# Una Introducción al Método de Monte Carlo

Fernando Baltazar Larios

Facultad de Ciencias

21 de marzo de 2013

### Motivación

Dar una solución a problemas matemáticos que resultan costosos o imposibles de resolver analíticamente.

### Herramienta

Números aleatorios $U(0,1)$ para resolver ciertos problemas determinísticos.

### Motivación

Dar una solución a problemas matemáticos que resultan costosos o imposibles de resolver analíticamente.

### Herramienta

Números aleatorios $U(0,1)$ para resolver ciertos problemas determinísticos.

# Antecedentes

## Inicio

El método de Monte Carlo se remontan a 1777 cuando Georges Louis Leclerc, mejor conocido como Buffon, intentaba calcular el número $\pi$ a partir de ensayos con repetición.

## Formal

- El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo.
- Se desarrolló durante la Segunda Guerra Mundial (John Von Neumann, Stanislaw Ulam y Nicholas Metrópolis), cuando esta metodología fue aplicada a problemas relacionados al desarrollo de la bomba atómica.
- El desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar el trabajo de Herman Kahn en 1948.

# Antecedentes

## Inicio

El método de Monte Carlo se remontan a 1777 cuando Georges Louis Leclerc, mejor conocido como Buffon, intentaba calcular el número $\pi$ a partir de ensayos con repetición.

## Formal

- El método se llamó así en referencia al Casino de Montecarlo.
- Se desarrolló durante la Segunda Guerra Mundial (John Von Neumann, Stanislaw Ulam y Nicholas Metrópolis), cuando esta metodología fue aplicada a problemas relacionados al desarrollo de la bomba atómica.
- El desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar el trabajo de Herman Kahn en 1948.

# Definición

El método de Monte Carlo consiste en representar la solución analítica de un problema como un parámetro de una población hipotética para luego estimar dicho parámetro a partir de una muestra construida con base a una sucesión de números aleatorios.

## Pasos

- Formulación analítica del problema.
- Diseño del proceso aleatorio adecuado.
- Simulación del mismo para generar la muestra.

# Justificación

## Ley Fuerte de los Grandes Números

Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con $E(|X_i|) < \infty$ entonces

$$P(lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} X_k}{n} = \mu) = 1.$$

donde $\mu = E(X_i)$.

Sea $f : R^m \to R^+ \cup \{0\}$ y $h$ una función real integrable. El problema consiste en evaluar

$$\Lambda = \int_A h(x) f(x) dx \quad A \subset R^m.$$

Suponiendo que la integral existe, es finita y que $f$ es una función de densidad y $A = R^m$, $\Lambda$, es el valor esperado de $h$, entonces

$$E\left[h(x)\right] = \int_A h(x) f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(x_i) = \hat{\Lambda},$$

con $\{x_{1,} \ldots, x_n\}$ una muestra de $f(x)$. A $\hat{\Lambda}$ se le conoce como estimador por Monte Carlo.

# Observaciones Importantes

Tenemos que $E_f\left[\hat{\Lambda}\right] = \Lambda$ y

$$Var_f[\hat{\Lambda}] = \frac{1}{n}\int_A (h(x) - \Lambda)^2 f(x)dx,$$

que se puede estimar por método de Monte Carlo.
A la desviación estándar de $\hat{\Lambda}$

$$\sigma_f(\hat{\Lambda}) = \sqrt{Var_f[\hat{\Lambda}]}$$

se le llama error estándar.

# Observaciones Importantes

Además $\hat{\Lambda} \approx \Lambda$ cuando $n \to \infty$ y $P\left[|\hat{\Lambda} - \Lambda| \geq \epsilon\right] \leq \frac{Var[\hat{\Lambda}]}{\epsilon^2}$, si $\epsilon = \sqrt{Var[\hat{\Lambda}]/\delta}$, tenemos

$$|\hat{\Lambda} - \Lambda| \leq \sqrt{Var[\hat{\Lambda}]/\delta}$$

con probabilidad $1 - \delta$. Como $Var[\hat{\Lambda}] = O(1/n)$, entonces la estimación de $\Lambda$ por medio de $\hat{\Lambda}$ tiene un error de orden $n^{-1/2}$.

**Aumento en una cifra significativa la aproximación**

Calcular a $\hat{\Lambda}$ con el cuadrado del número original de observaciones.

## Observaciones Importantes

Además $\hat{\Lambda} \approx \Lambda$ cuando $n \to \infty$ y $P\left[|\hat{\Lambda} - \Lambda| \geq \epsilon\right] \leq \frac{Var[\hat{\Lambda}]}{\epsilon^2}$, si $\epsilon = \sqrt{Var[\hat{\Lambda}]/\delta}$, tenemos

$$|\hat{\Lambda} - \Lambda| \leq \sqrt{Var[\hat{\Lambda}]/\delta}$$

con probabilidad $1 - \delta$. Como $Var[\hat{\Lambda}] = O(1/n)$, entonces la estimación de $\Lambda$ por medio de $\hat{\Lambda}$ tiene un error de orden $n^{-1/2}$.

**Aumento en una cifra significativa la aproximación**

Calcular a $\hat{\Lambda}$ con el cuadrado del número original de observaciones.

Suponga que queremos evaluar la integral

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

donde $g(x)$ es una función que toma valores reales que no es analitícamente integrable.
Para usar la simulación **Monte Carlo**, sea $Y = (b-a)g(X)$ y $X \sim U(a,b)$. Entonces,

$$E(Y) = (b-a)\int_a^b g(x)f_X(x)dx = (b-a)\frac{\int_a^b g(x)dx}{(b-a)} = I$$

donde $f_X(x) = 1/(b-a)$ es la función de densidad de $X$.

El problema de evaluar la integral se reduce a estimar el valor esperado $E(Y)$ la cual sera estimada por la media muestral

$$\hat{I} = \bar{Y}(n) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} g(X_i)}{n}$$

donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.i.i.d $U(a, b)$.

$$I_\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

con $\alpha > 0$ y $f(x) = e^{-x}$ la densidad de $X \sim exp(1)$, entonces

$$I_\alpha = E_f(X^{\alpha-1})$$

estimada por

$$\hat{I}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}$$

con $X_1, \ldots, X_n$ muestras aleatorias de $f$.

# Resultados Numéricos

Supongamos que $\alpha = 1{,}9$, entonces queremos estimar

$$I_{1,9} = \int_0^\infty x^{0,9} e^{-x} dx$$

Para generar las $X_i's$ hacemos

$$X_i = -ln(U_i)$$

donde $U_i \sim U(0,1), i = 1, 2, \ldots, n$. Con los siguientes resultados:

| n | 10 | 100 | 1,000 | Tablas |
|---|---|---|---|---|
| $I_{1,9}$ | 0.8788 | 0.9312 | 0.9569 | 0.96177 |
| Error Estándar | 0.2302 | 0.0794 | 0.0277 | |

Sea $h : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (xsen(20y) + ysen(20x))^2 cosh(xsen10x) \\ &+ (xcos(10y) - ysen(10x))^2 cosh(ycos(20y)), \end{aligned} \quad (1)$$

usando el método de Monte Carlo encontraremos el Máximo y Mínimo.

- El algoritmo nos dice que generemos números aleatorios $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y calculemos $\{h(u_1), \ldots, h(u_n)\}$.
- De estos últimos, seleccionemos las parejas $(u^{max}, h(u^{max}))$ y $(u^{min}, h(u^{min}))$ tales que $h(u^{max}) = máx\{h(u_1), \ldots, h(u_n)\}$ y $h(u^{min}) = mín\{h(u_1), \ldots, h(u_n)\}$.

# Resultados Numéricos

| n | $h(u^{min})$ | $u^{min}$ | $h(u^{man})$ | $u^{max}$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | $0{,}22 \times 10^{-3}$ | (-0.0286,0.0439) | 2.061 | (0.749,0.875) |
| 100 | $3{,}27 \times 10^{-6}$ | (-0.0003,-0.0291) | 5.301 | (-0.083,0.091) |
| 1000 | $6{,}46 \times 10^{-8}$ | (-0.00061,-0.017) | 5,218 | (-0.072,0.099) |
| 10000 | $4{,}08 \times 10^{-8}$ | (-0.00012,-0.0055) | 5.430 | (-0.085,0.088) |
| 100000 | $1{,}10 \times 10^{-9}$ | (-0.00004,-0.0009) | 5.739 | (0.099,-0.098) |

Consideremos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

recordando que...

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

y definiendo $a_n = \frac{(-2)^n}{n+1/2}$ y $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ para $n = 0, 1, \ldots$ tenemos que:

$$\pi = 4S$$

donde

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n$$

Dado que $p_n \geq$ y $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, podemos definir una variable aleatoria que tome valores $a_n$, con probabilidades

$$P(Y = a_n) = p_n$$

y entonces

$$S = E(Y).$$

Por lo tanto basta simular a $Y$ para estimar a $\pi$.