

Del circuito de van der Pol a la herradura de Smale

Faustino Sánchez Garduño,
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM
e-mail: faustinos403@gmail.com

Contenido

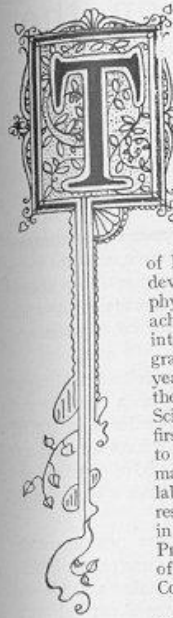
1. En su origen...la dinámica de un circuito no lineal,
2. Comportamientos no periódicos...se asoma el *caos*,
3. El enfoque topológico en sistemas dinámicos cuyo origen es un circuito no lineal,
4. Algunas actualidades,
5. Conclusiones.

Balthazar van der Pol, el precursor

PERSONALITIES IN THE WIRELESS WORLD



DR. BALTH VAN DER POL, JNR.



THE subject of our biography, Mr. Balth van der Pol, Junior, was born at Utrecht (Holland) on January 27th, 1889. After going through the regular curriculum of elementary and secondary education in that town he proceeded to the University in Utrecht in 1911 for the purpose both of specialising there in the subjects of mathematics and physics. After the usual three-year course he graduated as *Candidaat* (a degree equivalent to the B.Sc. of London) in 1914; and, after a further two years' devotion to the study of experimental and theoretical physics, under Professors Julius and Ormsten, achieved the distinction of *Doctorandus* in 1916. His interest in the theory and practice of wireless telegraphy dates back to 1904; and, as year succeeded year, he found himself more and more attracted by the fascination of this new development of Electrical Science. Probably Mr. van der Pol was one of the first physicists in Holland to devote serious attention to radiotelegraphy from the physical and mathematical point of view, and—there being no physical laboratories in Holland specially equipped for research work in wireless—he came over to England in the fall of 1916, and studied for a year under Professor J. A. Fleming in the Research Department of the Pender Electrical Laboratory at University College, Gower Street.

In the summer of 1917 he went into residence at Cambridge in order to engage on research work in connection with the propagation of electric waves over the surface of the earth, under Professor Sir J. J. Thomson in the Cavendish Laboratory. At the moment of writing Mr. van der Pol is still devoting himself to this work.

Readers of *THE WIRELESS WORLD* know that he is a valued contributor to our own magazine. The paper on the "Wave-length of Antennæ with Fly-wheel Coupling," which appeared in our November issue, is from his pen, and has attracted much attention from scientists. Over and above a number of articles which he has published elsewhere, he is responsible for monographs on the production of alternating current which have appeared in the Proceedings of the Koninkl. Academie van Wetenschappen at Amsterdam. An important paper was read before the Physical Society of London by him in the course of the current year, on the subject of "The Wave-lengths and Radiation of Loaded Antennæ."

Balthazar van der Pol y las *oscilaciones de relajación o autosostenidas*



- Nació en Utrecht, Holanda en enero de 1889,
- Estudia la carrera de física en la Universidad de Utrecht,
- En 1916 ingresa al *University College* bajo la supervisión de J. A. Fleming (inventor de la válvula termo-iónica)
- En 1917 se cambia a la Universidad de Cambridge y trabaja con J. J. Thomson (descubrió el electrón) en el Laboratorio Cavendish,
- De 1919 a 1920 fue ayudante de H. A. Lorentz en el Instituto Teyler,

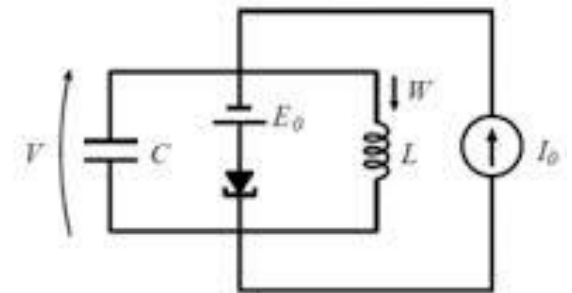
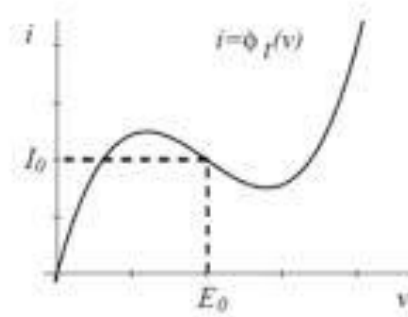
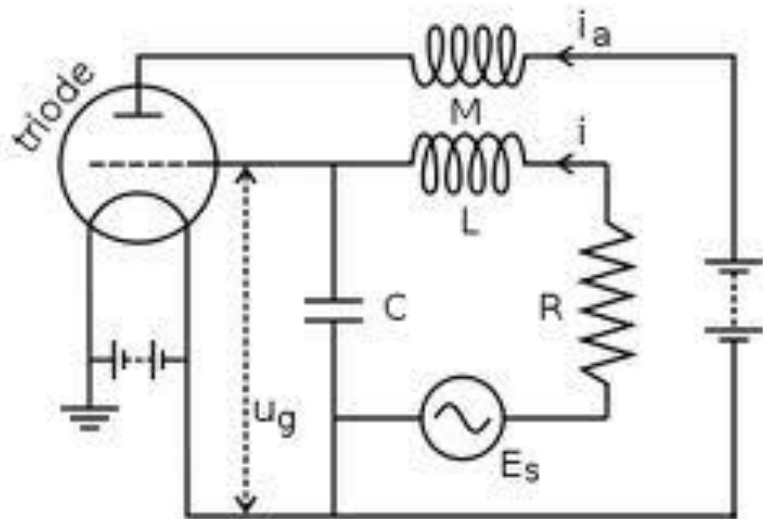


- En 1920 se doctora en la Universidad de Utrecht,
- En 1921, jefe del laboratorio de investigación de la compañía Phillips en Eindhoven, lugar en el que trabaja hasta 1949,
- De 1934 a 1952 fue Vicepresidente de la Unión Internacional de Radio Científico,
- Murió en Wassenaar, Holanda en octubre de 1959.

Así opinó Sir Edward Appleton (Premio Nobel en Física, 1947)

Sobre bases teóricas y experimentales, van der Pol empezó su trabajo sobre las ondas de radio en Cambridge. Podemos decir que Heaviside tuvo que “inventar” la ionósfera para explicar la transmisión de radio a través del Atlántico realizada por Marconi en 1901. En su trabajo teórico, van der Pol dio una prueba cuantitativa según la cual, en el caso de que las distancias de propagación sean grandes, si uno desprecia la influencia de una capa reflectora, los experimentos y la teoría están en flagrante desacuerdo. Para ello, van der Pol tuvo que familiarizarse con los aspectos teóricos de la difracción de las ondas de radio alrededor de la Tierra y usó esto para hacer una comparación directa entre la intensidad de la señal que se predice y la correspondiente de la onda que se recibe, esto en el caso práctico de la transmisión de radio....

El circuito RLC no lineal de van der Pol



Usando las leyes de Kirchoff:

- **Conservación de la carga eléctrica:** La corriente eléctrica que entra a un nodo de un circuito, es la misma que sale de él,
- **Conservación de la energía:** La suma de las diferencias de potencial en un circuito cerrado, es cero.

se llega a la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden

$$\dot{I} + C\ddot{V} + \frac{1}{R}\dot{V} + \frac{V}{L} = 0, \quad (2)$$

donde la corriente, I , y el voltaje, V , están relacionados así: $I(V) = -\alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3$ con α y γ positivas.

Un primer análisis sugirió que βV^2 tenía poco efecto en la amplitud de oscilación de $V(t)$. Por ello, supuso $\beta = 0$.

Usando la expresión de $I(V)$, redefiniendo parámetros y variables, se llega a la forma más popular de la EDO estudiada por van der Pol. Así, calculando \dot{I} , sustituirla en (2), suponer R constante y escribir $\tilde{\alpha} = \alpha - 1/R$ con $\alpha R > 1$, se obtiene

$$\ddot{V} - \frac{1}{C}(\tilde{\alpha} - 3\gamma V^2)\dot{V} + \frac{V}{LC}.$$

Ésta, al introducir x, t' y λ como

$$x = \sqrt{\frac{3\gamma}{\tilde{\alpha}}}V, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \lambda = \sqrt{\frac{L}{C}}\tilde{\alpha},$$

y usar la regla de cadena, se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt'^2} - \sqrt{\frac{L}{C}}\tilde{\alpha} (1 - x^2) \frac{dx}{dt'} + x = 0,$$

la cual, haciendo a un lado la notación, se trata de la afamada *ecuación de van der Pol sin forzamiento*:

$$(28) \quad \ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

donde $\lambda > 0$...caso particular de la ecuación de Liénard.

Definiendo y como $y = \dot{x}$, (28) se escribe como el sistema no lineal autónomo bidimensional

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y. \end{aligned}$$

o bien

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y - \lambda \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

Appleton y van der Pol:

“No ha sido posible hallar una solución analítica aproximada para la ecuación con la condición adicional $\lambda \gg 1$, pero una solución gráfica puede hallarse de la siguiente manera”

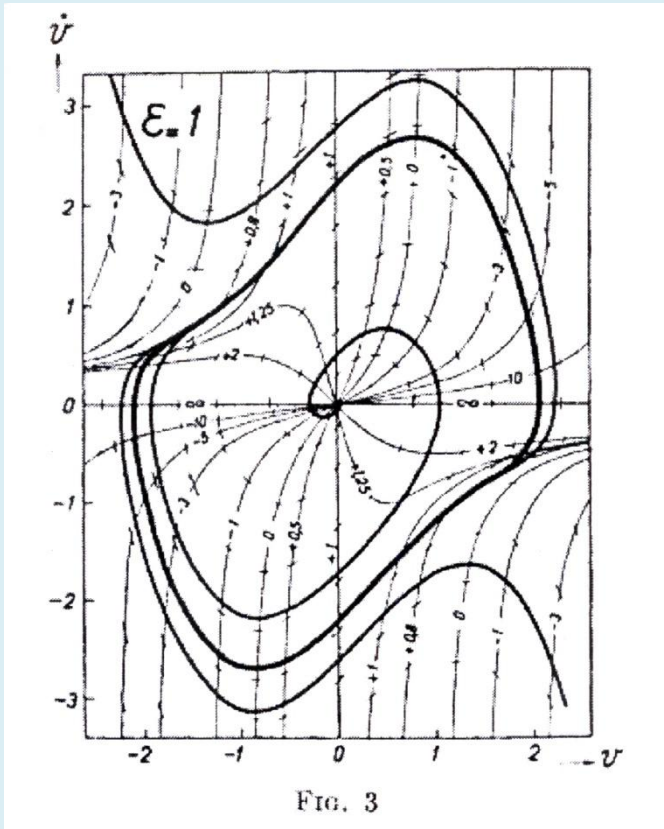
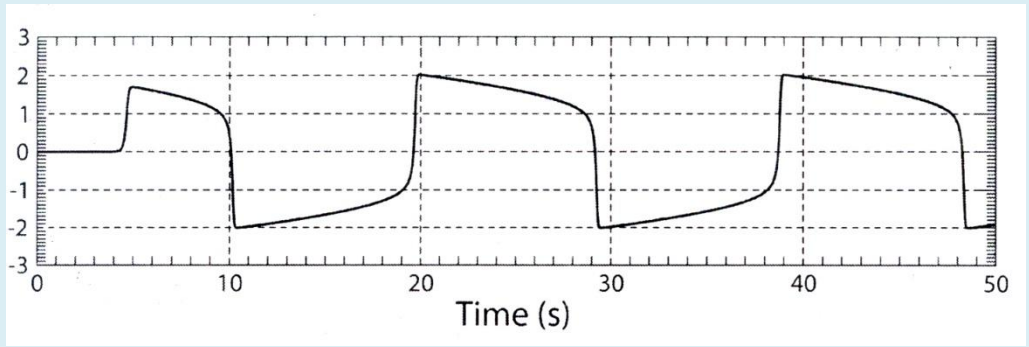


FIG. 3

Periodo $T = (\log 2 - 3/2) \lambda \approx 1.61 \lambda$

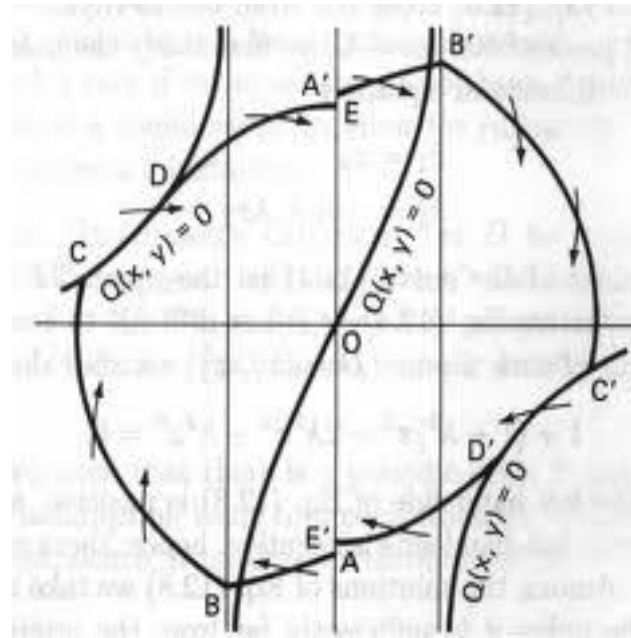
Usando métodos asintóticos, en 1944 J. Haag dio una mejor aproximación

$$T = [3 - 2 \ln 2] \lambda + \frac{12.89}{\lambda^{1/3}} + \frac{2}{\lambda} \left[-3.31 + \frac{19}{9} \ln \lambda \right] - \frac{4}{\lambda^{5/3}} + \dots$$



Teorema 1. *Para cada valor positivo de λ , el sistema (4) tiene exactamente un ciclo límite atractor que rodea al origen (el único punto de equilibrio).*

Demostración. Notando que, para $\lambda > 0$, el origen es repulsor (cuyo carácter cambia con λ : de foco a nodo), se construye una región positivamente invariante bajo el flujo asociado a (4) que rodea al origen y se usa el Teorema de Poincaré-Bendixson.



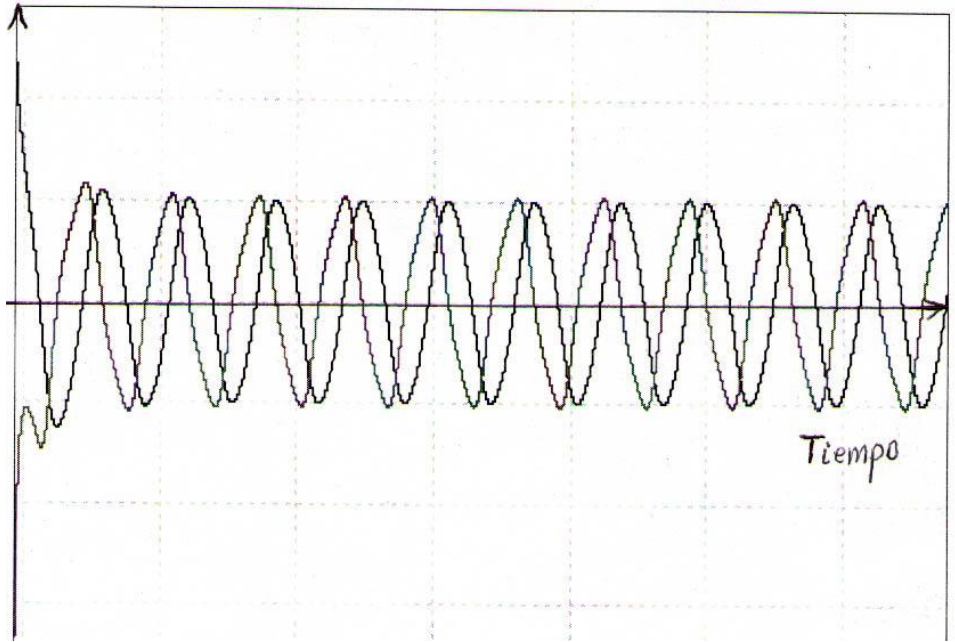
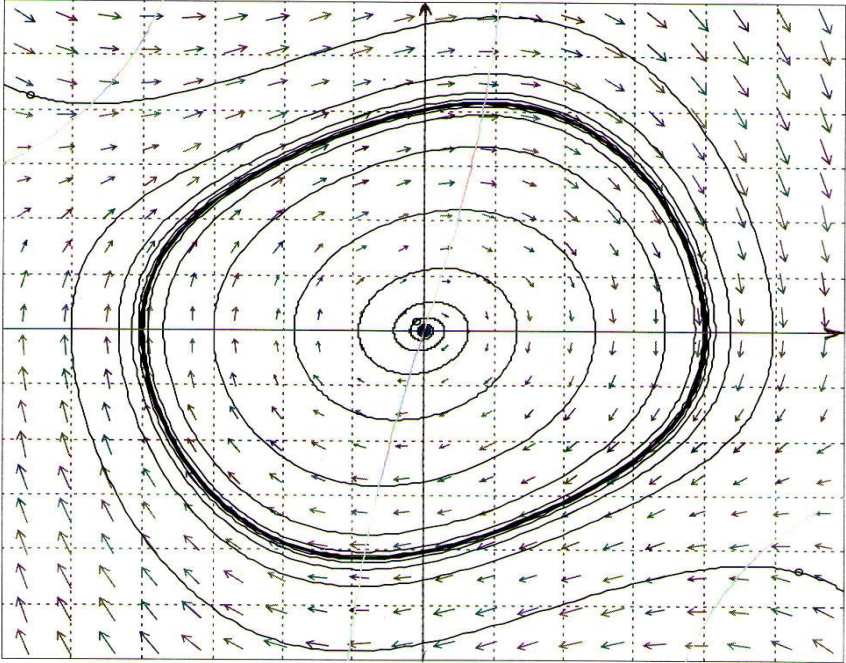
Una prueba de unicidad para $\lambda > 0$ “pequeña”. Sean D_r el disco de radio r y Φ_t el flujo asociado al sistema, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A[\Phi_t(D_r)] &= \int_{D_r} \operatorname{div} \vec{F} dx dy \\ &= \lambda \int_0^r \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \lambda \pi \left(1 - \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

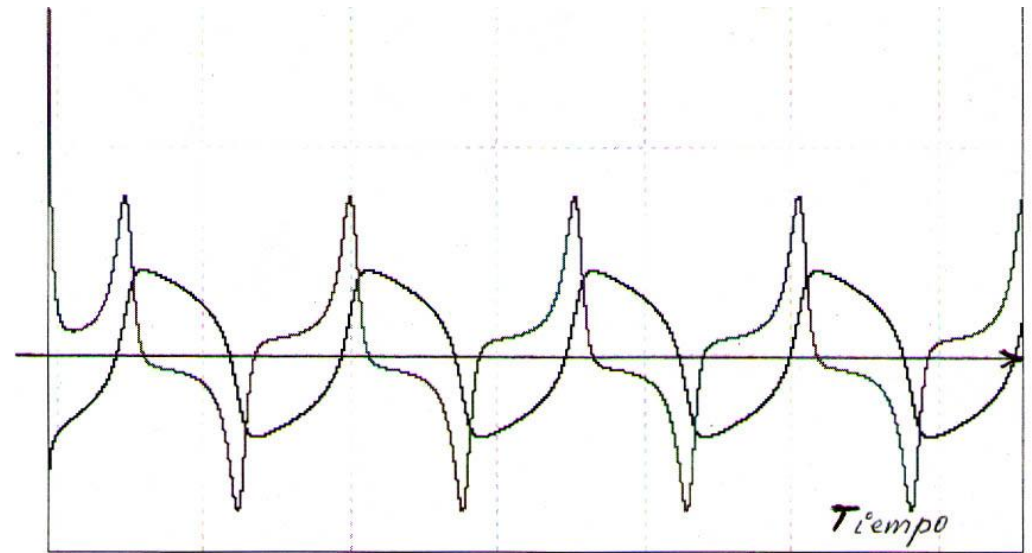
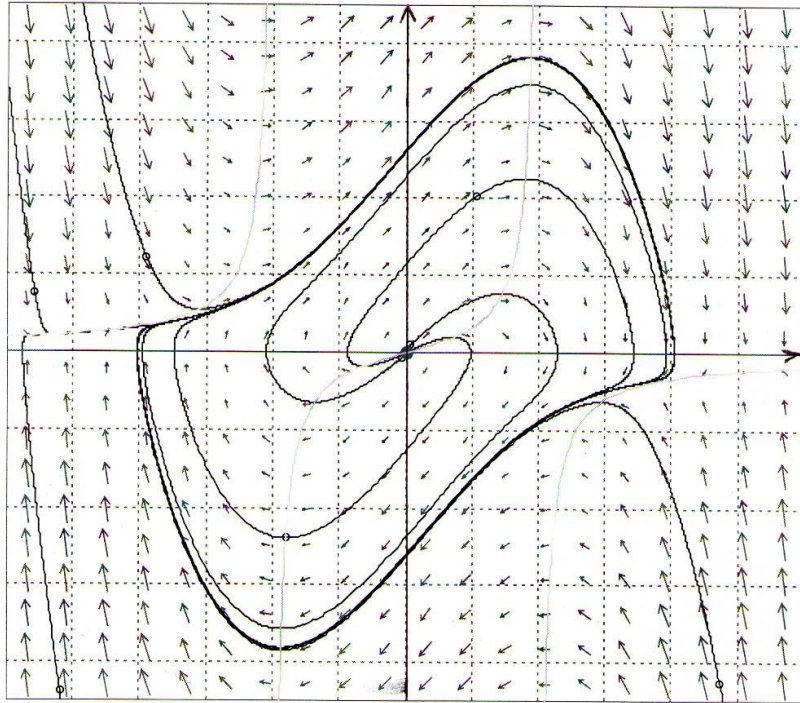
Para λ “grande”, se reescala (30). Sea $\tilde{y} = \lambda^{-1}y$

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda \left[\tilde{y} - \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] \\ \dot{\tilde{y}} &= -\lambda^{-1}x. \end{aligned}$$

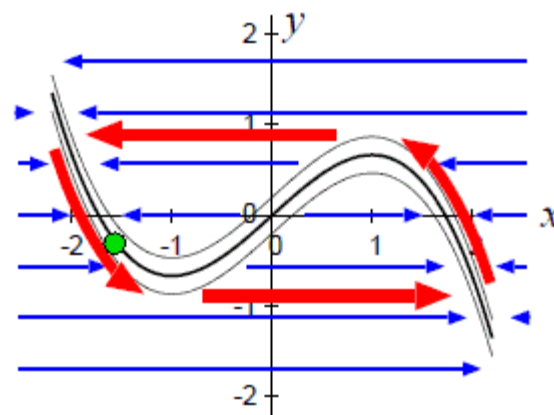
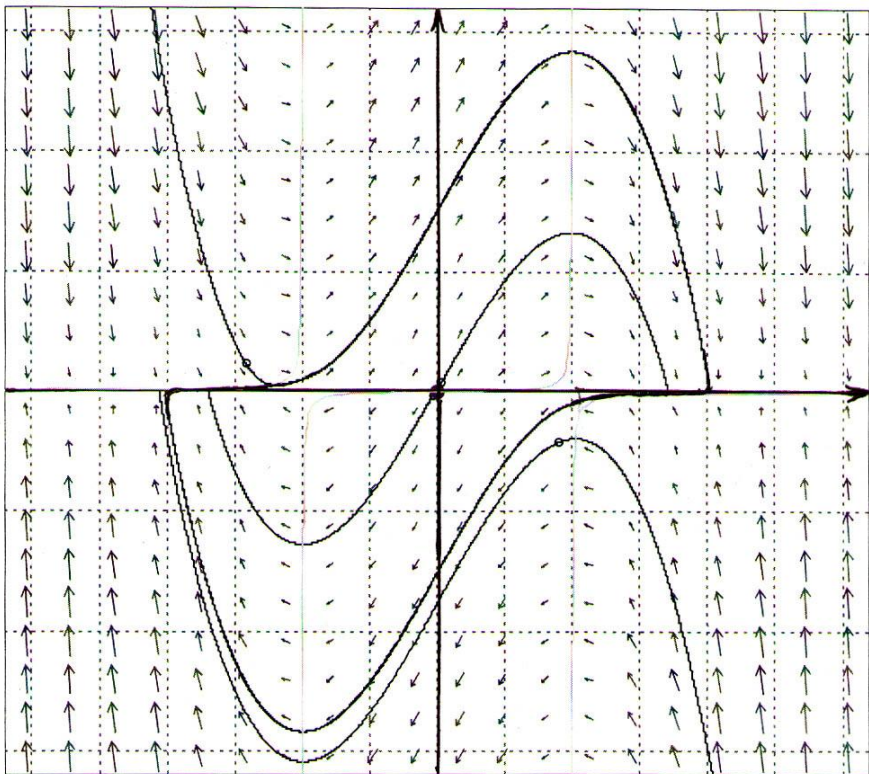
Cualidades del ciclo límite al variar el parámetro: "pequeño"



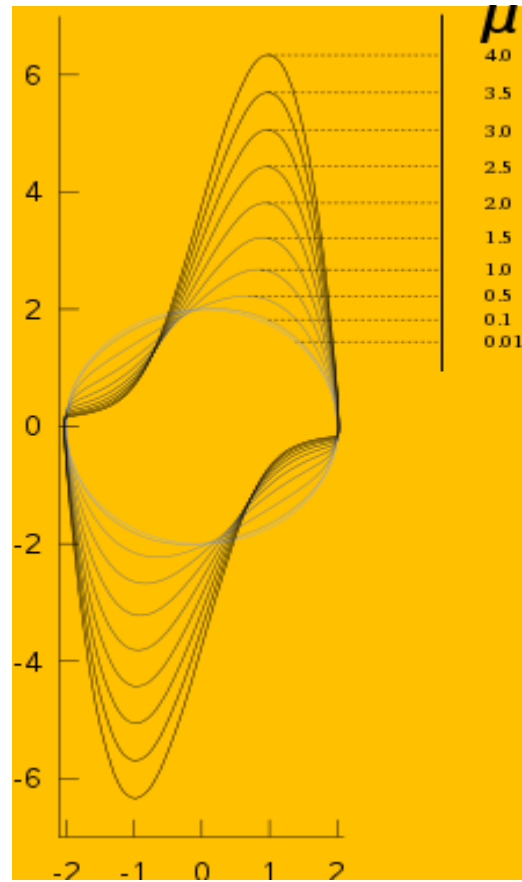
Cualidades del ciclo límite al variar el parámetro: "intermedio"



Cualidades del ciclo límite al variar el parámetro: "grande"



El ciclo límite para diferentes valores del parámetro



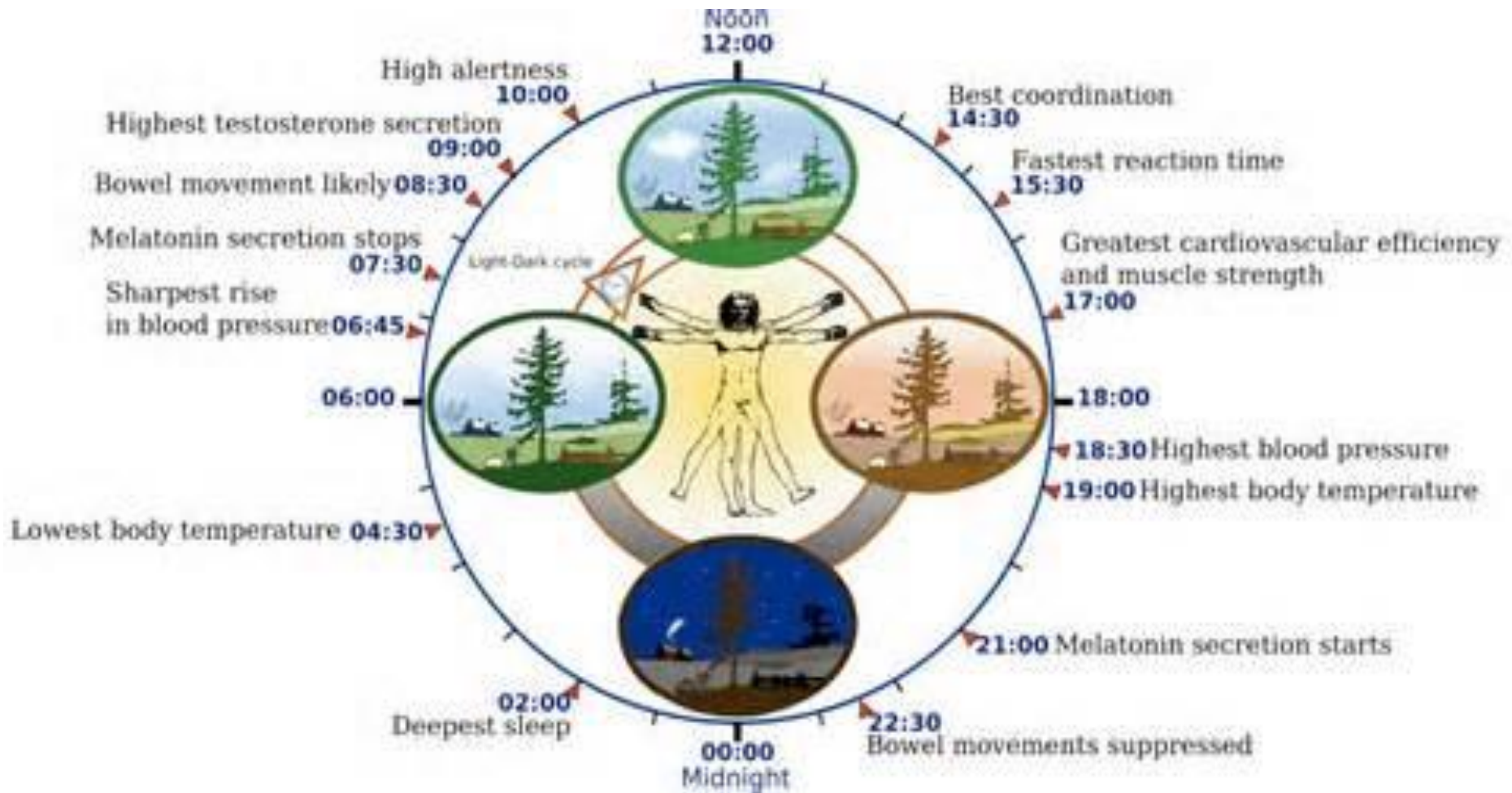
...se porta “bien” ante perturbaciones autónomas

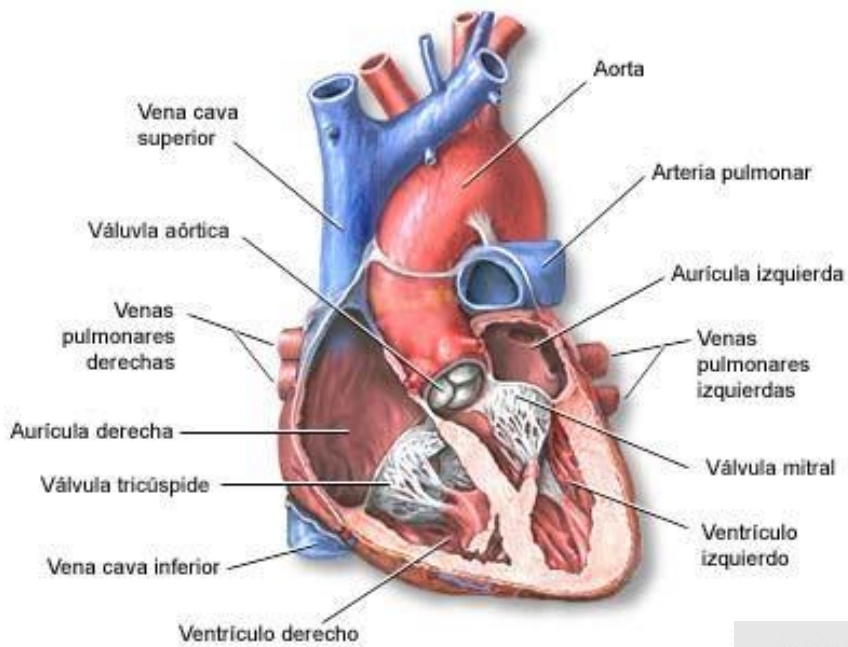
Para $\lambda > 0$, el sistema de van der Pol es **estructuralmente estable** ante perturbaciones autónomas “pequeñas”.

Esto es así pues, para S un compacto contenido en \mathbf{R}^2 y usando la C^m -distancia $\sup \|D^k f(x) - D^k g(x)\|$ donde el sup se toma sobre S y $0 \leq k \leq m$, este sistema es elemento de la clase, $\chi^m(S)$, de campos vectoriales C^k , con $m \geq 1$ y:

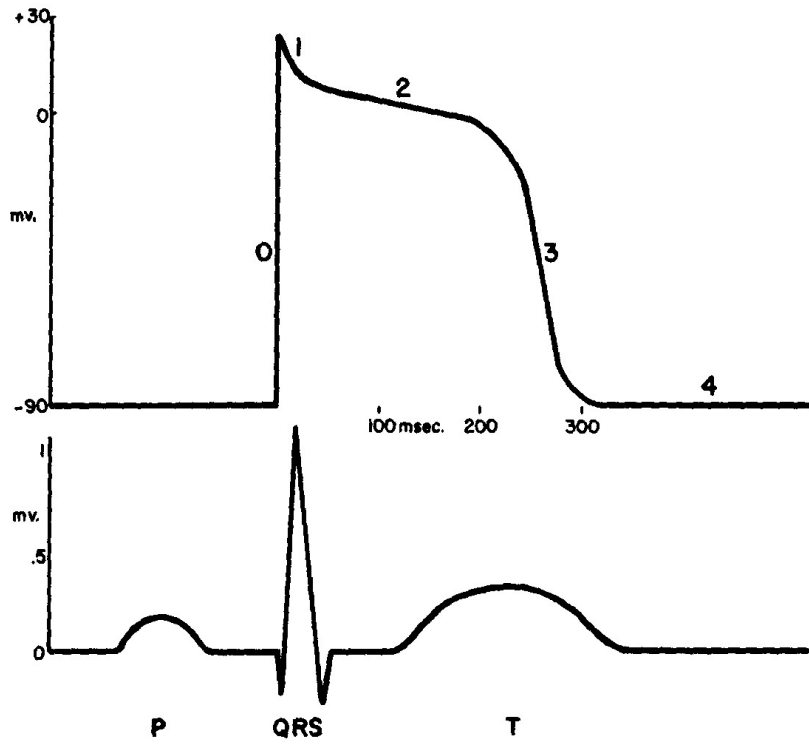
- Sólo tiene un punto de equilibrio que es hiperbólico,
- Para cada $\lambda > 0$, tiene exactamente un ciclo límite atractor, por lo que éste es hiperbólico,
- No tiene trayectorias silla-silla.

Los fenómenos rítmicos representan una de las manifestaciones más impresionantes del comportamiento dinámico de los sistemas biológicos. Entender los mecanismos que los hacen posibles, es un problema crucial para la comprensión de la dinámica de la vida.





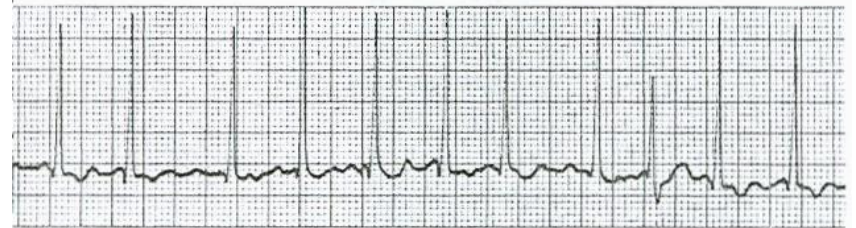
TEJIDO	Trazado osciloscópico	TIPO DE RESPUESTA	POTENCIAL UMBRAL (mv)	VELOCIDAD DE CONDUCCION (m/s)	CAMBIO DE VOLTAGE (voltios/s)	DURACION (s)
Nodo sinusal		lenta	- 60	< 0.05	1-2	100-300
músculo auricular		alta	- 90	1	100-200	100-300
Nodo A-V		lenta	- 60	< 0.05	5	100-300
His-Purkinje		alta	- 95	3	500-1000	300-500
ventriculo		alta	- 90	1	100-500	100-200



Normal



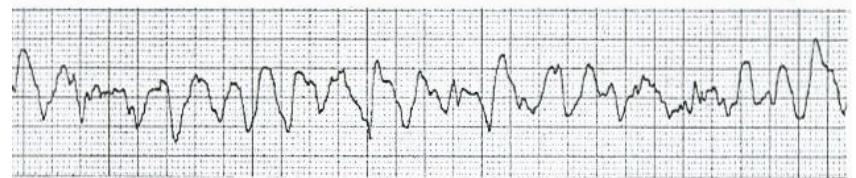
Flutter Auricular



Fibrilación auricular



Taquicardia ventricular



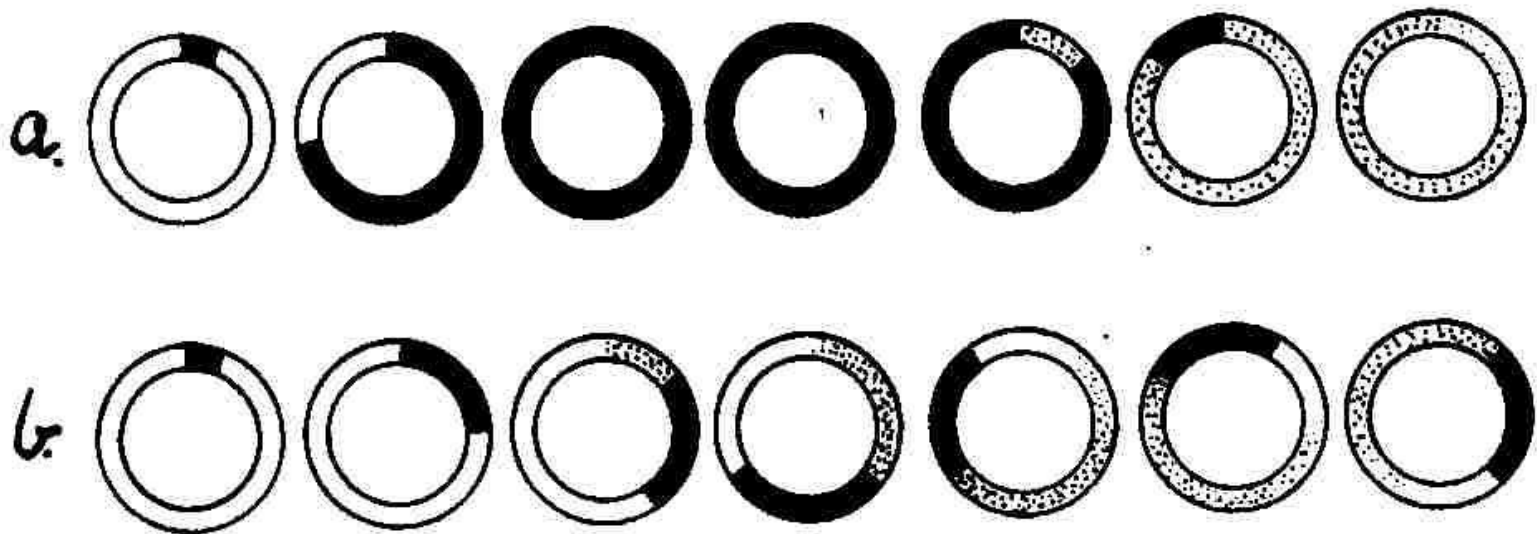
Fibrilación ventricular

George Ralph Mines (1886-1914)



- Periodo de vulnerabilidad. La respuesta a un estímulo al ventrículo, depende de la etapa del potencial en la que se aplique. Descubrió en qué momento, un estímulo aplicado con la frecuencia apropiada, provoca fibrilación,
- Mecanismo de las arritmias reentrantes. Si v es la velocidad de propagación, T es el periodo refractario y L la longitud de la circunferencia, la onda sobrevive y circula en el tejido anular, si $(L/v) > T$.

“Las condiciones favorables para la conducción lenta y periodos refractarios cortos, sugieren que una excitación circulante de este tipo puede ser la responsable de algunos casos de taquicardia paroxysmal como se ha observado clínicamente. Los datos proporcionados por los experimentos y que son revisados en este artículo, sugieren una explicación de la interesante e importante condición del delirium cordis o contracción fibrilar. El ritmo circulante descrito aquí, es precisamente comparable a la situación producida en cortes (con forma de anillo) de las campanas de la medusa en los experimentos de G. A. Meyer”



van der Pol y van der Mark (1928): el latido del corazón considerado como una oscilación de relajación

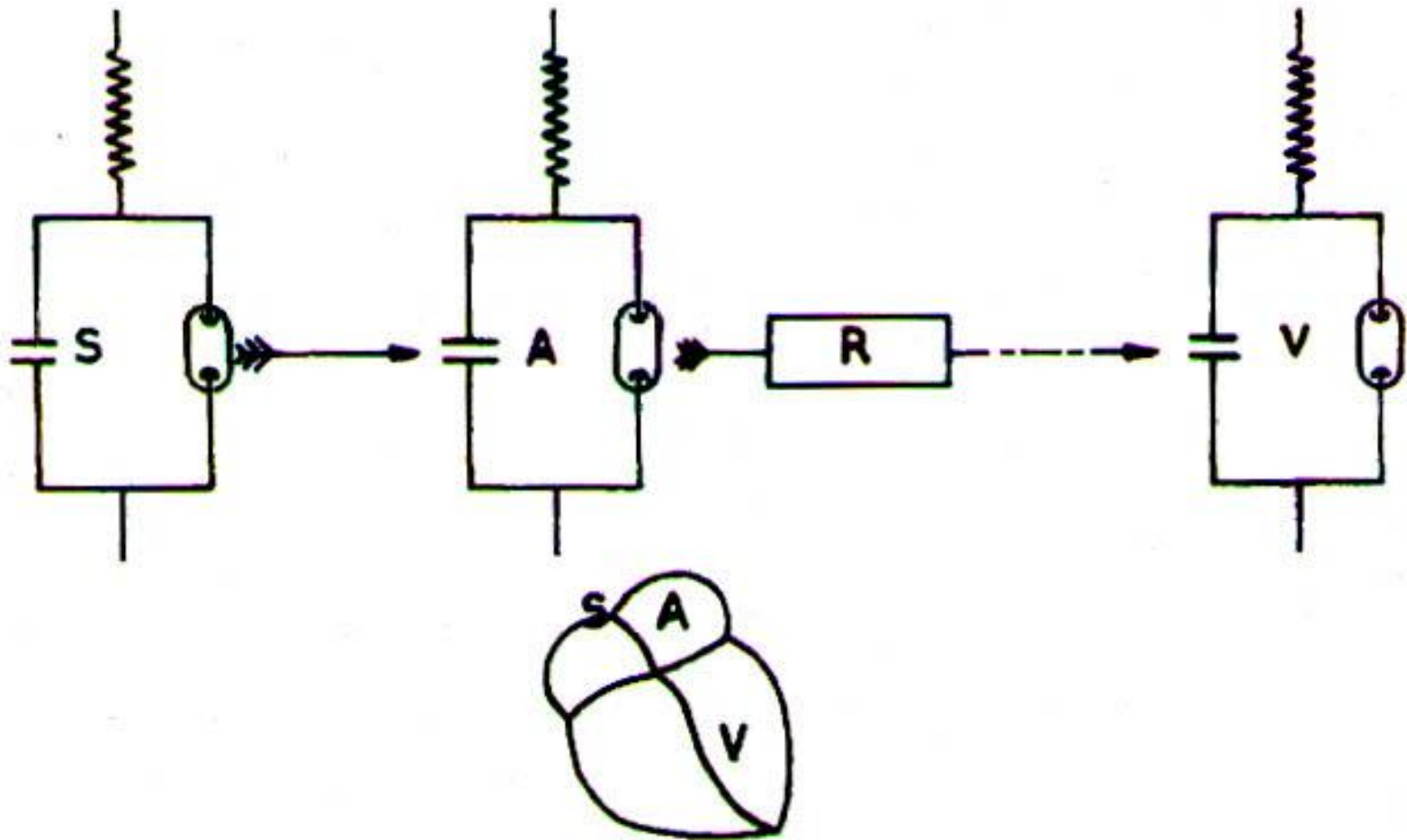


Fig. 5. Schematic representation of the heart by three relaxation systems S (= Sinus), A (= Auriculum) and V (= Ventriculum). R is a retardation system representing in the model the finite time necessary for a stimulus to be transmitted through the A-V bundle.

van der Pol y van der Mark: el corazón como una oscilación de relajación...

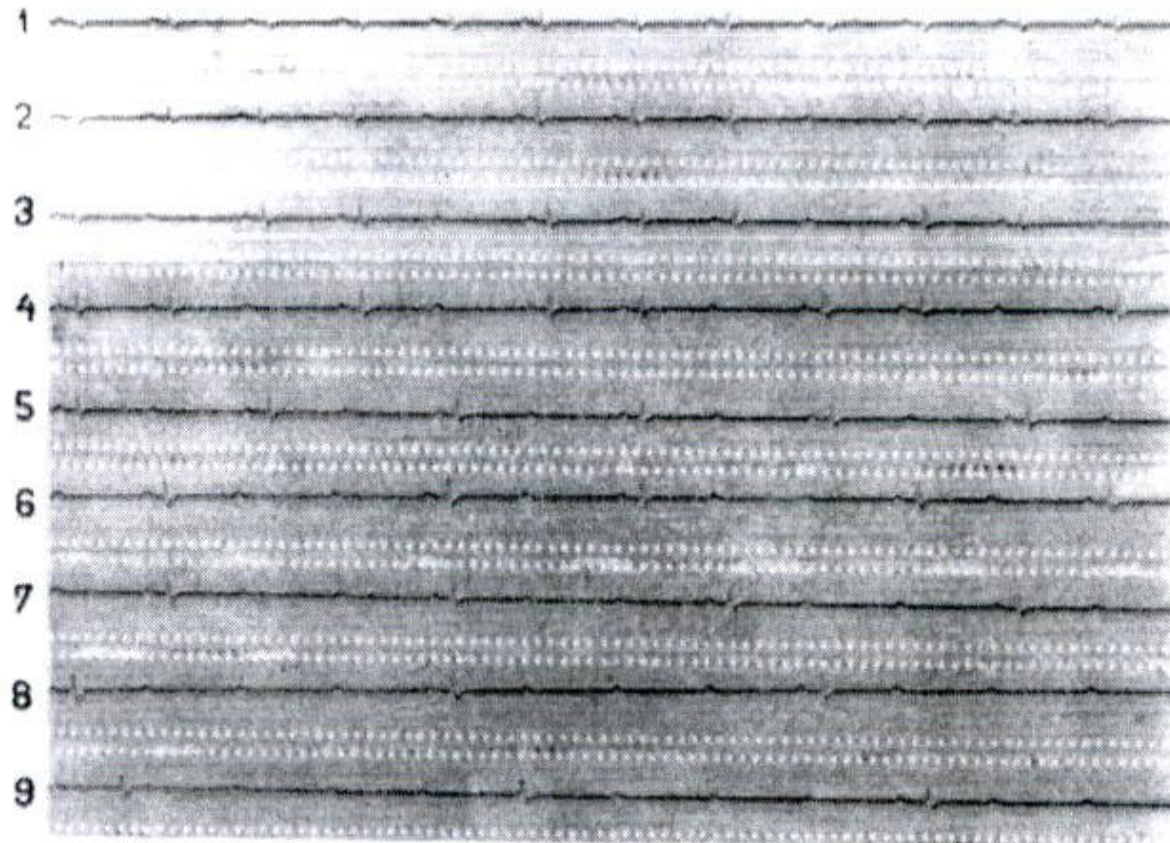


Fig. 6. Electrocardiograms from the artificial heart obtained by gradually reducing the coupling between the A and V system (clamping the bundle of HIS). The development of 2:1, 3:1 and 4:1 as well as complete heartblock is clearly shown.

van der Pol y van der Mark: el corazón como un oscilador de relajación...

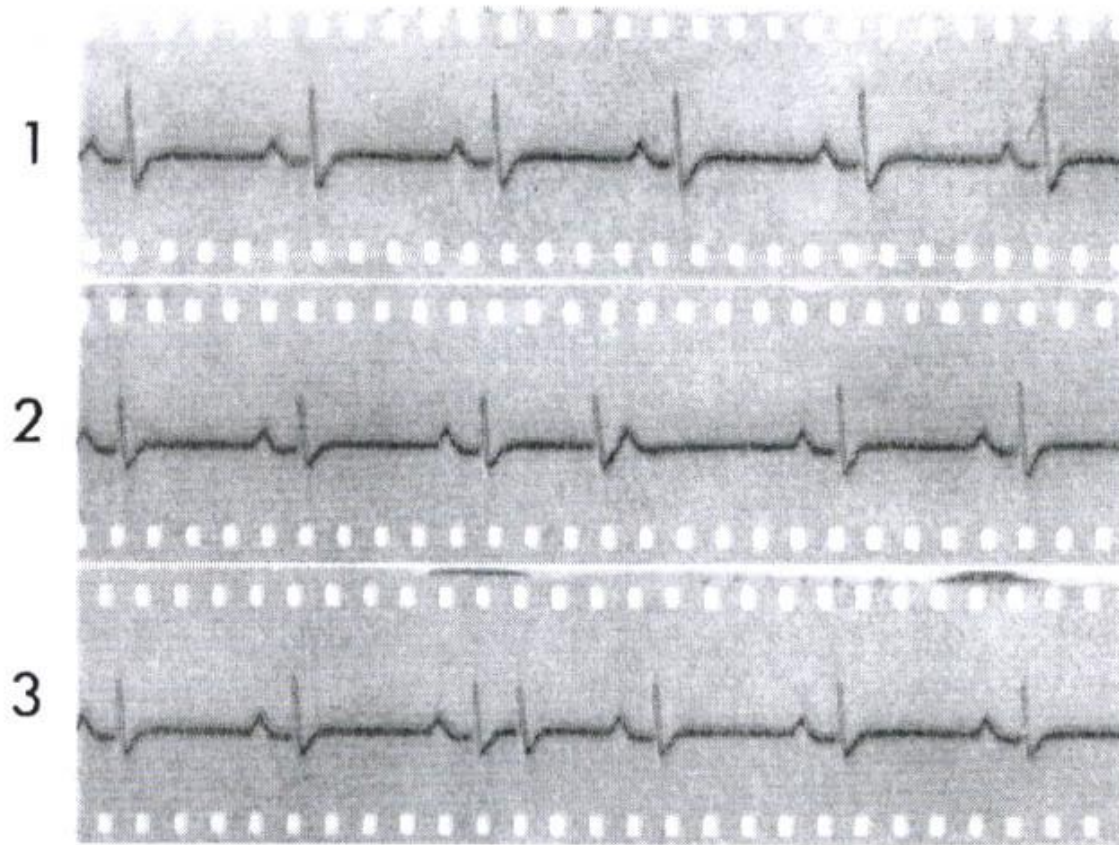


Fig. 7. Ventricular extrasystole. 1. normal heartbeat; 2. late ventricular extrasystole resulting in the ventricle being in the refractory state when the next following normal stimulus arrives from the auricle; 3. early ventricular extrasystole; here the ventricle is *not* anymore in the refractory period when the next following normal stimulus arrives from the auricle and thus an *interpolated ventricular systole* is obtained.

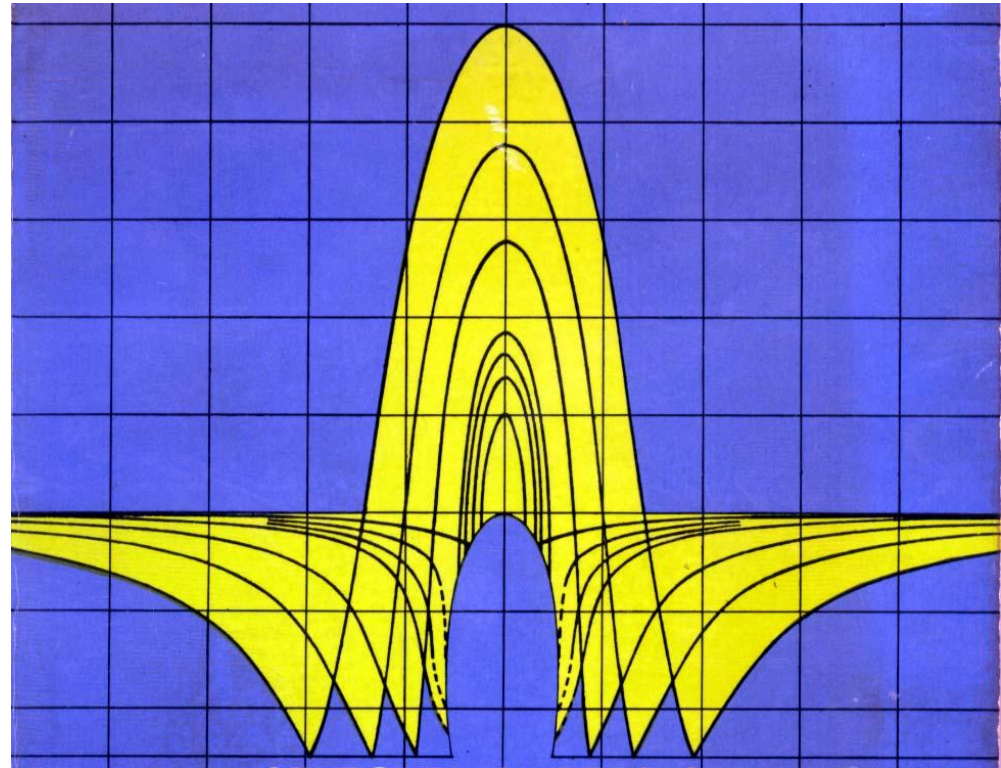
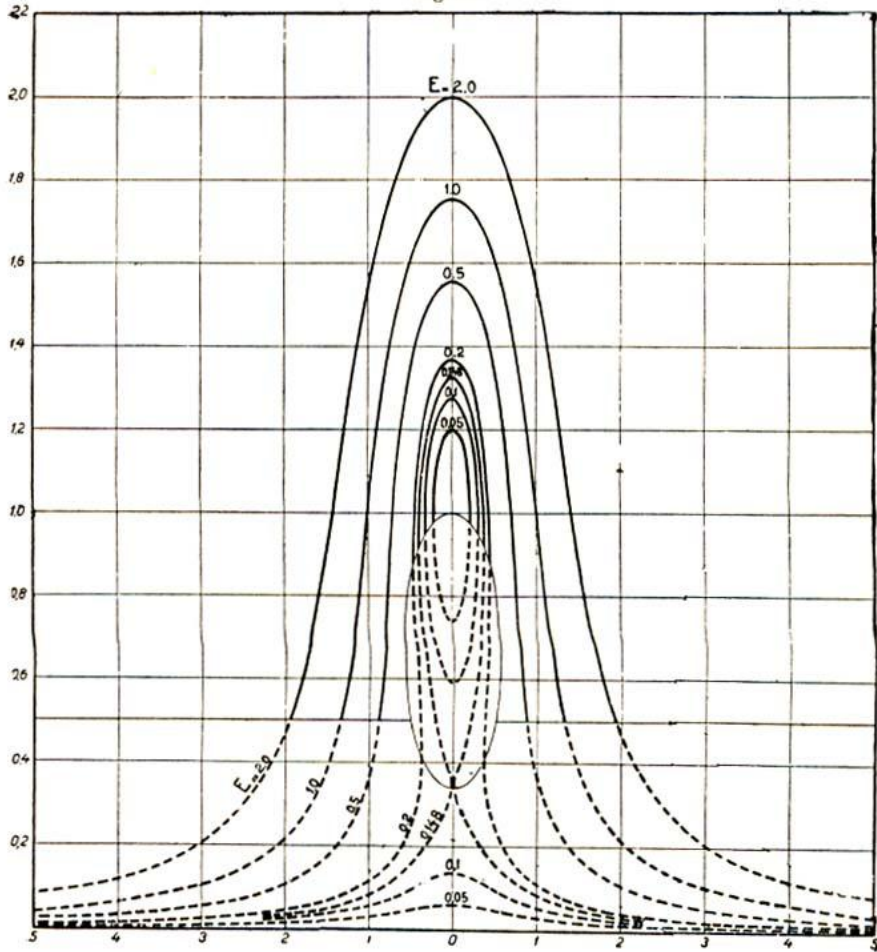
El oscilador de relajación con forzamiento periódico

$$(32) \quad \ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = A \cos \omega t,$$

En la EDO (32), aparecen tres parámetros con importante interpretación física: dos frecuencias, la proveniente del amortiguamiento (que depende de λ) y la del forzamiento ω , y A que mide la amplitud del forzamiento. La no linealidad de la ecuación (32) hacen que, al variar los parámetros en el conjunto físicamente aceptable, su dinámica sea extremadamente rica.

Curvas de resonancia

Fig. 2.

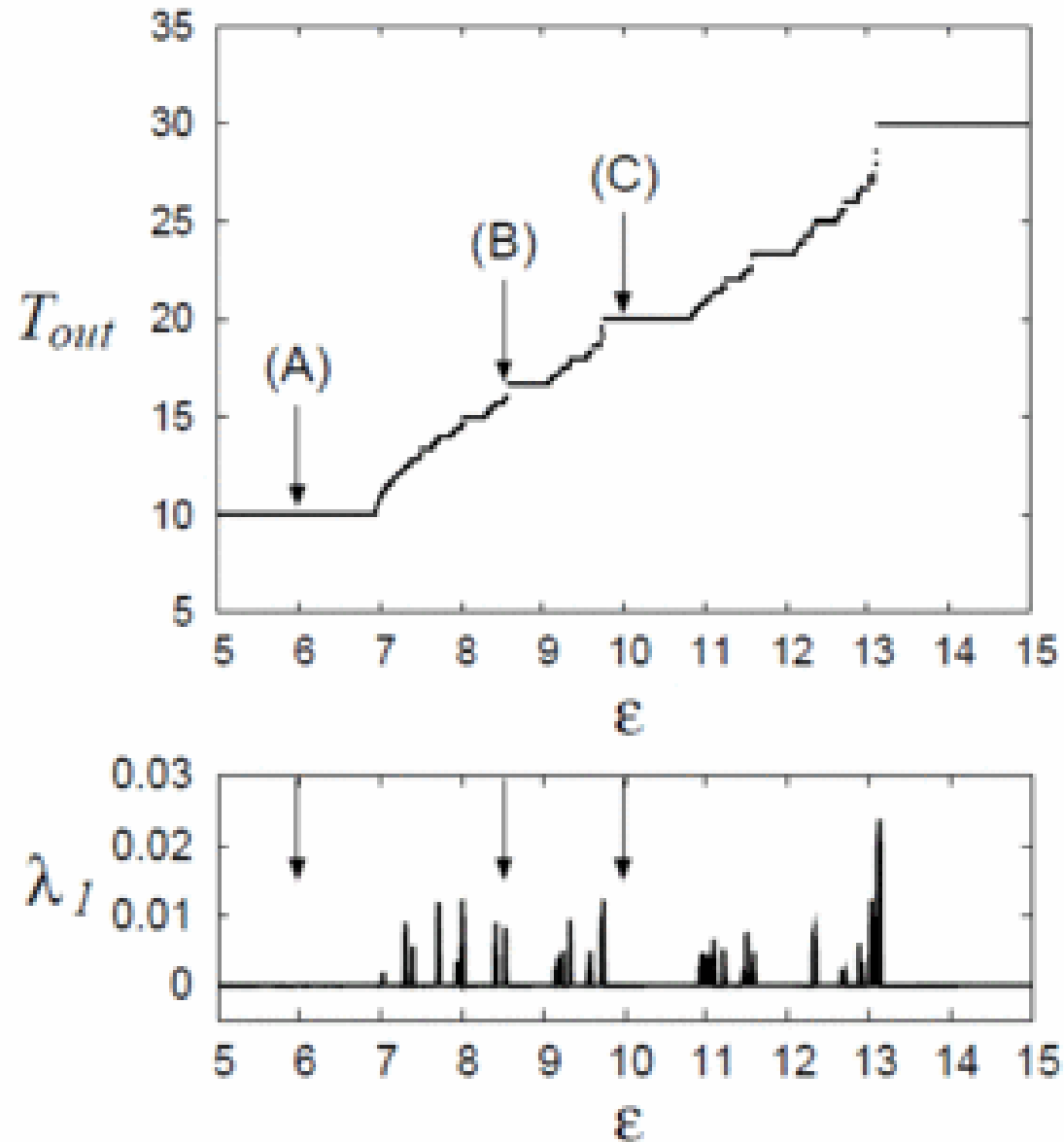


§ 6. The results obtained up to now are illustrated by a few resonance curves given in fig. 2.

En 1927 van der Pol y van der Mark...una firma del caos determinista

Diseñaron un circuito compuesto de una resistencia, un capacitor y una lámpara de neón; escucharon la respuesta del sistema insertando un teléfono en su circuito. Además de los comportamientos *locking*, escucharon “**ruidos irregulares**” antes de que el periodo del sistema saltara a su nuevo valor. Pensaron que este ruido era un fenómeno colateral...ahora se sabe que lo que ellos realmente escucharon fueron los signos del *caos determinista*.

Respuesta del oscilador ante el forzamiento



De un sistema no autónomo a uno autónomo

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y + A \cos \omega t. \end{aligned}$$

Sea $z(t)$ tal que $\dot{z}(t) = \omega$ con $z(0) = 0$ y entonces (33) se transforma en el sistema autónomo tridimensional

$$(34) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y + A \cos z \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

En el plano de Liénard, la ecuación (32) se escribe como

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y - \lambda(x^3/3 - x) \\ \dot{y} &= -x + A \cos z \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

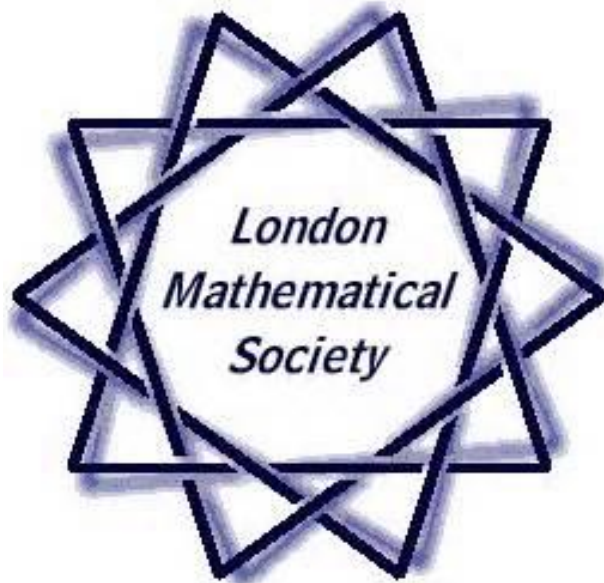
Problemas matemáticos con implicación importante en modelación matemática

- ¿Tiene soluciones periódicas? ¿De qué periodo? ¿Son estables o inestables?
- ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones ante cambios en los parámetros y en las condiciones iniciales?
- ***Entrainment***: Solución asintóticamente periódica con periodo un número entero múltiplo del periodo del forzamiento,
- ***Phase locking***: La solución tiende a una órbita periódica sobre el toro.

Mary Lucy Cartwright (1900-1998)



- En 1919 ingresa al Saint Hughs College de Oxford para estudiar matemáticas...es la quinta mujer. Se gradúa en 1923,
- De 1923 a 1927 se dedica a enseñar matemáticas,
- En 1928 regresa a Oxford para hacer su doctorado. G.H. Hardy es su primer supervisor; después lo será E. Ch. Titchmarch,
- En 1930 obtiene su *D. Phil.* Con la tesis: “*Los ceros de funciones integrales de tipo especial*”. J.E. Littlewood es su examinador externo,
- En 1930, se va a Cambridge. En estos años resolvió el problema: “*Estimar el máximo del módulo de una función analítica que toma el mismo valor no más de p veces sobre el círculo unitario*”,



- En 1934 obtiene una plaza en Cambridge donde realiza trabajo teórico,
- En 1947 es nombrada **FRS** y, hasta 1994, fue la única matemática perteneciente a la *RS*,
- De 1961 a 1963, presidenta de la **LMS**,
- En 1969 la reina la nombra **Dama en grado de Comendadora** de la Orden del Imperio Británico,
- Muere en 1998.

En 1938, sus intereses dieron un giro debido a un memoran-
dum de la LMS que “...conminaba a los matemáticos a apoyar
el estudio de las ecuaciones que aparecen en la descripción
de las ondas de radio.”

*“Para mi, el trabajo de los ingenieros en radio es
mucho más interesante que el de los ingenieros
mecánicos. Los ingenieros en radio quieren que
sus sistemas oscilen y lo hagan de forma muy
ordenada y, por lo tanto, quieren saber no sólo si
su sistema tiene una solución periódica, sino si
ésta sea estable, que su periodo, amplitud y
armónicos lo sean y determinar cómo éstos
varían con los parámetros de las ecuaciones.”*

Freeman Dyson:

"When I was a student in Cambridge I heard her lecture about the pathological behavior of non-linear amplifiers. The radars in World War 2 were driven by amplifiers which behaved badly when pushed to high power-levels. The Royal Air Force blamed the manufacturers and sent the radars back for repair. Cartwright showed that the manufacturers were not to blame. The van de Pol equation was to blame. The forced van de Pol equation is the standard equation describing a non-linear amplifier. Cartwright studied the solution of the van de Pol equation including sinusoidal forcing and **discovered the unexpected phenomenon that is now called chaos**. As the power is increased, the periodic solutions go through a series of higher and higher subharmonic and finally become aperiodic. The aperiodic solutions have disastrous effect on the radar, but have a beautifully intricate topological structure. Cartwright published her discoveries at the end of the war, but nobody paid much attention to her papers and she went on to other things. She became famous as a pure mathematician. Twenty years later, chaos was rediscovered by Ed Lorenz and became one of the most fashionable parts of physics. In recent year I have been calling attention to Cartwright's work. In 1993 I received an indignant letter from Cartwright, scolding me because I gave her more credit than she thought she deserved. I still claim that she is the original discoverer of chaos. She died, full of years and honors, in 1998."

John Edensor Littlewood (1885-1977): “All the details have a nasty way of ramifying into difficulties”



- En 1903 ingresó al Trinity College de la Universidad de Cambridge,
- Durante la 2da guerra mundial prestó sus servicios a la Artillería Real Garrison,
- En 1928 obtuvo la plaza Rouse Ball en Cambridge,
- Trabajó en: análisis matemático, teoría de series, la función Z de Riemann, etc,
- Publicó numerosos trabajos con G.H. Hardy,
- En 1915 fue nombrado *FRS*; en 1929 recibió la *Royal Medal* de la *RS*; en 1943 la *Sylvester Medal*; en 1958 la *Copley Medal*,
- De 1941 a 1943, fue presidente de la *LMS*.

“Los experimentos desarrollados por van der Pol sobre oscilaciones no lineales durante el periodo 1920-1930, estimularon el interés matemático en ecuaciones diferenciales no lineales que aparecen en la investigación sobre la radio. Estos problemas capturaron la atención de los matemáticos británicos M.L. Cartwright y J.E. Littlewood quienes iniciaron una colaboración que duró más de diez años. Su análisis sobre la ecuación de van der Pol y sus generalizaciones los condujo a explorar algunos métodos topológicos interesantes, incluido el desarrollo de un teorema de punto fijo para invariantes continuos bajo un homeomorfismo del plano. Ellos fueron de los primeros matemáticos en aplicar la teoría de la transformación de Poincaré al análisis de sistemas disipativos. Su investigación sobre la teoría de parámetros grandes, es de las primeras realizadas y jugó un papel importante en la teoría moderna de los sistemas dinámicos y el caos.”

...un resumen

En 1945, Cartwright y Littlewood probaron que existen conjuntos de parámetros para los cuales el sistema (34):

- Tiene dos trayectorias periódicas estables de periodo, $2(2n-1)\pi/\omega$ y $2(2n+1)\pi/\omega$, resp.
- La frontera entre las cuencas atracción de las dos trayectorias periódicas, no era suave.

Norman Levinson (1912-1975)



- En 1929 ingresa, para estudiar ingeniería eléctrica, al MIT,
- Durante este periodo, bajo la dirección de Norbert Wiener, también realiza trabajo matemático suficiente para obtener el doctorado (en 1935),
- Tiene una estancia en la Universidad de Cambridge, ahí conoce a Littlewood...de aquí su motivación para estudiar oscilaciones no lineales que ya estudiaban los ingleses.

En 1949, Levinson simplificó el análisis...sin perder las cualidades...

Levinson sustituyó el término $(x^2 - 1)$ —que aparece en (7)— por uno lineal a trozos y notó que el sistema modificado tenía las mismas cualidades que el sistema (7)...pero muuucho más fácil de estudiar!!!
Lefschetz, Levinson y Minorsky obtuvieron resultados sobre acotamiento de las soluciones de ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = p(t).$$

...otra firma del caos determinista

Primero Cartwright y Littlewood y posteriormente Levinson, notaron que era posible determinar valores de los parámetros para los cuales el sistema con forzamiento tenía “*órbitas no periódicas*”, para ciertas condiciones iniciales.

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y + A \cos \omega t. \end{aligned}$$

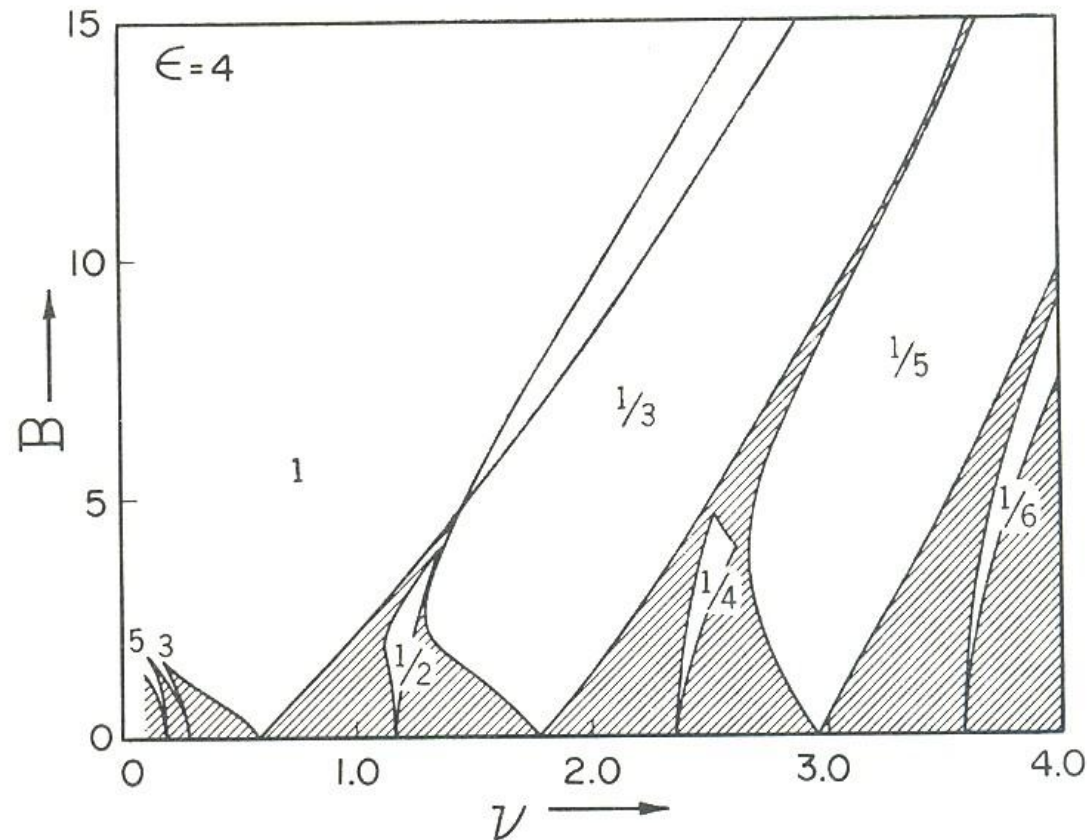
Sea $z(t)$ tal que $\dot{z}(t) = \omega$ con $z(0) = 0$ y entonces (33) se transforma en el sistema autónomo tridimensional

$$(34) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y + A \cos z \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

En el plano de Liénard, la ecuación (32) se escribe como

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y - \lambda(x^3/3 - x) \\ \dot{y} &= -x + A \cos z \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

Variando la amplitud y la frecuencia, se determinaron las regiones para las cuales el sistema (34) exhibe *entrainment*: **Las lenguas de Arnold**



7.3. Regions of phase locking of the van der Pol oscillator (equation 7.1) to a sinusoidal stimulation obtained using an analog computer. The ratios between the cycles of the forced oscillator and the forcing function are indicated. Dynamics in shaded regions were called "beat oscillations" (now called quasiperiodicity). From Hayashi (1964).

Sobre la dinámica del sistema (34)

Mirada 1.

Para $A = 0$, la superficie cilíndrica $C \times \mathbf{R}$:

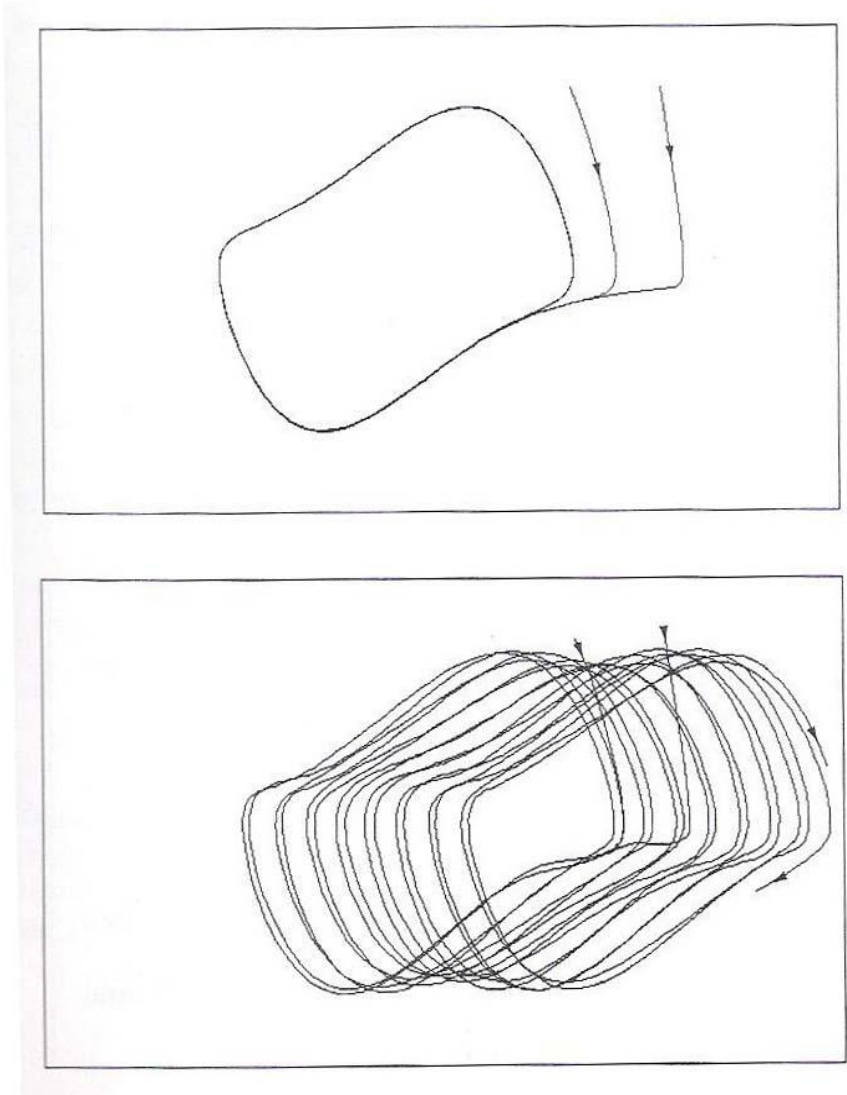
- Es invariante ante el flujo,
- Está compuesta por soluciones periódicas,
- Atrae a toda solución del sistema

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned}$$

Para $|A|$ “pequeña”, persiste una superficie cilíndrica “cercana” a la superficie $C \times \mathbf{R}$, la cual:

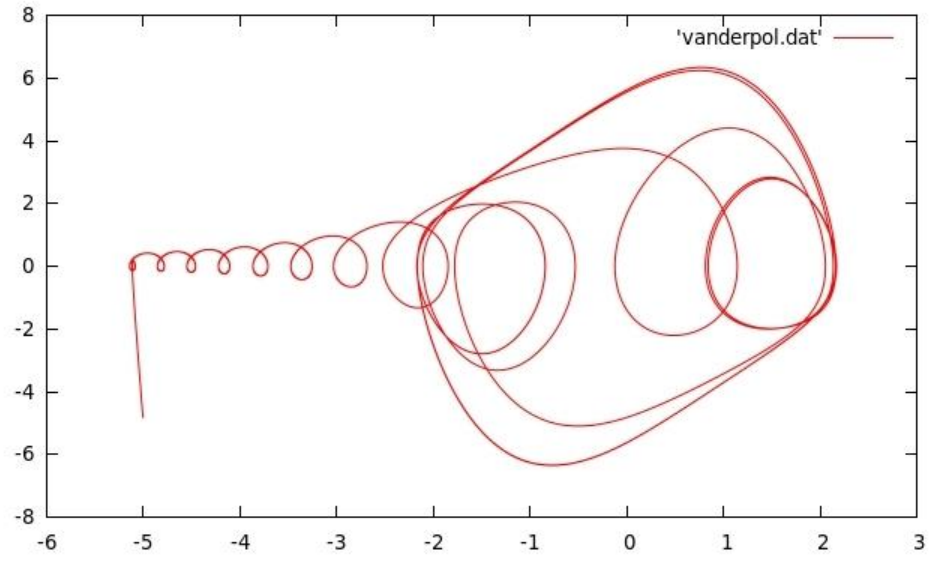
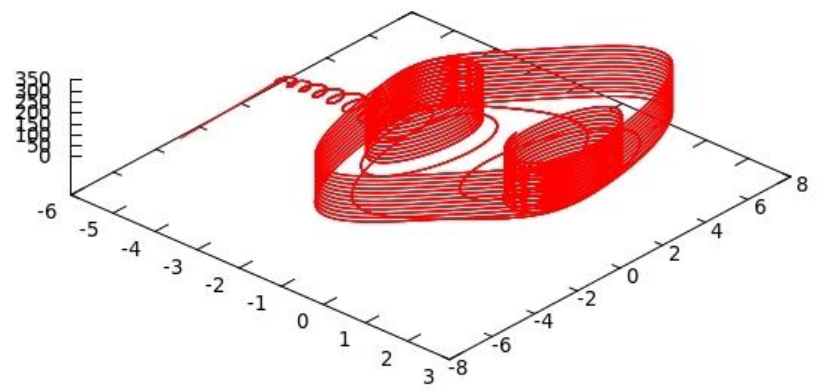
- Es invariante ante el flujo,
- Atrae a todas las soluciones cercanas del sistema (34),
- El flujo sobre ella puede ser muy diferente al caso sin forzamiento.

Para $A=0$, la superficie cilíndrica cuya intersección con planos paralelos al xy es el ciclo límite, es: ***invariante y atractora*** de las trayectorias de (34)...por continuidad...para A “pequeña”...



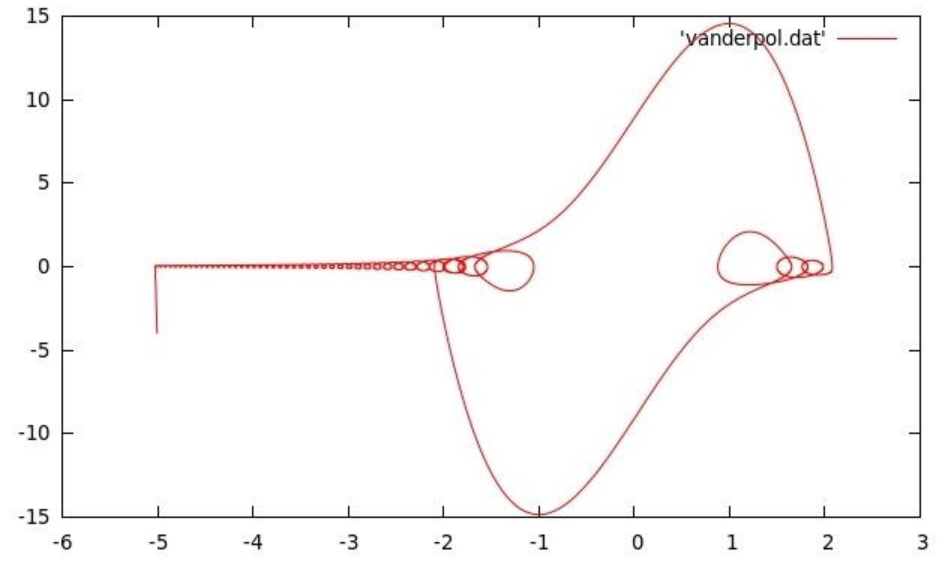
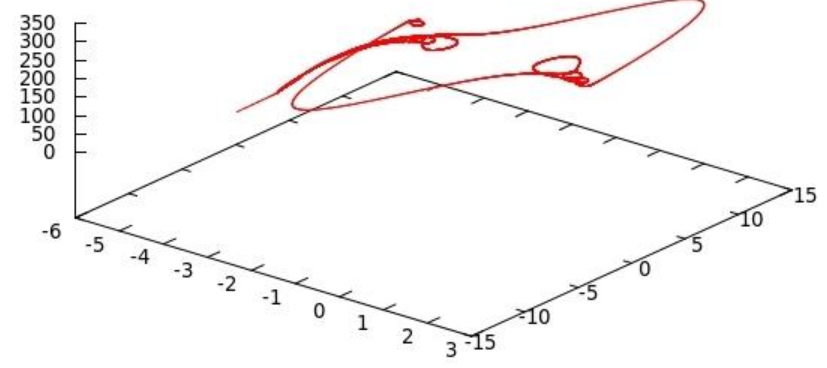
A=10
Omega=3
Lambda=1.5

'vanderpol.dat' —

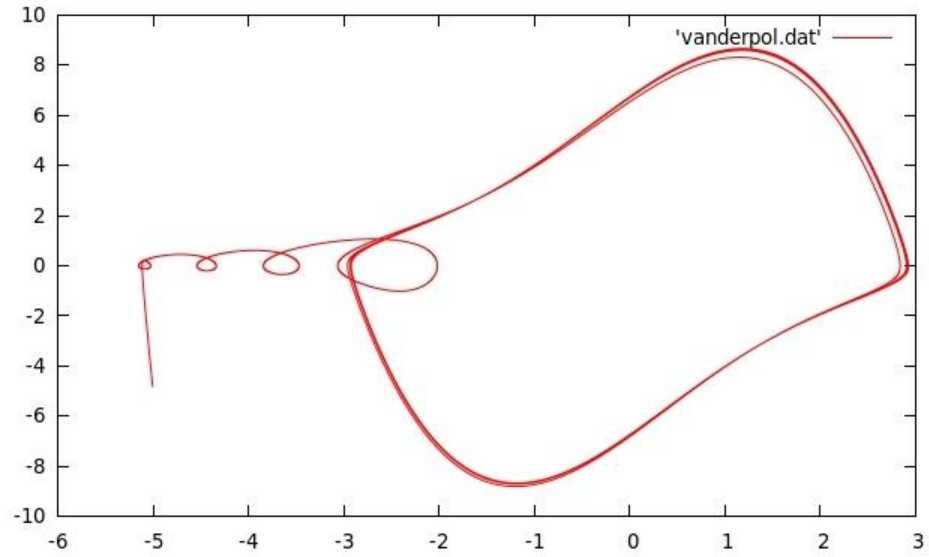
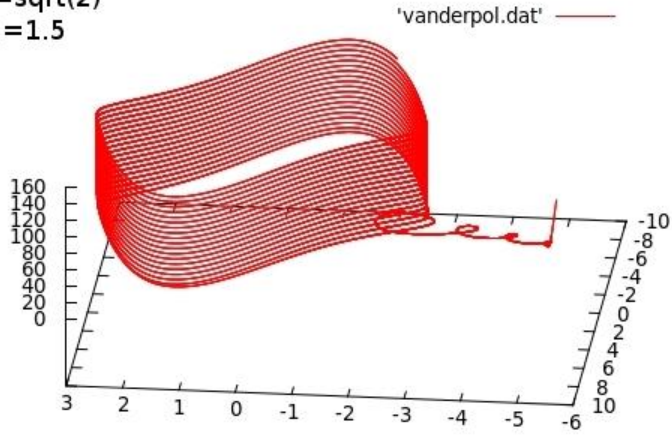


A=10
Omega=3
Lambda=8.53

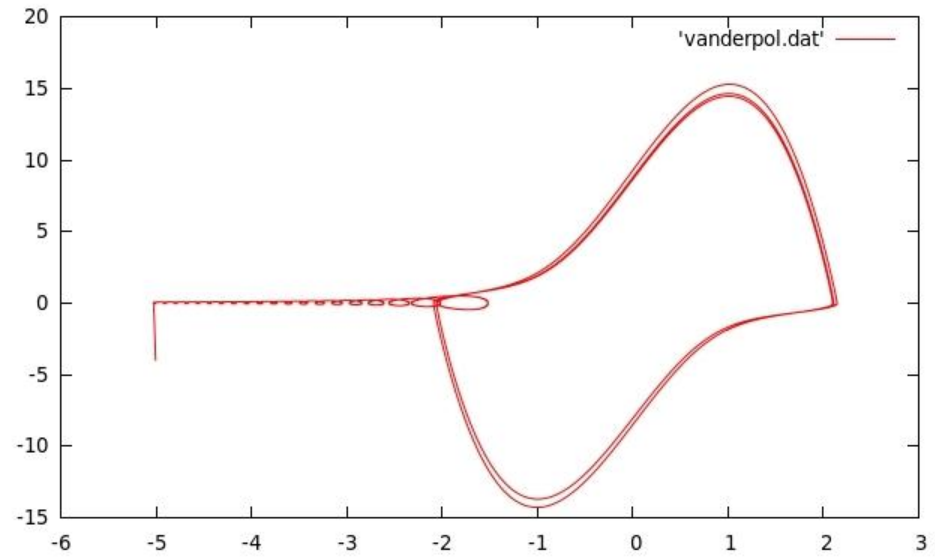
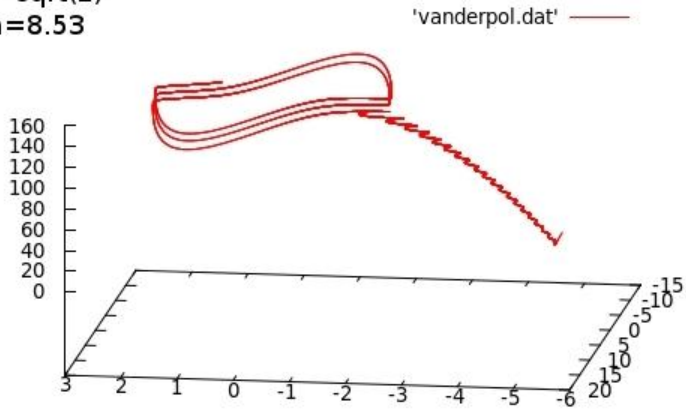
'vanderpol.dat' —



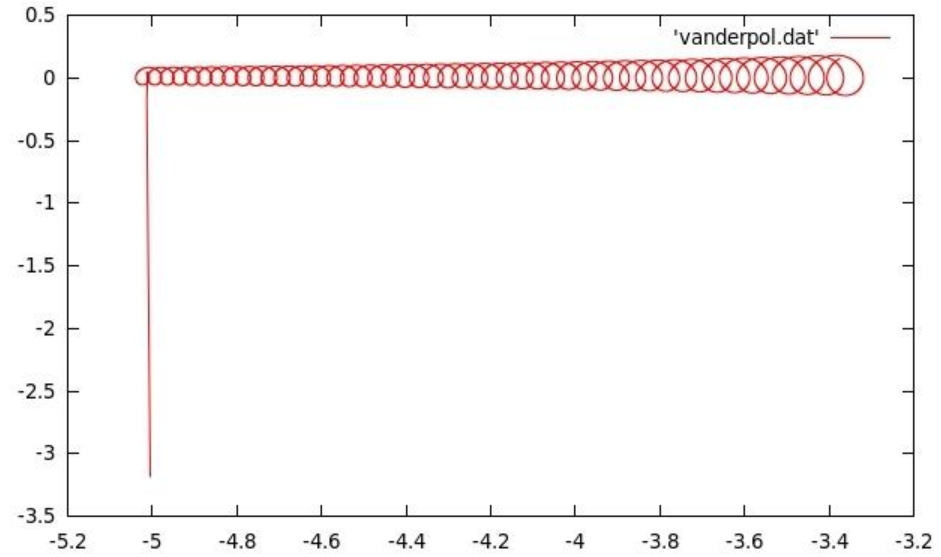
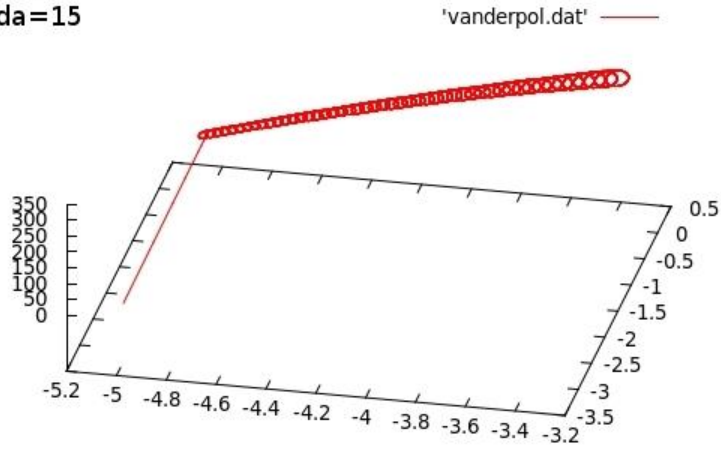
A=10
 $\Omega = \sqrt{2}$
 $\Lambda = 1.5$



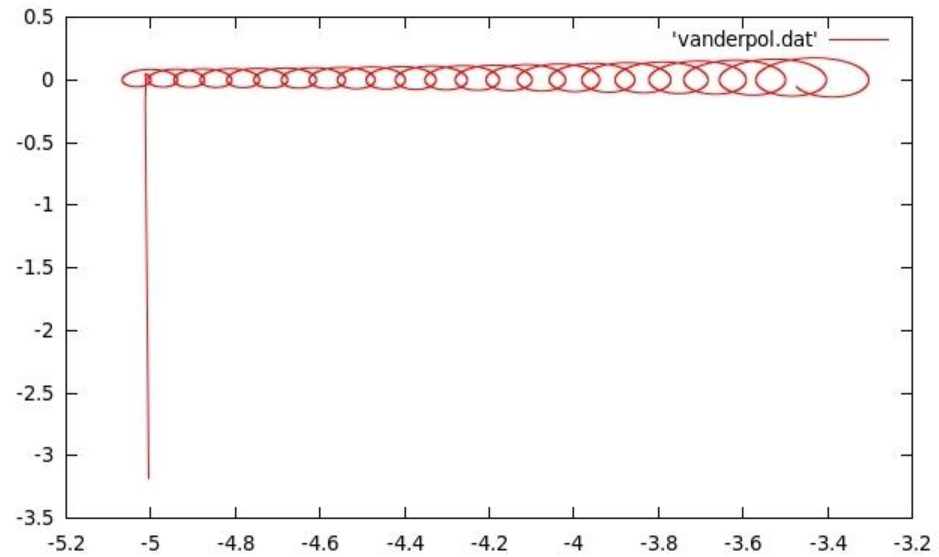
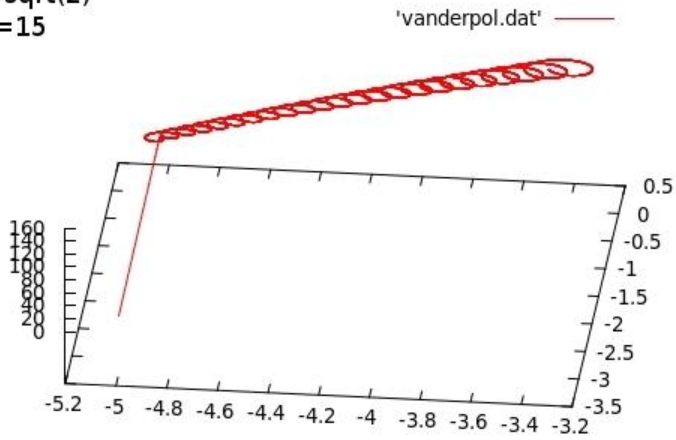
A=10
 $\Omega = \sqrt{2}$
 $\Lambda = 8.53$



A=25
Omega=3
Lambda=15



A=25
Omega=sqrt(2)
Lambda=15



Mirada 2.

Como el forzamiento es 2π -periódico y el sistema (34) es autónomo, cualquier traslación temporal de una solución, también lo es. En particular, ante una traslación en 2π unidades. Luego, al identificar a $t = 0$ con $t = 2\pi/\omega$, las soluciones de (34) pueden verse en $\mathbf{R}^2 \times S^1$, lo que equivale a considerar las trayectorias del sistema

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda(1 - x^2)y + A \cos z \\ \dot{z} &= \omega, \quad \text{mod } 2\pi. \end{aligned}$$

Con esta identificación, la superficie cilíndrica invariante del sistema (34), se transforma en una que es difeomorfa al toro $S^1 \times S^1$ el cual:

- Es invariante bajo el flujo,
- Atrae a todas las soluciones cercanas del sistema (34).

Para $A = 0$ el flujo es paralelo.

Para $|A|$ “pequeña”, el toro persiste pero el flujo sobre él no es paralelo y puede tener trayectorias orbitalmente estables y trayectorias periódicas inestables.

...equivalentemente: las trayectorias de (37) tienden a un **toro invariante** que consiste en el producto del ciclo límite, con el z-círculo.



Para $A > 0$, las cualidades del conjunto invariante atractor y las soluciones sobre él, cambian... (Krauskopf and Osinga, 2000)

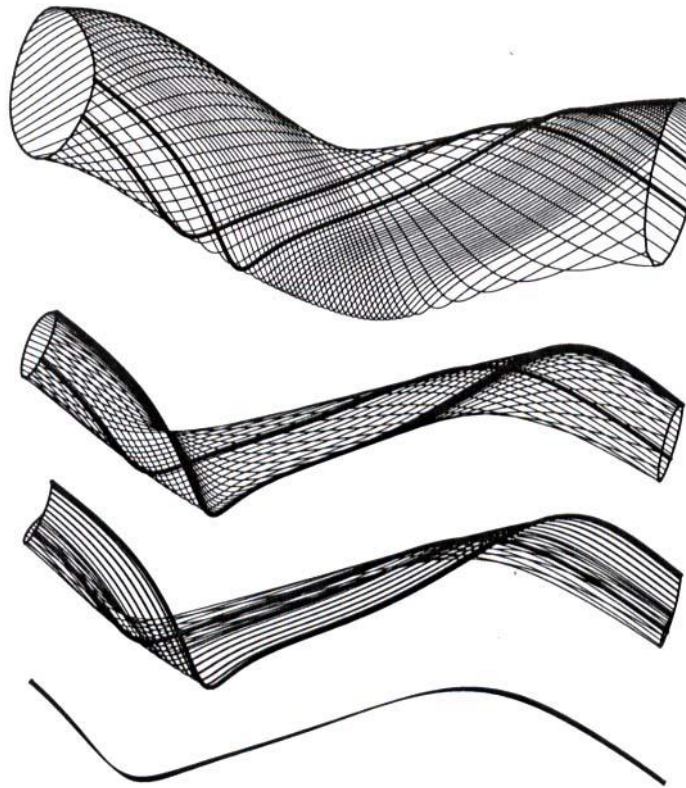


FIG. 5. Tori of the forced van der Pol oscillator. From top to bottom there is $\beta = 0.37$, $\beta = 0.3740954$, $\beta = 0.375$ and $\beta = 0.3761$.

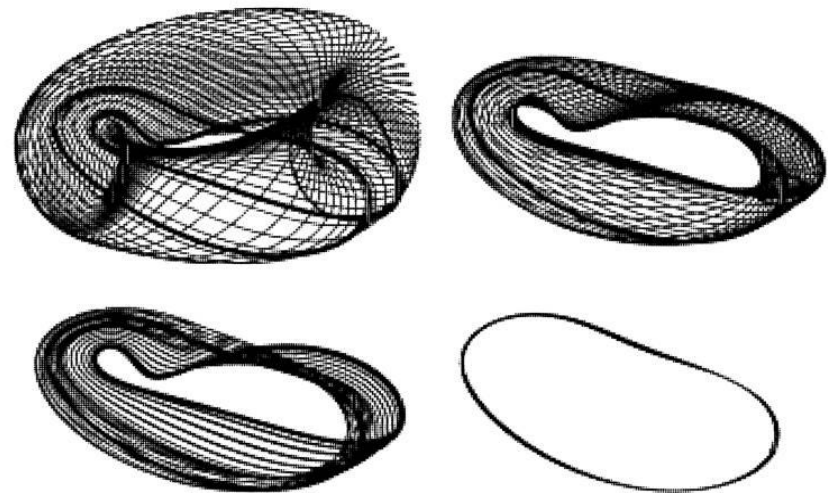


FIG. 6. The tori of Fig. 5 embedded in \mathbb{R}^3 . From top to bottom there is $\beta = 0.37$, $\beta = 0.3740954$, $\beta = 0.375$ and $\beta = 0.3761$.

Mirada 3. Por las características del campo vectorial, el plano xy es una **sección transversal** del flujo asociado al sistema (34). Consideremos $T = 2\pi/\omega$. Sea

$$\Pi : P \rightarrow P,$$

tal que

$$\Pi(x, y, 0) = (\varphi(T, x, y, 0), 0),$$

donde φ es la solución que pasa por $(x, y, 0)$ en $t = 0$. Π es el **mapeo de Poincaré**.

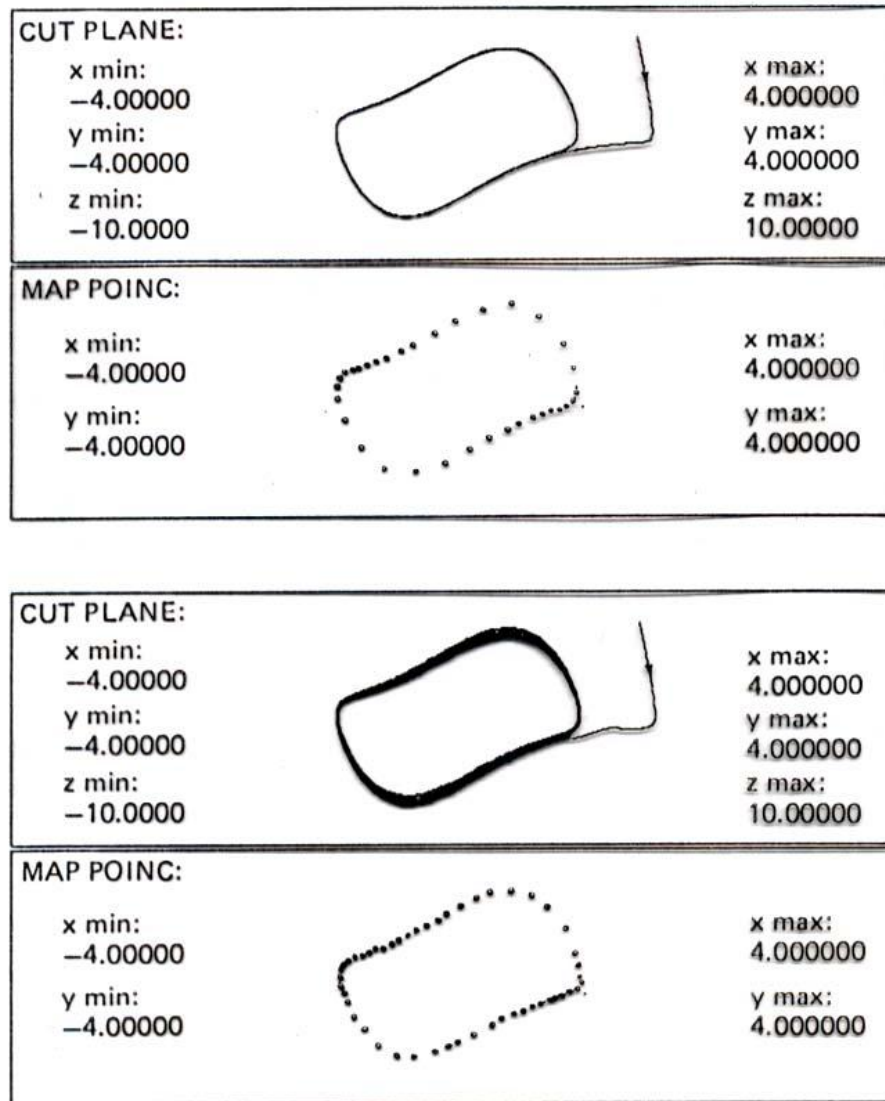


Figure 16.2. An orbit and its Poincaré section of the oscillator of Van der Pol: (a) Unforced and (b) with forcing term $0.3 \cos 3t$.

Ueda y Akamatsu, 1981

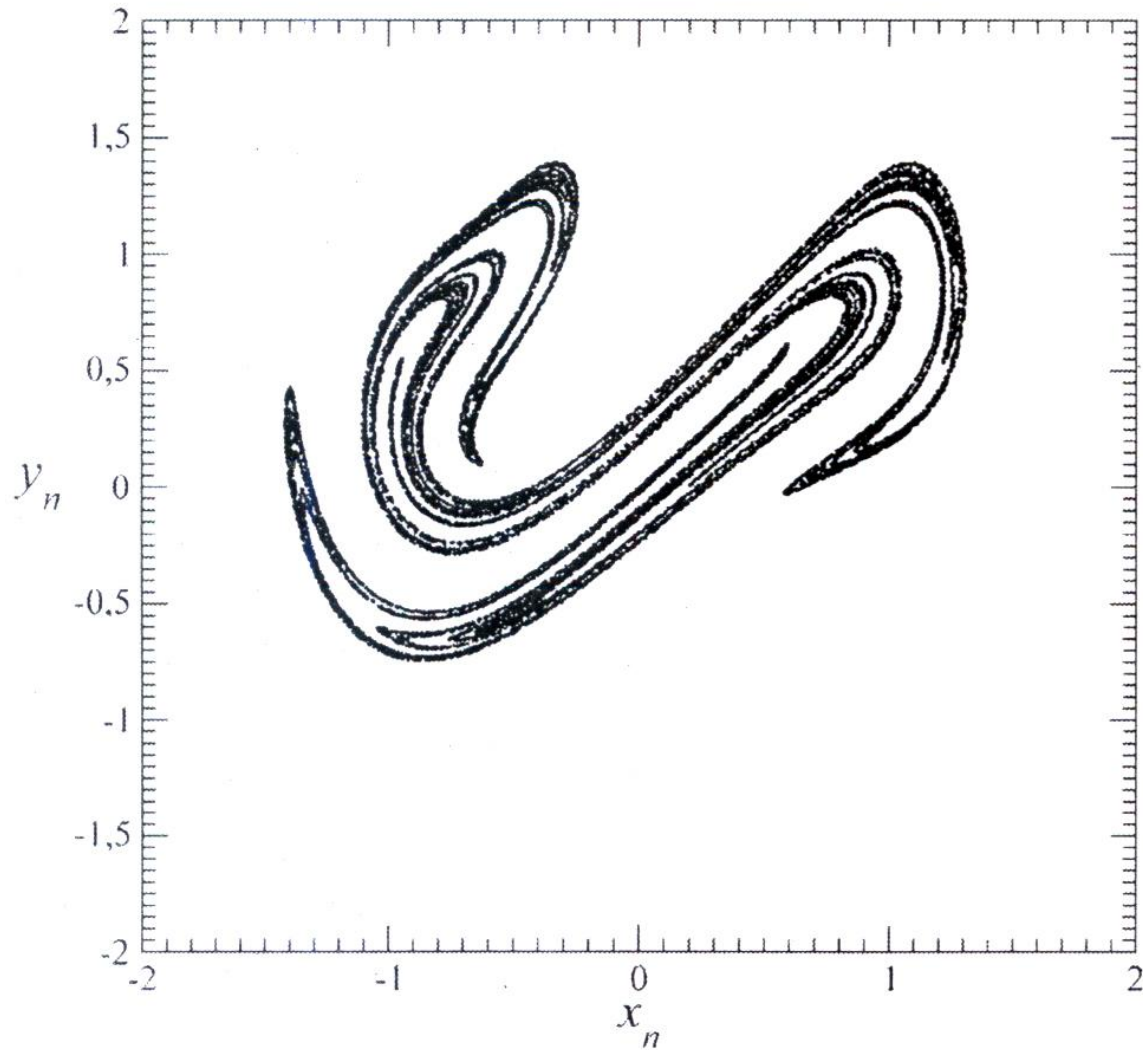


FIG. 25. Poincaré sections of the chaotic attractors published by Ueda and Akamatsu in 1981. Parameter values: $\mu = 0.2$, $B = 2.4$ and $\omega = 0.70$.

Stephen Smale (1930-)



- De abuelos ingleses y canadienses, Stephen nace en Flint, Michigan en julio de 1930,
- Se doctora en 1956 en la Universidad de Michigan. En su tesis generalizó un teorema de Whitney y Graustein: Clasificó las curvas cerradas que “viven” en una variedad de dimensión n ,
- Campos en los que ha trabajado: Topología diferencial, sistemas dinámicos, análisis numérico, teoría económica, biología matemática,
- Ha recibido muchos reconocimientos, entre ellos, la **Medalla Fields 1966**...el mismo día de la ceremonia, en Washington empezó una audiencia para investigar las protestas antibélicas en las que Smale participó muy destacadamente.



International Workshop on Dynamical Systems

Celebrating Mauricio Peixoto's 90th birthday

IMPA, Rio de Janeiro, Brazil
April 12th to 15th, 2011

Scientific Committee

Jacob Palis
IMPA

Marcelo Viana
IMPA

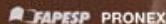
Wellington de Melo
IMPA

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

An activity of



Support



for further information: Departamento de Atividades Científicas - IMPA
phone +55 21 2529 5017 fax +55 21 2529 5019 icds2010@impa.br
http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/store/evento_1102

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110-Jardim Botânico-Rio de Janeiro 22460-320-Brazil

design: sergio s. net



Entre 1959-1960, en Río de Janeiro: Dos conjeturas, dos...



1. Por lo menos parece plausible que sistemas que satisfacen las condiciones de 1-5 formen un conjunto abierto y denso en el espacio (con la topología C^1) de todos los campos vectoriales definidos en M ,
2. Parece que las condiciones 1-5 son condiciones necesarias y suficientes para que \vec{X} sea estructuralmente estable en el sentido de Andronov y Pontryagin.



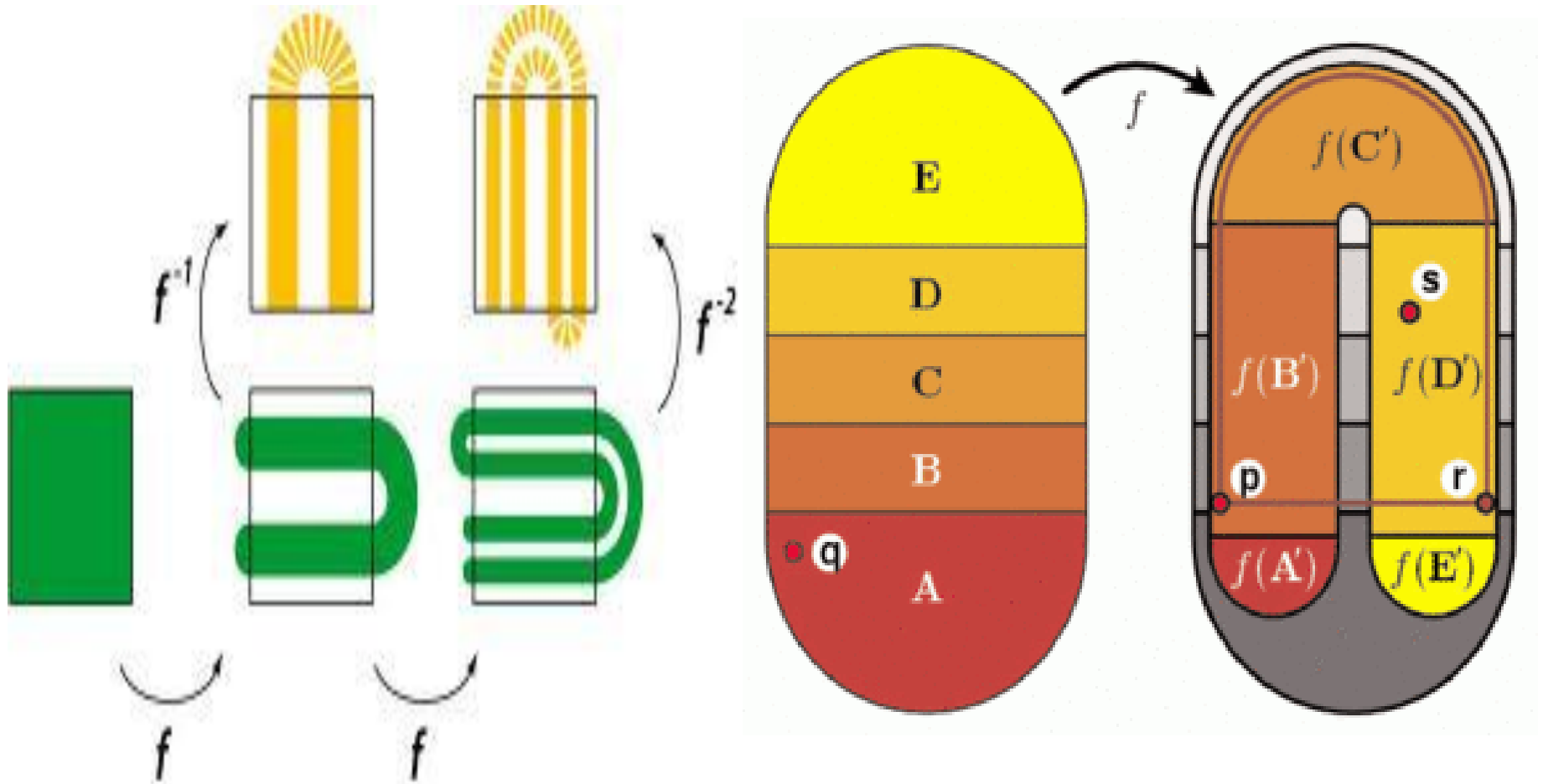
impa



“Esta euforia pronto se acabó debido a una carta que recibí de un matemático del MIT llamado Norman Levinson, quien era coautor del libro de texto básico de sobre ecuaciones diferenciales en el posgrado, era un científico que había que tomar en serio. Levinson me escribió, en su carta me informaba de un resultado suyo el cual contenía un contraejemplo a mi conjetura. Su artículo, a su vez, era una extensa explicación del trabajo que los matemáticos británicos M.L. Cartwright y J.E. Littlewood habían hecho durante la segunda guerra mundial. Cartwright y Littlewood habían estado analizando algunas ecuaciones que aparecieron durante la guerra en estudios involucrados en ondas de radio. Ellos habían hallado un comportamiento no usual --de hecho inesperado--- en las soluciones de estas ecuaciones. De hecho, Cartwright y Littlewood habían probado matemáticamente que los signos del caos podrían existir, aun en ecuaciones que aparecieron en ingeniería. Pero el mundo no estaba listo para escuchar sus importantes contribuciones a la teoría del caos y, aun ahora, no son bien conocidas...”

....Trabajé día y noche tratando de resolver el reto a lo que yo creía y que la carta enunciaba. Fue necesario traducir los argumentos analíticos de Levinson a mi propia manera geométrica de pensar. Al menos en mi caso, entender las matemáticas no viene de leer o incluso de escucharlas. Tengo que rehacer las matemáticas en el contexto de mi propia formación, la cual tiene varias vertientes, algunas fuertes y otras débiles. Mi formación es más fuerte en análisis geométrico, pero seguir una sucesión de fórmulas me mete en dificultades. La literatura matemática es útil por que nos provee de pistas y uno con frecuencia puede usarlas para tener una imagen convincente. Cuando he reorganizado las matemáticas en mis propios términos siento que las entiendo, antes no. En cualquier caso, eventualmente yo mismo me convencí que Levinson realmente estaba en lo correcto y que mi conjetura era errónea. El caos ya estaba implícito en los análisis de Cartwright y Littlewood! La paradoja se había resuelto, yo había conjeturado erróneamente. Pero mientras aprendí eso, **¡descubrí la herradura!**”

El mapeo de la herradura



Teorema. *El mapeo de la herradura, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, tiene un conjunto invariante, Λ , cerrado que contiene a un conjunto:*

- *Numerable de órbitas periódicas de periodo arbitrariamente grande,*
- *No numerable de órbitas no periódicas, entre las cuales hay órbitas que pasan arbitrariamente cerca de cualquier punto de Λ .*

Medalla Fields 1966 por haber probado la Conjetura de Poincaré: *“Si una variedad compacta de dimensión tres tiene la topología algebraica de una esfera, S , entonces es homeomorfa a S .”*



Sin embargo...

Por su activa participación en contra de la guerra realizada por Estados Unidos contra Vietnam, se ganó la animadversión del gobierno de su país. Donald Hornig, asesor científico de Lyndon B. Johnson, en 1968 escribió en *Science*:

“This blythe spirit leads mathematicians to seriously propose that the common man who pays the taxes ought to feel that mathematical creation should be supported with public funds on the beaches of Rio.”

Osciladores de van del Pol y los patrones de locomoción de las medusas



$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - \lambda(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 &= A(x_2 - x_1) + B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 - \lambda(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + x_2 &= A(x_1 - x_2) + B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\end{aligned}$$

Teorema. *Existe un conjunto abierto de parámetros (A, ω) tal que para ε suficientemente pequeña se cumple lo siguiente:*

1. *Existe una sección transversal global Σ al flujo del sistema*

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x \\ \dot{y} &= -x + A \sin(2\pi\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega,\end{aligned}\tag{9}$$

para la cual el mapeo de retorno $f_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \Sigma$ está bien definido; existe un difeomorfismo $F_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $f_\varepsilon = F_\varepsilon^{(2)}$,

2. *El conjunto no errante de F_ε se descompone en dos conjuntos básicos, un atractor y un conjunto de Cantor Λ_ε . La restricción de F_ε a Λ_ε es topológicamente conjugada a un corrimiento sobre el espacio Σ^3 de tres símbolos,*
3. *F_ε es C^1 -estructuralmente estable.*

A partir de

$$\ddot{x} + a(x - w_1)(x - w_2)\dot{x} - \frac{x(x + d)(x + e)}{ed} = \gamma(t),$$

propusieron

$$\ddot{\vec{y}} = \vec{F}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}) + \vec{\Gamma}(t) + K\vec{y},$$

donde

$$\vec{y} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \dot{\vec{y}} = (x_4, x_5, x_6)^T,$$

$$\vec{\Gamma} = (\rho_{sa} \sin \omega_{sa} t, \rho_{av} \sin \omega_{av} t, \rho_{hp} \sin \omega_{hp} t)^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{sa-av} + k_{sa-hp} & -k_{sa-av} & -k_{sa-hp} \\ -k_{av-sa} & k_{av-sa} + k_{av-hp} & -k_{av-hp} \\ -k_{hp-sa} & -k_{hp-av} & k_{hp-sa} + k_{hp-av} \end{bmatrix}$$

Lara-Aparicio *et al* (2014): *Modeling some properties of circadian rhythms*. *Math. Biosci. and Ing.* Vol. **11**, No. 2, pp. 317-330.

$$\ddot{\vec{x}} = \gamma((1 - x_i^2)\delta_{ij})\dot{\vec{x}} + \mu \left(A - \frac{\omega}{\mu} I \right) \vec{x},$$

donde γ, μ y ω son reales, $\delta_{ij} \in M_{n \times n}$ es diagonal, $A \in M_{n \times n}$ es no negativa y da la estructura de la red de osciladores, I es la identidad.

Conclusiones

El estudio del sistema de van der Pol:

1. Muestra la conexión: **necesidades tecnológicas-desarrollo de teorías matemáticas,**
2. **Echa mano de técnicas muy variadas:** perturbaciones, métodos de promedio, mapeo de Poincaré, mapeos del círculo, teoría de bifurcaciones, exponentes de Lyapunov, método de Melnikov, métodos topológicos, dinámica simbólica, etc. En algunas de ellas, **¡¡¡las simulaciones numéricas son imprescindibles!!!**
3. **Tiene actualidad** en teoría de oscilaciones no lineales, ritmos circádicos, sincronización de osciladores en sistemas biológicos, etc.