

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

26 de noviembre de 2014

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Índice General

Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Introducción

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Características de poblaciones las poblaciones:

- ▶ Tasa de natalidad.
- ▶ Tasa de mortalidad.
- ▶ Abundancia.
- ▶ Densidad.
- ▶ Distribución.

Planteamiento del problema

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Consideremos las poblaciones

- ▶ Polinizadores
- ▶ Plantas
- ▶ Herbívoros

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a)$$

Introducción

Planteamiento del
problema

**Interacción
polinizador-planta**

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a) +$$

Introducción

Planteamiento del
problema

**Interacción
polinizador-planta**

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a) + F(a, p)$$

$$\dot{p} = -\gamma p$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a) + F(a, p)$$

$$\dot{p} = -\gamma p +$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a) + F(a, p)$$

$$\dot{p} = -\gamma p + F(a, p)$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\dot{a} = a(k - a) + F(a, p)$$

$$\dot{p} = -\gamma p + F(a, p)$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Holling,

$$F(a, p) = \frac{p}{1 + p}$$

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a(k - a) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 a p}{1 + \phi \sigma \mu^2 p} \\ \dot{p} &= -\gamma p + \frac{k_1 \sigma \mu a p}{1 + \phi \sigma \mu^2 p}\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Parámetros

$k, k_1, k_2, \sigma, \mu, \phi$ y γ .

Modelo polinizador-planta

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Modelo polinizador-planta

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a(k - a) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 a p}{1 + \phi \sigma \mu^2 p} \\ \dot{p} &= -\gamma p + \frac{k_1 \sigma \mu a p}{1 + \phi \sigma \mu^2 p}\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Parámetros

$k, k_1, k_2, \sigma, \mu, \phi$ y γ .

Parámetros

$k_1 = 1, k_2 = 1, \sigma = 1, \mu = 1, \phi = 1$ y $\gamma = \frac{1}{2}$.

Modelo polinizador-planta

Dinámica temporal

El modelo es:

$$\dot{a} = a \left(1 - \frac{a}{K} \right) + \frac{ap}{1+p}$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{2}p + \frac{ap}{1+p}$$

Las ceroclinas son:

$$p_1(a) = \frac{a-k}{k+1-a} \quad p_2(a) = 2a-1$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio para cualquier valor del parámetro son $(0, 0)$ y $(k, 0)$. Los valores de a para los cuales $p_1(a) = p_2(a)$ son:

$$a_1, a_2 = \frac{1}{2}[(k + 1) \pm \sqrt{(k + 1)^2 - 2}] \quad (1)$$

Sean $k^* = \sqrt{2} - 1$ y $k_1 = \frac{1}{2}$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

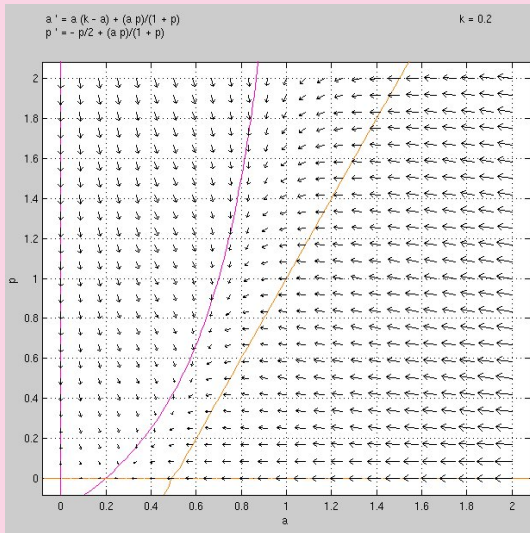
1. Si $0 < k < k^*$ solo hay dos puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(k, 0)$
2. Si $k = k^*$ solo hay tres punto de equilibrio $(0, 0)$, $(k, 0)$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} - 1)$
3. Si $k^* < k < k_1$ solo hay cuatro puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(k, 0)$, (a_1, p_1) y (a_2, p_2)
4. Si $k = k_1$ solo hay tres puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(k, 0)$ y $(1, 1)$
5. Si $k_1 < k$ solo hay cuatro puntos de equilibrio, de los cuales solo tres se encuentran en la región de interes (cuadrante positivo), estos son $(0, 0)$, $(k, 0)$ y (a_1, p_1) .

El punto de equilibrio $(0, 0)$ es un punto tipo silla para todo valor de $k > 0$.

Parámetro de bifurcación

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

Interacción polinizador-planta-herbívoros

Bibliografía

Parámetro de bifurcación

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

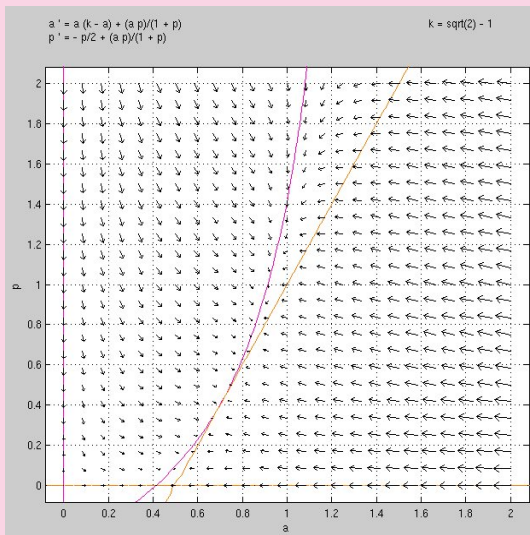
Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

Interacción polinizador-planta-herbívoros

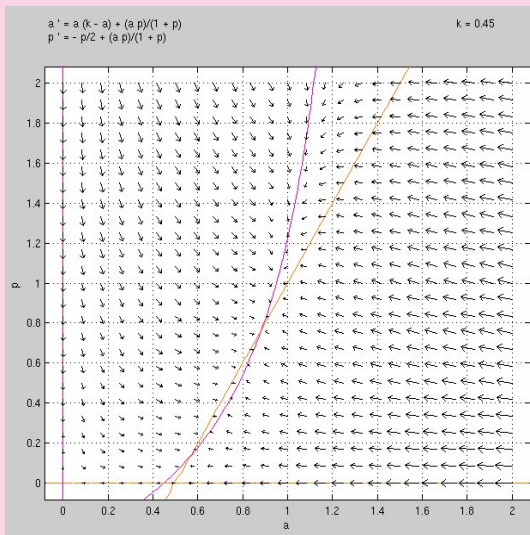
Bibliografía



Parámetro de bifurcación

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

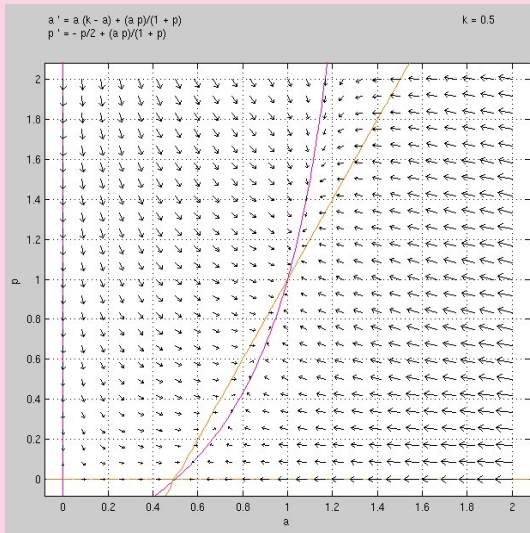
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Parámetro de bifurcación

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

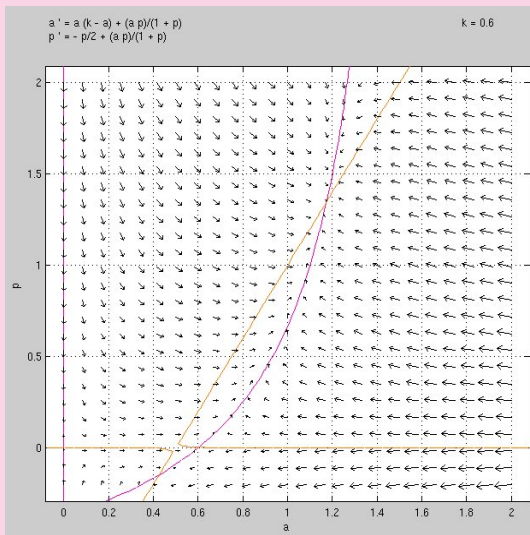
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Parámetro de bifurcación

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

Interacción polinizador-planta-herbívoros

Bibliografía

Dinámica espacio-temporal

La dinámica espacio-temporal está descrita por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= D\Delta a + a\left(1 - \frac{a}{K}\right) + \frac{ap}{1+p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{2}p + \frac{ap}{1+p}\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Resultados numéricos

Dinámica de la interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

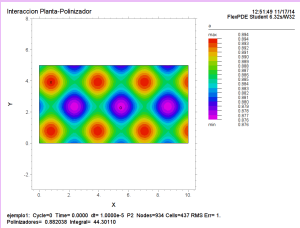
Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

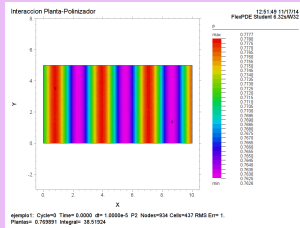
Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Polinizadores



Plantas



Resultados numéricos

Dinámica de la interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

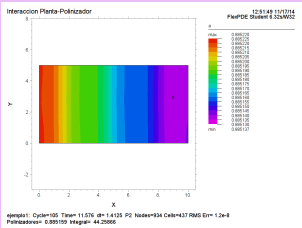
Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

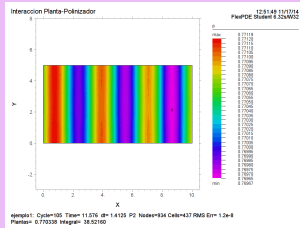
Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Polinizadores



Plantas



Resultados numéricos

Dinámica de la interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

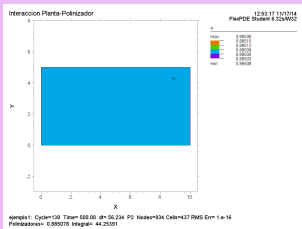
Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

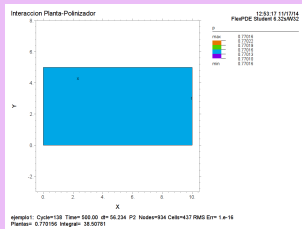
Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Polinizadores



Plantas



Modelo planta-herbívoro

Dinámica temporal

La dinámica temporal está descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= p \left(1 - \frac{p}{K}\right) - \frac{ph}{1+p} \\ \dot{h} &= -\alpha\beta h + \beta \frac{ph}{1+p}\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Las isoclinas son:

$$h(p) = (1+p) \left(1 - \frac{p}{K}\right) \quad p = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$

Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio son: $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (k, 0)$ y $p_2 = (\tilde{p}, \tilde{h})$, donde

$$\tilde{p} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad \tilde{h} = (1 + \tilde{p}) \left(1 - \frac{\tilde{p}}{k} \right)$$

El signo de la parte real

$$\Re(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha h'(\tilde{p}) \quad (2)$$

de los valores propios de $J[F_1, f_2]_{p_2}$ cambia dependiendo de $h'(\tilde{p})$

Estabilidad de los puntos de equilibrio

1. Si $k \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}$, p_1 es puede ser un nodo estable o un nodo-silla.
2. Si $k > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, entonces p_1 es un punto silla. Más aun:
 - ▶ Si $k < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, entonces p_2 es asintóticamente estable y ambas poblaciones persisten a través de un atractor global en \mathbb{R}_+^2 .
 - ▶ Si $k \geq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, entonces p_2 es inestable y surge un ciclo límite estable alrededor de p_2 que proviene de una bifurcación de Hopf.

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

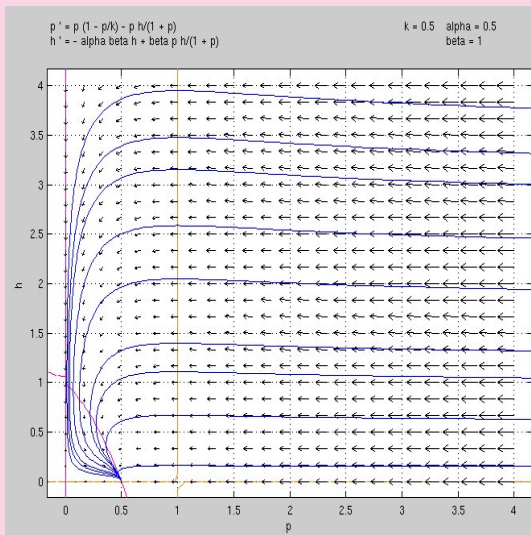
Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Bifurcación de Hopf

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

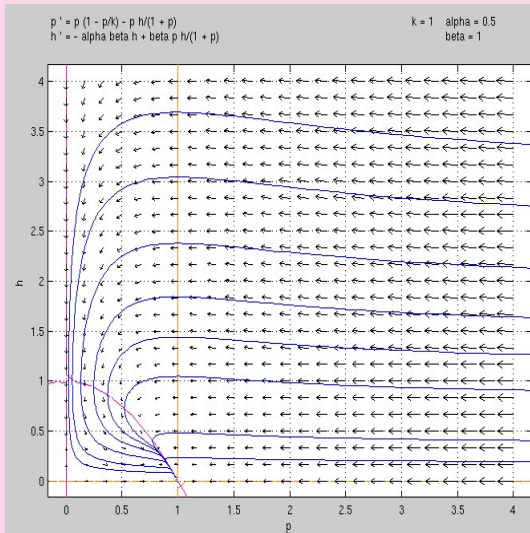
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Bifurcación de Hopf

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

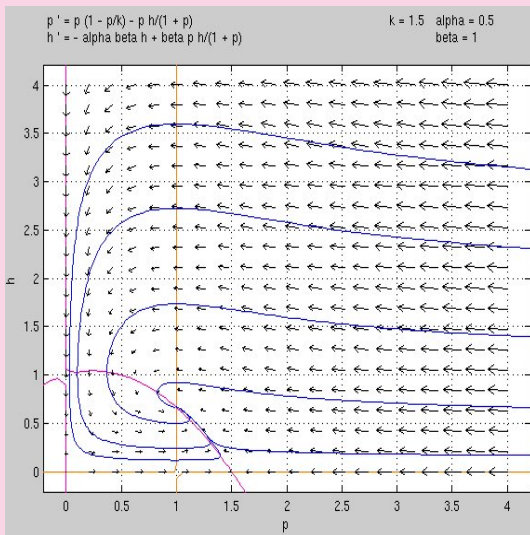
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Bifurcación de Hopf

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

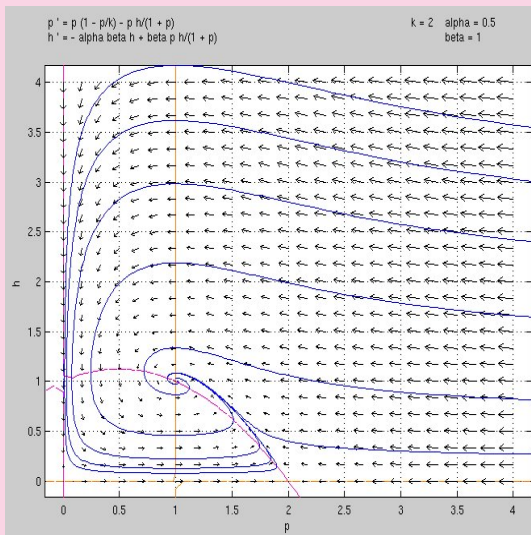
Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

Interacción polinizador-planta-herbívoros

Bibliografía

Bifurcación de Hopf



Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

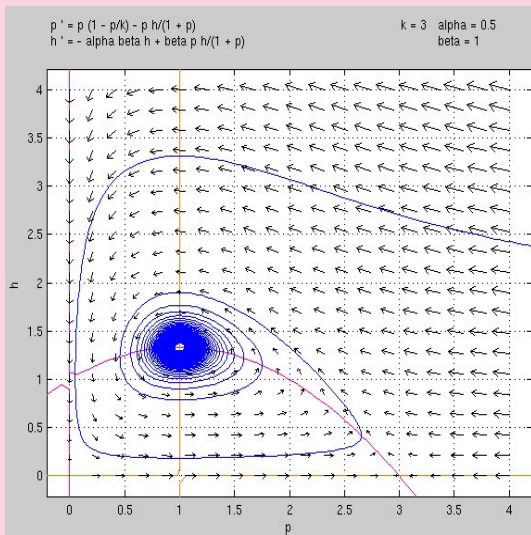
Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Bifurcación de Hopf

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz



Introducción

Planteamiento del problema

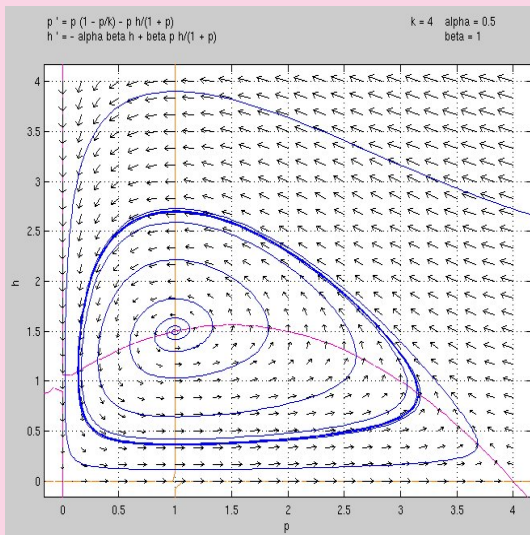
Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

Interacción polinizador-planta-herbívoros

Bibliografía

Bifurcación de Hopf



Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Modelo planta-herbívoro

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Dinámica espacio-temporal

La dinámica espacio-temporal está descrita por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= p \left(1 - \frac{p}{K} \right) - \frac{m_1 hp}{s + p} \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= D\Delta h + \frac{m_2 hp}{s + p} - \eta h\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

**Interacción
planta-herbívoro**

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Resultados numéricos

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

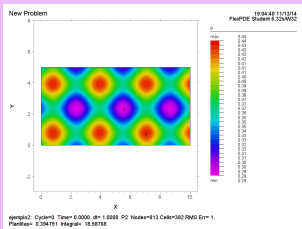
Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

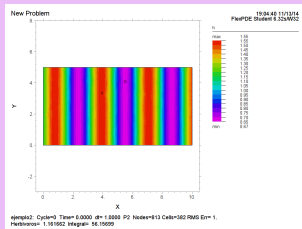
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Plantas



Herbívoros



Resultados numéricos

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

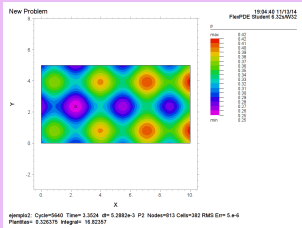
Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoro

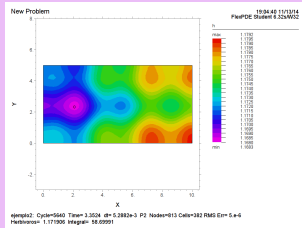
Interacción polinizador-planta-herbívoro

Bibliografía

Plantas



Herbívoros



Resultados numéricos

Dinámica de la interacción polinizadores-plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Introducción

Planteamiento del problema

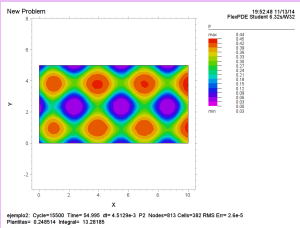
Interacción polinizador-planta

Interacción planta-herbívoros

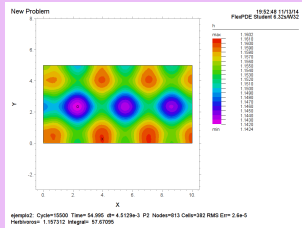
Interacción polinizador-planta-herbívoros

Bibliografía

Plantas



Herbívoros



Modelo polinizador-planta-herbívoros

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Dinámica temporal

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a \left(1 - \frac{a}{K}\right) + \frac{g(h)k_2\sigma\mu ap}{1 + \sigma\phi\mu^2 p} \\ \dot{p} &= -\gamma p + \frac{g(h)k_1\sigma\mu ap}{1 + \sigma\phi\mu^2 p} - \frac{m_1 ph}{s + p} \\ \dot{h} &= -\delta h + \frac{m_2 ph}{s + p}\end{aligned}$$

donde $0 < \delta < m_2 < m_1$.

donde $g \in C^1[0, \infty)$, $g(0) = 1$, $g(h)' \leq 0$ y $g(h) > 0 \forall h \geq 0$
es la razón reducción de visitas, (ver [2]).

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoros

Interacción
polinizador-planta-
herbívoros

Bibliografía

Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio para cualquier valor de los parámetros son: $(0, 0, 0)$, $(k, 0, 0)$

Las ceroclinas

$$\begin{aligned}a \left(1 - \frac{a}{K}\right) + \frac{g(h)k_2\sigma\mu ap}{1 + \sigma\phi\mu^2 p} &= 0 \\ -\gamma p + \frac{g(h)k_1\sigma\mu ap}{1 + \sigma\phi\mu^2 p} - \frac{m_1 ph}{s + p} &= 0 \\ -\delta h + \frac{m_2 ph}{s + p} &= 0\end{aligned}$$

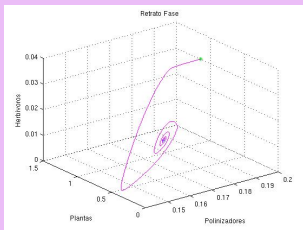
Si $g(h) = 1$ y $m_2 > \delta$, entonces existe un punto no trivial $\tilde{P} = (\tilde{a}, \tilde{p}, \tilde{h})$, donde

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= k \left[1 + \frac{k_2 \mu \sigma \tilde{p}}{1 + \phi \sigma \mu^2 \tilde{p}} \right] \\ \tilde{p} &= \frac{s \delta}{m_2 - \delta} \\ \tilde{h} &= \frac{s + \tilde{p}}{m_1} \left[-\gamma + \frac{k_1 \mu \sigma \tilde{a}}{1 + \sigma \phi \mu^2 \tilde{p}} \right]\end{aligned}$$

Si $g(h) = \frac{1}{1 + k_3 h^2}$, existe un único punto de equilibrio no trivial, bajo ciertas condiciones, (ver [1]).

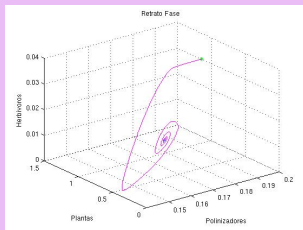
$$g(h) = 1$$

Punto de equilibrio
(0.1789473, 1, 0.005144)

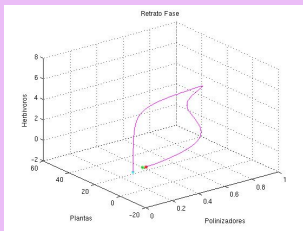


$$g(h) = \frac{1}{1+k_3h^2}$$

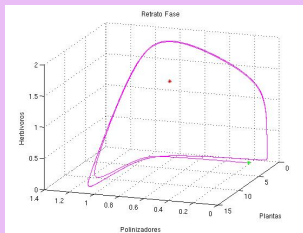
Punto de equilibrio
(0.1789452, 1, 0.00513)



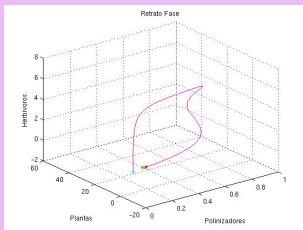
$$g(h) = 1, \mu = 0.1$$



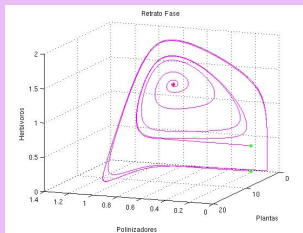
$$g(h) = 1, \mu = 0.5$$



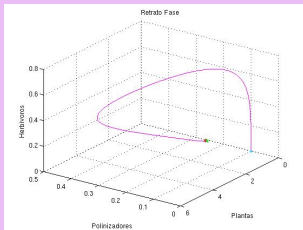
$$g(h) = 1, \mu = 0.1$$



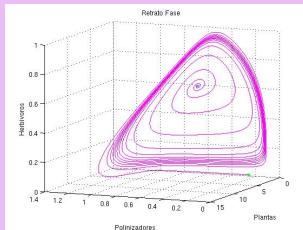
$$g(h) = 1, \mu = 0.5$$



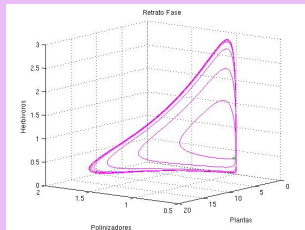
$$g(h) = \frac{1}{1+k_3h^2}, \mu = 0.1$$



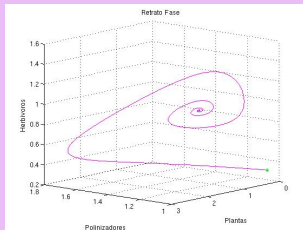
$$g(h) = \frac{1}{1+k_3h^2}, \mu = 0.5$$



$$g(h) = \frac{1}{1+k_3h^2}, \mu = 2$$



$$g(h) = \frac{1}{1+k_3h^2}, \mu = 5$$



Modelo polinizador-planta-herbívoro

Dinámica de la
interacción
polinizadores-
plantas-herbívoros

Miriam Sosa Díaz

Dinámica espacio-temporal

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= D_1 \Delta a - \vec{v} \cdot \nabla a + a \left(1 - \frac{a}{K} \right) + \frac{g(h)k_2 \sigma \mu a p}{1 + \sigma \phi \mu^2 p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\gamma p + \frac{g(h)k_1 \sigma \mu a p}{1 + \sigma \phi \mu^2 p} - \frac{m_1 p h}{s + p} \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= D_2 \Delta h - \delta h + \frac{m_2 p h}{s + p}\end{aligned}$$

Introducción

Planteamiento del
problema

Interacción
polinizador-planta

Interacción
planta-herbívoro

Interacción
polinizador-planta-
herbívoro

Bibliografía

Bibliografía



F. Sánchez-Garduño and Breña-Medina, V. F.(2010). Searching for spatial patterns in a pollinator-plant-herbivore mathematical model. Bull. Math. Biol. **73** pp. 1118-1153.



Soberon Jorge M. Soberon and Carlos Martínez Del Río. The Dynamic a Plant-Pollinator Interaction



S. R.-J. Jang. Dynamic of Herbivore-Plant-Pollinator models.



Larry L. Wolf et al. Energetics od Foraging: Rate and efficiency of Nectar Extraction by Hummingbirds. Science Vol. 176



F. Sánchez-Garduño, Víctor Castellanos and Ingrid Quilantán. Dynamic of a nonlinear mathematical model for three interacting populations.



Mark Kot (2001): *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press.