad (1)$$

$$\omega_f\frac{\partial p_f}{\partial t} = \kappa_f\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_f}{\partial r}\right) - \lambda_{mf}(p_f-p_m) + \lambda_{fv}(p_v-p_f) \quad (2)$$

$$\omega_v\frac{\partial p_v}{\partial t} = \kappa_v\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_v}{\partial r}\right) - \lambda_{mv}(p_v-p_m) - \lambda_{fv}(p_v-p_f). \quad (3)$$

Con las condiciones de frontera

$$\lim_{r\to 1} r(1-\kappa_f-\kappa_v)\frac{\partial p_m}{\partial r} + r\kappa_f\frac{\partial p_f}{\partial r} + r\kappa_v\frac{\partial p_v}{\partial r} = -1,$$

$$p_w(t) = p_m(r=1,t) = p_f(r=1,t) = p_v(r=1,t)$$

Lo anterior está expresado en la misma notación que las variables usuales, para evitar introducir el subíndice D para las variables ya adimensionalizadas, los respectivos cambios son:

Lo anterior está expresado en la misma notación que las variables usuales, para evitar introducir el subíndice D para las variables ya adimensionalizadas, los respectivos cambios son:

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v}, \qquad \omega_v = \frac{\phi_v c_v}{\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v}, \qquad r_D = \frac{r}{r_w},$$

$$\kappa_f = \frac{k_f}{k_m + k_f + k_v}, \qquad \kappa_v = \frac{k_v}{k_m + k_f + k_v},$$

$$\lambda_{mf} = \frac{a_{mf}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v}, \qquad \lambda_{mv} = \frac{a_{mv}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v} \qquad \lambda_{fv} = \frac{a_{fv}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v}$$

$$p_{Dj} = \frac{2\pi h(k_m + k_f + k_v)(p_i - p_j)}{Q_0 B_0 \mu}, \qquad t_D = \frac{t(k_m + k_f + k_v)}{\mu r_w^2(\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v)},$$

Lo anterior está expresado en la misma notación que las variables usuales, para evitar introducir el subíndice D para las variables ya adimensionalizadas, los respectivos cambios son:

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v}, \qquad \omega_v = \frac{\phi_v c_v}{\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v}, \qquad r_D = \frac{r}{r_w},$$

$$\kappa_f = \frac{k_f}{k_m + k_f + k_v}, \qquad \kappa_v = \frac{k_v}{k_m + k_f + k_v},$$

$$\lambda_{mf} = \frac{a_{mf}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v}, \qquad \lambda_{mv} = \frac{a_{mv}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v} \qquad \lambda_{fv} = \frac{a_{fv}\mu r_w^2}{k_m + k_f + k_v}$$

$$p_{Dj} = \frac{2\pi h(k_m + k_f + k_v)(p_i - p_j)}{Q_0 B_0 \mu}, \qquad t_D = \frac{t(k_m + k_f + k_v)}{\mu r_w^2(\phi_m c_m + \phi_f c_f + \phi_v c_v)},$$

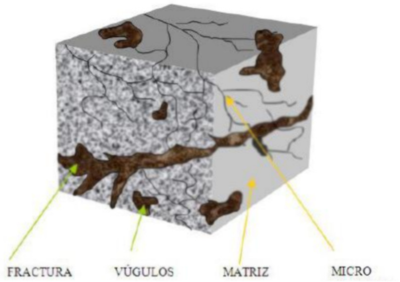
con r_w el radio del pozo, Q_0 el caudal con unidades de $m^3 s^{-1}$ y B_0 el factor de formación del fluido (adimensional).

¿Porqué Fraccionario?

- Medios no homogéneos

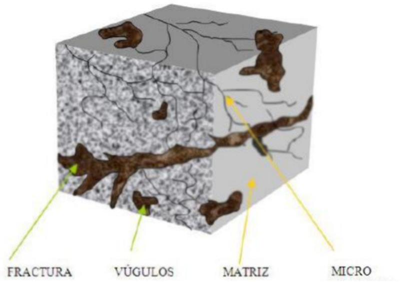
¿Porqué Fraccionario?

- Medios no homogéneos
  - Multiescala: Estructuras fractales



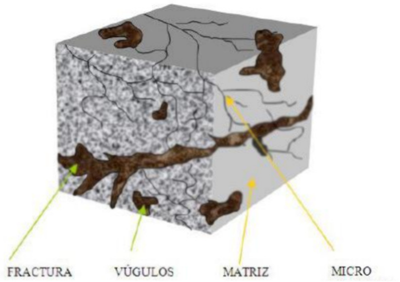
¿Porqué Fraccionario?

- Medios no homogéneos
  - Multiescala: Estructuras fractales
  - Fractura
  - Vúgulo
  - Matriz



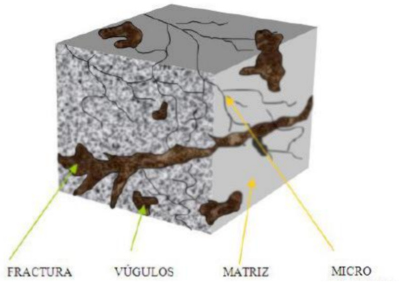
¿Porqué Fraccionario?

- Medios no homogéneos
  - Multiescala: Estructuras fractales
  - Fractura
  - Vúgulo
  - Matriz
- Interacciones Fluido-Medio



¿Porqué Fraccionario?

- Medios no homogéneos
  - Multiescala: Estructuras fractales
  - Fractura
  - Vúgulo
  - Matriz
- Interacciones Fluido-Medio
  - Efectos de Memoria



Enlace con geometría Fractal

Textos sobre cálculo fraccionario

- Podlubny [1999]

Enlace con geometría Fractal

Textos sobre cálculo fraccionario

- Podlubny [1999]
- Samko et al. [1993]

Enlace con geometría Fractal

Textos sobre cálculo fraccionario

- Podlubny [1999]
- Samko et al. [1993]
- Oldham and Spanier [1974]

Enlace con geometría Fractal

Textos sobre cálculo fraccionario

- Podlubny [1999]
- Samko et al. [1993]
- Oldham and Spanier [1974]
- Miller and Ross [1993]

Enlace con geometría Fractal

Textos sobre cálculo fraccionario

- Podlubny [1999]
- Samko et al. [1993]
- Oldham and Spanier [1974]
- Miller and Ross [1993]

Una versión de Ley de Darcy [Le Méhauté, 1984] y que se escribe en términos de una derivada fraccional de Caputo [Raghavan, 2011]

$$q(x,t) = -\frac{K_\gamma}{\mu}\frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial t^{\gamma-1}}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

donde $\gamma = \frac{1}{d_f}$, con d_f dimensión fractal de Hausdorff del medio [Le Méhauté, 1991].

Ecuación de difusión

Recordando la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q_i(\bar{x};t) = \phi c \frac{\partial}{\partial t} p(\bar{x},t)$$

Ecuación de difusión

Recordando la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q_i(\bar{x};t) = \phi c \frac{\partial}{\partial t} p(\bar{x},t)$$

Al combinar las dos anteriores ecuaciones se obtiene una ecuación de difusión con simetría radial:

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1} \lambda(r) \frac{\partial p(r,t)}{\partial r} \right] = \phi c \frac{\partial^{2-\gamma}}{\partial t^{2-\gamma}} p(r,t) \tag{4}$$

con n la dimensión euclidiana del medio, en nuestro caso $n = 2$.

Definiciones Principales

Definición (Integral Fraccional de Riemann-Liouville)

La integral fraccional de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ como:

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ \alpha > 0 $$

Definiciones Principales

Definición (Integral Fraccional de Riemann-Liouville)

La integral fraccional de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ como:

$$ {}_aI_t^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ \alpha > 0 $$

Con la convención ${}_aI_t^0 = Id$ (operador identidad) y la propiedad de semigrupo:

$$ {}_aI_t^{\alpha} \ {}_aI_t^{\beta} = {}_aI_t^{\beta} \ {}_aI_t^{\alpha} = {}_aI_t^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0 $$

Definiciones principales

Definición (Derivada de Caputo)

Si $f(t) \in AC^n, n \in \mathbb{N}$, entonces para $n - 1 < \alpha \leq n$ se define la derivada fraccionaria de Caputo de f por:

Definiciones principales

Definición (Derivada de Caputo)

Si $f(t) \in AC^n, n \in \mathbb{N}$, entonces para $n-1 < \alpha \leq n$ se define la derivada fraccionaria de Caputo de f por:

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= {}_a I_t^{n-\alpha} f^{(n)}(t)
\end{aligned}
$$

Propiedades

- La derivada Caputo de una constante es 0.

Propiedades

- La derivada Caputo de una constante es 0.
- La transformada de Laplace [Caputo, 1967]

$$\mathcal{L}\{{}_tD_*^{\mu} f(t); s\} = s^{\mu} \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+), \quad m-1 < \mu < m \tag{5}$$

Propiedades

- La derivada Caputo de una constante es 0.
- La transformada de Laplace [Caputo, 1967]

$$\mathcal{L}\{{}_tD_*^{\mu} f(t); s\} = s^{\mu}\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+), \quad m-1 < \mu < m \tag{5}$$

donde $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,\ s \in \mathbb{C}, \quad f^{(k)}(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t).$

Propiedades

- La derivada Caputo de una constante es 0.
- La transformada de Laplace [Caputo, 1967]

$$\mathcal{L}\{{}_tD_*^{\mu} f(t); s\} = s^{\mu}\tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+), \quad m-1 < \mu < m \tag{5}$$

donde $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,\, s \in \mathbb{C}, \quad f^{(k)}(0^+) := \lim_{t \to 0^+} f(t).$

- Existen otras definiciones de derivadas pero el comportamiento de ésta en particular es adecuada para los fenómenos de difusión [Le Méhauté, 1984, Caputo and Plastino, 2004].

Funciones de Bessel

Ecuación de Bessel modificada, con $\nu \in \mathbb{R}$

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0$$

Funciones de Bessel

Ecuación de Bessel modificada, con $\nu \in \mathbb{R}$

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0 \tag{6}$$

Las soluciones:

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \tag{7}$$

son llamadas funciones de Bessel modificadas de segundo tipo donde $J_\nu(z)$ son las funciones de Bessel modificadas de primer tipo [Korenev, 2002].

Funciones de Bessel

Ecuación de Bessel modificada, con $\nu \in \mathbb{R}$

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0 \tag{6}$$

Las soluciones:

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \tag{7}$$

son llamadas funciones de Bessel modificadas de segundo tipo donde $J_\nu(z)$ son las funciones de Bessel modificadas de primer tipo [Korenev, 2002].
J_ν y $J_{-\nu}$ forman un conjunto de soluciones de (6) y están dadas por

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \ |x| < \infty.$$

$I_{-\nu}$ se obtiene sustituyendo $-\nu$ por ν en la anterior.

Propiedades

Las propiedades más importantes para el proceso de la solución son:

$$\frac{d}{dz}K_\nu(\alpha z) = -\alpha K_{\nu-1}(\alpha z) - \frac{\nu}{z}K_\nu(\alpha z) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}K_\nu(\alpha z) = -\alpha K_{\nu+1}(\alpha z) + \frac{\nu}{z}K_\nu(\alpha z) \tag{9}$$

Ecuación de flujo con derivada temporal fraccional

Podemos simplificar la ecuación (4) que representa el fluido, donde el medio es un todo, así tenemos:

$$\phi c_\alpha \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{k}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) \tag{10}$$

Ecuación de flujo con derivada temporal fraccional

Podemos simplificar la ecuación (4) que representa el fluido, donde el medio es un todo, así tenemos:

$$\phi c_\alpha \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{k}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) \tag{10}$$

con variables adimensionales, la ecuación (10) es

$$\phi c_{D\alpha} \frac{\partial^\alpha p_D}{\partial t_D^\alpha} = \kappa_D \frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right) \tag{11}$$

donde

$$p_D = \frac{2\pi hk(p_i - p)}{Q_0 B_0 \mu},\ t_D = t\frac{k}{\phi c r_w^2 \mu},\ r_D = \frac{r}{r_w} \tag{12}$$

La transformada de Laplace aplicada a la ecuación (11)

$$u^{\alpha}\bar{p}_D = \frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\right),\ u > 0 \tag{13}$$

debido a que $\bar{p}_D(t_0) = 0$ y $p = p_i$, en $t = t_0$.

La transformada de Laplace aplicada a la ecuación (11)

$$u^{\alpha}\bar{p}_D = \frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\right),\ u > 0 \tag{13}$$

debido a que $\bar{p}_D(t_0) = 0$ y $p = p_i$, en $t = t_0$.
Las derivadas espaciales al ser desarrolladas en la ecuación (13) muestran la siguiente forma:

$$r_D^2\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial r_D^2} + r_D\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} - r_D^2 u^{\alpha}\bar{p}_D = 0 \tag{14}$$

La transformada de Laplace aplicada a la ecuación (11)

$$u^{\alpha}\bar{p}_D = \frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\right),\ u > 0 \tag{13}$$

debido a que $\bar{p}_D(t_0) = 0$ y $p = p_i$, en $t = t_0$.
Las derivadas espaciales al ser desarrolladas en la ecuación (13) muestran la siguiente forma:

$$r_D^2\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial r_D^2} + r_D\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} - r_D^2 u^{\alpha}\bar{p}_D = 0 \tag{14}$$

la cual es una ecuación de Bessel, por tanto su solución es:

$$\bar{p}_D = AK_0(\beta r_D) \tag{15}$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (13) y teniendo en mente las ecuaciones (8) y (9) para encontrar el valor de β se tiene que:

$$\beta = \pm\sqrt{u^{\alpha}},\ u > 0 \tag{16}$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (13) y teniendo en mente las ecuaciones (8) y (9) para encontrar el valor de β se tiene que:

$$\beta = \pm\sqrt{u^{\alpha}},\ u > 0 \tag{16}$$

La ecuación (15) al considerar el valor de β es

$$\bar{p}_D = AK^0(r_D\sqrt{u^{\alpha}}) \tag{17}$$

Al sustituir la ecuación (15) en la ecuación (13) y teniendo en mente las ecuaciones (8) y (9) para encontrar el valor de β se tiene que:

$$\beta = \pm\sqrt{u^{\alpha}},\ u > 0 \tag{16}$$

La ecuación (15) al considerar el valor de β es

$$\bar{p}_D = AK^0(r_D\sqrt{u^{\alpha}}) \tag{17}$$

En la ecuación (17) se descarta $\beta = -\sqrt{u^{\alpha}}$ debido a que la función de Bessel modificada segundo tipo no está definida para valores negativos.

Condiciones de frontera

Para encontrar la solución de la ecuación (11), se considera la siguiente condición de frontera:

$$r_D \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\bigg|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \tag{18}$$

Condiciones de frontera

Para encontrar la solución de la ecuación (11), se considera la siguiente condición de frontera:

$$r_D \left.\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\right|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \tag{18}$$

La sustitución de la ecuación (17) en (18) genera lo siguiente:

$$A = \frac{1}{u}\left[\sqrt{u^{\alpha}}K_1\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right)\right]^{-1}$$

$$\bar{p}_D = \frac{1}{u}\left[\sqrt{u^{\alpha}}K_1\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right)\right]^{-1} K_0\left(r_D\sqrt{u^{\alpha}}\right)$$

Condiciones de frontera

Para encontrar la solución de la ecuación (11), se considera la siguiente condición de frontera:

$$r_D \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D}\bigg|_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \tag{18}$$

La sustitución de la ecuación (17) en (18) genera lo siguiente:

$$A = \frac{1}{u}\left[\sqrt{u^{\alpha}}K_1\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right)\right]^{-1}$$

$$\bar{p}_D = \frac{1}{u}\left[\sqrt{u^{\alpha}}K_1\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right)\right]^{-1} K_0\left(r_D\sqrt{u^{\alpha}}\right)$$

Por lo tanto, el valor de la presión en la frontera del pozo ($r_D = 1$) es en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_D\big|_{r_D=1} = \frac{1}{u}\left[\sqrt{u^{\alpha}}K_1\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right)\right]^{-1} K_0\left(\sqrt{u^{\alpha}}\right) \tag{19}$$

A partir del sistema de ecuaciones con variables adimensionales (1)-(3), usando la ecuación de flujo con derivada temporal fraccional (11), expresamos un sistema con derivada temporal fraccional:

A partir del sistema de ecuaciones con variables adimensionales (1)-(3), usando la ecuación de flujo con derivada temporal fraccional (11), expresamos un sistema con derivada temporal fraccional:

$$(1-\omega_f-\omega_v)\frac{\partial^\beta p_{Dm}}{\partial t_D^\beta} = (1-\kappa_f-\kappa_v)\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial p_{Dm}}{\partial r_D}\right) + \lambda_{mf}(p_{Df}-p_{Dm}) + \lambda_{mv}(p_{Dv}-p_{Dm}) \tag{20}$$

$$\omega_f\frac{\partial^\beta p_{Df}}{\partial t_D^\beta} = \kappa_f\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D}\right) - \lambda_{mf}(p_{Df}-p_{Dm}) + \lambda_{fv}(p_{Dv}-p_{Df}) \tag{21}$$

$$\omega_v\frac{\partial^\beta p_{Dv}}{\partial t_D^\beta} = \kappa_v\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D}\right) - \lambda_{mv}(p_{Dv}-p_{Dm}) - \lambda_{fv}(p_{Dv}-p_{Df}) \tag{22}$$

donde las variables mostradas en las ecuaciones (20)-(22) que en las respectivas.

Por medio de la transformada de Laplace y con el uso de la ecuación (5) se llega al siguiente sistema :

$$\begin{aligned}(1-\omega_f-\omega_v)u^\beta\bar{p}_{Dm} = {} & (1-\kappa_f-\kappa_v)\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial\bar{p}_{Dm}}{\partial r_d}\right)+\lambda_{mf}(\bar{p}_{Df}-\bar{p}_{Dm}) \\ & +\lambda_{mv}(\bar{p}_{Dv}-\bar{p}_{Dm}) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\omega_f u^\beta\bar{p}_{Df} = \kappa_f\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial\bar{p}_{Df}}{\partial r_d}\right)-\lambda_{mf}(\bar{p}_{Df}-\bar{p}_{Dm})+\lambda_{fv}(\bar{p}_{Dv}-\bar{p}_{Df}) \tag{24}$$

$$\omega_v u^\beta\bar{p}_{Dv} = \kappa_v\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial\bar{p}_{Dv}}{\partial r_d}\right)-\lambda_{mv}(\bar{p}_{Dv}-\bar{p}_{Dm})-\lambda_{fv}(\bar{p}_{Dv}-\bar{p}_{Df}) \tag{25}$$

Al desarrollar las ecuaciones (23)-(25) es fácil ver que cumplen con la forma de una ecuación de Bessel y por tanto sus soluciones, al igual que en el caso $\beta = 1$, son

$$\bar{p}_{Dm} = AK_0(\alpha r_D) \tag{26}$$

$$\bar{p}_{Df} = BK_0(\alpha r_D) \tag{27}$$

$$\bar{p}_{Dv} = CK_0(\alpha r_D) \tag{28}$$

con el fin de simplificar las sucesivas ecuaciones, se definen los siguientes términos:

$$m_1(u) = u^\beta(1 - \omega_f - \omega_v) + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}, \quad (29a)$$

$$m_2 = \lambda_{mf}, \quad (29b)$$

$$m_3 = \lambda_{mv} \quad (29c)$$

$$m_4(u) = u^\beta \omega_f + \lambda_{mf} + \lambda_{fv}, \quad (30a)$$

$$m_5 = \lambda_{fv}, \quad (30b)$$

$$m_6(u) = u^\beta \omega_v + \lambda_{mv} + \lambda_{fv} \quad (30c)$$

Como resultado de sustituir las ecuaciones (26)-(28) en el sistema mostrado en (23)-(25) y haciendo uso de las definiciones mostradas por (29)-(30), se tiene las siguientes:

$$K_0(\alpha r_D)\{A[(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha^2-m_1]+Bm_2+Cm_3\}=0 \tag{31}$$

$$K_0(\alpha r_D)\{Am_2+B[\kappa_f\alpha^2-m_4]+Cm_5\}=0 \tag{32}$$

$$K_0(\alpha r_D)\{Am_3+Bm_5+C[\kappa_v\alpha^2-m_6]\}=0 \tag{33}$$

Puesto que las funciones de Bessel modificadas de segunda especie tienen un comportamiento asintótico, es decir nunca toman el valor de cero, entonces el sistema mostrado en las ecuaciones (31)-(33) puede expresarse como sigue:

$$\begin{bmatrix} (1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha^2 - m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & \kappa_f\alpha^2 - m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & \kappa_v\alpha^2 - m_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Cuando el determinante es igual a cero, se obtiene la ecuación de grado seis que sigue:

$$\begin{aligned}(1-\kappa_f-\kappa_v)\kappa_f\kappa_v\alpha^6 &- [(1-\kappa_f-\kappa_v)(\kappa_f m_6+\kappa_v m_4)+\kappa_f\kappa_v m_1]\alpha^4 \\ &+ [(1-\kappa_f-\kappa_v)m_4m_6-(1-\kappa_f-\kappa_v)m_5^2+(\kappa_f m_6+\kappa_v m_4)m_1-\kappa_v m_2^2-\kappa_f m_2^3]\alpha^2 \\ &- m_1m_4m_6+m_1m_5^2+m_2^2m_6+2m_2m_3m_5+m_3^2m_4=0\end{aligned}$$

Solución semianalítica

La ecuación anterior las potencias de α son pares, se puede por tanto resolver como una ecuación de grado 3. Esta ecuación tiene tres raíces reales.
Las soluciones generales de las ecuaciones (23)-(25) tienen al incorporar las tres raíces reales, de la siguiente forma:

$$\bar{p}_{Dm} = A_1 D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + A_2 D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + A_3 D_3 K_0(\alpha_3 r_D) \tag{35}$$

$$\bar{p}_{Df} = B_1 D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + B_2 D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + B_3 D_3 K_0(\alpha_3 r_D) \tag{36}$$

$$\bar{p}_{Dv} = D_1 K_0(\alpha_1 r_D) + D_2 K_0(\alpha_2 r_D) + D_3 K_0(\alpha_3 r_D) \tag{37}$$

Con los términos $A_i, B_i, i = 1, 2, 3$ dados por:

$$A_1 = \frac{m_3(\kappa_f \alpha_1^2 - m_4) - m_2 m_5}{m_2^5[(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_1^2 - m_1][\kappa_f\alpha_1^2 - m_4]} \tag{38}$$

$$B_1 = \frac{-m_3 - A_1[(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_1^2 - m_1]}{m_2} \tag{39}$$

$$A_2 = \frac{m_3(\kappa_f \alpha_2^2 - m_4) - m_2 m_5}{m_2^5 - [(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_2^2 - m_1][\kappa_f\alpha_2^2 - m_4]} \tag{40}$$

$$B_2 = \frac{-m_3 - A_2[(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_2^2 - m_1]}{m_2} \tag{41}$$

$$A_3 = \frac{m_3(\kappa_f \alpha_3^2 - m_4) - m_2 m_5}{m_2^5 - [(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_3^2 - m_1][\kappa_f\alpha_3^2 - m_4]} \tag{42}$$

$$B_3 = \frac{-m_3 - A_3[(1-\kappa_f-\kappa_v)\alpha_3^2 - m_1]}{m_2} \tag{43}$$

y los términos D_1, D_2 y D_3 son obtenidos a partir de las condiciones de frontera y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son las raíces positivas de $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$. Los valores de D_1, D_2, D_3 se obtienen a partir de las condiciones de frontera y son igual a

$$\begin{aligned} D_1 = \frac{1}{u}\Bigg\{ & \alpha_1 E_1 K_1(\alpha_1) + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3)\frac{(B_1-1)K_0(\alpha_1)}{(1-B_3)K_0(\alpha_3)} \\ & + \frac{\left[(1-A_1)K_0(\alpha_1) + (1-A_3)\dfrac{(B_1-1)}{(1-B_3)}K_0(\alpha_1)\right]}{\left[(A_2-1)K_0(\alpha_2) + (A_3-1)\dfrac{(B_2-1)}{(1-B_3)}K_0(\alpha_2)\right]}\alpha_2 E_2 K_1(\alpha_2) \\ & + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3)\frac{(B_2-1)K_0(\alpha_2)}{(1-B_3)K_0(\alpha_3)}\Bigg\}^{-1} \end{aligned} \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 = \frac{1}{u} \Bigg\{ & \frac{\left[(A_2-1)K_0(\alpha_2) + (A_3-1)\dfrac{(B_2-1)}{(1-B_3)}K_0(\alpha_2)\right]}{\left[(1-A_1)K_0(\alpha_1) + (1-A_3)\dfrac{(B_1-1)}{(1-B_3)}K_0(\alpha_1)\right]} \\
& + \left[\alpha_1 E_1 K_1(\alpha_1) + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3)\frac{(B_1-1)K_0(\alpha_1)}{(1-B_3)K_0(\alpha_3)}\right] \\
& + \left[\alpha_2 E_2 K_1(\alpha_2) + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3)\frac{(B_2-1)K_0(\alpha_2)}{(1-B_3)K_0(\alpha_3)}\right]\Bigg\}^{-1}
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 = \frac{1}{u}\Bigg\{&\alpha_1 E_1 K_1(\alpha_1)\frac{(1-B_3)K_(\alpha_3)}{(B_1-1)K_0(\alpha_1)} + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3) \\
&+ \left[\frac{(1-A_1)(1-B_3)+(1-A_3)(B_1-1)}{(A_2-1)(1-B_3)+(A_3-1)(B_2-1)}\right]\times \\
&\left[\frac{\alpha_2 E_2(1-B_3)K_1(\alpha_2)K_0(\alpha_3)+\alpha_3 E_3(B_2-1)K_1(\alpha_3)K_0(\alpha_2)}{(B_1-1)K_0(\alpha_2)}\right]\Bigg\}^{-1} \\
&+ \frac{1}{u}\Bigg\{\alpha_2 E_2 K_1(\alpha_2)\frac{(1-B_3)K_0(\alpha_3)}{(B_2-1)K_0(\alpha_2)} + \alpha_3 E_3 K_1(\alpha_3) + \\
&+ \left[\frac{(1-A_2)(1-B_3)+(1-A_3)(B_2-1)}{(A_1-1)(1-B_3)+(A_3-1)(B_1-1)}\right]\times \\
&\left[\frac{\alpha_1 E_1(1-B_3)K_1(\alpha_1)K_0(\alpha_3)+\alpha_3 E_3(B_1-1)K_1(\alpha_3)K_0(\alpha_1)}{(B_2-1)K_0(\alpha_1)}\right]\Bigg\}^{-1} \qquad (46)
\end{aligned}
$$

donde

$$E_1 = \left[(1 - \kappa_f - \kappa_v)A_1 + \kappa_f B_1 + \kappa_v\right]$$
$$E_2 = \left[(1 - \kappa_f - \kappa_v)A_2 + \kappa_f B_2 + \kappa_v\right]$$
$$E_3 = \left[(1 - \kappa_f - \kappa_v)A_3 + \kappa_f B_3 + \kappa_v\right]$$

Se llega a las siguientes ecuaciones como resultado de sustituir las ecuaciones (35)-(37) en las condiciones de frontera.

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 K_1(\alpha_1) D_1[(1-\kappa_f-\kappa_v)A_1+\kappa_f B_1+\kappa_v] \\
&\quad + \alpha_2 K_1(\alpha_2) D_2[(1-\kappa_f-\kappa_v)A_2+\kappa_f B_2+\kappa_v] \\
&\quad + \alpha_3 K_1(\alpha_3) D_3[(1-\kappa_f-\kappa_v)A_3+\kappa_f B_3+\kappa_v] = \frac{1}{u} \qquad (47)
\end{aligned}$$

$$(A_1-1)D_1K_0(\alpha_1)+(A_2-1)D_2K_0(\alpha_2)+(A_3-1)D_3K_0(\alpha_3)=0 \qquad (48)$$

$$(B_1-1)D_1K_0(\alpha_1)+(B_2-1)D_2K_0(\alpha_2)+(B_3-1)D_3K_0(\alpha_3)=0 \qquad (49)$$

Con el fin de simplificar las ecuaciones (47)-(49) se definen los siguientes términos:

$$P_i = \alpha_i K_1(\alpha_i)[(1-\kappa_f-\kappa_v)A_i + \kappa_f B_i + \kappa_v] \tag{50}$$

$$Q_i = (A_i - 1)K_0(\alpha_i), \;\; R_i = (B_i - 1)K_0(\alpha_i) \tag{51}$$

donde $i = 1, 2, 3$.
La ecuación matricial asociada al sistema de ecuaciones (47)-(49) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Denotamos

$$\begin{aligned} m = {} & Q_1R_2P_3 - Q_1P_2R_3 - R_1Q_2P_3 - R_2P_1Q_3 \\ & + P_2R_1Q_3 + P_1Q_2R_3 \end{aligned} \tag{53}$$

La solución de la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ \\ D_2 \\ \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(Q_2R_3 - Q_3R_2)}{m} \\ \dfrac{-(Q_1R_3 - Q_3R_1)}{m} \\ \dfrac{(Q_1R_2 - Q_2R_1)}{m} \end{bmatrix} \tag{54}$$

Presión en la frontera del pozo

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_w|_{r_d=1} &= D_1 K_0(\alpha_1) + D_2 K_0(\alpha_2) + D_3 K_0(\alpha_3) \\
&= B_1 D_1 K_0(\alpha 1) + B_2 D_2 K_0(\alpha_2) + B_3 D_3 K_0(\alpha_3)
\end{aligned}
$$

Trabajos Futuros

- Ecuación constitutiva (Ley de Darcy y Ley de Fick)

Trabajos Futuros

- Ecuación constitutiva (Ley de Darcy y Ley de Fick)
- Formalismo de Memoria

Trabajos Futuros

- Ecuación constitutiva (Ley de Darcy y Ley de Fick)
- Formalismo de Memoria
- Caminante aleatorio en tiempo continuo (CTRW)

Trabajos Futuros

- Ecuación constitutiva (Ley de Darcy y Ley de Fick)
- Formalismo de Memoria
- Caminante aleatorio en tiempo continuo (CTRW)
- Flujos en medios desordenados

Referencias I

R. Camacho-Velazquez, M. A. Vasquez-Cruz, R. Castrejon-Aivar, and V. Arana-Ortiz. Pressure transient and decline curve behaviors in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 8(2):95–112, 2005.

M. Caputo. Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent II. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539, 1967.

M. Caputo and W. Plastino. Diffusion in porous layers with memory. *Geophysical Journal International*, 158(1):385–396, 2004.

C. Fuentes-Ruíz (Responsable). Informe VI. Fondo Sectorial CONACYT-SENER-Hidrocarburos. Technical Report S0018-2011-11, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Junio 2014.

Referencias II

S. Gómez, G. Ramos, A. Mesejo, R. Camacho, M. Vásquez, and N. del Castillo. Study of the characterization of naturally fractured vuggy reservoirs, with totally penetrated wells using global optimization. Technical report, IIMAS-UNAM, 2013.

H. H. Hardy and R. A. Beier. *Fractals in reservoir engineering*. World Scientific, 1994.

B. G. Korenev. *Bessel functions and their applications*. CRC Press, 2002.

A. Le Méhauté. *Fractal Geometries Theory and Applications*. CRC Press, 1991.

A. Le Méhauté. Transfer processes in fractal media. *Journal of Statistical Physics*, 36(5):665–676, 1984.

Referencias III

B. F. Martínez-Salgado, R. Rosas-Sampayo, A. Torres-Hernández, and C. Fuentes. Application of fractional calculus to oil industry. In F. Brambila, editor, *Fractal Analysis - Applications in Physics, Engineering and Technology*, chapter 2. InTech, Rijeka, 2017.

K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, volume 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Wiley-Interscience, 1993.

M. E. Miranda-Martínez, K. Oleschko, J.-F. Parrot, F. Castrejón-Vacio, H. Taud, and F. Brambila-Paz. Porosidad de los yacimientos naturalmente fracturados: una clasificación fractal. *Revista mexicana de ciencias geológicas*, 23:199 – 214, 2006.

K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Elsevier Science, 1974.

Referencias IV

D. W. Peaceman. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, volume 6 of *Developments in Petroleum Science*. Elsevier Science, 1977.

I. Podlubny. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1999.

R. Raghavan. Fractional derivatives: application to transient flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 80(1):7–13, 2011.

S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

Gracias

masabemx@yahoo.com.mx