

¿Porqué métodos sin malla?: El caso de las funciones de base radial.

Pedro González Casanova Henríquez

Instituto de Matemáticas, UNAM.

Facultad de Ciencias, UNAM,

SEPTIEMBRE de 2014.

C. DeBoor: ‘A practical guide to splines’

‘‘Evaluation of a polynomial of order k involves k coefficients and basis functions whose complexity increases with the order k , while evaluation of a piecewise polynomial function of order n with k pieces at a site involves only n coefficients and a local basis of fixed complexity no matter how big k might be.’’

C. DeBoor: ‘A practical guide to splines’

‘‘Evaluation of a polynomial of order k involves k coefficients and basis functions whose complexity increases with the order k , while evaluation of a piecewise polynomial function of order n with k pieces at a site involves only n coefficients and a local basis of fixed complexity no matter how big k might be.’’

‘‘This structural difference also strongly influences the construction of approximations, requiring the solution of a full system in the polynomial case and usually only a banded system in the piecewise polynomial case.’’

C. DeBoor: “A practical guide to splines”

‘‘If the function to be approximated is badly behaved anywhere in the interval of approximation, then the approximation is poor everywhere. This global dependence on local properties can be avoided when using piecewise polynomial approximants.’’

El problema determina el método, no al revés.

- Usar un Método de Godunov para un problema elíptico, absurdo.
- Diferencias finitas, parabólico, simetría axial, termino difusivo dominante: excelente.
- etc.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

¿Que pasa con las mallas?:

Elemento, diferencias y volumen finito, se basan en la construcción de mallas. Algunas limitaciones:

Mallas estucturadads y no-estucturadas, ¿que queremos?

- 1 La adaptación de mallas debe **reducir el error de discretización espacial así** como la **dependencia de la solución de la malla**.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

¿Que pasa con las mallas?:

Elemento, diferencias y volumen finito, se basan en la construcción de mallas. Algunas limitaciones:

Mallas estructuradas y no-estructuradas, ¿que queremos?

- 1 La adaptación de mallas debe **reducir el error de discretización espacial así** como la **dependencia de la solución de la malla**.
- 2 La adaptación debe producir una mejora cuantificable de la solución.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

¿Que pasa con las mallas?:

Elemento, diferencias y volumen finito, se basan en la construcción de mallas. Algunas limitaciones:

Mallas estructuradas y no-estructuradas, ¿que queremos?

- 1 La adaptación de mallas debe **reducir el error de discretización espacial así** como la **dependencia de la solución de la malla**.
- 2 La adaptación debe producir una mejora cuantificable de la solución.
- 3 Si es necesario debe **preservar precisión temporal**.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

¿Que pasa con las mallas?:

Elemento, diferencias y volumen finito, se basan en la construcción de mallas. Algunas limitaciones:

Mallas estructuradas y no-estructuradas, ¿que queremos?

- 1 La adaptación de mallas debe **reducir el error de discretización espacial así** como la **dependencia de la solución de la malla**.
- 2 La adaptación debe producir una mejora cuantificable de la solución.
- 3 Si es necesario debe **preservar precisión temporal**.
- 4 Los errores inducidos por la adaptividad **no deben reducir los beneficios significativamente**.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

¿Que pasa con las mallas?:

Elemento, diferencias y volumen finito, se basan en la construcción de mallas. Algunas limitaciones:

Mallas estructuradas y no-estructuradas, ¿que queremos?

- 1 La adaptación de mallas debe **reducir el error de discretización espacial así** como la **dependencia de la solución de la malla**.
- 2 La adaptación debe producir una mejora cuantificable de la solución.
- 3 Si es necesario debe **preservar precisión temporal**.
- 4 Los errores inducidos por la adaptividad **no deben reducir los beneficios significativamente**.
- 5 La **adaptividad debe ser automática y eficiente**.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

Logar lo anterior es difícil:

- Esfuerzo computacional enorme, **donde los métodos convencionales DF, EF son difíciles de aplicar, ej:**
 - superficies libres,
 - fronteras deformables,
 - interfaces móviles,
 - grandes deformaciones.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

Logar lo anterior es difícil:

- Esfuerzo computacional enorme, **donde los métodos convencionales DF, EF son difíciles de aplicar, ej:**
 - superficies libres,
 - fronteras deformables,
 - interfaces móviles,
 - grandes deformaciones.
- En 3D la generación de mallas **-particularmente móviles- resulta extremadamente compleja y costosa.**

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

Logar lo anterior es difícil:

- Esfuerzo computacional enorme, **donde los métodos convencionales DF, EF son difíciles de aplicar, ej:**
 - superficies libres,
 - fronteras deformables,
 - interfaces móviles,
 - grandes deformaciones.
- En 3D la generación de mallas **-particularmente móviles- resulta extremadamente compleja y costosa.**
- La **intervención humana** puede requerirse para fronteras complejas en 3D.

Algunos métodos libres de mallas:

- **Smoothed Particle Hydrodynamics**, with Monaghan and Gingold and Lucy, 1977.
- **The Diffuse Element Method (DEM)**, Nayroles and Touzot in 1991.
- **The Element-Free Galerkin**, Belytschko, 1994.
- **Reproducing Kernel Particle Method**, Liu, 1995.
- **Finite Point Method**, Oñate, 1996.
- **Meshless Local Petrov-Galerkin**, Atluri y Zhu, 1998.
- **Radial Basis Functions**, Kansa, 1991.

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

Algunos métodos libres de mallas:

- **Smoothed Particle Hydrodynamics**, with Monaghan and Gingold and Lucy, 1977.
- **The Diffuse Element Method (DEM)**, Nayroles and Touzot in 1991.
- **The Element-Free Galerkin**, Belytschko, 1994.
- **Reproducing Kernel Particle Method**, Liu, 1995.
- **Finite Point Method**, Oñate, 1996.
- **Meshless Local Petrov-Galerkin**, Atluri y Zhu, 1998.
- **Radial Basis Functions**, Kansa, 1991.

¿Clasificación?

¿Porqué Métodos Libres de Mallas?

Los métodos Libres de mallas se pueden clasificar en función de la **técnica de aproximación**, para nodos aleatorios, que usemos:

- **Métodos Locales:** Mínimos cuadrados móviles (MLSM), generalización del *enfoque de Shepard*. Se construyen funciones de forma locales en volúmenes asociados a los nodos. Cuadratura diferencial, etc.
- **Métodos Globales:** La EDP se discretiza mediante métodos de *aproximación global*.

En esta plática nos concentraremos en los métodos globales llamados **funciones de base radial**.

Algunos métodos particulares de Funciones de Base Radial:

- Dual Reciprocity Method (DRM)
- Method of Fundamental solution (MFS) and
- RBF Boundary Knot method (BKM).
- Meshless Local Petrov-Galerkin formulation.
- Differential Quadrature: Symmetric; Non-symmetric.
- Symmetric; Non-symmetric collocation..

Origen del método de Kansa:

- En los últimos 30 años: Interpolación multivariada de **datos aleatorios** mediante funciones radiales. (polinomios \Rightarrow stencil)
- En 1990, Kansa E. J., primera aplicación a la solución numérica de EDP. Fuerte impulso a partir de 1995, (Schaback R., Chen C. S., Fasshauer G., Foronberg, etc.).
- La solución numérica de EDP mediante interpolantes radiales **no requiere de la construcción de mallas**.

Índice:

- Definición y tipos de interpolantes radiales.
- Ventajas y limitaciones de estas técnicas de aproximación.
- Colocación: Dos enfoques para resolver EDP mediante funciones radiales.
- Aplicación a la solución de problemas reales.
- Conclusión y problemas de frontera.

Definición de interpolantes radiales

- **Función radial:** $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\| \cdot \|$ norma euclidiana de \mathbb{R}^d

$$\Phi(x) \equiv \phi(\| \cdot \|) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

- $x_1, \dots, x_N \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, conjunto de nodos. **Interpolante radial:**

$$s(x, \epsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|, \epsilon) + p^n(x); \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j p^n(x_j) = 0$$

- Condiciones de interpolación:

$$s(x_i, \epsilon) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

- Esquemáticamente el sistema de ecuaciones algebraico es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Invertibilidad del sistema, dos enfoques:

- **Enfoque Hilbertiano:**
 - Madych W. R. & Nelson S. A., (1988 y 1990).
 - Schaback R. (1998); Wendland (2005).
- **Enfoque algebraico:**
 - Guo, Hu and Sun, (1993).

Tipo de funciones radiales

Funciones radiales <i>suaves a tramos</i>		
$\phi(\ x\)$	Orden del polinomio	Grado de convergencia
$(-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \ x\ ^\beta$ <i>(placa delgada) β impar</i>	$\lceil \beta/2 \rceil$	$h^{\beta/2}$
$(-1)^{1+\beta/2} \ x\ ^\beta \log \ x\ $ <i>(placa delgada) β par</i>	$1 + \beta/2$	$h^{\beta/2}$
$(2\pi^{d/2}/\Gamma(k)) \cdot$ $K_{k-d/2}(\ x\)(\ x\ /2)^{k-d/2}$ <i>Splines de Sobolev, ($2k > d$)</i>	0	$h^{k-d/2}$

C^∞ , excepto en los centros.

Tipos de funciones radiales

funciones radiales C^∞		
$\phi(\ x\)$	Orden del polinomio	Grado de convergencia
$(-1)^{\beta/2}(\gamma^2 + \ x\ ^2)^{\beta/2}$ <i>Multicuadráticos</i>	$\lceil \beta/2 \rceil$ si $\beta/2 > 0$	$e^{-\delta/h}$ si $\delta > 0$
$e^{-\beta\ x\ ^2}, \beta > 0$ <i>Gaussianas</i>	0	$e^{-\delta/h^2}$ si $\delta > 0$

funciones radiales de soporte compacto		
$\phi(\ x\)$	Orden del polinomio	Grado de convergencia
$(1 - \ x\)_+^m p_k(x)$ where: $(1 - \ x\)_+ =$ $\begin{cases} 1 - \ x\ , & 0 \leq \ x\ < 1; \\ 0, & \ x\ > 1. \end{cases}$ <i>Wenland</i>	0	$h^{k-1/2}$

¿Cual es la importancia de esta formulación desde el punto de vista numérico?

Ventajas:

- La dimensión del espacio \mathbb{R}^d , no es obstáculo para calcular el interpolante.
- Pruebas numéricas y de despliegue gráfico han demostrado que **la calidad de estos interpolantes -en el caso aleatorio- supera a otras técnicas.**
- Igualmente, **la aproximación de derivadas** parciales es superior a la que se obtiene con otras técnicas de interpolación.

Limitaciones:

- El sistema **tiene un mal condicionamiento, (estabilidad)**.
Estrategias propuestas:
 - Precondicionamiento del sistema, (Dyn, Levin, and Rippa, 1986; Buhmann and Powell, 1990, L Ling, 2003)
 - Partición de dominios, con y sin traslape, (R. K. Beatson, W. A. Light, and S. Billings, 2000)
- Para soluciones oscilatorias o con altos gradientes, se presenta el **fenómeno de Gibbs y Runge**.
 - Refinamiento de nodos y ajuste del parámetro de forma, (Platte y Driscoll, 2005, MS Floater, 1998, Nira Dyn, Armin Iske, Wendaland, 2003)

Aplicación de la teoría de aproximación la solución de EDP:

¿Como utilizar las técnicas de aproximación anteriores para resolver problemas de frontera y de valor inicial?

- Cuadratura diferencial
- Métodos de colocación.

En los siguientes ejemplos ilustraremos algunos algoritmos para problemas elípticos y parabólicos.

Método de cuadratura diferencial

Sea ϕ estrictamente positiva definida, entonces:

$$\frac{\partial^m u(x_k, y_k)}{\partial x^m} = \sum_{(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{supp}(k)} \lambda_{kj}^{mx} u(x_j, y_j) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^m u(x_k, y_k)}{\partial y^m} = \sum_{(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{supp}(k)} \lambda_{kj}^{my} u(x_j, y_j) \quad (2)$$

Donde:

$$\frac{\partial^m \phi_i(x_k, y_k)}{\partial x^m} = \sum_{(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{supp}(k)} \lambda_{kj}^{mx} \phi_j(x_i, y_i)$$

$$\frac{\partial^m \phi_k(x_k, y_k)}{\partial y^m} = \sum_{(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{supp}(k)} \lambda_{kj}^{my} \phi_j(x_i, y_i)$$

Problema: Elíptico:

- Consideraremos el siguiente problema elíptico para ilustrar las técnicas:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{en } \Omega$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{en } \partial\Omega$$

- Nodos de colocación en la frontera: $(x_j, j = 1, \dots, N_B)$.
- Nodos de colocación en el interior: $(x_j, j = N_B + 1, \dots, N)$.

Problema 1: Colocación asimétrica.

- Kansa (1990). Suponga aproximación radial a u

$$s(x, \epsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|, \epsilon),$$

- Colocación en la frontera

$$s(x_i, \epsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) = g(x_i), \quad i = 1, \dots, N_B$$

- Colocación en el interior

$$\Delta s(x_i, \epsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Delta \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) = f(x_i),$$

$$i = N_{B+1}, \dots, N$$

Problema 1: Colocación asimétrica.

- Sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \Delta\phi \end{bmatrix} [\lambda] = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}$$

Comentarios:

- El sistema no es simétrico.
- **La no singularidad del sistema es un problema abierto.**

Problema 1: Colocación simétrica

- Wu, (1990) y Fasshauer, (1996). Suponga aproximación radial a u

$$s(x, \epsilon) = \sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \phi(\|x - x_j\|, \epsilon) \\ + \sum_{j=N_B+1}^N \lambda_j \Delta \phi(\|x - x_j\|, \epsilon),$$

- Colocación en la frontera

$$s(x_i, \epsilon) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) \\ + \sum_{j=N_B+1}^N \lambda_j \Delta \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) = g(x_i), \quad i = 1, \dots, N_B$$

Problema 1: Colocación simétrica

- Colocación en el interior

$$\Delta s(x_i, \epsilon) = \sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \Delta \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) \\ + \sum_{j=N_B+1}^N \lambda_j \Delta^2 \phi(\|x_i - x_j\|, \epsilon) = f(x_i), \quad i = N_B+1, \dots, N$$

- El sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \phi & \Delta \phi \\ \Delta \phi & \Delta^2 \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}$$

es simétrico.

Comentarios:

- El sistema **estrictamente positivo definido, i. e. no singular**, (Wu, Z. 1992, Fasshauer, G. 1996, Franke C., Schabak R., 1998).
- La **velocidad de convergencia** es aproximadamente igual a la de los interpolantes menos el orden de diferenciación de los operadores de la EDP, (Franke C., Schabak R., 1998).
- Nota: la no singularidad es consecuencia de utilizar un aproximante radial de Hermite: **forma bilineal simétrica y coerciva**.

Problema 2: Parabólico, (Colocación asimétrica):

Problema : Parabólico:

- Consideraremos el siguiente problema parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t, u, u_x, u_y)$$

- Con condiciones a la frontera:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t) \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

$$u|_{t=0} = h(x, y)$$

- Nodos de colocación: $\{(x_j, y_j)_{j=1}\}^N \subset \bar{\Omega}$, de los cuales:
 - $\{(x_j, y_j)_{j=1}^{N_I}$ son nodos interiores y
 - $\{(x_j, y_j)_{j=N_I+1}^N$ son nodos exteriores.

Problema 2: Colocación asimétrica

- Discretización implícita en el tiempo:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t, u^n, u_x^n, u_y^n)$$

- Solución aproximada:

$$u(x, y, t_{n+1}) = \sum_{j=1}^N c_j^{n+1} \Phi_j(x, y)$$

- Substituyendo la solución aproximada en la ecuación implícita, obtenemos:

Problema 2: Colocación asimétrica

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\delta t} \Phi_j - \alpha \left(\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} \right) \right) (x_i, y_i) c_j^{n+1}$$
$$= \frac{1}{\delta t} u^n(x_i, y_i) + f(x_i, y_i, t_n, u^n(x_i, y_i), u_x^n(x_i, y_i), u_y^n(x_i, y_i))$$
$$i = 1, \dots, N_I$$

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j(x_i, y_i) c_j^{n+1} = g(x_i, y_i, t_n), \quad i = N_I + 1, \dots, N$$

Sistema de $N \times N$, para los coeficientes $\{c_j^{n+1}\}_{j=1}^N$.

¿Hasta que punto las técnicas anteriores han sido aplicadas con éxito a problemas reales?

Los métodos de FBR se ha aplicado a problemas en geofísica, dinámica de fluidos, nanotecnología, entre otros.

Ejemplo 1: Simular la elevación de la superficie del mar así como sus corrientes, para el puerto de Tolo en Hong Kon, durante el tifón Gorden, julio 1989, (Y.C. Hon, et. al., 1999).

¿Hasta que punto las técnicas anteriores han sido aplicadas con éxito a problemas reales?

Los métodos de FBR se ha aplicado a problemas en geofísica, dinámica de fluidos, nanotecnología, entre otros.

Ejemplo 1: Simular la elevación de la superficie del mar así como sus corrientes, para el puerto de Tolo en Hong Kon, durante el tifón Gorden, julio 1989, (Y.C. Hon, et. al., 1999).

Ejemplo 2: Problemas atmosfericos, (Fronberg, et el. 2011, Flyer and Lehto, 2009.).

Ejemplo 1: elevación de la superficie del mar así como sus corrientes.

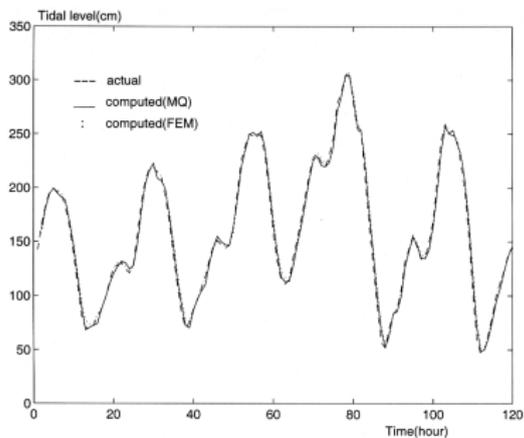
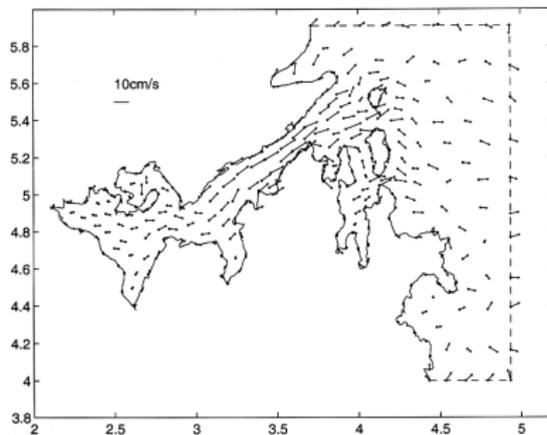
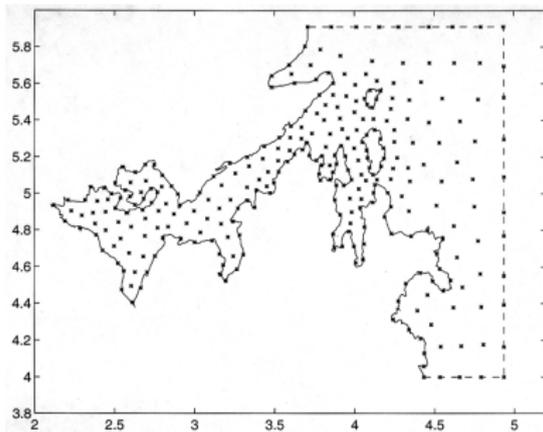
Elevación de la superficie del mar así como sus corrientes, (Hong, et al. 1999).

- Problema: *Simular la elevación de la superficie del mar así como sus corrientes*, para el puerto de Tolo en Hong Kon, durante el tifón Gorden, julio 1989.

Ejemplo 1: elevación de la superficie del mar así como sus corrientes.

Elevación de la superficie del mar así como sus corrientes, (Hong, et al. 1999).

- Problema: *Simular la elevación de la superficie del mar así como sus corrientes*, para el puerto de Tolo en Hong Kon, durante el tifón Gorden, julio 1989.
- Método: *Colocación no simétrica, mediante funciones radiales multicuádricas, de las ecuaciones no viscosas de baja profundidad.*



Ejemplo 1: elevación de la superficie del mar así como sus corrientes.

Elementos que se desprenden de este estudio:

- Las elevaciones del mar y los vectores de velocidad correspondientes a la corriente ebb experimentales y calculados coinciden bien

Ejemplo 1: elevación de la superficie del mar así como sus corrientes.

Elementos que se desprenden de este estudio:

- Las elevaciones del mar y los vectores de velocidad correspondientes a la corriente ebb experimentales y calculados coinciden bien
- Las oscilaciones numéricas, para este caso, resultan menos abruptas que las obtenidas por el método de elemento finito. (para 250 nodos!)

Ejemplo 1: elevación de la superficie del mar así como sus corrientes.

Elementos que se desprenden de este estudio:

- Las elevaciones del mar y los vectores de velocidad correspondientes a la corriente ebb experimentales y calculados coinciden bien
- Las oscilaciones numéricas, para este caso, resultan menos abruptas que las obtenidas por el método de elemento finito. (para 250 nodos!)
- *El tiempo de procesamiento se redujo considerablemente*, con relación a los cálculos realizados mediante elemento finito, *debido a que no se construyen mallas.*
- **Limitación:** A pesar de ser un ejemplo exitoso, **se trata aún de un problema simple con pocos nodos.**

Ejemplo 2: convección lineal con un campo de flujo con vórtices.

Campo vectorial sobre una esfera, (Flyer and Lehto, 2009).

- En el siguiente ejemplo **simula un campo vectorial sobre una esfera que gira la condición inicial provocando el surgimiento de dos vórtices diametralmente opuestos.**

Ejemplo 2: convección lineal con un campo de flujo con vórtices.

Campo vectorial sobre una esfera, (Flyer and Lehto, 2009).

- En el siguiente ejemplo **simula un campo vectorial sobre una esfera que gira la condición inicial provocando el surgimiento de dos vórtices diametralmente opuestos.**
- La **convergencia puede ser espectral** y las técnicas de preconditionamiento del sistema permiten abordar problemas a gran escala.
- Se emplean técnicas de refinación de nodos y preconditionador de la matriz de Gramm.
- El integrador numéricos es un explícito RK4.

Ejemplo 2: convección lineal con un campo de flujo con vórtices.

Error 12 días después.

(Flyer and Lehto, 2009)

Método	Resolución N (total)	Paso de tiempo Minutos	Error l_2 error
Sin refinamiento local			
Funciones de base radial	3,136	60	$4 \cdot 10^{-3}$
Volumen finito (malla latitud-longitud)	165,888	10	$2 \cdot 10^{-3}$
Volumen finito (esfera cúbica)	38,400	30	$2 \cdot 10^{-3}$
Galerkin discontinuo	9,600	6	$7 \cdot 10^{-3}$
Con refinamiento local			
Funciones de base radial	3,138	20	$8 \cdot 10^{-5}$
Volumen finito	-	1-3	$2 \cdot 10^{-3}$

Avances actuales: métodos.

- ¿Qué caracteriza el momento actual?, ¿Qué se está haciendo hoy en el área?

Avances actuales: métodos.

- ¿Qué caracteriza el momento actual?, ¿Qué se está haciendo hoy en el área?
 - Se está investigando como pasar de resolver problemas simples a resolver de problemas complejos a gran escala.

Avances actuales: métodos.

- ¿Qué caracteriza el momento actual?, ¿Qué se está haciendo hoy en el área?
 - Se está investigando como pasar de resolver problemas simples a resolver de problemas complejos a gran escala.
- Para ello, se están estudiando los siguientes tópicos:
 - Métodos dinámicos de **Descomposición de dominios** y/o **nodos adaptivos**.

Avances actuales: métodos.

- Métodos de **precondicionamiento**, (ej.
 - Fasshauer et. al., (2009),
 - Ling, (2004), Dyn, Levin, and Rippa, (1986); Buhmann and Powell, (1990)).
- Evaluación mediante **métodos de multipolos** o expansión gaussiana,
 - Yokota, (2010),
 - Torres el al., (2009),
 - Beatson and Newsam, (1992); Powell, (1992); Ying, (1996).

Avances actuales: aplicaciones.

- N. Flyer y R. Fornberg, (2010), abordan problemas de flujos atmosféricos en una esfera.

Resultado: demostraron que las FR, C^∞ . ej GA, MQ, IMQ, *superan a los métodos clásicos como: DF, SPH y métodos espectrales, en precisión y paso de tiempo* .

- L. Barba, et. al., (2009), resuelven problemas de n cuerpos, ej. vórtices en una esfera, entre otros,

Resultado: *resuelven el problema mas grande que se ha abordado mediante FBR, con 64 millones de partículas en 64 procesadores* .

Conclusiones:

- La solución numérica de EDP mediante funciones radiales es un campo reciente.
- A lo largo de esta plática hemos presentado varios problemas de frontera entre los que destacan:
 - El mal condicionamiento del sistema de ecuaciones algebraico, para el caso de FR globales
 - La dificultad para determinar el diámetro del soporte, que redunda en un mal condicionamiento, para el caso de FBR de soporte compacto.
 - La inexistencia de una teoría que garantice la invertibilidad del sistema para el caso de colocación no simétrica.

Conclusiones:

- La inexistencia de una formulación que permita determinar el **valor óptimo del parametro de malla** que definen a las funciones gaussianas y multicuadricas.
 - Los retos que existen para desarrollar **métodos de multipolos y expansión Gaussiana**.
 - En esta plática hemos omitido formulaciones y resultados fundamentales.
 - Esperamos que les haya sido de utilidad y que los elementos vertidos los convenzan de la importancia y el futuro que tiene este enfoque.
- Gracias.