

Segmentación de superficies trianguladas

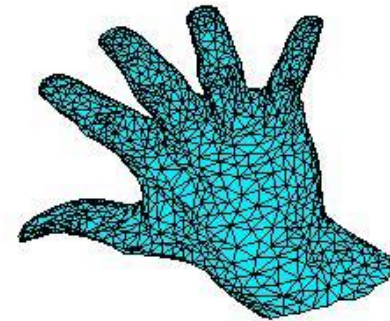
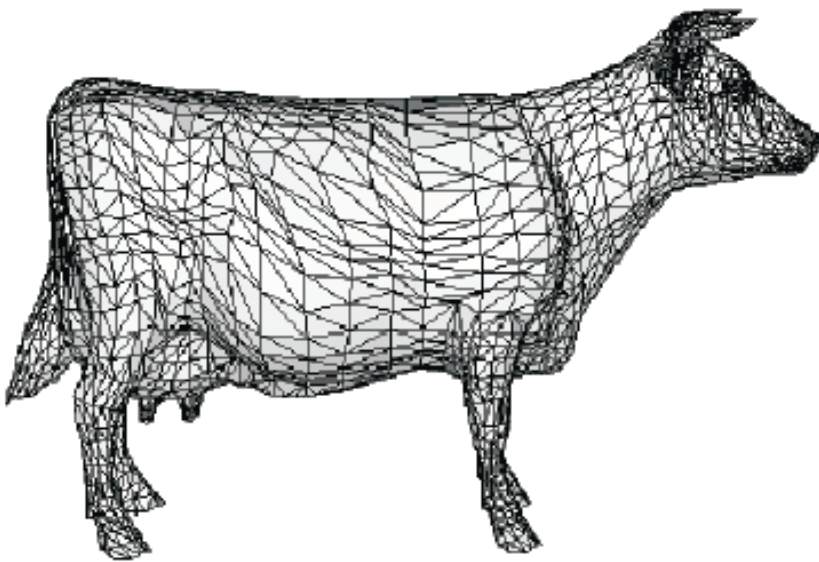
Seminario Facultad de Ciencias, UNAM
octubre 29, 2015

Victoria Hernández Mederos
Instituto de Cibernética, Matemática y Física
La Habana, Cuba



Introducción

- Las **superficies trianguladas** se utilizan para representar y manipular *computacionalmente* objetos geométricos virtuales o reales.
- Se obtienen al discretizar superficies definidas matemáticamente o al construir superficies que aproximan grandes volúmenes de datos.



Conceptos básicos

Triangulación o malla triangular T :

$$T = (V, F)$$

$$V = \{v_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, m\} \quad \text{vértices}$$

$$F = \{t_i \in \mathbb{N}^3, i = 1, \dots, n\} \quad \text{triángulos}$$

la intersección de 2 triángulos cualesquiera es el vacío, un vértice común o una arista común.

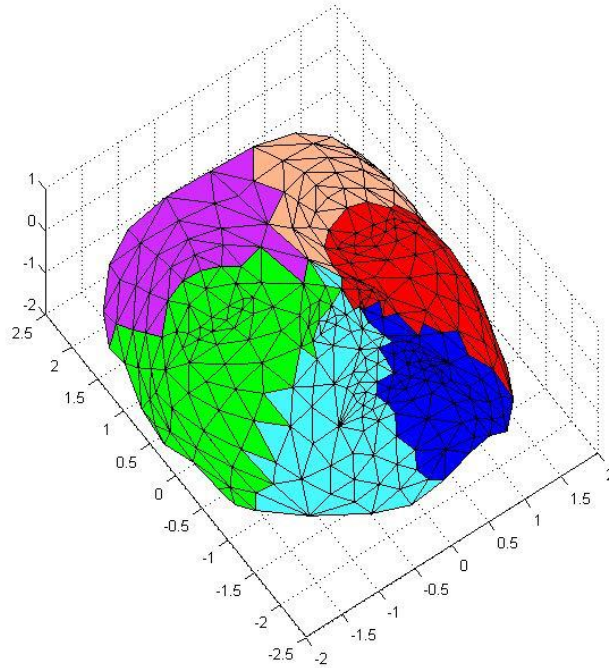
Superficie triangulada M

Es la superficie definida por una triangulación con vértices 3D, en la que se cumple que para todo punto sobre M existe una vecindad homeomorfa al disco.

Segmentación

División de una superficie triangulada M en partes

Para **segmentar** M en k **clases**, basta con construir una **partición** del conjunto F de las caras de T (o del conjunto V de los vértices) en k **subconjuntos disjuntos**.



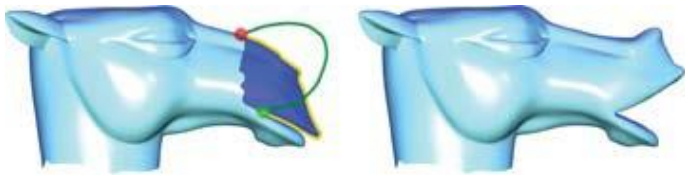
¿ Cómo particionar F o V ?



Depende del objetivo de la segmentación

La segmentación de una superficie triangulada simplifica la solución de otros problemas:

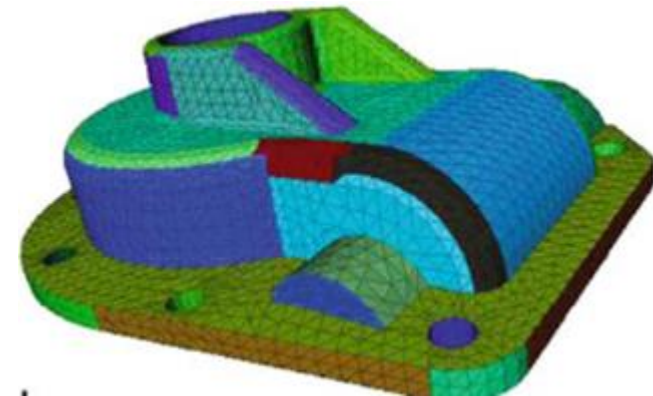
la edición de superficies



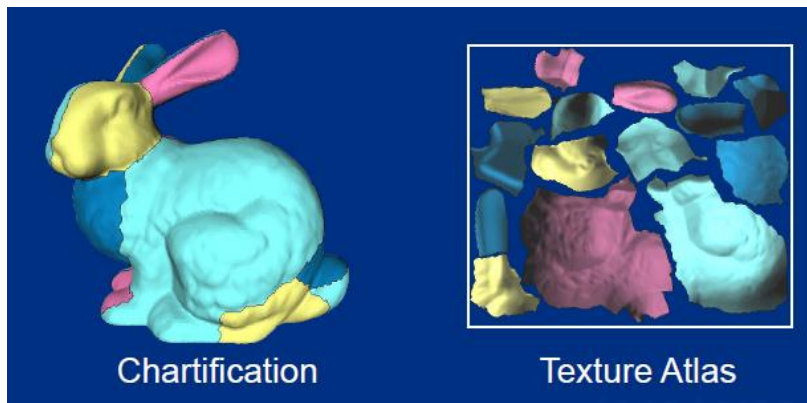
Extracción del esqueleto



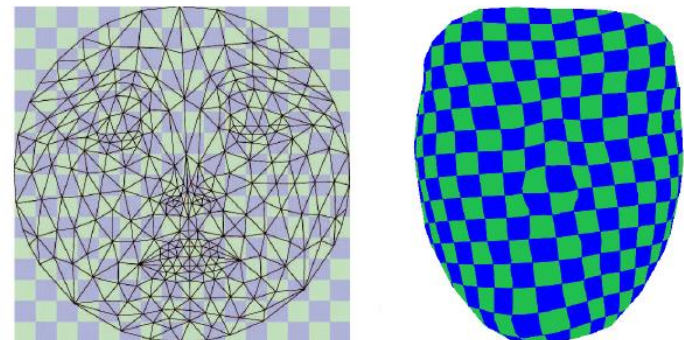
identificación de formas



parametrización



Mapeos de textura



Los métodos de segmentación se dividen en 2 **grandes grupos** teniendo en cuenta el objetivo que se persigue:

- identificar las **partes significativas** del objeto (en volumen)
- subdividir la malla en **pedazos de superficie** con identidad propia

Segmentación

Volumétrica

Aplicaciones: extracción del esqueleto (útil para animaciones y deformaciones), descomposición de un objeto en partes para hacer morphing



Superficial

Aplicaciones:
parametrización, remallado
mapeos de textura, simplificación.
Clases equivalentes al disco
topológicamente

Lee, 2005



Sheffer, 2001



Métodos de Segmentación

Según la técnica que utilizan para la segmentación, los métodos se pueden clasificar en las siguientes categorías:

- Crecimiento de regiones
- Agrupamiento jerárquico
- Agrupamiento iterativo
- Métodos implícitos
- Análisis espectral

El ingrediente principal de un método de segmentación es el **criterio** que utiliza para decidir cuáles triángulos (o vértices) pertenecen a una misma **clase**.

Ideas básicas de los métodos de segmentación de superficies trianguladas

- Describiremos **métodos espectrales** basados en la construcción de una partición del conjunto F de las **caras** de T .
- La clave para decidir a qué clase pertenece una cara es introducir una **métrica** que mida la **distancia** entre caras.
- La **métrica** que utilicemos determina el tipo de segmentación:



volumétrica

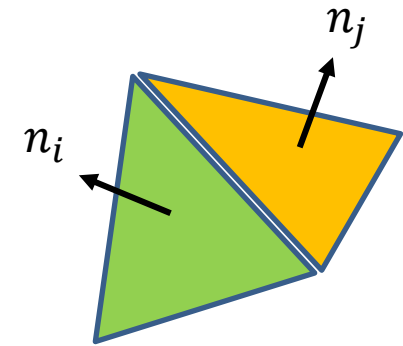


superficial

- En términos de la **distancia** entre caras se define la **afinidad** entre las mismas.
- Cada **clase** está formada por las caras **más afines** entre sí.

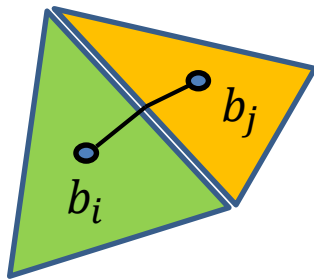
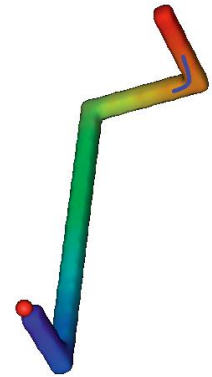
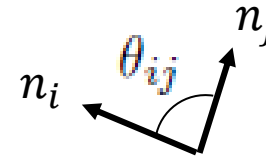
Distancias entre caras vecinas

Colores según la distancia a punto fijo (rojo)



Distancia angular

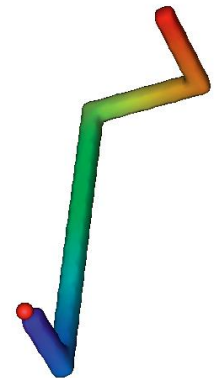
$$Da_{ij} = 1 - \cos(\theta_{ij})$$



Distancia geodésica

Dg_{ij} - distancia geodésica entre b_i y b_j

b_i - baricentro de la cara i

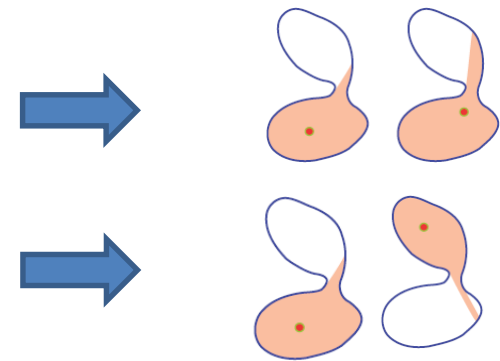


- Las distancia angular y la geodésica utilizan únicamente información relativa a la superficie, pero **no al volumen** que esta engloba. Estas distancias no son suficientes para identificar **partes**.

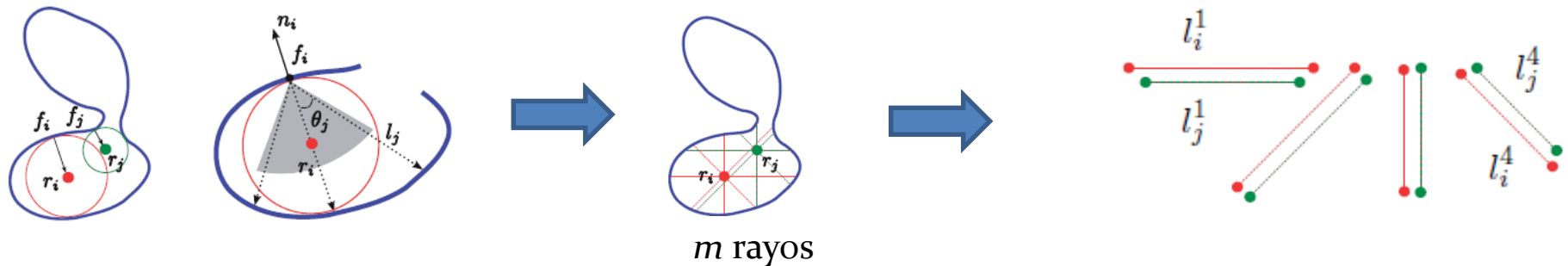
Distancias entre caras vecinas (2)

Distancia “volumétrica”, Liu et al, 2008

- Se basa en el concepto de **visibilidad**.
- Desde todos los puntos que pertenecen a una misma parte la región visible es parecida.
- Si dos puntos pertenecen a partes diferentes, entonces la región visible desde cada uno de ellos es muy diferente



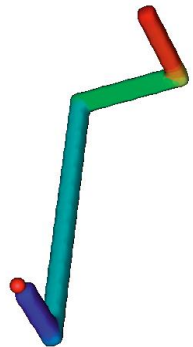
Cálculo de la distancia volumétrica



r_i - centro del círculo que pasa tangencialmente por el baricentro de la cara i .

$$Dv_{ij} = \sum_{k=1}^m (l_i^k - l_j^k)^2$$

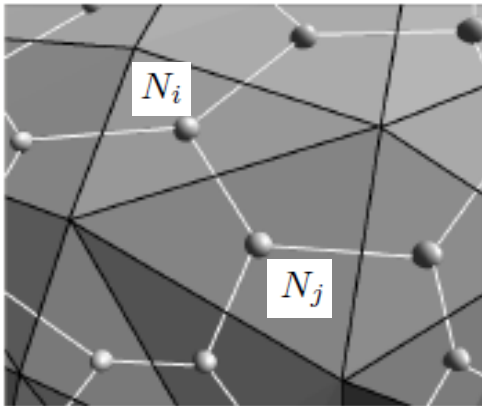
La **distancia volumétrica** entre puntos que pertenecen a una misma parte es pequeña y entre puntos que pertenecen a partes diferentes es grande.



Distancia entre cualquier pareja de caras

- La distancia entre cualquier pareja de caras se define por medio de un grafo pesado: **grafo dual a la triangulación**

G - Grafo dual a T



- el nodo N_i de G representa el triángulo i
- entre el nodo N_i y el nodo N_j de G hay una arista si los triángulos i y j son vecinos
- peso de la arista $N_i N_j$

$$\mu_{ij} = \alpha D a_{ij} + \beta D g_{ij} + \gamma D v_{ij}$$

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$D a_{ij}$ - distancia angular

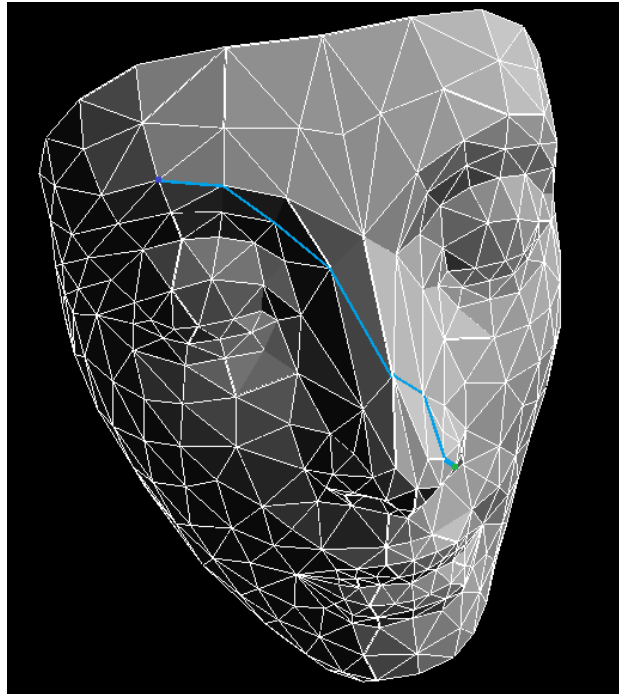
$D g_{ij}$ - distancia geodésica

$D v_{ij}$ - distancia volumétrica

Matriz de distancias

$D = (D_{ij})$ - matriz de orden n de las *distancias* entre cualquier pareja de caras de la triangulación
 n - número de caras

La distancia entre cualquier pareja de caras i y j se calcula como la *longitud del camino más corto* sobre el grafo G entre los nodos N_i y N_j
... para calcularla se emplea el *algoritmo de Dijkstra*



Matriz de afinidad W

$W = (W_{ij})$ - afinidad entre el i -ésimo triángulo
y el j -ésimo triángulo
- Matriz de orden n

$$W_{ij} = e^{-D_{ij}/(2\sigma^2)}$$

donde $\sigma = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j D_{ij}$

Propiedades de W

- *simétrica*
- $0 < W_{ij} < 1, \quad i, j = 1, \dots, n$
- $W_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n$

*Los triángulos más próximos entre sí en la **métrica definida** tienen mayor afinidad.*

Regresando al problema de segmentación ...

$W(i, :)$ - punto de R^n que representa la afinidad entre el triángulo i y el resto de los triángulos

- Teóricamente, el problema de segmentación se podría resolver aplicando un algoritmo de agrupamiento (clustering) a los puntos de R^n definidos por las filas de la matriz de afinidad W .
- Esto es muy **costoso computacionalmente** del orden de $O(n^2)$.
- Para reducir el costo se busca una **inmersión** de los “datos” (las filas de la matriz W , cada una de las cuales representa un triángulo) en un espacio de dimensión k , con **$k \ll n$** .
- Los método **espectrales** construyen la inmersión proyectando las filas de W en el **espacio generado por sus mayores autovectores**.

Matriz de afinidad normalizada

... Para normalizar W se tiene en cuenta la afinidad de una cara respecto al resto de las caras

$M = \text{diag}(M_{ii})$ - matriz diagonal

$M_{ii} = \sum_j W_{ij}$ - suma de las afinidades entre la cara i y las demás caras



Normalización de la matriz de afinidad W

$$\widetilde{W} = (\widetilde{W}_{ij}) = M^{-1/2} W M^{-1/2}$$

Propiedades de \widetilde{W}

- *simétrica*

- $\widetilde{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sqrt{M_{ii}M_{jj}}}$

Álgebra Lineal

A matriz real y simétrica de orden n

- A tiene n autovalores reales $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
- los correspondientes autovectores normalizados e_1, \dots, e_n forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n

Descomposición espectral

$$A = E \Lambda E^t$$

donde Λ es la matriz diagonal de los autovalores

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$$

y E es la matriz cuyas columnas son los autovectores de A

$$E = (e_1 | e_2 | \dots | e_n)$$

Descomposición espectral

$$A = E \Lambda E^t$$



Sea a_i la i -ésima columna de A

$$A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$$

Entonces,

$$a_i = e_{i1}(\lambda_1 e_1) + \dots + e_{in}(\lambda_n e_n), \quad i = 1, \dots, n$$

donde e_{ij} es la componente i del vector e_j



....Aplicar el resultado anterior a la matriz de afinidad normalizada

$$\widetilde{W} = (\widetilde{w}_1 | \widetilde{w}_2 | \dots | \widetilde{w}_n)$$

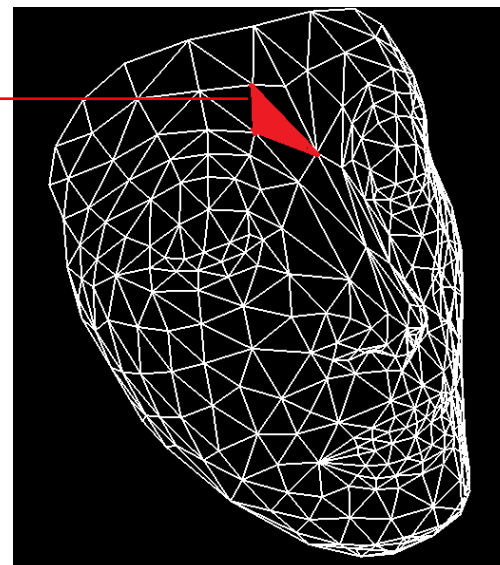
para calcular la **proyección** $\pi(\widetilde{w}_i)$ de \widetilde{w}_i sobre el espacio generado por los mayores k autovectores de \widetilde{W} escalados, $k \ll n$

Inmersión espectral

Matriz de afinidad normalizada

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{11} & & \tilde{w}_{1n} \\ \tilde{w}_{i1} & \cdots & \tilde{w}_{in} \\ \tilde{w}_{n1} & \cdots & \tilde{w}_{nn} \end{pmatrix}$$

fila i



Matriz de los autovectores de \widetilde{W} asociados a los k mayores autovalores

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{i1} & \cdots & e_{ik} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nk} \end{pmatrix}$$

fila i

$\pi(\tilde{w}_i)$ – proyección de \tilde{w}_i sobre

$$\mathcal{V} = \text{span}\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_k e_k\} \quad k < n$$

$$\pi(\tilde{w}_i) = [e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}]$$

- La inmersión de la i -ésima fila de la matriz de afinidad normalizada (que representa al triángulo i) en el espacio \mathcal{V} es el vector definido por la fila i de la matriz E , cuyas columnas son los k autovectores mayores de \widetilde{W}

Segmentación espectral

Resumiendo...

Los métodos espectrales de segmentación:

- calculan la matriz E cuyas columnas son los k autovectores asociados a los mayores autovalores de la matriz de afinidad \widetilde{W} con $k \ll n$.
- Aplican un **método de agrupamiento** para formar n_c clases con los n puntos de R^k definidos por las filas de E .

Algoritmo básico de segmentación espectral

Entrada: triangulación $T=(V,F)$, k -cantidad de autovectores, n_c número de clases

1. Calcular las diferentes distancias (angular, geodésica, volumétrica) entre cada pareja de caras vecinas.
2. Construir el grafo dual pesado G , donde el peso de la arista ij es una combinación convexa de las distancias angular, geodésica y volumétrica entre las caras i y j .
3. Calcular la matriz de distancias D . Aplicar el método de Dijkstra para calcular la distancia entre las parejas de caras que no son vecinas.
4. Calcular la matriz de afinidad W a partir de la matriz de distancias D .
5. Normalizar la matriz de afinidad, $\tilde{W} = M^{-1/2}WM^{-1/2}$ donde $M_{ii} = \sum_j W_{ij}$.
6. Calcular los k mayores autovectores e_1, \dots, e_k de \tilde{W} y construir la matriz
$$E = (e_1|e_2|\dots|e_k)$$
7. Determinar las n_c clases aplicando **kmeans** a los puntos en R^k definidos por las filas de E .

Salida: Si $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ih}$ son los elementos de la clase i , entonces el i -ésimo segmento de T está formado por los triángulos $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ih}$

Limitaciones del algoritmo básico

- Presupone que se ha escogido el valor de k , o sea la dimensión del espacio donde se proyectan las filas de la matriz de afinidad.
En la medida en que k disminuye el problema se hace menos costoso computacionalmente, pero la inmersión de las filas de la matriz de afinidad en un espacio de dimensión k introduce un error mayor.
- El método básico es costoso computacionalmente pues :
 - La matriz de afinidad es **grande y es densa** por lo que su cálculo requiere de $O(n^2)$ operaciones más el costo del cálculo de k autovectores.
- Para calcular la distancia entre dos caras cualesquiera es necesario definir cómo se escogen los parámetros de la combinación convexa que define la métrica.

Variante del algoritmo básico de segmentación

Liu, Jain, Zhang, 2006

- En lugar de calcular la afinidad de cada cara con relación a todas las demás, escogen una **muestra de l caras**, con $l \ll n$ y calculan la afinidad de cada una de las l caras escogidas respecto a todas las demás.
- Utilizan el método de **Nystrom** para calcular una aproximación de los autovectores de matriz de afinidad W , a partir de los autovectores de la submatriz $l \times l$ de la afinidad entre los l elementos de la muestra seleccionada.

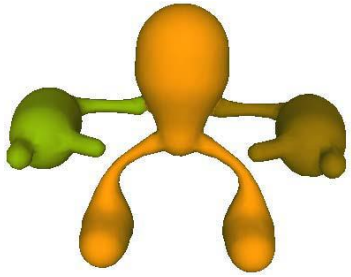
Esto reduce el costo total a $O(ml^2) + O(l^3)$ donde $m = n - l$

- *Problema: Cómo escoger la muestra de las columnas de W ?*
 - *Se obtienen buenos resultados seleccionando las columnas de W que corresponden a los **triángulos más alejados en la métrica definida**. El primer triángulo se escoge aleatoriamente, el segundo es el más alejado del primero, el tercero es aquel cuya distancia mínima a los dos previamente escogidos es máxima, etc.*

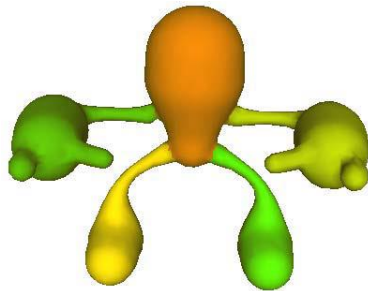
Resultados (1)

Liu, Zhang 2004

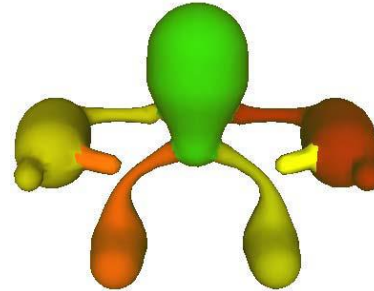
utilizando la misma cantidad autovectores k que el número de clusters y definiendo la métrica en términos de la distancia angular y la geodésica exclusivamente



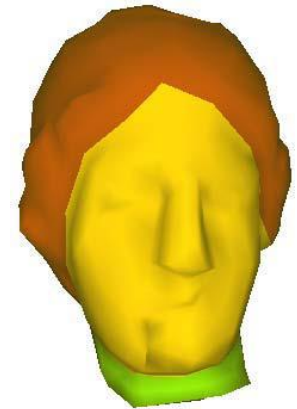
3 clusters



5 clusters

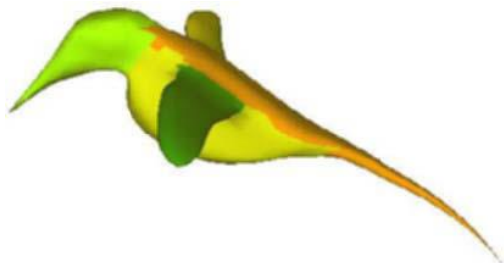


7 clusters

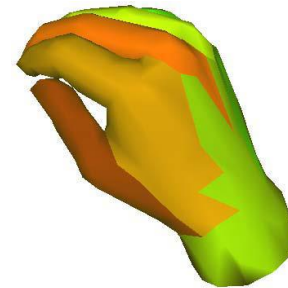


3 clusters

El algoritmo *no siempre* produce segmentaciones naturales



sobre-segmentación provocada por el efecto de la distancia angular



Las fronteras entre las clases pueden ser irregulares

Resultados (2)

Liu, Zhang 2004

Distancia angular + geodésica



Liu, et al 2009

Distancia angular + geodésica + volumétrica



se corrige el fenómeno de "leakage", se identifican mejor las partes

Liu, Jain, Zhang 2006

Distancia angular + geodésica, utilizando Nystrom basado En una muestra formada por los triángulos más alejados.



Lo que no vimos y lo que queda por hacer ...

Lo que no vimos ...

- Existen otros métodos de segmentación espectrales que **no** utilizan la matriz de afinidad sino una discretización del operador de Laplace-Beltrami , *Reuter et al 2009*, o de otros operadores, *Liu 2007*.
- Existen métodos de segmentación no espectrales para identificar formas específicas (cilindros, planos, esferas) , *Attene et al 2006*.

Lo que queda por hacer...

- Proponer algún método para seleccionar **automáticamente** los parámetros que se utilizan para definir la distancia global como combinación convexa de otras distancias.
- Definir **otras métricas** que permitan detectar bien las partes y que no dependan de parámetros.
- Proponer un método para determinar **automáticamente el número de clases**.
- Reducir el tiempo de cálculo implementando en paralelo el cálculo de la matriz de afinidad (o una muestra de ella).
- Estudiar la posibilidad de segmentar empleando directamente algunas columnas de la matriz de afinidad sin calcular los autovectores...
en esto estamos trabajando actualmente. Resultados en EMNO 2016!

Conclusiones

- La segmentación de superficies trianguladas es una tarea importante para la solución de otros problemas tales como: la parametrización, la edición, la introducción de texturas, la identificación de formas, etc.
- Existe una clase de métodos para segmentar superficies que se basa en:
 - la definición de una métrica para medir la distancia entre dos caras.
 - la construcción de una matriz de afinidad W entre las caras.
 - el cálculo de un número relativamente pequeño de autovectores de W .
 - la aplicación de un método de agrupamiento.
- Los resultados obtenidos para esta clase de métodos dependen de:
 - la métrica definida.
 - el número de autovectores calculados y su precisión.

Referencias básicas

- R. Liu, H. Zhang, Segmentation of 3D Meshes through Spectral Clustering, Pacific Graphics 2004.
- R. Liu, V. Jain, H. Zhang, Subsampling for efficient spectral mesh processing. In Proc. of Computer Graphics International, 2006, 172-184.
- H. Zhang, O. Van Kaick, R. Dyer, Spectral mesh processing, Computer Graphics Forum, Vol. 29, pp 1865-1894, 2010.
- Liu, R., Zhang, H., Shamir, A. and D. Cohen-Or, A Part-aware Surface Metric for Shape Analysis. EUROGRAPHICS 2009, 28(2), 397-406, 2009.
- M. Reuter, S. Biasotti, D. Giorgi, G. Patane and M. Spagnuolo, Discrete Laplace-Beltrami Operators for Shape Analysis and Segmentation. SMI'09, Computers and Graphics 33(3):381-390, 2009.
- M. Attene, B. Falcidieno, M. Spagnolo, Hierarchical mesh segmentation based on fitting primitives. The Visual Computer 22, 181-193, 2006.

Muchas gracias !!

